КВАНТ
ЖУРНАЛ

1983

1 - 12

НОМЕР
1

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

КВАНТ **1** 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука" Главная редакция Физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	К читателям	To our readers
3	*Б. В. Гнеденко.* Математика и производство	*B. V. Gnedenko.* Mathematics and industry
7	*И. К. Кикоин.* Он прожил счастливую жизнь	*I. K. Kikoin.* He lived a happy life
12	*М. И. Каганов.* Выдающийся физик-теоретик XX века	*M. I. Kaganov.* An outstanding 20-th century theoretical physicist
17	*Л. Г. Асламазов.* Меандры рек	*L. G. Aslamasov.* Meandering rivers
	Математический кружок	**Mathematics circle**
22	*В. М. Тихомиров.* Об одной олимпиадной задаче	*V. M. Tikhomirov.* About an olympiad problem
	Новости науки	**Science news**
26	Самый далекий квазар	The furthest quazar
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
27	*С. Л. Гаврилов.* Что такое стробоскоп	*S. L. Gavrilov.* What is a stroboscope
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
30	*Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер.* Арифметика и принципы подсчета	*N. B. Vassiliev, V. L. Gutenmakher.* Arithmetic and principles of counting
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
36	Задачи	Problems
37	*Я. А. Смородинский.* Пирамидки и куб	*Ya. A. Smorodinski.* Pyramids and cubes
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
39	Задачи М781—М785; Ф793—Ф797	Problems M781—M785; P793—P797
42	Решения задач М759—М761, М763, М764; Ф778—Ф782	Solutions M759—M761, M763, M764; P778—P782
	Искусство программирования	**The art of programming**
50	Стандартные приемы программирования. Урок 4	Standart programming methods. Lesson 4
	Информация	**Information**
52	Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	Entrance requirements to the All-Union mathematics correspondence school
53	Новый прием на заочное отделение Малого мехмата	Entrance requirements to the correspondence «Maly mechmat» school
54	Заочная физико-техническая школа при МИСиСе	The MISIS physico-technological correspondence school
55	**Практикум абитуриента**	**College applicant's section**
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(21, 49)*	**Miscellaneous** *(21, 49)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Пять задач о ферзях *(3-я с. обложки)*	Five Queen problems *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1983

К читателям

Дорогие читатели! Перед вами научно-популярный физико-математический журнал для школьников. Ежемесячно он будет приносить в ваш дом порцию новых знаний.

Много интересного и полезного узнаете, вы читая наш журнал. Здесь будут статьи об открытиях и нерешенных проблемах, об удивительных достижениях науки и ее практических применениях. Мы расскажем вам, как фундаментальные законы природы проявляются в простых и очевидных явлениях, в вещах обыденных и повседневных.

В «Кванте» несколько разделов. В начале журнала публикуются статьи крупных ученых по различным проблемам физико-математических наук. Раздел «Новости науки» содержит небольшие заметки о новейших достижениях науки и ее приложениях. В Лаборатории «Кванта» описываются опыты, которые можно выполнить самостоятельно. Этот раздел должен помочь читателю развить наблюдательность, научиться изготовлять простые приборы, экспериментировать. В «Математическом кружке» публикуются циклы задач, объединенных единой темой или общими методами решения. Материалы этого раздела могут быть полезны как для самообразования, так и для работы школьного кружка.

В разделе Школа в «Кванте» помещаются статьи, связанные со школьной программой, разъясняющие и углубляющие наиболее трудные для понимания вопросы школьного курса. Если вы хотите получать задания для регулярных занятий по школьной программе, мы рекомендуем вам обратиться в одну из заочных школ, информацию о которых регулярно помещает наш журнал. Тот, кто собирается поступать в вуз, много полезного найдет в разделе «Практикум абитуриента», где публикуются варианты письменных экзаменов и задачи, предлагавшиеся на устных вступительных экзаменах. Раздел «Искусство программирования» предназначен для тех, кто интересуется современными ЭВМ и хочет научиться на них работать. Под рубрикой «Квант» для младших школьников» публикуются занимательные задачи и статьи, которые, как правило, оказываются интересными и для старшеклассников. Раздел «Информация» содержит материалы о внеклассной работе школьников: олимпиадах, летних естественнонаучных школах, научных обществах учащихся, физико-математических праздниках и т. д.

Особое место в журнале занимает «Задачник «Кванта». В нем предлагаются задачи, решение которых требует умения мыслить самостоятельно, творчески. Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги этого конкурса подводятся в декабре. Победители — школьники, приславшие наиболее интересные и полные решения, — получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников наравне с победителями областных олимпиад.

Желаем вам, дорогие читатели, удачи на трудном и прекрасном пути познания!

Математика и производство

Академик АН УССР
Б. В. ГНЕДЕНКО

Назначение каждой науки состоит в поиске истины, разработке методов исследования, а также в использовании полученных знаний для решения задач практики. Это относится ко всем наукам, в том числе и к математике. Во все времена математика с честью выполняла обязанности верного помощника практики в самых разнообразных ее проявлениях. Первоначально круг применений математики был довольно ограничен — использование арифметики при взаимных расчетах, использование геометрии при определении расстояний, вычислении объемов и площадей. Еще в древнем мире математика стала использоваться для исследования астрономических явлений — движения светил, затмений Луны и Солнца. Позднее, когда человечество решилось выйти в открытое море, появились интересные и сложные проблемы ориентации в пространстве без видимых земных ориентиров. Возникли новые задачи прикладной математики, которые служили предметом исследований выдающихся математиков XVIII и XIX столетий.

Существенно новый период развития применений математики начался в связи с созданием элементов математического анализа в XVII веке. Конечно, влияние практики на появление новых понятий математики, связанных с *движением*, приведших к созданию дифференциального и интегрального исчислений, а позднее и теории дифференциальных уравнений, совершенно исключительно. А именно: изучение движения было

вызвано, с одной стороны, развитием *мореплавания*, а с другой — появлением *артиллерии* и необходимостью изучения траектории снаряда. Недаром Ф. Энгельс писал, что «лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы, движение».

На базе математического анализа в XVIII веке были созданы основы теоретической (или, как тогда говорили, аналитический) механики. Движение системы материальных точек и твердого тела было описано системой дифференциальных уравнений. Эти уравнения позволяли, зная силы, действующие на отдельные детали машин, определять, как они будут двигаться. Теоретическая механика стала тем математическим аппаратом, который позволял рассчитывать работу машин еще до того, как они были выполнены в металле.

В современном производстве математические методы исключительно широко используются Прежде всего, до ее производства, всякая техническая система — машина, прибор, аппарат и т. д.— должна быть *спроектирована*; нужно рассчитать состояние ее узлов при механических, тепловых, электрических и иных воздействиях. Это — большая и кропотливая работа, часто далеко не трафаретного характера. Далее, эти узлы необходимо рассчитать на *надежность в работе*, поскольку недостаточно надежное оборудование будет за себя мстить в процессе эксплуатации. Сейчас достаточно далеко продвинуто развитие теории надежности, и математические методы в ней занимают серьезное место.

Конструкция создана и проверена, но ее, как правило, следует изготовить в большом числе экземпляров. Для этого следует организовать производство так, чтобы все узлы и детали производились в нужном количестве и надлежащего *качества*. Кроме того, от производства требуется так организовать технологический процесс, чтобы узлы не нуждались в непроизводительной перевозке или переноске. Следует так рассчитать расположение цехов, а в цехах станков, чтобы избежать излишней транспортировки.

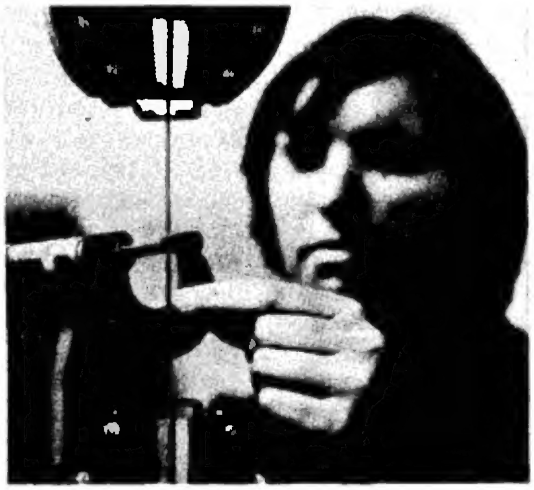
Мы приступили к производственному процессу. Нам следует организовать его так, чтобы в процессе изготовления своевременно замечать появление изделия недостаточно высокого качества (не говоря уже о браке). Иными словами, мы должны научиться *управлять качеством в процессе производства*. Это очень большая и важная задача, особенно теперь, когда предприятия изготовляют свою продукцию в десятках тысяч и даже миллионов экземплярах.

Изготовление недостаточно качественной (а значит, и недостаточно надежной) продукции оборачивается для общества огромными потерями на частые ремонты, на снижение производительности оборудования, на необходимость изготовления большого числа запасных частей и на привлечение рабочей силы не на изготовление новых изделий, а на ремонт испортившихся изготовленных. Подсчет потерь от снижения качества также требует математических расчетов, зачастую не сводящихся к чисто арифметическим. Для этого приходится создавать математические модели, собирать и обрабатывать данные эксплуатации, оценивать целесообразность повышения качества тех или иных узлов

Смена одного типа изделий на другой также требует математических средств, поскольку необходимо сравнить надежность новых изделий с надежностью ранее выпускавшихся, экономичность в изготовлении и эксплуатации, а также экономию в материалах. Нередко новые конструкции, особенно на первых порах, оказываются более дорогими. Однако если их качество выше, а надежность превышает надежность старых изделий, то выпуск такой продукции оправдан. Тем более, что когда технологический процесс устанавливается и налаживается, то и стоимость, как правило, снижается.

В последние годы в связи с увеличением выпуска продукции, усложнением технологических процессов и усложнением самой продукции выявилась необходимость рационального управления производственным процессом. Управление многих производств «вручную» оказывается невозможным. Так, при протяжке стальной проволоки, она перемещается со скоростью экспресса. Подметить с помощью глаза наметившиеся дефекты протяжки попросту невозможно. Физиологические возможности оператора или контролера оказываются для этого недостаточными. Что же делать? Решение найдено в *составлении математических моделей производственного процесса*, в которые включены подмодели, учитывающие то или иное изменение условий производства (перепады температур, наличие вибраций, повышенной влажности и т. д.). Без математической модели процесса передать управление автоматическому устройству невозможно, поскольку автомат не понимает указаний качественного характера — делай лучше, обрабатывай точнее, приведи температуру нагрева в соответствие с необходимостью. Для того чтобы автомат хорошо управлял, он должен в надлежащие моменты получать информацию от специальных датчиков о состоянии параметров производственного процесса и в соответствии с моделью выбирать необходимое управление.

Поскольку все *задачи управления* имеют много общего, нет нужды для каждой задачи разрабатывать особую теорию. Конечно, может случиться, что для частных задач управления можно найти более простое решение, но это не снимает вопроса построения общей теории. Такая теория была предложена в нашей стране академиком Л. С. Понтрягиным, а в США — Р. Беллманом. Теория Понтрягина получила название оптимального управления, а Беллмана — динамического программирования.



Исходя из *задачи разладки оборудования,* А. Н. Колмогоров и его ученик А. Н. Ширяев начали разработку теории управления случайными процессами, превратившуюся в настоящее время в одно из центральных направлений развития теории вероятностей. Задача ставится так: в результате поступающих на оборудование воздействий производственный процесс постепенно отходит от нормального уровня. Это уклонение может достигнуть такого уровня, что дальнейшее производство становится нецелесообразным, поскольку разладка оборудования стала слишком большой. Разрабатываются методы, которые позволили бы своевременно заметить момент, когда разладка еще не наступила, но появилась опасность, что она может вскоре наступить. Этой задаче можно придать множество иных прикладных формулировок. В частности, с этой задачей и теорией Колмогорова непосредственно связаны вопросы управления качеством промышленной продукции.

Продукция уже изготовлена. Как оценить ее качество в целом? При ручном производстве этот вопрос не возникал, поскольку каждое изделие обладало своим особым качеством и оно проверялось. Теперь же на станке-автомате за короткие сроки выпускаются многие сотни изделий. Зачастую проверка отнимает несравненно больше времени, чем изготовление. Производству нецелесообразно умножать количество контролеров, которые ничего не производят и заняты лишь проверкой изготовленных изделий. Для некоторых типов изделий проверка качества каждого изготовленного изделия привела бы к такой картине: на каждого производящего рабочего нужно иметь 10—15 контролеров, и все-таки нет полной уверенности в точности оценки качества произведенной партии. Но этого еще мало. Существуют такие типы производства (скажем, фотопленки, спички), в которых нельзя проверять качество каждого изготовленного изделия, поскольку проверка приводит изделие в непригодное для дальнейшего использования состояние. Наконец, на сплошную проверку изготовленных изделий необходимо затратить большие средства и иметь огромные стенды для испытаний.

Необходим другой достаточно надежный способ оценки качества, который не обладал бы указанными недостатками. Такой метод предложен, он получил наименование *статистического приемочного контроля.* Он основан на законах теории вероятностей и в настоящее время широко используется в промышленности.

Мы отметим еще один совершенно особый и современный вид продукции, при изготовлении которой математические методы играют особенно большую роль. Я имею в виду *электронные вычислительные и управляющие машины,* а также промышленные роботы. В своем докладе на XXVI съезде КПСС Леонид Ильич Брежнев сказал: «Поистине революционные возможности открывают создание и внедрение миниатюрных электронных управляющих машин, промышленных роботов. Они должны получить самое широкое применение». Они уже изготовляются в десятках тысяч экземпляров и впоследствии, когда *микропроцессоры* будут еще дешевле, чем теперь, потребность в них будет составлять ежегодно миллионы штук.

Выяснилось, что математические методы для изготовления ЭВМ нужны во всех тех аспектах, которые уже были отмечены. Кроме того, следует обратить внимание на еще два очень существенных момента. Во-первых, само проектирование ЭВМ не может быть осуществлено без математика, поскольку никто иной не может сказать, какие операции и как часто приходится осуществлять при решении вычислительных и логических задач. В этом производстве роль математика особенно велика на всех этапах — от проектирования, изготовления, испытания до установки и использования. Во-вторых, если раньше основные средства при приобретении ЭВМ затрачивались на само это изделие, то теперь стоимость собственно машины составляет не более 40%. Основную цену

(Окончание см. на с. 11)

Он прожил счастливую жизнь

(к 80-летию со дня рождения И. В. Курчатова)

Академик
И. К. КИКОИН

В истории физики известны имена выдающихся ученых, которые своими трудами более или менее значительно опередили свой век. Так, например, Ломоносов почти на столетие раньше «срока» сформулировал идею молекулярно-кинетической теории. То же можно сказать и о Циолковском, который примерно на полстолетия опередил эру ракетной техники. Заслуженное признание и слава этих ученых пришли для них слишком поздно. Современные этим ученым наука и техника не были подготовлены для восприятия их идей. И это обстоятельство в некотором смысле было бедой для таких, безусловно великих, ученых: они не были признаны современниками. Истинно счастлив ученый, который идет «в ногу» со временем.

Академик Игорь Васильевич Курчатов был именно счастливым ученым. Он неизменно интуитивно чувствовал развитие современной ему физики. Он всегда занимался наиболее животрепещущими вопросами физики. Так, в середине 20-х годов электрические свойства диэлектриков были одной из актуальных проблем физики. Именно к этому времени относятся работы Курчатова в области электрической прочности диэлектрических кристаллов, которые затем привели его к замечательным исследованиям сегнетоэлектричества. Здесь Курчатову, можно сказать, вдвойне повезло. Его исследования явления сегнетоэлектричества совпали по времени с появлением квантовой теории ферромагнетизма, электрическим аналогом которого и является сегнетоэлектричество (его часто называют ферроэлектричеством). Таким образом, работы Курчатова сразу оказались в русле развития двух актуальных проблем современной ему физики твердого тела: физики диэлектриков и физики магнетизма.

С 30-х годов, как известно, началось бурное развитие ядерной физики, которое сопровождалось каскадом крупнейших открытий. Это — открытие нейтрона, позитрона, искусственной радиоактивности и т. д. Курчатов решительно переключает свою лабораторию на работы в этой многообещающей области физики.

В это время в Ленинградском физико-техническом институте (ЛФТИ), где работал Курчатов, практически не было «культуры» физики атомного ядра, кроме небольшой лаборатории Д. В. Скобельцына, который в основном занимался космическими лучами.

Курчатову с его группой приходилось все начинать практически на пустом месте. В это время Игорь Васильевич целыми днями просиживал в библиотеке и изучал литературу. «Литературный» период длился сравнительно недолго. Очень скоро в лаборатории Курчатова начались экспериментальные работы по ядерной физике. Довольно быстро определилось основное направление его интересов: искусственная радиоактивность при облучении нейтронами. Тогда можно было видеть типичную картину: Игорь Васильевич мчится из одного конца коридора в другой с облученным образцом в руке для исследования очередного короткоживущего ядра.

В те времена в стране не было еще ни одного действующего циклотрона и только в Радиевом институте заканчивалось строительство первого циклотрона с вертикально расположенными метровыми полюсами магнита. Этот циклотрон долго не могли наладить. Практически все руководство работами по налаживанию циклотрона взял на себя Игорь Васильевич, и довольно быстро циклотрон был запущен.

Работы в лаборатории Курчатова велись с максимальной интенсивностью. Для химической идентификации искусственных ядер он привлек своего брата Бориса Васильевича Курчатова, и очень скоро были налажены радиохимические исследования с индикаторными (то есть ничтожно малыми) количествами вещества. Словом, в течение полутора лет работы по ядерной физике в лаборатории Курчатова достигли, как принято говорить, мирового уровня.

Вскоре после начала работ вышла монография И. В. Курчатова под названием «Расщепление атомного ядра» (1935 г.).

Работы по ядерной физике непрерывно велись до самой войны. Правда, начиная с 1937 года я уже не мог за ними следить, потому что уехал в Свердловск и практически не встречался с Игорем Васильевичем. И только в конце 1942 года Курчатов неожиданно появился в Свердловске, зашел ко мне в лабораторию и поинтересовался, чем я занимаюсь. Внешне его посещение тогда ни на чем не сказалось, но позже стало ясно, что он имел поручение прозондировать возможность привлечь меня к новой тематике. Действительно, в начале 1943 года я был вызван в Москву, где встретился с И. В. Курчатовым и А. И. Алихановым у С. В. Кафтанова. Мне сообщили, что имеется поручение правительства заняться вопросами практического использования деления урана. Едва ли нужно упоминать, что после открытия деления урана это был самый животрепещущий вопрос, который интересовал всех физиков. На ядерной конференции 1940 года в Москве проблема деления урана обсуждалась весьма оживленно при активном участии Курчатова. По его инициативе была составлена записка правительству, в которой указывалось на важность этой проблемы и на необходимость организации широких исследований в этой области.

В начале 1943 года организация работ по практическому использованию явления деления урана была оформлена правительственным актом. Началась совместная деятельность с И. В. Курчатовым уже на новом поприще, в новой роли. Понятно, что более актуальной физической проблемы в то время нельзя было себе представить. Конечно, проблема защиты кораблей от магнитных мин, которой занимался тогда Игорь Васильевич, тоже была очень актуальна. Известно, что работы А. П. Александрова и И. В. Курчатова в этой области позволили спасти жизнь многим тысячам моряков. Но проблема урана не терпела никаких отлагательств. Так началась напряженнейшая эпопея решения практической задачи создания атомного оружия. Первое время непосредственно работами занималось считанное число людей. Вскоре Игорь Васильевич привлек крупных теоретиков (Я. Б. Зельдовича, И. Я. Померанчука и др.). Довольно быстро было произведено разделение «сфер влияния». Проблемы, не связанные непосредственно с ядерной физикой, были поручены мне: как выразился Курчатов, «ты у нас специалист по пузырькам» (он в шутку называл все работы, не связанные с ядром, пузырьковой физикой). Вопросами ядерной физики занимался он сам и А. И. Алиханов.

Начался бурный организационный период, когда нужно было собирать людей, доставать помещения, оборудование. Временно нам было предоставлено помещение в Пыжевском переулке и в Институте неорганической химии на Калужской улице. И снова Игоря Васильевича можно было видеть бегущим с облученными мишенями из одного конца коридора в другой. Казалось, мы снова в ЛФТИ. Наряду с этой работой Курчатов выполнял огромную организаторскую работу. Засиживались мы на Пыжевском до поздней ночи.

Однажды было сказано, что нужно готовить доклады о программе работ с указанием конечных сроков практического решения проблемы. Мы засели за составление такого доклада — каждый по своей части. И в один из вечеров предстали перед правительством. Докладывали тоже каждый по своей части. В каждом докладе содержался пункт, указывающий сроки получения практических результатов. Как известно, эти сроки были выдержаны.

В это время Игорь Васильевич организовал работы не только по созданию института. Теоретики и экспериментаторы взаимно обучались основам будущей ядерной техники. Коллективно обсуждались основные проблемы, связанные с практической задачей, которая была поставлена. Все, особенно Курчатов, чувствовали огромную ответственность, возложенную на коллектив. Большое беспокойство вызывал вопрос, не обгонит ли нас фашистская Германия. Не было никакой уверенности, что Германия не занимается усиленно проблемой урана. Было ясно, что если в 1941 году все публикации, относящиеся к делению урана, вдруг прекратились, то все, в том числе и немцы, должны были понимать, что начались работы по использованию этого явления для важных целей. Нужно было принять во внимание и то, что в печати появился ряд статей с оценкой того действия, которое может вызвать цепная ядерная реакция, если она осуществится.

В лаборатории поначалу эксперименты осуществлялись в очень малом масштабе — не было места. Но теоретические и расчетно-оценочные работы велись с чрезвычайной интенсивностью. После наших докладов о перспективах решения проблемы процесс организации лаборатории резко ускорился. Довольно быстро было выделено новое помещение и приведено в порядок старое. К концу 1944 года мы уже имели достаточно приличные помещения для работы.

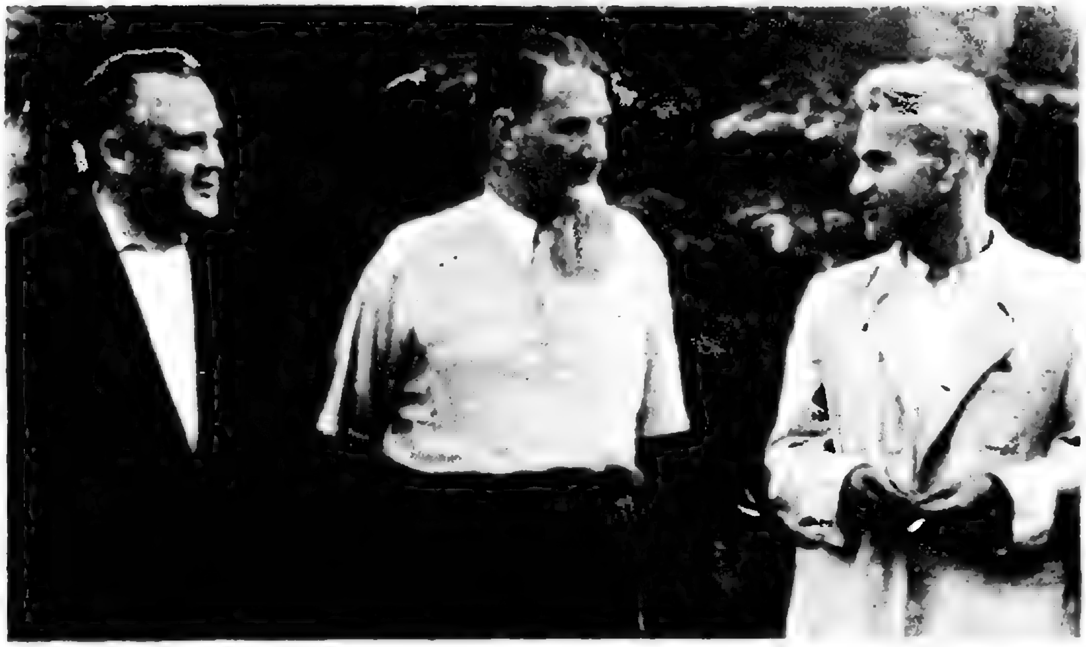
Научная и организационная деятельность Игоря Васильевича была предельно напряженной. Тогда он руководил работами по измерению основных ядерных констант урана. Необходимо было получить с большой точностью данные о количестве нейтронов, освобождающихся в одном акте деления ядра урана, определить энергетические спектры нейтронов и т. п.

Курчатов «озадачивает» (одно из любимых его выражений) теоретиков: необходимо развить теорию цепных ядерных реакций. Как известно, наши теоретики с большим успехом справились с этой задачей. Курчатов непосредственно занялся строительством первого атомного реактора. Он целиком был захвачен этим делом и сам руководил проектными, конструкторскими и научными разработками. Он сумел привлечь к проблеме большое количество научных институтов и ученых самых разных специальностей. Его интересовал не только сам реактор. Он понимал, что предстоят большие химические исследования по выделению плутония*). Я помню, однажды, когда мы были в Кремле, Игорь Васильевич демонстрировал первую стеклянную ампулочку с несколькими микрограммами плутония, который был получен на нашем первом реакторе, находящемся в «здании» монтажных мастерских.

Вскоре Курчатов выехал на площадку, где началось сооружение промышленного реактора, и в Москве бывал наездом, как и другие руководители.

---

*) Плутоний — трансурановый элемент, занимающий 94-ю клетку периодической системы Менделеева. Пригоден для создания атомного оружия и мирного использования атомной энергии.



С. П. Королев, И. В. Курчатов, М. В. Келдыш (Москва, 1959 год).

Наконец, наступил день, когда все было готово для испытания атомного оружия. Непосредственное руководство первым взрывом осуществлял Курчатов. И несмотря на то, что на месте испытания присутствовали ответственные члены правительства, было сказано, что руководство всеми работами поручается Курчатову. И все работы были подчинены лично ему. Доверие правительства Игорю Васильевичу было неограниченным.

Игорь Васильевич быстро понял, что актуальнейшая проблема послевоенного времени — мирное использование атома в энергетике. И поэтому не удивительно, что первая атомная электростанция была создана под его непосредственным руководством. Курчатов понимал также, что для дальнейшего развития атомной науки требуется обеспечить ее тылы, создать современные установки для изучения физики элементарных частиц. И по его инициативе, также весьма своевременно, началась организация Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) под Москвой в Дубне. Можно сказать, что Дубна — это детище Курчатова, хотя физика элементарных частиц была далека от личных научных интересов ученого.

Едва ли нужно доказывать, насколько своевременно были начаты работы по управляемым термоядерным реакциям. Тогда еще не было известно, что в других странах тоже ведутся такие работы. Это было начало 1952 года. Курчатов внимательно следил за ходом работ, хотя первое время непосредственного участия в них не принимал. Не менее своевременно он оценил полученные при исследованиях результаты и понял, что первоначальные надежды на быстрое решение проблемы оказались слишком оптимистичными. Он понял, что необходима серьезная систематическая работа в этой области, и опять же своевременно оценил целесообразность рассекречивания этих работ. Как известно, в 1956 году он в своем докладе в Англии изложил наши результаты по управляемому термоядерному синтезу.

Помню, с какой тщательностью Курчатов готовил свой доклад: оттачивал каждую фразу, обсуждал, исправлял, переделывал. Доклад в Англии произвел сенсацию. Только после этого стало известно, что аналогичные работы велись и в США, и в Англии. С тех пор начался период широкого международного сотрудничества в достижении управляемой термоядерной реакции. Личные интересы Курчатова также переместились в эту увлекательную область. В последние годы он сам руководил работами по термоядерному синтезу.

С самого начала организации Института атомной энергии (ИАЭ) Игоря Васильевича беспокоил вопрос, сумеем ли мы наладить работу так, как она была организована А. Ф. Иоффе в ЛФТИ, где в основе лежал беспредельный энтузиазм сотрудников. Все мы чувствовали себя ответственными перед Иоффе, авторитет которого был чрезвычайно высок. Это Курчатов понимал и хотел обеспечить такую же интенсивную работу у себя в институте. Он не раз высказывался в том духе, что нам придется надеяться не на личное обаяние руководителей, а на важность и грандиозность решаемой проблемы. В действительности его личный авторитет был велик. Что касается обаяния, то ему тоже было его не занимать. Он сам в этом не был убежден, но когда ему на это указывали, ухмылялся и говорил: «Посмотрим». Опыт показал, что и личное обаяние Курчатова, и его большой научный авторитет, наряду с грандиозностью проблемы, которая была поручена институту, действительно обеспечили высокую интенсивность и производительность научного труда. Сотрудники ИАЭ тоже работали, не считаясь со временем, не за страх, а за совесть.

Термоядерный синтез — это лебединая песня Курчатова. Последние дни он проводил непосредственно в лаборатории, за пультом, за рабочим столом, на термоядерных установках нашего института и был полон надежд, что в самое ближайшее время термоядерный синтез будет практически осуществлен.

Можно утверждать, что Курчатов прожил счастливую жизнь. Игорь Васильевич занимался самыми актуальными, самыми животрепещущими, самыми многообещающими вопросами науки. Он верил в беспредельную мощь науки и заразил этой верой своих сотрудников. На этом и сейчас зиждутся успехи атомной науки в нашей стране.

Математика и производство

(Начало см. на с. 3)

имеют *программы — математическое обеспечение,* без которого машина неработоспособна. Таким образом, сама математика превратилась теперь в производственный продукт!

Очень интересно отметить, как менялось представление о том, какие разделы математики имеют значение для производства. Первоначально лишь элементарные арифметика, геометрия и математический анализ использовались для этих целей. Но постепенно оказывалось, что новые вопросы требуют и новых математических средств исследования. Так, появление авиации ввело в число прикладных дисциплин теорию функций комплексного переменного. Управление производством и программирование для ЭВМ сделало математическую логику непосредственной производительной силой. Учет молекулярных и субмолекулярных явлений в электронных схемах нуждается в широком использовании методов и результатов теории вероятностей и теории случайных процессов. Оптимизация производства привела к созданию новых дисциплин (линейное и выпуклое программирование, оптимальное управление и др.). Вычислительные методы привели к широкому использованию алгебры, функционального анализа, теории вероятностей. В сущности вся математика, даже в самых абстрактных ее частях, оказалась необходимой для практики, в том числе и для организации производства.

Для применения математики не видно границ. По мере развития техники и производства будет расширяться и углубляться роль и место математических методов в практической жизни.

Выдающийся физик-теоретик XX века

(к 75-летию со дня рождения Л. Д. Ландау)

Доктор физико-математических наук
М. И. КАГАНОВ

XX век — век революционных преобразований в теоретической физике — войдет в историю созданием релятивистской механики (теории относительности) и квантовой (волновой) механики. Он богат блестящими именами ученых — творцов новой физики. Одним из таких творцов был Лев Давидович Ландау. Он влиял на развитие теоретической физики и своими личными научными результатами, и созданием активно работающей школы физиков-теоретиков — «Школы Ландау» (он был поистине выдающимся учителем), и «Курсом теоретической физики», начатым в 1937 году и завершенным (Е. М. Лифшицем и Л. П. Питаевским) в 1979 году. Чем бы Л. Д. Ландау не занимался, в любой его деятельности ощущался особый, присущий ему стиль. В собственных его работах — ясная постановка задачи, математическое изящество, краткость решения; в «Курсе» — оптимальный путь от основ теории к решению конкретных задач; в его изложении сложные вопросы обычно превращаются в простые, иллюзорные трудности рассеиваются.

Невозможно в короткой статье сколько-нибудь полно охарактеризовать деятельность Л. Д. Ландау. Придется ограничиться короткими заметками, в большой мере основанными на личных воспоминаниях автора.

* * *

На книжной полке почти у любого физика — и преподавателя, и исследователя — стоят тома «Курса теоретической физики» Ландау и Лифшица. У счастливцев — все десять. И стоят не для украшения. При подготовке к лекции или в процессе непосредственной работы к ним приходится бесконечно обращаться. Имя Ландау вошло во многие научные термины: затухание Ландау и уровни Ландау, диамагнетизм Ландау и уравнения Ландау — Лифшица, критерий сверхтекучести Ландау, теория фазовых переходов второго рода Ландау, особенности Ландау, теория Ферми-жидкости Ландау и уравнение Гинзбурга — Ландау... А ведь Ландау не производил физических измерений, не работал с приборами в лаборатории, а только, как он сам говорил, «писал на бумаге формулы». Он был одним из великих физиков-теоретиков XX столетия.

Способности Ландау проявились очень рано. Он говорил, что не помнит себя не умеющим дифференцировать и интегрировать. Четырнадцати лет (в 1922 году) он поступил в Бакинский университет, где учился одновременно на двух факультетах — физико-математическом и химическом; семнадцати лет закончил физическое отделение Ленинградского университета, куда перевелся в 1924 году (химическое образование он не стал продолжать); восемнадцати лет опубликовал свою первую работу — теорию интенсивности в спектрах двухатомных молекул (одна под номером 1 входит в «Собрание трудов» Л. Д. Ландау). Потом — аспирантура в Ленинградском физико-техническом институте; в 1929—30 годах — полуторагодичная поездка за границу: в Данию, в Англию и в Швейцарию. «Наиболее важным для него было пребывание в Копенгагене, где в Институте теоретической физики у великого Нильса Бора собирались физики-теоретики со всей Европы и на руководимых Бором знаменитых семинарах обсуждались все основные вопросы теоретической физики того времени. Эта научная атмосфера, усиливаемая обаянием самой личности Бора, оказала решающее влияние на физическое мировоззрение Льва Давидовича, и в дальнейшем он всегда считал себя учеником Нильса Бора. Еще два раза он посетил Копенгаген: в 1933 и 1934 гг.»*)

Трижды Бор приезжал в Советский Союз. Встречи и долгие беседы с Ландау входили в обязательную программу пребывания Бора в нашей стране. Последний раз Бор и Ландау встречались в 1961 году в Москве. Они приняли участие в традиционном празднике физиков Московского университета «Дне Архимеда».

В 1932 году Ландау переезжает в Харьков. Здесь он — двадцатичетырехлетний — возглавляет теоретический отдел нового Украинского физико-технического института и одновременно заведует кафедрой теоретической физики на физико-механическом факультете Харьковского механико-машиностроительного института, а с 1935 года заведует кафедрой общей физики в Харьковском университете. С весны 1937 года Ландау в Москве — заведует теоретическим отделом Института физических проблем, незадолго до этого созданного П. Л. Капицей. Здесь он оставался до конца жизни. Институт физических проблем и фигурально, и фактически многие годы был его родным домом. На одном из зданий института — мемориальная доска: «Здесь с 1937 года по 1968 год жил и работал крупнейший физик академик Лев Давидович Ландау». Окна сегодняшнего теоретического отдела института, между которыми помещена мемориальная доска, соседствуют с окнами его квартиры. Здесь написаны (совместно с Е. М. Лифшицем) основные книги «Курса теоретической физики». В Институте физических проблем в 1941 году построена теория сверхтекучести гелия — исключительно интересного явления, открытого в 1938 году П. Л. Капицей.

Однажды (в конце пятидесятых годов) я спросил у Льва Давидовича: «Какую свою работу Вы считаете лучшей?» Ответ: «Теорию сверхтекучести гелия. Ее до сих пор многие не понимают».

Научное творчество Л. Д. Ландау беспрецедентно на своей широте. Оно охватывает всю теоретическую физику от гидродинамики до квантовой теории поля. Наш век — век специализации. Нет ученых, одинаково хорошо разбирающихся во всей физике. Ландау, по-видимому, был последним физиком-энциклопедистом. Его учениками считают себя и теоретики, занимающиеся физикой твердого тела, и астрофизики, и специалисты по элементарным частицам. Их научные пути разошлись уже при жизни Ландау, но он — их Учитель — объединял всех. Все они каждый четверг в 11 часов утра собирались в Институте физических проблем на знаменитом Ландауском семинаре. Не только москвичи, но и харьковчане, ленинградцы, физики-теоретики из Киева, Тбилиси...

Семинар, которым руководил Ландау, войдет в историю теоретической физики. На его заседаниях создавалось, строилось то, что называют «школой Ландау». Здесь можно было выступить с работой из лю-

---

*) Из статьи Е. М. Лифшица, напечатанной в качестве приложения в Собрании трудов Л. Д. Ландау, т. II (М., «Наука», 1969).

Институт физических проблем. Четверг. Семинар Ландау.

бой области теоретической физики. И не просто выступить, но и получить квалифицированный совет либо во время доклада, либо до — при предварительном обсуждении с Ландау. На семинаре царила полная демократичность. Лев Давидович сидел спиной к аудитории, в первом ряду, и хотя докладчик, как правило, обращался непосредственно к нему, он не был Председателем, Куратором — никакой торжественности, важности (в день пятидесятилетия Ландау А. И. Шальников назвал его «самым **не важным** человеком», какого он знал). Каждый мог прервать докладчика, требуя разъяснения или высказывая свое неодобрение. Этой возможностью пользовался и Ландау. Докладывать в такой обстановке, естественно, было трудно. Если выяснялась несостоятельность работы или докладчик не мог объяснить существа дела, он безжалостно лишался слова. Но надо помнить: причиной такой «жесткости» было бескомпромиссное отношение Ландау к науке. Правильность или неправильность результата не зависит от того, получен он близким другом или совершенно посторонним. Ландау нередко защищал докладчика от нападок слушателей. Часто можно было услышать: «Послушаем дальше, автор обычно бывает прав».

* * *

Теоретическая физика исследует природу методами математики. Ландау придавал большое значение умению физика-теоретика владеть математической техникой. Степень владения должна быть такой, чтобы математические затруднения не отвлекали от физических трудностей задачи, а преодоление математических трудностей не становилось бы самоцелью. «Начинать надо с математики, которая, как Вы знаете, является основой нашей науки... Имейте в виду, что под знанием математики мы понимаем не всяческие теоремы, а умение реально на практике интегрировать, решать в квадратурах обыкновенные дифференциальные уравнения и т. д.» Или: «...теоретику в первую голову необходимо знание математики. При этом нужны не всякие теоремы существования, на которые так щедры математики, а математическая техника, то есть умение решать конкретные математические задачи... В качестве метода изучения могу только подчеркнуть, что необходимо самому произвести все вычисления, а не предоставлять их авторам читаемых Вами книг». Это — цитаты из писем Л. Д. Ландау молодым людям, увлеченным теоретической физикой и обратившимся к Ландау с просьбой помочь разобраться, как овладеть основами науки. Лев Давидович всегда отвечал на подобные письма, если чувствовал искреннее желание автора письма серьезно заниматься наукой. Письма Л. Д. содержат не только точные советы и указания молодым корреспондентам, но и простые слова поддержки, столь важные в начале пути, шутливые, но весьма нужные замечания: «Иностранные языки, увы, необходимы. Не забывайте, что для усвоения их, несомненно, не нужно особых способностей, поскольку английским языком неплохо владеют и очень тупые англичане...» «Бояться меня не стоит — я вовсе не кусаюсь»,*) и тут же — приглашение звонить «лучше всего от 9.30 до 10.30 утра, когда я почти всегда дома, но можно и в любое другое время... Я проэкзаменую Вас и дам Вам программу для дальнейшего обучения».

Лев Давидович часто говорил о стимулах научного творчества. Молодой научный работник не должен ставить себя целью открытие новых законов. «Только не старайтесь решать никаких проблем. Надо просто разобраться, и решение проблемы приходит само». Понимание физики явления, приходящее в процессе ежедневной, казалось бы рутинной работы, доставляет радость и удовлетворение, окупающие бесконечное напряжение, требующееся для решения действительно интересной задачи.

Бор и Ландау в МГУ на «Дне Архимеда» (1961 год).

Все, кто общался с Л. Д., поражались его неослабевающему с годами интересу к разнообразным задачам, которые ставит и решает физика. Он разговаривал о науке с сотнями физиков. Они рассказывали ему о самых различных работах, различных по трудности, по глубине, по значительности, работах, относящихся к самым разным объектам — к твердым телам и к элементарным частицам, к звездам и к газам. Любая работа представляла для него интерес, если удовлетворяла простому принципу: работа должна разъяснять что-то непонятное. Бесконечно разъясняющимся и бесконечно ставящим новые загадки — таким воспринимал мир Ландау. У него по существу с детства появилось ощущение красоты науки о природе. «Он рассказывал позднее, как в то время (ему было тогда 16 лет) он был потрясен невероятной красотой общей теории относительности... Он рассказывал также об экстазе, в который привело его изучение статей Гейзенберга и Шредингера, ознаменовавших рождение новой квантовой механики... Они дали ему не только наслаждение истинной научной красотой, но и острое ощущение силы человеческого гения, величайшим триумфом которого является то, что человек способен понять вещи, которые он уже не в силах вообразить»*). Эту мысль (человек способен понять то, что не в силах вообразить!) он пронес через всю жизнь.

---

*) Нелишнее замечание: о Ландау ходила слава резкого, ироничного, остроумного, в каком-то смысле безжалостного собеседника. Не стесняясь, он говорил все, что думает о работе. Неверная работа могла быть названа чушью, патологией. На его кабинете в Харьковском институте висела табличка «Л. Д. Ландау. Осторожно — кусается!» Беспощадность критики полностью искупалась научной беспристрастностью, искренней радостью, когда кто-то получал нетривиальный, интересный результат, желанием помочь преодолеть трудности.

Занятость реальными научными задачами делала Ландау совершенно нечувствительным к модным увлечениям читательской аудитории: к снежному человеку, телепатии, летающим тарелкам и т. п. Подобные увлечения он считал суеверием и остро высмеивал. Его раздражали болтовня и верхоглядство, которые, как правило, сопровождали попытки решения «таинственных» проблем. Однажды, прочитав популярную статью о навигационном устройстве птиц, я попытался поговорить на эту тему с Ландау. Он довольно равнодушно отнесся к моим словам, сказав, что прежде чем рассуждать о правильности или неправильности тех или других гипотез, надо познакомиться с проблемой по существу, а не из вторых рук. Вскоре из журнала «Природа» я узнал, что результаты опытов, которые обсуждал автор популярной книги, опровергнуты.

Не нужно думать, что Ландау был «научным сухарем», целиком погруженным в теоретическую физику. Круг интересов Льва Давидовича вне физики был очень широк. Он очень любил и хорошо знал историю, часто поражал знакомством с подробностями исторических событий; его интересовали все виды искусства (правда, за исключением музыки), он очень много читал, знал на память и хорошо декламировал массу стихов. Друзья поддразнивали Ландау, говоря, что у него инфантильный вкус. Он любил Драйзера больше Хемингуэя. Ему нравились бытовые драмы в театре. Но... Когда Лев Давидович услышал впервые одно из наиболее глубоких философских стихотворений Пастернака — его «Гамлета» («Гул затих. Я вышел на подмостки. Прислонясь к дверному косяку, я ловлю в далеком отголоске, что случится на моем веку...»), он не мог с ним расстаться. Тут же вытащил записную книжку и аккуратным бисерным почерком переписал «Гамлета».

* * *

Если бы не ранняя смерть (в 1962 году Лев Давидович попал в автомобильную катастрофу, в борьбе за его жизнь принимали участие физики буквально всего мира; после этого он прожил еще шесть лет, но к научной работе так и не смог вернуться), Ландау можно было бы считать счастливым человеком. Он получил признание при жизни. Его любили и бесконечно уважали ученики. Он пользовался всеобщей популярностью. Его публичные выступления проходили в переполненных аудиториях и всегда сопровождались успехом.

Академик, лауреат Ленинской премии, трижды лауреат Государственных премий, Герой Социалистического Труда — так отметила его деятельность наша страна. Не было недостатка и в почетных наградах из других стран. В 1951 году он был избран членом Датской, а в 1956 году — Нидерландской академий наук. В 1959 году он стал членом Британского физического общества, а в 1960 году — иностранным членом Британского Королевского общества. В том же году он был избран в Национальную академию наук США и Американскую академию наук и искусств. В 1960 году Ландау была присуждена премия Ф. Лондона (США) и медаль имени Макса Планка (ФРГ) и, наконец, в 1962 году «за пионерские исследования в теории конденсированного состояния материи, в особенности жидкого гелия» — Нобелевская премия по физике.

Сделанное Ландау имеет непреходящее значение и останется навсегда в науке.

---

*) Е. М. Лифшиц. Приложение в Собрании трудов Л. Д. Ландау.

Меандры рек

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Видел ли кто-нибудь реку, текущую прямо, без изгибов? Какой-то участок реки, конечно, может быть прямым, но рек, текущих совсем без изгибов, не существует. Даже если река течет по равнине, она обычно «петляет», и часто изгибы рек повторяются с определенным периодом. А на изгибах один берег реки, как правило, крутой, а другой — пологий. Как объяснить эти особенности поведения рек?

Гидродинамика — раздел физики, изучающий движение жидкости,— в наше время очень развитая стройная наука. Но в применении к таким сложным естественным объектам, как реки, даже она не в состоянии объяснить все особенности их течения. И тем не менее на многие вопросы можно дать ответы.

Вопросом о причине образования извилин в руслах рек занимался Эйнштейн. В своем докладе «Причина образования извилин в руслах рек и так называемый закон Бэра», сделанном в 1926 году на заседании Прусской академии наук, Эйнштейн сравнил движение вращающейся воды в стакане и в руслах рек. Эта аналогия позволила объяснить тенденцию русел рек приобретать извилистую форму.

Попробуем разобраться в этом явлении хотя бы качественно. И начнем со стакана чая.

Как движутся чаинки в стакане

Возьмите стакан с чаем, хорошо размешайте чай ложкой, а затем выньте ее. Вода постепенно остановится, а чаинки соберутся в центре дна стакана. Что заставляет их «сбегаться» к центру? Чтобы ответить на этот вопрос, выясним сначала, какую форму принимает поверхность воды, вращающейся в стакане.

Из опыта видно, что поверхность жидкости искривляется. Легко понять, почему это происходит. Для того чтобы частички воды совершали вращательное движение, равнодействующая всех сил, действующих на каждую частичку, должна приводить к центростремительному ускорению.

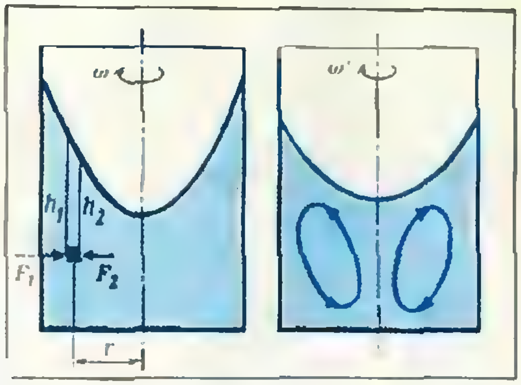


Рис. 1.

Выделим мысленно внутри жидкости на расстоянии r от оси вращения кубик массы Δm (на рисунке 1 такой кубик выделен синим цветом). При угловой скорости вращения ω центростремительное ускорение кубика равно $\omega^2 r$. Это ускорение создается разностью сил давления, действующих на боковые грани (левую и правую на рисунке 1) кубика. Следовательно,

$$\Delta m \cdot \omega^2 r = F_1 - F_2 = (p_1 - p_2) \cdot \Delta s, \quad (1)$$

где Δs — площадь боковой грани кубика. Давления p_1 и p_2 определяются расстояниями h_1 и h_2 до свободной поверхности жидкости —

$$p_1 = \varrho g h_1, \quad p_2 = \varrho g h_2, \quad (2)$$

где ϱ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения. Так как сила F_1 должна быть больше силы F_2, то, следовательно, и h_1 должно быть больше h_2, то есть свободная поверхность жидкости при вращении должна искривиться так, как показано на рисунке 1. Чем больше скорость вращения, тем сильнее искривляется поверхность.

Можно найти форму искривленной поверхности жидкости. Она оказывается параболоидом, то есть поверхностью, разрез которой — парабола. (Покажите это самостоятельно. Правильность своих рассуждений вы сможете проверить, посмотрев на с. 59).

Пока мы мешаем чай ложкой, мы поддерживаем вращение жидкости. Но если вынуть ложку из стакана, то вследствие трения между отдельными слоями жидкости (вязкости) и трения о стенки и дно стакана кинетическая энергия будет переходить в тепло, и жидкость постепенно остановится.

По мере уменьшения частоты вращения поверхность жидкости выпрямляется. При этом внутри жидкости возникают вихревые потоки, направление которых показано на рисунке 2. Происхождение вихревых потоков связано с неодинаковым торможением жидкости у дна стакана и у поверхности. На глубине вследствие большого трения о дно стакана жидкость тормозится сильнее, чем у поверхности. Поэтому у частичек жидкости, находящихся на одинаковом расстоянии от оси вращения, оказываются разные скорости — чем ближе к дну стакана, тем меньше скорость. А равнодействующая сил «бокового» давления, действующих на такие частички, одна и та же. Эта сила уже не может по всей глубине вызвать необходимое центростремительное ускорение (как в случае вращения всей массы жидкости с одной и той же угловой скоростью). У поверхности угловая скорость слишком большая, и частицы воды отбрасываются к стенкам стакана: у дна угловая скорость мала, и результирующая сил давления заставляет воду двигаться к центру.

Теперь понятно, почему чаинки собираются в центре на дне стакана (рисунок 3) — они увлекаются возникающими при торможении вихревыми потоками. Конечно, такое рассмотрение — довольно упрощенное, но оно правильно отражает суть явления.

Как меняются русла рек

Давайте разберем характер движения воды в реке при повороте русла. Здесь возникает картина, похожая на движение воды в стакане. Поверхность воды наклоняется в сторону поворота так, чтобы разность сил давления сообщала необходимое центростремительное ускорение (на рисунке 4 показано вертикальное сечение реки на повороте). Так же как в стакане с чаем, скорость воды у дна вследствие трения меньше, чем у поверхности реки (распределение скоростей по глубине показано на рисунке 4; красным цветом выделена вертикальная плос-

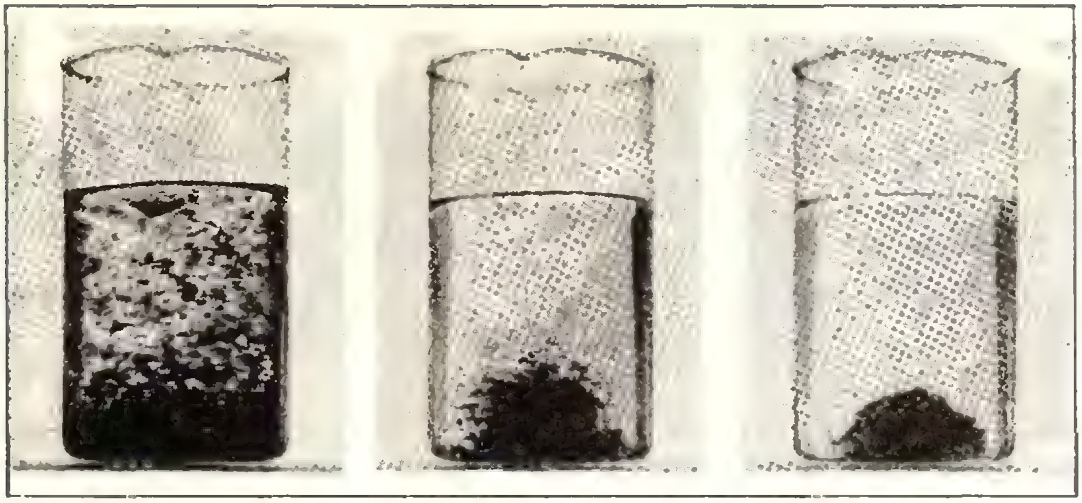


Рис. 2.

кость, перпендикулярная сечению реки). Поэтому у поверхности результирующая сил давления не в состоянии обеспечить движения частиц воды по окружности с большой скоростью, и вода «отбрасывается» к дальнему (от центра поворота) берегу. У дна, наоборот, скорость движения мала, и вода устремляется к ближнему берегу (к центру поворота). Таким образом, дополнительно к основному течению возникает циркуляция воды; на рисунке 4 показано направление циркуляции в плоскости сечения реки.

Такая циркуляция воды приводит к эрозии (разрушению) почвы. В результате далекий от центра поворота берег разрушается (подмывается), а у близкого берега постепенно осаждается все больший слой почвы (вспомните чаинки в стакане!). Форма русла меняется и приобретает такой вид, как на рисунке 4.*)

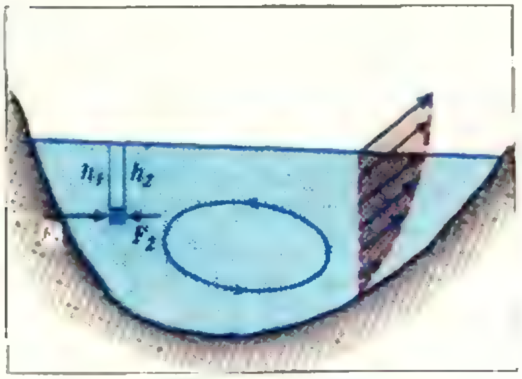


Рис. 3.

Интересно проследить за тем, как меняется скорость воды по ширине реки (от берега к берегу). На прямолинейных участках русла с максимальной скоростью течет вода посредине реки. При изгибе русла линия тока, соответствующая максимальной скорости, смещается к дальнему от центра поворота берегу. Это происходит вследствие того, что повернуть быстрые частицы воды труднее, так как для этого необходимо создать большее центростремительное ускорение. Но там, где больше скорость течения, возникает и более сильная циркуляция воды и, соответственно, большая эрозия почвы. Вот почему самое быстрое место в русле реки обычно оказывается и самым глубоким. Это правило хорошо знают речники, осуществляющие навигацию.

Эрозия почвы у дальнего берега и ее осаждение у ближнего приводят к постепенному смещению всего русла реки в сторону от центра поворота и, тем самым, к увеличению изгиба реки. На рисунке 5 показаны профили дна в одном и том же месте русла реальной реки в разные годы. Ясно видно, как происхо-

---

*) Такая же циркуляция воды может возникнуть и при прямолинейном течении реки вследствие вращения Земли. В результате реки в северном полушарии размывают, главным образом, правый берег, а в южном — левый (это и есть закон Бэра). Но этот вопрос — тема для специальной статьи.

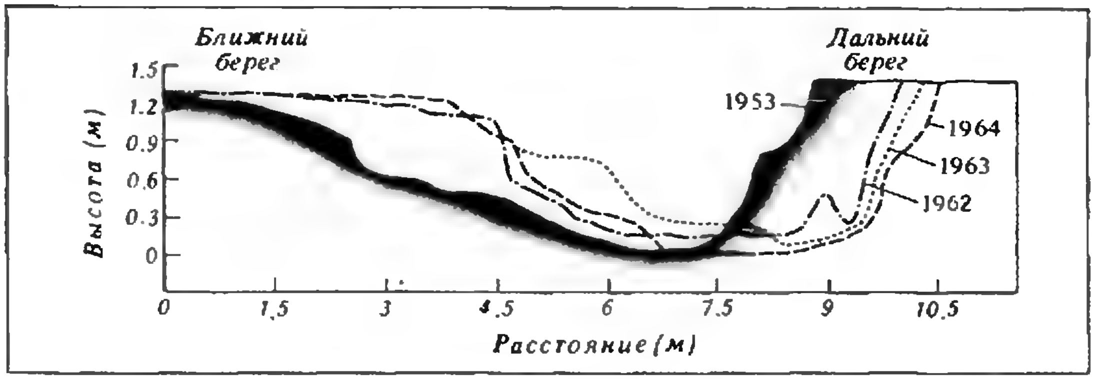


Рис. 4.

дило постепенное перемещение русла и увеличение изгиба.

Таким образом, даже небольшой начальный изгиб, возникший по случайной причине (например, вследствие обвала, падения дерева и т. п.), будет со временем увеличиваться. Прямолинейное течение реки по однородной равнине является неустойчивым.

Как образуются меандры рек

Форма русла реки во многом определяется рельефом местности. Река, текущая по неровной местности, извивается таким образом, чтобы избежать высоких мест и заполнить низины, выбирает путь с максимальным уклоном.

А как текут реки по равнинам? Как влияет на форму русла описанная выше неустойчивость прямолинейного течения реки по отношению к изгибам? Такая неустойчивость приводит к увеличению длины реки, и река начинает извиваться. Естественно думать, что в идеальном случае (совершенно ровная однородная местность) должна возникнуть периодическая кривая. Какова ее форма?

Геологи высказали предположение, что русла рек, текущих по равнинам, на изгибах должны принимать форму ... изогнутой линейки.

Возьмите стальную линейку и попытайтесь сжать линейку вдоль ее длины (уменьшить расстояние между ее концами). Линейка изогнется (как на рисунке 6). Такой упругий изгиб называют эйлеровым изгибом (по имени замечательного ученого, русского академика Леонарда Эйлера (1707—1783), теоретически рассмотревшего это явление). Форма изогнутой линейки описывается особой кривой. Эта эйлерова кривая обладает замечательным свойством: из всех кривых заданной длины, соединяющих данные точки, она в среднем наименее изогнута. Если измерить угловые отклонения Θ (см. рисунок 6) через равные расстояния вдоль длины кривой и просуммировать квадраты угловых отклонений, то для эйлеровой кривой эта сумма будет минимальной. Такой «экономный» изгиб эйлеровой кривой и послужил основанием для гипотезы о форме русел рек.

Геологи моделировали процесс изменения русла реки в искусственном канале, продолженном в однородной среде, которая приготовлялась из мелких частиц, слабо скрепленных между собой и потому довольно легко подвергающихся эрозии. Очень скоро прямолинейный канал начинал извиваться, причем форма изгибов описывалась именно эйлеровой кривой (рисунок 7). Ко-

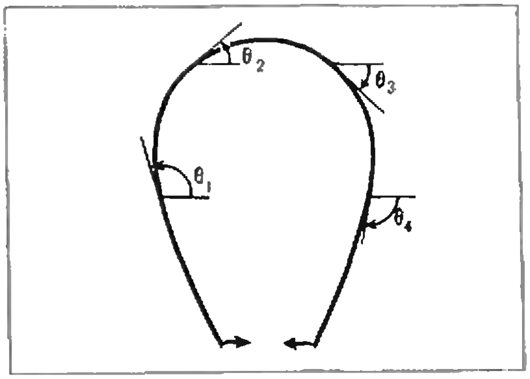


Рис. 5.

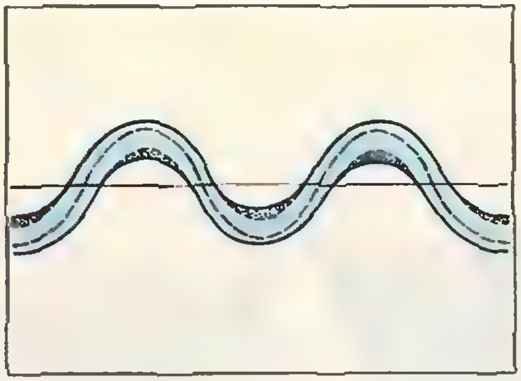


Рис. 6.

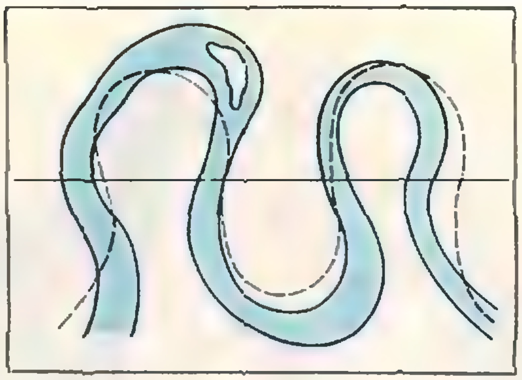


Рис. 7.

нечно, в реальных условиях такого *совершенства в форме русел рек не* наблюдается (например, из-за неоднородности почвы). Но на равнинах реки обычно изгибаются и образуют периодическую структуру. На рисунке 8 показаны русла реальных рек и пунктиром проведены эйлеровы кривые, наиболее близкие к форме русел.

Периодические изгибы русла называют меандрами. Происхождение этого термина связано с древнегреческим названием Меандр известной своими изгибами реки в Турции (современное название реки — Большой Мендерес). Меандрами сейчас называют и периодические изгибы океанских течений, а также ручьев, образующихся на ровной поверхности ледников. Во всех этих явлениях в однородных средах случайные процессы приводят к образованию периодической структуры, и хотя причины, вызывающие изгибы, могут быть разными, форма образующихся периодических кривых оказывается одинаковой.

О реках и озерах

У богатыря Байкала было больше 300 сыновей и только одна дочь — красавица Ангара... Так начинается старинная легенда об озере Байкал, в которое втекают 336 рек, а вытекает из которого только одна река. Оказывается, этим славен не только Байкал. Сколько бы рек ни втекало в озеро, вытекает из него, как правило, всего одна.

Например, много рек втекает в Ладожское озеро, а вытекает из него только Нева; из Онежского озера вытекает одна Свирь и т. д. Это явление можно объяснить. Вода вытекает по самому глубокому руслу, а другие возможные истоки оказываются лежащими выше уровня воды в озере. Маловероятно, что возможные русла рек в местах истока будут точно на одинаковой высоте.

Если озеро достаточно *полноводное (в него втекает* много воды), то из озера могут вытекать и две реки. Однако такая ситуация неустойчива и возможна у сравнительно недавно образовавшихся (молодых) озер. Со временем река с более глубоким руслом, в которой скорость течения большая, будет размываться, что повлечет увеличение расхода воды и понижение ее уровня в озере. Сток воды через мелкую реку будет уменьшаться, и она постепенно заилится. Таким образом, «выживает» только самая глубокая из вытекающих рек.

Для того чтобы из озера могли вытекать одновременно две реки, необходимо, чтобы их русла у истока оказались точно на одинаковой высоте. В таком случае говорят, что происходит бифуркация (этот термин сейчас широко используют математики для обозначения удвоения числа решений уравнений). Бифуркация — редкое явление, и поэтому обычно из озера вытекает только одна река.

Аналогичные явления происходят при *течении рек*. Известно, что реки сливаются с большой охотой, а вот раздвоение реки наблюдается сравнительно редко. Последнее — опять пример бифуркации. Река в каждом месте течет по кривой максимального уклона, и маловероятно, чтобы в какой-то точке произошло раздвоение этой кривой. В дельте реки ситуация, однако, меняется. Подумайте сами, *почему это происходит*.

Об одной олимпиадной задаче

(или может ли в меньшем быть чего-нибудь больше?)

В. М. ТИХОМИРОВ

Как-то раз — это было давным-давно, тридцать с чем-то лет тому назад — руководитель кружка, таинственно улыбнувшись, задал нам такой вопрос:

«Один тетраэдр лежит внутри другого. Как вы думаете, может ли сумма его ребер оказаться больше, чем сумма ребер объемлющего тетраэдра?»

Мы дружно закричали: «Нет!» — «А кто-нибудь может это доказать?» И тогда один из нас воскликнул: «А чего тут доказывать: *разве у меньшего может быть чего-нибудь больше?*» — «Это что — аксиома?» — «Нет, но...» — «А не аксиома — докажи!» — «Но это же очевидно!» Они препирались еще немного, и вдруг раздался удивленный возглас: «А ведь может!»

Эта сценка вспомнилась мне в апреле прошлого года в Одессе, когда проходил второй тур XVI Всесоюзной математической олимпиады. Там десятиклассникам была предложена такая задача:

Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на ребрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем $4/3$ суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$).*

(Отметим, что число $4/3$ в формулировке нашей задачи не может быть уменьшено. Для того чтобы понять это, достаточно рассмотреть правильную треугольную пирамиду $ABCD$ с очень большим в сравнении с ребром основания ABC боковым ребром и взять точки K и L где-нибудь на основании, а две другие точки M и N — где-то у вершины D.)

С этой задачей справились лишь четверо участников из пятидесяти трех. Но все решения оказались очень красивыми, и мне захотелось о них рассказать.

Начну с чисто геометрического решения, целиком лежащего в русле школьной математики. Оно принадлежит школьнику из города Димитровграда Ульяновской области Ильмуру Зиганшину.

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть KLM — грань тетраэдра $KLMN$, имеющая наибольший периметр среди всех граней этого тетраэдра. Спроектируем тетраэдр $ABCD$ на плоскость грани KLM. Проекции вершин тетраэдра обозначим соответственно A_1, B_1, C_1, D_1. Проекция всего тетраэдра $ABCD$ — это либо треугольник (и тогда одна из точек A_1, B_1, C_1 или D_1 лежит внутри треугольника, образованного остальными точками), либо выпуклый четырехугольник, ограниченный ломаной $A_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок). Ломаную, ограничивающую проекцию тетраэдра $ABCD$, обозначим через Γ (на рисунке она прорисована более жирными линиями). Ясно, что $\triangle KLM$ лежит внутри Γ. Для любых четырех точек пространства E, F, G, H (они могут оказаться в одной плоскости, некоторые из них могут совпадать и т. п.) через P_{EFGH} обозначим величину $|EF|+|FG|+|EG|+|EH|+|FH|+|GH|$ и назовем ее *периметром* $EFGH$. Периметр треугольника KLM и длину ломаной Γ обозначим P_{KLM} и P_Γ соответственно.

---

*) Полное решение этой задачи приводится на с. 42 (задача М759). Но не спешите знакомиться с ним. Советуем сначала дочитать статью до конца и попробовать с ее помощью найти решение самостоятельно.

Решение Зиганшина основано на четырех вспомогательных утверждениях, которые представляют интерес и сами по себе. Они сформулированы в виде задач, продумайте их самостоятельно.

Задача 1. *Если грань KLM имеет периметр, не меньший, чем периметр каждой из остальных трех граней тетраэдра $KLMN$, то*

$$P_{KLMN} \leqslant 2P_{KLM}. \qquad (1)$$

Задача 2. *Если треугольник KLM лежит внутри выпуклой ломаной Γ, то*

$$P_{KLM} \leqslant P_\Gamma. \qquad (2)$$

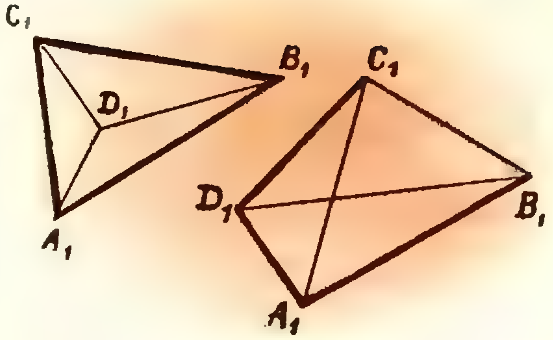
Задача 3. *Если ломаная Γ ограничивает проекцию на плоскость тетраэдра $ABCD$ и при этом A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции вершин тетраэдра, то*

$$P_\Gamma < \frac{2}{3}\, P_{A_1B_1C_1D_1}. \qquad (3)$$

Задача 4. *Если $A_1B_1C_1D_1$ — проекции вершин тетраэдра $ABCD$ на некоторую плоскость, то*

$$P_{A_1B_1C_1D_1} \leqslant P_{ABCD}. \qquad (4)$$

Из соотношений (1)—(4) решение



основной задачи следует немедленно

$$P_{KLMN} \overset{(1)}{\leqslant} 2P_{KLM} \overset{(2)}{\leqslant} 2P_\Gamma \overset{(3)}{<} 2\cdot\frac{2}{3}\, P_{A_1B_1C_1D_1} \overset{(4)}{\leqslant} \frac{4}{3}\, P_{ABCD},$$

что и требовалось доказать. Если вы хорошенько потрудитесь и докажете все утверждения задач 1—4, то вы непременно получите удовольствие от естественности и красоты замысла этого решения.

Сходным с зиганшинским было решение победителя олимпиады среди десятиклассников ленинградского школьника Гриши Перельмана.

Два других решения выходят за рамки школьной программы. Здесь, пожалуй, уместно сделать одно замечание. Обычно более всего ценятся такие олимпиадные задачи, для решения которых знание высших разделов математики не может особенно помочь и математик-профессионал не имеет преимущества перед школьником. Однако удовлетворить этому требованию удается не всегда. И вот здесь как раз тот случай, когда знание некоторых фактов «нешкольной» математики позволяет получить доказательство очень быстро. При этом решение достигается двумя совершенно разными путями. Удивительно, что оба эти способа решения были найдены школьниками.

Сначала я расскажу о решении Андрея Савкина (Ленинград).

В начале своего решения Савкин формулирует следующую теорему: *Пусть заданы две системы векторов в трехмерном пространстве, обладающие следующим свойством: если взять любую прямую и спроектировать на нее все векторы обеих систем,* *то сумма длин проекций векторов первой системы будет не меньше суммы длин проекций векторов второй системы. Тогда сумма длин векторов первой системы не меньше суммы длин векторов второй системы.*

Я не знаю, как эту теорему можно доказать средствами школьной математики (хотя с помощью высшей математики она доказывается просто).*) Однако в плоском случае вы можете попытаться доказать этот результат**).

Задача 5. *Пусть* $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ *и* $\overrightarrow{A'_1B'_1}, \ldots, \overrightarrow{A'_mB'_m}$ *— две системы двумерных векторов, обладающие тем свойством, что для любой прямой* l

$$|\text{пр}_l\overrightarrow{A_1B_1}|+\ldots+|\text{пр}_l\overrightarrow{A_nB_n}| \geqslant$$
$$\geqslant |\text{пр}_l\overrightarrow{A'_1B'_1}|+\ldots+|\text{пр}_l\overrightarrow{A'_mB'_m}|.$$

Тогда

$$|\overrightarrow{A_1B_1}|+\ldots+|\overrightarrow{A_nB_n}| \geqslant$$
$$\geqslant |\overrightarrow{A'_1B'_1}|+\ldots+|\overrightarrow{A'_mB'_m}|.$$

С помощью приведенной теоремы решение нашей задачи получается следующим образом.

Рассмотрим отрезки AB, BC, AC, AD, BD и CD и спроектируем их на любую прямую l. Образом будет некоторый отрезок Δ_1, причем каждая внутренняя точка отрезка Δ_1 будет покрыта проекциями не менее чем трех рассматриваемых отрезков. Далее, спроектируем на l отрезки KL, LM, KM, KN, LN и MN. Образом будет некоторый отрезок Δ_2, причем $\Delta_2 \subset \Delta_1$ (ибо тетраэдр $KLMN$ лежит внутри тетраэдра $ABCD$) и каждая точка отрезка Δ_2 будет покрыта проекциями не более чем четырех из этих отрезков (ибо сечение тетраэдра плоскостью — это либо точка, либо отрезок, либо треугольник, либо четырехугольник). Отсюда сразу получаем

$$|\text{пр}_l\overrightarrow{KL}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{LM}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{KM}|+$$
$$+|\text{пр}_l\overrightarrow{KN}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{LN}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{MN}| \leqslant$$
$$\leqslant 4|\Delta_2| \leqslant \frac{4}{3}\cdot 3|\Delta_1| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{3}\,(|\text{пр}_l\overrightarrow{AB}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{BC}|+$$
$$+|\text{пр}_l\overrightarrow{AC}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{AD}|+|\text{пр}_l\overrightarrow{BD}|+$$
$$+|\text{пр}_l\overrightarrow{CD}|),$$

где $|\Delta_1|$ и $|\Delta_2|$ — длины соответствующих отрезков. Из написанного соотношения и теоремы о системах векторов немедленно вытекает, что

$$P_{KLMN} \leqslant \frac{4}{3} P_{ABCD}.$$

Остается еще

Задача 6. *Доказать, что случай равенства невозможен.*

Так завершается решение Савкина.

И, наконец, о последнем решении, предложенном школьником из московского физико-математического интерната Сашей Спиваком. Спивак ставит следующую задачу на максимум: *среди всех тетраэдров $KLMN$, расположенных внутри заданного тетраэдра $ABCD$, найти тетраэдр с наибольшим периметром (то есть суммой ребер).* Прежде всего возникает вопрос: а существует ли тетраэдр с наибольшим периметром (ведь не всякая задача на максимум имеет решение, скажем, задача — найти максимум функции $y = \operatorname{arctg} x$, где x пробегает все вещественные числа, — решения не имеет)?

В учебнике «Алгебра и начала анализа 9—10» (п. 28) вы можете прочитать про теорему Вейерштрасса, согласно которой *непрерывная функция на конечном отрезке достигает своего максимального (и минимального) значения.* Теорема Вейерштрасса допускает очень далекое обобщение, из которого следует, что поставленная выше задача на максимум действительно имеет решение. Обозначим вершины «максимального» тетраэдра через K_0, L_0, M_0, N_0. Так вот, оказывается, что *эти точки обязаны совпадать с точками A, B, C или D.* Действительно, если, скажем, N_0 не совпадает ни с A, ни с B, ни с C, ни с D, то найдется целый отрезок $[NN']$ с серединой в N_0, лежащий в тетраэдре $ABCD$. А тогда все вытекает из такого утверждения:

---

*) Доказательство опирается на то, что *средняя длина* проекции вектора на всевозможные прямые (на плоскости или в пространстве) пропорциональна длине вектора и не зависит от его направления. Подробнее об этом рассказывается в статье Ю. Ионина, А. Плоткина «Среднее значение функции» («Квант», 1977, № 7).

**) Он был использован также в решении задачи М747 («Квант», 1982, № 11), где приводилось и его доказательство.

Задача 7. *По крайней мере у одного из тетраэдров $K_0L_0M_0N$ или $K_0L_0M_0N'$ периметр больше, чем у тетраэдра $K_0L_0M_0N_0$**).

А раз у максимального тетраэдра каждая вершина совпадает с одной из точек A, B, C или D, то следует лишь рассмотреть этот вырожденный случай.

Задача 8. *Пусть каждая из точек K, L, M и N совпадает с одной из точек A, B, C или D. Тогда*

$$P_{KLMN} < \frac{4}{3} P_{ABCD}$$

Так завершается решение Спивака. Мы видим, что для математика-профессионала его можно сконцентрировать в одной фразе: *вследствие теоремы Вейерштрасса решение задачи о вложенном тетраэдре максимального периметра существует, а вследствие выпуклости функции расстояния это решение сосредоточено в вершинах тетраэдра ABCD, что сводит общую проблему к вырожденной (задаче 8).*

Отметим, что авторское решение основывалось также на задаче 7: чуть более тонкое ее применение позволяет избежать ссылки на теорему Вейерштрасса**).

На этом можно было бы и закончить, но еще несколько слов — попутных. В последнем решении нашел отражение важный принцип для задач на максимум и минимум: *максимальное значение выпуклой функции на многограннике (если оно существует) достигается в вершине многогранника.* Этот принцип играет важную роль в линейном программировании — разделе математики, имеющем большое применение в экономике (см. об этом, например, в статье З. Литовченко «Лучший вариант» («Квант», 1978, № 5)). В предпоследнем решении мы столкнулись с одним из сравнительно новых понятий математики — понятии вариации (о нем рассказывается в прекрасно написанной статье В. И. Арнольда в сборнике «Математическое просвещение», вып. 2, (М., ГТТИ, 1957) в разделе «Математический кружок»).

И в заключение — несколько вопросов на тему о том, может ли в меньшем быть чего-нибудь больше.

Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ лежит в треугольнике ABC.

а) Может ли наименьшая высота (медиана, биссектриса) треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше наименьшей высоты (медианы, биссектрисы) треугольника ABC?

б) Может ли наибольшая высота (медиана, биссектриса) треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше наибольшей высоты (медианы, биссектрисы) треугольника ABC?

в) Может ли радиус вписанной окружности (описанной окружности) треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше чем радиус вписанной окружности (описанной окружности) треугольника ABC?

г) Может ли сумма квадратов сторон треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше суммы квадратов сторон треугольника ABC?

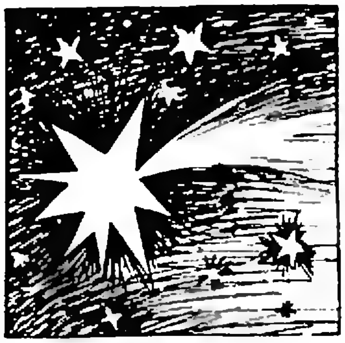
д) Может ли сумма медиан треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше суммы медиан треугольника ABC?

Возможно, среди читателей «Кванта» есть такие, которые читали про многомерную геометрию. Они могут поразмышлять над n-мерным обобщением нашей задачи о тетраэдрах. Например, подумать, во что превратится множитель 4/3 в четырехмерном случае.

---

*) Для тех из вас, кто знаком с понятием выпуклости, задача 7 будет особенно легкой, ибо ее решение сразу следует из выпуклости функции расстояния. (Согласно одному из определений, функция, заданная на точках пространства, называется *выпуклой*, если ее значение в середине любого отрезка не превосходит полусуммы значений в его концах.)

**) См. решение задачи М759.



Самый далекий квазар

В начале прошлого года в печати появилось сообщение о том, что английские и австралийские астрономы обнаружили новый светящийся объект, который расположен от нас дальше всех других небесных объектов. Оказалось, что это квазар, находящийся в созвездии Стрельца (его экваториальные координаты: склонение +33° и прямое восхождение 1,3 с).

Квазары (квазизвезды) были открыты около двадцати лет тому назад. Так стали называть далекие космические тела, которые по внешнему виду на фотографиях похожи на звезды, но их излучение по мощности сравнимо с излучением целых галактик. (Например, квазар, о котором пойдет здесь речь, излучает в 10^{14} раз больше энергии, чем Солнце.) Квазары расположены не в нашей Галактике, а очень далеко за ее пределами, на расстояниях в несколько миллиардов световых лет.

Как же можно определить расстояние до квазара? Оказывается, для этого нужно измерить его красное смещение. Объясним, что это значит.

При сравнении спектров химических элементов, входящих в состав квазаров, со спектрами тех же элементов на Земле было обнаружено, что линии в спектрах квазаров сильно смещены в сторону больших длин волн, то есть к красному концу спектра. Если обозначить через λ наблюдаемую длину волны, а через λ_0 — эталонную земную, то величина

$$z=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}$$

и называется красным смещением. Характерно, что для всех линий спектра данного квазара z одно и то же. С другой стороны, известно, что длина волны, излучаемая источником, меняется при движении источника и наблюдателя относительно друг друга. (Этот эффект называется эффектом Доплера.) В частности, если источник движется от наблюдателя, наблюдатель фиксирует бо́льшую длину волны.

Таким образом, был сделан вывод, что квазары удаляются от нас, причем удаляются с очень большими скоростями. Для этого случая теория относительности дает формулу

$$\lambda=\lambda_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}},$$

где c — скорость света, а v — скорость источника относительно наблюдателя. Зная красное смещение z, из этой формулы можно найти скорость v. Так, скорость вновь открытого квазара равна $v=0{,}92c$. Это — самая большая скорость, которую когда-либо наблюдали астрономы.

Теперь, когда известна скорость квазара, можно оценить и расстояние до него. Для этого надо воспользоваться тем, что указанная скорость v связана с расстоянием R до квазара законом Хаббла (законом «разбегания» галактик):

$$v=HR.$$

Величину H называют постоянной Хаббла. Ее точное значение измерить трудно; в настоящее время на основе многолетних наблюдений принято значение $H\approx2{,}5\cdot10^{-18}\text{с}^{-1}$.

Для квазара, удаляющегося от нас со скоростью 0,92 c, получаем

$$R\approx1{,}1\cdot10^{26}\text{м}\approx1{,}2\cdot10^{10}\text{ св. лет.}$$

Другими словами, можно сказать, что этот квазар мы видим таким, каким он был приблизительно 12 миллиардов лет тому назад. Если вспомнить, что возраст Вселенной оценивается в 13—15 миллиардов лет, «древность» обнаруженного квазара, безусловно, должна внушать уважение.

Я. С.

Что такое стробоскоп

С. Л. ГАВРИЛОВ

Часто на киноэкранах можно наблюдать такое странное явление: у движущегося автомобиля колеса вращаются в обратном направлении. Это пример так называемого стробоскопического эффекта. Прежде чем начать разговор о нем, давайте проведем несложный эксперимент.

Из плотной бумаги вырежем круг диаметром около двадцати сантиметров и на краю его напишем какую-нибудь букву размером приблизительно в 1 см. Диск этот насадим на ось, например на вязальную спицу. Если спицу быстро раскрутить, буква превратится в сплошную темную полоску. Казалось бы, разглядеть букву, не останавливая диск, невозможно. Но это не так.

Вырежем еще один такой же круг и прорежем по его радиусу щель шириной 2—3 мм и длиной 4—5 см. Насадим этот круг на ту же ось так, чтобы сквозь прорезь на нем была видна буква на первом диске. Опять закрутим ось, но теперь даже при большой скорости вращения мы будем видеть букву практически неподвижной. (Чтобы добиться максимальной четкости изображения, нужно опытным путем подобрать оптимальный угол наблюдения.)

Как же получилось, что буква, которая раньше расплывалась и была недоступной для нашего зрения, теперь стала хорошо видимой? Попробуем разобраться.

Предположим, что диск освещается (или делается видимым глазу каким-либо иным способом) не все время, а периодически, через равные промежутки времени. Когда период освещения точно совпадает с периодом обращения диска, при каждой вспышке мы будем видеть диск в одной и той же стадии вращения. И если время между вспышками не превышает времени сохранения зрительных ощущений, что составляет примерно 0,3 секунды (а в случае особо возбудимых глаз — до 0,5 секунды), отдельные мгновенные изображения диска сольются в одно «непрерывное» изображение. Диск будет казаться неподвижным. Если же интервалы между двумя последовательными вспышками немного больше периода вращения диска, то во время каждой последующей вспышки мы будем видеть диск во все более поздних стадиях движения. Нам будет казаться, что диск медленно вращается в том же направлении, в каком это происходит в действительности. В случае если период освещения несколько меньше периода вращения, мы каждый раз будем видеть диск во все более ранних стадиях движения, и нам покажется, что диск медленно вращается в противоположном направлении. (Очевидно, что период кажущегося вращения зависит от разности между периодами освещения и действительного вращения диска.)

Эффект, о котором идет речь, называется стробоскопическим, а прибор, позволяющий «останавливать» или «замедлять» движущиеся тела,— стробоскопом. Название произошло от греческих слов «стробос» — кружение и «скопос» — наблюдение.

Простейший стробоскоп представляет собой диск из тонкого картона, по радиусу которого вырезана щель шириной 2—3 мм. Диск можно закрепить на оси ручного точила (вместо точильного круга) или механической дрели. Изменяя скорость вращения диска, можно добиться, например, «остановки» колебаний маятника стенных часов или грузика на пружине. Для этого нужно лишь посмотреть на маят-

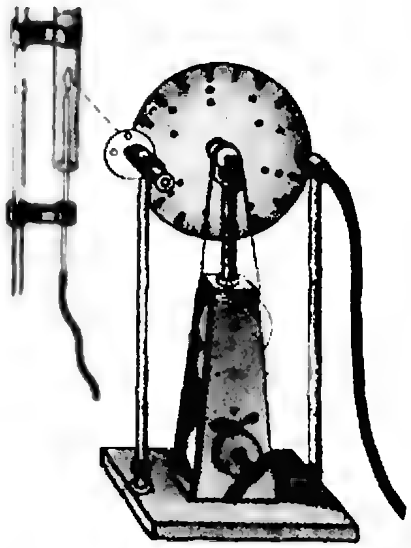


Рис. 1. Фотография одного из старинных стробоскопов.

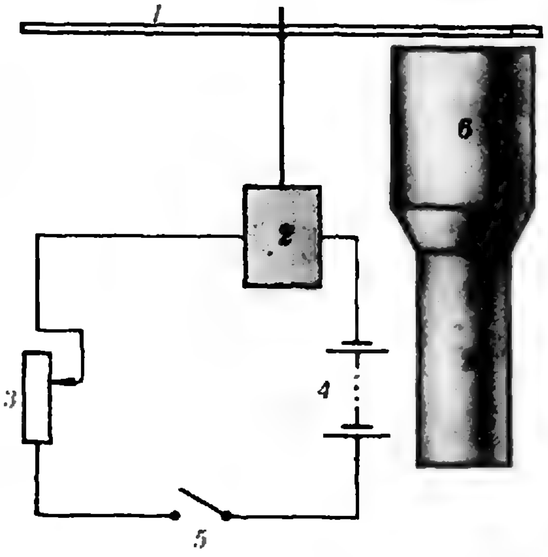


Рис. 2. Стробоскоп, создающий прерывистое освещение: 1 — диск с прорезями, 2 — электродвигатель, 3 — реостат, 4 — источник тока, 5 — ключ, 6 — картонная труба, 7 — фонарь.

ник или грузик сквозь крутящийся диск.

Если в диске прорезать не одну, а несколько (например, 10 или 20) щелей на равном расстоянии друг от друга, то можно будет наблюдать и более быстрые движения, скажем — вращение лопастей вентилятора. Лопасти работающего вентилятора практически невидимы для нас — они сливаются в один полупрозрачный диск. А с помощью стробоскопа их можно разглядеть, не останавливая вентилятор. Тем-то и полезен стробоскоп, что он позволяет наблюдать столь быстрые процессы, за которыми наш глаз, из-за его инерционности, уследить не в состоянии. Схема одного из подобных опытов приведена на рисунке 1.

Но еще удобнее работать со стробоскопом, который создает прерывистое освещение (рис. 2). Для этого вращающийся картонный диск с прорезями нужно поместить перед источником света. В качестве источника света годится обычный круглый фонарь, работающий от трех батареек. Он дает достаточно света, и его световой пучок хорошо сфокусирован. Диск можно приводить в движение моторчиком от электроконструктора. Чтобы изменять скорость вращения, нужно последовательно с моторчиком включить реостат на 40—50 Ом и менять его сопротивление. Наблюдения проводят в темноте — исследуемый предмет освещается только мигающим светом стробоскопа.

Используя такой стробоскоп, можно, например, измерять скорости и ускорения движущихся поступательно тел (об этом рассказано в учебнике физики для 8 класса: «Физика 8», 1982, с. 39). Но, пожалуй, самый эффектный опыт — это наблюдение распадения тонкой струи жидкости на капли. Представьте себе, например, несильную струю воды, вытекающей из водопроводного крана. Из гидродинамического принципа неразрывности струи следует, что свободная струя по мере возрастания скорости жидкости (в поле тяжести земли) должна уменьшаться в сечении. И если бы не поверхностное натяжение, сечение струи уменьшалось бы неограниченно. Наличие же поверхностного натяжения приводит к тому, что при достаточно малом сечении струя начинает распадаться на капли. Объясняется это тем, что энергия поверхностного натяжения сферической капли меньше, чем цилиндрической струи, а любая система всегда стремится к состоянию с наименьшей энергией. Инерционность нашего зрения не позволяет нам разглядеть отдельные капли — струя кажется глазу монолитной и неподвижной. Если же наблюдать тонкую струю с помощью стробоскопа, видны отдельные капли, как бы висящие в воздухе (рис. 3).

Струя, вытекающая из-под крана с большим напором, при стробоскопическом освещении тоже выглядит не так, как мы привыкли ее видеть. Из-за завихрений, возникающих при быстром течении жидкости, струя в каждый момент времени имеет узловатую форму с причудливыми боковыми выростами.

Любопытно, что стробоскопический эффект был известен еще в глубокой древности, на что, например, бесспорно указывают строки из поэмы Лукреция «О природе вещей» (I век до н. э.). Но затем долгое время на него не обращалось никакого внимания. Вновь описания стробоскопических явлений появились лишь в первой половине XIX века в работах Фарадея, Плато и других ученых. Исследователи не сразу поняли, что это не просто забавный оптический обман, а прекрасное средство для изучения быстрых периодических процессов. Однако со временем стробоскоп занял подобающее место в лабораториях и служил верой и правдой вплоть до появления методов мгновенной фотосъемки, позволяющей буквально «остановить мгновение».

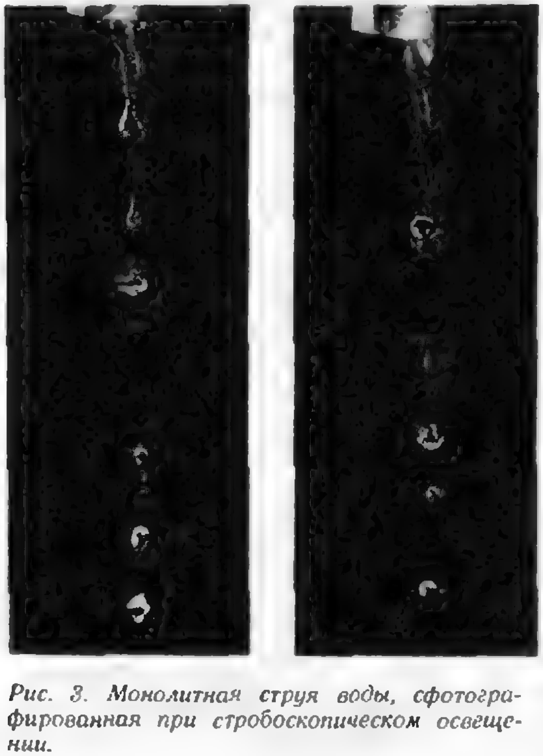
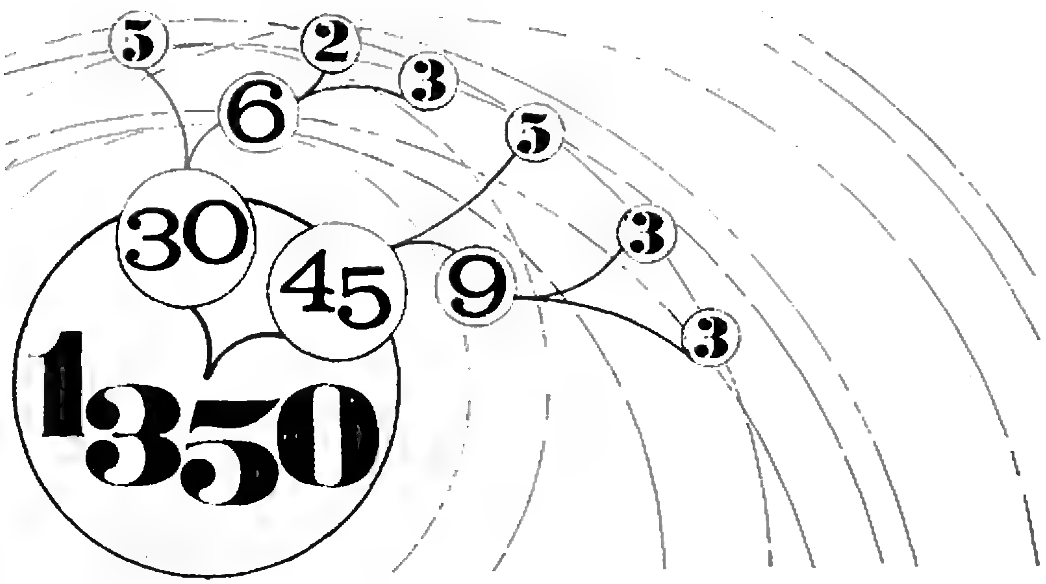


Рис. 3. Монолитная струя воды, сфотографированная при стробоскопическом освещении.

Так, в XIX веке при помощи стробоскопа были осуществлены исследования в области акустики, механических колебаний, гидродинамики и даже физиологии и зоологии.

Не утратил своего значения стробоскоп и в наши дни. В частности, его применяют, когда нужно измерять или контролировать частоту вращения каких-либо механизмов. Так например, во многих высококачественных электропроигрывателях с помощью стробоскопа осуществляется подстройка скорости вращения диска. Для этого на боковую поверхность диска наносят чередующиеся темные и светлые полоски, изображения которых с помощью оптической системы проецируют на экран на панели проигрывателя. Полоски освещаются лампочкой, мигающей со строго постоянной частотой. Она подбирается так, чтобы за время между двумя вспышками край диска прошел расстояние, равное как раз расстоянию между двумя соседними темными полосками, тогда изображение полос на экране будет неподвижным. Если скорость диска будет отличаться от номинальной, изображение полос начнет двигаться. «Остановить» его можно специальной ручкой регулировки скорости вращения диска.

Еще один пример использования стробоскопического эффекта для современных исследований — создание стробоскопического осциллографа. Этот прибор позволяет наблюдать периодические сигналы длительностью менее 10^{-10} с (это в 100 раз меньше длительности сигналов, «воспринимаемых» обычным высокочастотным осциллографом). Работа такого сверхбыстрого осциллографа аналогична работе простого механического стробоскопа в режиме, когда действительная частота колебаний во много раз больше кажущейся. Только здесь роль стробоскопа выполняет точная и сложная электроника.



Арифметика и принципы подсчета

Н. Б. ВАСИЛЬЕВ,
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

В основе математики лежит арифметика — теория натуральных чисел 1, 2, 3, ... В теории чисел много глубоких и красивых теорем. Немало в ней трудных и до сих пор не решенных проблем, в течение сотен лет не поддающихся усилиям самых выдающихся математиков. Целые разделы современной математики возникли из попыток решения и обобщения теоретико-числовых задач. К. Ф. Гаусс (1777—1855), сделавший много замечательных открытий в теории чисел и в других областях математики, сказал: «Математика — царица наук, теория чисел — царица математики».

Цель этой статьи — познакомить читателей с простейшими понятиями этой увлекательной науки, основной теоремой арифметики, некоторыми арифметическими функциями и принципами подсчета.

§ 1. Простые и составные числа

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело с натуральными числами. Мы говорим, что число n *делится* на число a, если существует такое число b, что $n=ab$. В этом случае число a называется *делителем* числа n, а число n называется, в свою очередь, *кратным* числу a.

Всякое натуральное число, большее единицы, имеет, по крайней мере, два делителя: 1 и само это число. Число, большее 1, называется *простым*, если у него нет других делителей, и *составным*, если они есть. Единица при этом не является ни простым, ни составным числом.

> Каждое натуральное число можно разложить в произведение простых.

В самом деле, составное число n можно разложить в произведение двух множителей, меньших n. Если среди них есть не простые (составные), можно каждое из них разложить в произведение двух меньших и т. д. Очевидно этот процесс не может продолжаться бесконечно, потому что на каждом шагу мы получаем меньшие множители, чем на предыдущем, а всего натуральных чисел, меньших n, конечное число: $n-1$. В результате мы приходим к разложению числа на простые множители.

Обычно одинаковые простые множители собирают вместе и записывают разложение в таком стандартном виде:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа. Например, $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

Основная теорема арифметики. Всякое натуральное число, большее 1, разлагается на простые множители единственным образом.

Основной эта теорема называется потому, что практически все свойства делимости чисел являются ее следствиями.

Мы не будем останавливаться на доказательстве основной теоремы (его можно найти, например, в [1], [3]), а сформулируем лишь одно ее следствие.

Для того чтобы число a делилось на число b, необходимо и достаточно, чтобы каждый простой множитель, входящий в разложение числа b, входил в разложение a в такой же или в более высокой степени.

А как разложить большое число на простые множители? В этом нам поможет такое полезное наблюдение.

Если число n составное, то у него есть делитель, не превосходящий $\sqrt{n}$ и больший 1.

Допустим противное. Пусть $n = ab$, и оба делителя a и b больше, чем $\sqrt{n}$. Поскольку $a > \sqrt{n}$ и $b > \sqrt{n}$, получаем, что $ab > n$, что противоречит предположению.

Чтобы убедиться в простоте данного числа n или, если n составное, найти его делитель, достаточно проверить, делится ли n на простые числа, не большие $\sqrt{n}$.

Составить список простых чисел, не превосходящих заданного числа N, можно таким образом. Надо выписать подряд все натуральные числа от 1 до N, вычеркнуть единицу, потом вычеркнуть все четные числа, кроме числа 2, затем вычеркнуть все числа, кратные 3, кроме самого числа 3, затем — кратные 5, и т. д. вплоть до самого большого простого числа, не превосходящего $\sqrt{N}$. После вычеркивания чисел, кратных какому-то простому числу p, первое не вычеркнутое число и будет следующим за p простым числом. Этот метод просеивания чисел называется «решетом Эратосфена». Он не так плох, как кажется на первый взгляд: например, чтобы составить таблицу простых чисел до 2000, достаточно вычеркнуть все кратные первым четырнадцати простым числам от 2 до 43 (так как $47^2 > 2000 > 43^2$). С помощью современных ЭВМ составлены очень большие таблицы простых чисел. Здесь, конечно, стоит заметить, что все простые числа выписать нельзя: как умел доказывать еще Евклид,

Существует бесконечно много простых чисел.

Предположим, что простых чисел — конечное число и p — самое большое из них. Рассмотрим произведение $p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot p$ всех чисел от 1 до p ($p!$ читается «p факториал»). Число $p!$ делится на все простые числа, так как, по предположению, в произведении $p!$ содержатся все простые числа. Следующее за ним в натуральном ряду число $p!+1$ должно раскладываться на простые множители, но это невозможно, так как $p!+1$ не делится ни на одно из простых чисел! Противоречие.

Многие древние и до сих пор до конца не решенные проблемы теории чисел относятся к распределению простых чисел в натуральном ряду.

Например, наблюдения показывают, что встречаются рядом стоящие простые нечетные числа: 3 и 5, 5 и 7, 17 и 19, 29 и 31 и т. п. Такие числа называются *простыми близнецами*. До сих пор не известно, конечно или бесконечно количество пар простых близнецов.

С другой стороны, между простыми числами могут встречаться сколь угодно большие промежутки, точнее

> Для любого k в натуральном ряду существует k последовательных составных чисел.

В самом деле, возьмем число $(k+1)!$ и рассмотрим ряд из k последовательных чисел:

$$(k+1)!+2;\ (k+1)!+3;\ (k+1)!+4;\ldots\\ \ldots;\ (k+1)!+k+1,$$

Все они — составные: первое делится на 2, второе — на 3, ..., последнее — на $k+1$.

Задачи

1. Разложите на простые множители числа *а*) 1981; *б*) 1982; *в*) 1983; *г*) 1984.

Решение задачи 1*в*). Разделив 1983 на 3, получим $1983=3\cdot661$. Теперь ищем делители числа 661. Так как $25^2<661<26^2$, нужно проверить делимость на простые числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Ни на одно из них 661 не делится, значит, 661 — простое число.

2. Укажите в натуральном ряду *а*) шесть; *б*) тринадцать последовательных составных чисел.

в) Существуют ли такие соседние простые числа, между которыми в натуральном ряду помещается ровно шесть составных чисел?

3. Докажите, что если d — наибольший делитель составного числа n, меньший n, то число n/d — простое.

4. Докажите, что среди натуральных чисел от 1 до $30m$ не более $10m$ простых чисел (при каждом $m=1, 2, 3, \ldots$).

5. Найдите все такие числа p, что числа p, $p+2$, $p+4$ одновременно являются простыми (такие числа можно назвать простыми «тройнями»).

6. Каким количеством нулей кончается десятичная запись числа $30!$?

7. Докажите, что среди чисел 2, 5, 8, 11, ... (то есть чисел вида $3m+2$, где $m=0, 1, 2, \ldots$) бесконечно много простых.

§ 2. Количество делителей. Комбинаторное правило произведения

На рисунке 1 ниже выписаны все натуральные делители чисел 96 и 144. Мы видим, что все делители числа 96 разбиваются на пары *дополнительных* друг другу делителей (на рисунке 1 они соединены дугами), а у числа 144 один из делителей, 12, является дополнительным к самому себе, поскольку $144=12^2$. Из симметрии множества делителей следует такое утверждение:

> Если число n не является квадратом целого числа, то у него четное число делителей, а если является — то нечетное.

В самом деле, каждому делителю a числа n, меньшему $\sqrt{n}$, соответствует делитель n/a, больший $\sqrt{n}$. Поэтому делителей, отличных от $\sqrt{n}$, всегда четное число. Если же $n=k^2$, то к ним добавляется еще один делитель k.

Пусть $d(n)$ — *количество делителей* натурального числа n. Как показано выше, если n — полный квадрат, то $d(n)$ — нечетное число (например, $d(144)=15$), а если нет, то $d(n)$ — четное число (например, $d(96)=12$). Покажем теперь, как, зная разложение числа n на простые множители, находить значение $d(n)$.

Прежде всего, заметим, что при простом p всегда $d(p^\alpha)=\alpha+1$.

Действительно, по определению, простое число p имеет только два де-

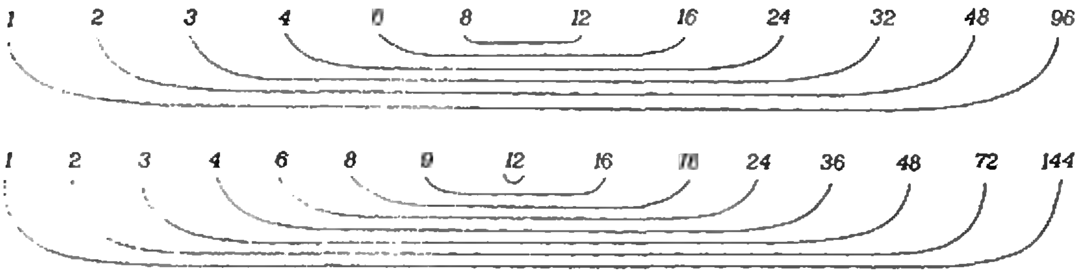


Рис. 1. Делители и дополнительные к ним

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
3^0	1	2	2^2	2^3	2^4
3^1	3	$2\cdot 3$	$2^2\cdot 3$	$2^3\cdot 3$	$2^4\cdot 3$
3^2	3^2	$2\cdot 3^2$	$2^2\cdot 3^2$	$2^3\cdot 3^2$	$2^4\cdot 3^2$

Рис. 2. Правило произведения: делители $2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}$ числа $144=2^4\cdot 3^2 (0<\beta_1<4, 0<\beta_2<2)$ размещаются в табличке 5×3.

лителя: 1 и p, а, в силу следствия из основной теоремы арифметики, число p^α имеет $(\alpha+1)$ делителей: $1, p, p^2, \ldots, \ldots, p^\alpha$ (считается, что $p^0=1$).

Рассмотрим теперь число n с двумя различными простыми множителями, например $n=144=2^4\cdot 3^2$. Все его делители имеют вид $2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}$, где β_1 может принимать любое из пяти целых значений от 0 до 4, β_2 — одно из трех значений 0, 1 или 2. Значит, всего разных пар $(\beta_1; \beta_2)$ может быть $3\cdot 5=15$, так что $d(144)=15$ (см. рис. 2). Здесь мы воспользовались полезным принципом подсчета.

Правило произведения. Если элемент β_1 можно выбрать N_1 способами, а элемент β_2 — независимо от β_1 — N_2 способами, то всего можно составить $N_1\cdot N_2$ различных пар $(\beta_1; \beta_2)$. Вообще, если нужно составить набор $(\beta_1; \beta_2; \ldots, \beta_k)$ из k элементов, причем элемент β_1 можно выбрать N_1 способами, элемент β_2 — N_2 способами, ..., элемент β_k — N_k способами, то всего можно составить $N_1\cdot N_2\cdot\ldots\cdot N_k$ различных наборов $(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_k)$.

Это общее правило позволяет написать формулу для числа делителей любого $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$. В самом деле, согласно следствию из основной теоремы арифметики, любой делитель числа n имеет вид $p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$, где β_i принимает одно из (α_i+1) значений $0, 1, \ldots, \alpha_i$. Следовательно, количество разных наборов $(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_k)$, а значит, и различных делителей числа n, равно

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1). \quad (*)$$

Задачи

8. Найдите: а) $d(1000)$; б) $d(1350)$; в) $d(5040)$; г) $d(84^{19})$.

Решение задачи б). Ответ: 24. Так как $1350=2\cdot 3^3\cdot 5^2$, по формуле (*) получаем

$$d(2^1\cdot 3^3\cdot 5^2)=(1+1)(3+1)(2+1)=24.$$

9. Приведите пример числа, имеющего а) ровно 6 делителей; б) ровно 7 делителей.

10. Докажите, что число n, дающее при делении на 3 остаток 2, имеет поровну делителей вида $3l+1$ и $3s+2$ и не является полным квадратом.

11. Окружность разбита на 720 одинаковых дуг. Сколько существует различных (по числу сторон) правильных многоугольников с вершинами в точках разбиения?

12. Сколько у числа n четных делителей (напишите общую формулу)? Для каких чисел n количество таких делителей равно $\frac{1}{2}d(n)$?

13. В письменном столе имеется 9 ящиков. Сколькими способами можно разложить по ним пять разных книг?

Ответ: 9^5 способов. Решение. Первую книгу мы можем положить 9 способами в тот или иной ящик, и, независимо от этого выбора, есть 9 способов выбрать ящик для второй книги, и т. д. По правилу произведения, всего способов 9^5.

14. Сколько существует трехзначных чисел, у которых все цифры нечетные?

15. Сколько существует пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

§ 3. Функция Эйлера. Включения и исключения

В § 2 мы познакомились с арифметической функцией $d(n)$. Еще чаще в теории чисел используется ***функция Эйлера**: $\varphi(n)$ — количество чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним,* то есть таких чисел, которые не имеют с n общих делителей (кроме 1).

На рисунке 3 для примера выписаны числа от 1 до 18. Мы видим, что все взаимно простые с 18 числа разбиваются на пары $(a; 18-a)$.

Такая симметрия будет для любого $n>2$: если число a взаимно просто с n, то $(n-a)$ также будет взаимно просто с n и не равно a. В самом деле, если бы $n-a$ и n имели общий делитель $p>1$, то их разность $n-(n-a)=a$ имела бы тот же делитель p, тем самым n и a не были бы взаимно просты.

Из этой симметрии $a\leftrightarrow(n-a)$ мы видим, что число $\varphi(n)$ всегда четно (при $n>2$).

Покажем теперь, как находить $\varphi(n)$, зная разложение числа n на

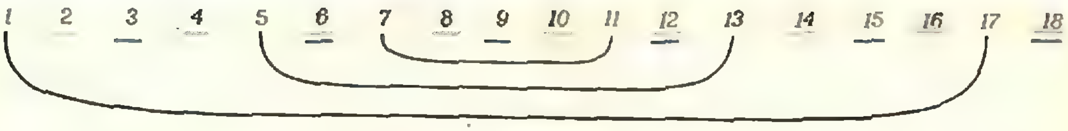


Рис. 3. Среди чисел от 1 до $18=2\cdot3^2$ подчеркнуты все, кратные 2 (красным) и все, кратные 3 (синим). Подчеркнуты дважды (и синим, и красным) — числа, кратные 6. Не подчеркнутых — взаимно простых с 18 — осталось $\varphi(18)=18-18/2-18/3+18/6=$ $=18-9-6+3=6$. Они разбиваются на пары чисел, дающих в сумме 18.

простые множители. Прежде всего, заметим, что если p простое, то $\varphi(p)=p-1$, так как все числа 1, 2, ..., ..., $(p-1)$ взаимно просты с p и меньше его. Пусть $n=p^\alpha$, где p — простое число и $\alpha>1$. Тогда из n чисел, не превосходящих n, то есть из чисел 1, 2, 3, ..., n, мы должны исключить те, которые делятся на p. Таких чисел $\frac{n}{p}=\frac{p^\alpha}{p}=p^{\alpha-1}$, поэтому

$$\varphi(n)=n-\frac{n}{p}=n\left(1-\frac{1}{p}\right). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь числа $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ с двумя различными простыми множителями. Подсчет $\varphi(n)$ (для $n=18$ он проделан на рисунке 3) мы проиллюстрируем диаграммой на рисунке 4: квадрат изображает множество всех чисел от 1 до n, красный и голубой круги — это множества чисел, делящихся на p_1 и p_2 соответственно, пересечение кругов — множество чисел, делящихся на p_1p_2.

Числа, взаимно простые с n, изображаются заштрихованной частью квадрата. Для определения их числа мы должны исключить $N_1=n/p_1$ «красных чисел», $N_2=n/p_2$ «голубых» и прибавить $N_{12}=n/p_1p_2$ чисел, лежащих в пересечении кругов. Таким образом,

$$\varphi(n)=N-N_1-N_2+N_{12}=$$
$$=n-\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}+\frac{n}{p_1p_2}=$$
$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right). \quad (2)$$

Разобрать случай числа $n=$ $=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}$ с тремя различными множителями нам поможет рисунок 5: квадрат изображает множество чисел, не превосходящих n, а круги — множества чисел, делящихся на p_1, на p_2 и на p_3; тогда в кругах будет соответственно $N_1=\frac{n}{p_1}$, $N_2=\frac{n}{p_2}$ и $N_3=\frac{n}{p_3}$ чисел, в их попарных пересечениях — $N_{12}=\frac{n}{p_1p_2}$, $N_{13}=\frac{n}{p_1p_3}$ и $N_{23}=\frac{n}{p_2p_3}$ чисел, а в пересечении всех трех кругов — $N_{123}=\frac{n}{p_1p_2p_3}$ чисел (это числа, делящиеся одновременно на p_1, p_2 и p_3, то есть на $p_1p_2p_3$).

Мы должны подсчитать, сколько чисел содержится в квадрате, но не попадает ни в один из кругов. Если мы вычтем из n сумму $(N_1+N_2+N_3)$, то числа, попавшие ровно в два из трех кругов, мы вычтем два раза, а числа, попавшие во все три круга — даже три раза.

Теперь к разности $N-(N_1+N_2+$ $+N_3)$ добавим сумму $(N_{12}+N_{13}+$ $+N_{23})$. Тогда все числа, попадающие только в один или только в два круга, мы учтем правильно, и только числа,

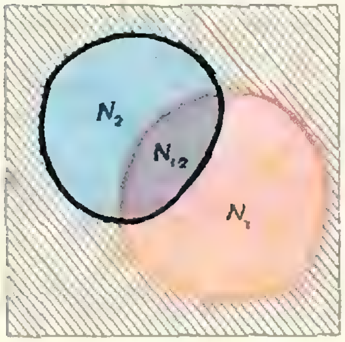


Рис. 4.

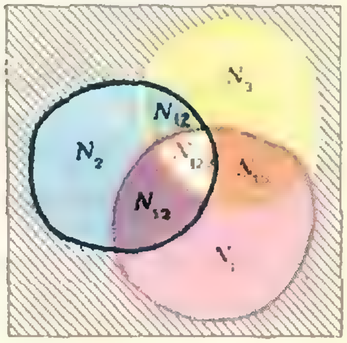


Рис. 5. Если всего в квадрате N элементов, то вне кругов их $N-N_1-N_2-$ $-N_3+N_{12}+N_{23}+N_{31}-$ $-N_{123}$.

попавшие во все три круга одновременно — неправильно: их количество мы трижды вычли и вновь трижды прибавили. Придется из суммы $N-(N_1+N_2+N_3)+(N_{12}+N_{13}+N_{23})$ вычесть еще N_{123}. Теперь все числа, вошедшие в объединение трех кругов, мы учли по разу и пришли к такой формуле:

$$\varphi(n)=n-\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}-\frac{n}{p_3}+\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+$$
$$+\frac{n}{p_2p_3}-\frac{n}{p_1p_2p_3}=$$
$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right). \quad (3)$$

Мы встретились здесь с частными случаями такого общего правила подсчета.

> *Правило включений и исключений.* Пусть задано множество A и выделено k его подмножеств. Количество элементов множества A, которые не входят ни в одно из выделенных подмножеств, подсчитывается так: надо из общего числа элементов A вычесть количества элементов всех k подмножеств, прибавить количества элементов всех их попарных пересечений, вычесть количества элементов всех тройных пересечений, прибавить количества элементов всех пересечений по четыре и т. д. вплоть до пересечения всех k подмножеств.

Применяя это правило к подсчету $\varphi(n)$, где

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k},$$

и используя алгебраическое тождество

$$1-x_1-x_2-\dots-x_k+x_1x_2+$$
$$+x_1x_3+\dots+x_{k-1}x_k-x_1x_2x_3-\dots-$$
$$-x_{k-2}x_{k-1}x_k+\dots+(-1)^kx_1x_2\dots x_k=$$
$$=(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_k)$$

(его левая часть устроена как раз по правилу «включений и исключений»), можно получить общую формулу

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Заметим, что написанное выше алгебраическое тождество можно использовать и при доказательстве общего правила включений и исключений: положив некоторые j из k букв $x_1, x_2, \dots, x_k$ равными 1, а остальные $(k-j)$ — нулю, мы получим (при $0<j<k$) в правой части 0, а левая часть покажет, что элементы пересечения ровно j подмножеств одинаковое число раз прибавляются и вычитаются.

В заключение отметим, что функция $\varphi(n)$ и функция $d(n)$ из предыдущего параграфа обладают таким важным свойством, которое в теории чисел называется мультипликативностью:

> Если a и b взаимно просты, то $\varphi(ab)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$ и $d(ab)=d(a)d(b)$

(Убедитесь в этом самостоятельно.)

Задачи

16. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 288?

17. Найдите а) $\varphi(96)$; б) $\varphi(540)$; в) $\varphi(1983)$.

18. Сколько существует чисел, не превосходящих 1000, которые а) делятся одновременно на 6 и на 15; б) делятся на 3, но не делятся на 7; в) делятся на 6 или на 15.

19. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

20. *Объединение множеств A и B состоит* из 25 элементов, пересечение — из 10 элементов. Сколько элементов в множестве A, если в B а) 15 элементов; б) 21 элемент; в) 10 элементов?

21. В декабре было 10 ясных и безветренных дней, 15 дней был ветер и 12 дней шел снег. Сколько дней была метель (и снег, и ветер)?

22. В группе из 25 студентов 12 изучают латынь, 10 — греческий и 9 — санскрит. Для каждых двух языков найдется ровно 5 студентов, изучающих оба этих языка. Сколько студентов изучает все три языка?

23. На каждой стороне треугольника ABC отмечены по 9 точек, разбивающих ее на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна стороне треугольника ABC?

Литература

1. И. М. Виноградов. «Основы теории чисел» (М., «Наука», 1980).

2. И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. «Элементы комбинаторики» (М., «Наука», 1977).

3. Л. А. Калужнин. «Основная теорема арифметики» (М., «Наука», 1969).

4. О. Оре. «Приглашение в теорию чисел». (М., «Наука», Библиотечка «Квант», 1980).

5. Л. А. Басова, М. А. Шубин, Л. А. Эпштейн. «Лекции и задачи по математике» (М., «Просвещение», 1981).

6. Заочные математические олимпиады (М., «Наука», 1981).

7. Р. Курант, Г. Роббинс. «Что такое математика?» (М., «Просвещение», 1967).

квант для младших школьников

Задачи

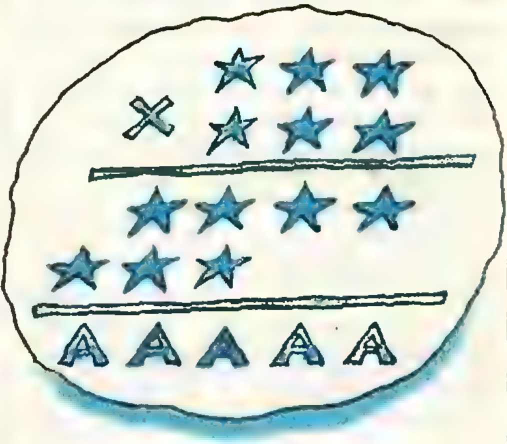
1. Пошел было Иван-царевич куда глаза глядят искать Василису Прекрасную, похищенную Кащеем, как навстречу ему Леший. «Знаю,— говорит,— я дорогу в Кащеево царство, случалось, ходил туда. Шел я четыре дня и четыре ночи. Первые день и ночь — прямой дорогой на север, и прошел я треть пути. Потом повернул на запад и продирался лесом сутки и прошел вдвое меньше. И третьи сутки шел лесом, уже на юг, и вышел на прямую дорогу, ведущую на восток. Прошагал я по ней за сутки сто верст и попал в Кащеево царство. Ты ходок такой же резвый, как и я, иди, Иван-царевич, глядишь, на пятый день будешь в гостях у Кащея». «Нет,— отвечал Иван-царевич,— если все так, как ты говоришь, то уже завтра я увижу мою Василису Прекрасную». Прав ли он? Сколько верст прошел Леший и сколько думает пройти Иван-царевич?

2. Задумано трехзначное число, у которого с любым из чисел 543, 142 и 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?

3. В этом числовом ребусе (см. рисунок) почти ничего неизвестно, однако он допускает лишь одно решение. Найдите его.

4. Шарик для игры в пинг-понг подбросили вверх. Что займет больше времени — подъем или спуск?

Эти задачи нам предложили
В. Журавлев, В. В. Произволов,
В. Н. Денисенко, А. П. Савин.



Пирамидки и куб

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

Мне захотелось поиграть с простой, но красивой головоломкой, которую я встретил в одной из статей Мартина Гарднера.

Я отправился в механическую мастерскую и попросил сделать мне по три детали согласно двум чертежам (рис. 1). Механик, к которому я обратился, чуть не обиделся, считая, что я его глупо разыгрываю. Но я и не думал шутить — чертежи были выполнены по всем правилам технического черчения (см. рис. 2.)

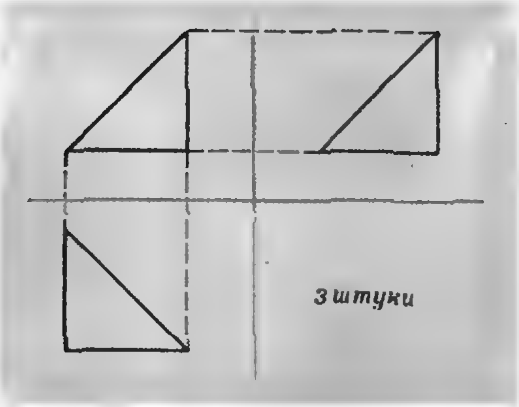
(Не заглядывая дальше, попробуйте нарисовать эти детали или представить, как они выглядят.)

Пытаясь облегчить задачу, я решил вместо шести деталей сделать только три по другому чертежу (рис. 3). Так как и этот чертеж оказалось нелегко расшифровать сразу, я не стал испытывать терпение механика и сам склеил модели из бумаги, по которым уже легко было бы сделать их и из металла. Но до этого так руки и не дошли: бумажные детали вполне годились для головоломки. (Вы можете изготовить эти детали, воспользовавшись развертками, показанными на рисунке 4).

Сами детали изображены на рисунке 5. Читатель разберется, по какому чертежу какая деталь склеена.

* * *

Сейчас можно поговорить и о головоломках. Из шести деталей первого типа или трех второго надо сло-



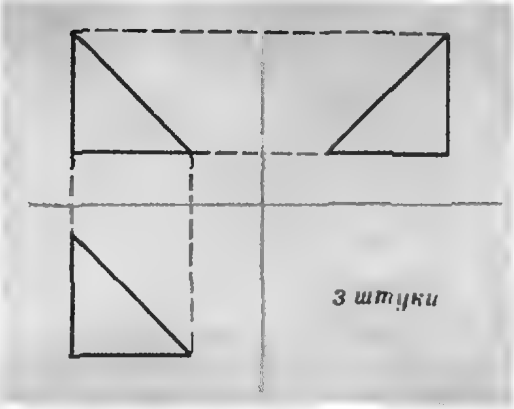


Рис. 1.

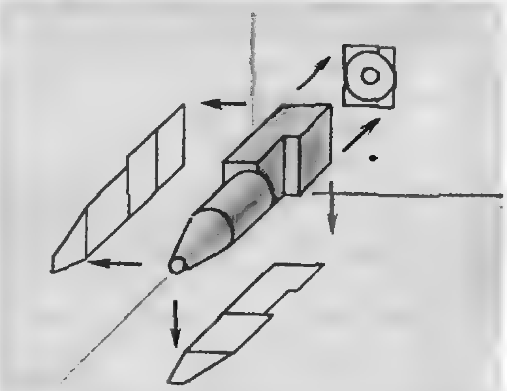


Рис. 2.

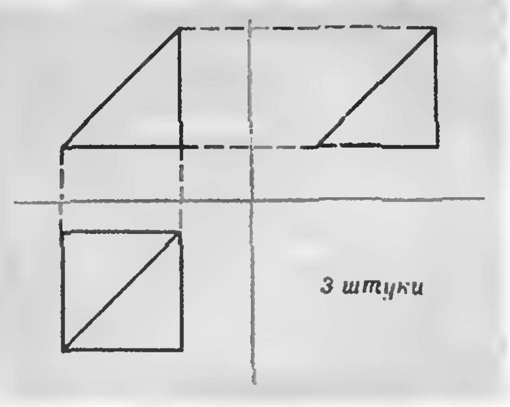


Рис. 3.

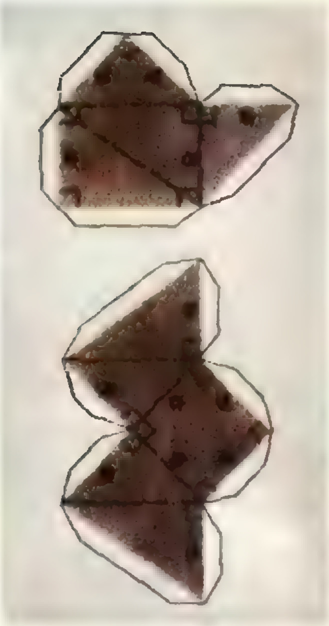


Рис. 4.

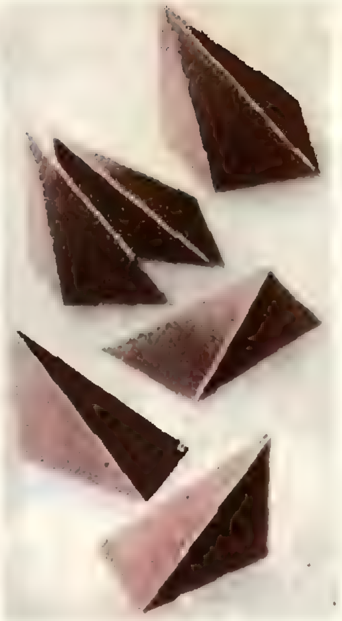


Рис. 5.

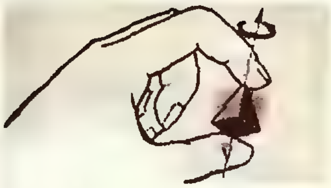


Рис. 6.

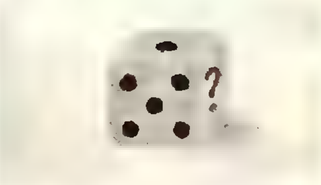


Рис. 7.

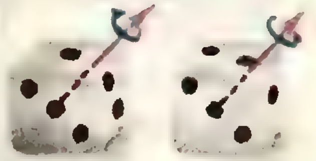


Рис. 8.

жить куб. Это на самом деле не трудно, но поучительно — попробуйте!

Возьмите двумя пальцами куб, сложенный из трех деталей второго типа, так, как показано на рисунке 6, и поворачивайте его аккуратно вокруг образовавшейся оси (эта ось — пространственная диагональ куба). При повороте на 120° и на 240° каждая из трех деталей будет переходить на место своего соседа. В таких случаях говорят, что фигура (куб) имеет *ось симметрии третьего порядка* (см. рис. 6).

Легко представить себе, как разделить яблоко на три одинаковые части — «третинки»; а вот такую «третинку» — одну треть куба — наверное вы еще не видели.

У этой «третинки» есть плоскость симметрии — ее можно разрезать плоскостью, перпендикулярной к квадратному основанию так, что это основание разделится на два конгруэнтных треугольника. Получатся две пирамидки — конгруэнтные, но не одинаковые; они *зеркальны*, то есть относятся друг к другу, как предмет и его изображение в зеркале.

Забавно, что обычно человеку трудно различить зеркально-симметричные объекты. Возьмите из набора рисунка 5 две пирамидки и, поставив их далеко друг от друга, спросите товарища, одинаковы они или зеркальны. Вы увидите, как этот вопрос для многих будет совсем не простым.

Можно проверить себя и так. У вас, наверное, есть игральный кубик. Всем известно, что сумма очков на противоположных гранях равна семи. Поэтому, посмотрев на одну грань, можно сразу сказать, сколько очков нанесено на противоположной грани. Но можно задать вопрос немного более трудный: сколько очков надо нанести на грань с вопросительным знаком (рис. 7)? Попробуйте догадаться и сравните со своим игральным кубиком.

* * *

Отвечая на последний вопрос, вы наверное заметили, что, в принципе, можно расставить очки двумя способами — зеркальными друг другу. Это значит, что существуют два типа кубиков — «правый» и «левый» (рис. 8). В играх обычно используют «левый» кубик — по крайней мере, говорят, что такой принят в игорных домах. В детских играх встречается и «правый» кубик — не все знают, что есть разница.

задачник кванта

Задачи

М781—М785; Ф793—Ф797

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 марта 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М781, М782» или «Ф793». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М781. Постройте прямую, параллельную стороне AC данного треугольника ABC и пересекающую его стороны AB и BC в таких точках D и E соответственно, что $|AD|=|BE|$.

Л. В. Ким

М782. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел равна 30 030, то их произведение не делится на 30 030.

С. В. Фомин

М783. а) При каком наибольшем n система неравенств

$$\begin{cases} 1<x<2, \\ 2<x^2<3, \\ 3<x^3<4, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n<x^n<n+1 \end{cases}$$

имеет решения?

б) Для каких n существуют такие две прогрессии — арифметическая $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ и геометрическая $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, что

$$a_1<b_1<a_2<b_2<a_3<\ldots<a_n<b_n<a_{n+1}?$$

М784. Шарообразная планета движется по окружности вокруг звезды и вращается вокруг своей оси, причем ось суточного вращения наклонена к плоскости орбиты под углом α (для нашей Земли $\alpha=66{,}5^\circ$). Найдите зависимость продолжительности T самого короткого дня в году в данном пункте на поверхности планеты от географической широты φ этого пункта. (Угловая скорость вращения планеты по орбите много меньше угловой скорости вращения планеты вокруг ее оси.) Напишите формулу для функции $T=T(\varphi)$ и начертите примерный график.

А. П. Савин

М785. а) Про возрастающую последовательность положительных чисел $a(n)$, $n=1, 2, 3, \ldots$ известно, что для любого натурального числа $k>1$ существует число b_k такое, что $a(kn)\leqslant b_k a(n)$ при всех n. Докажите, что существуют положительные числа c и α, для которых $a(n) < cn^{\alpha}$ при всех $n > 1$.

Останется ли верным это утверждение, если в условии

б) слово «любого» заменить на «некоторого»?

в) не требовать, чтобы последовательность $a(n)$ была возрастающей?

М. У. Гафуров

Ф793. На вогнутую сферическую поверхность радиуса R с высоты $H = R/8$ вблизи оси симметрии падают (с нулевой начальной скоростью) маленькие шарики. Считая удары шариков о поверхность абсолютно упругими, показать, что после первого соударения каждый шарик попадает в низшую точку поверхности. Взаимные соударения шариков не учитывать.

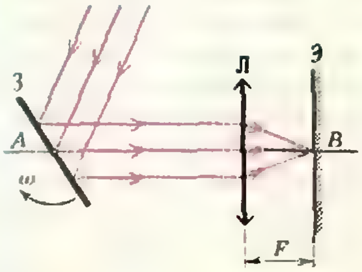
И. В. Кривченков

Ф794. Два одинаковых теплоизолированных калориметра высоты $h = 75$ см заполнены на одну треть один — льдом, другой — водой при температуре $t = 10$ °C. Воду из второго калориметра переливают в первый, и при этом калориметр оказывается заполненным на две трети. После того как температура в калориметре установилась, уровень заполнения его увеличился на $\Delta h = 0{,}5$ см. Какова была начальная температура льда в калориметре? Плотность льда — $\varrho_л = 9 \cdot 10^2$ кг/м^3, воды — $\varrho_в = 10^3$ кг/м^3; удельная теплота плавления льда — $\lambda = 3{,}4 \times 10^5$ Дж/кг; удельная теплоемкость льда — $c_л = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), воды — $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

А. И Буздин

Ф795. Вода течет по длинному каналу с прямоугольным сечением, наклоненному к горизонту. Можно считать, что сила трения воды о дно и берега канала пропорциональна средней скорости потока и обратно пропорциональна его глубине. Во время паводка количество воды, протекающей через сечение канала за одну секунду, увеличивается вдвое. Как меняется при этом средняя скорость потока?

Г. Л. Коткин



Ф796. На главной оптической оси AB собирающей линзы с фокусным расстоянием F находится плоское зеркальце, вращающееся с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной оси AB (см. рисунок). На зеркальце падает параллельный пучок лучей, который после отражения фокусируется на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы. Найти скорость светового пятна на экране в момент, когда оно проходит фокус линзы.

Е. Н. Пальчиков

Ф797. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого зависит от напряжения U на конденсаторе по закону $\varepsilon=\alpha U$, где $\alpha=0{,}1\ \text{В}^{-1}$. Параллельно этому «нелинейному» конденсатору (незаряженному) подключают обычный конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_0=60$ В. Каким будет напряжение на конденсаторах?

А. И. Буздин

Problems

M781—M785; P793—P797

M781. Construct a line parallel to the side AC of triangle ABC intersecting ite sides AB and BC in the points D and E respectively so that $|AD|=|BE|$

L. V. Kim

M782. Prove that if the sum of two numbers equals 30 030, then their product is not divisible by 30 030.

S. V. Fomin

M783. *a*) For what maximal n does the system of inequalities

$$\begin{gathered}1<x<2\\ 2<x^2<3\\ 3<x^3<4\\ \vdots\\ n<x^n<n+1\end{gathered}$$

have a solution?

b) For what n do there exist two progressions — an arithmetic one $a_1, a_2, a_3, \ldots$ and a geometric one b_1, $b_2, b_3, \ldots$ such that $a_1<b_1<a_2<b_2<a_3<\ldots<a_n<b_n<a_{n+1}$?

M784. A spherical planet moves along a circle around a star and rotates about its own axis, inclined to the orbit plane by the angle α (for our Earth $\alpha=66°.5$). Find the dependence of the duration T of the shortest day of the year at a given point of the planet's surface on the point's latitude φ. (The angular velocity of the planet on orbit is much less than that of the planet about its axis.) Find an expression for the functoon $T=T(\varphi)$ and plot its graph approximately.

A. P. Savin

M785. For the increasing sequence of positive numbers $a(n)$, $n=1, 2, 3, \ldots$ it is known that for any natural number k there exists a number b_k such that $a(kn)<b_k a(n)$ for all n. Prove that thers exist positive numbers c and α for which $a(n)<cn^{\alpha}$ for all $n>1$. Will this statement remain valid, if in the condition
a) the word "any" is repleced by "some"?
b) it is no longer assumed that the sequence $a(n)$ is increasing?

M. U. Gafurov

P793. Tiny balls fall from the height $H=R/8$ (with zero initial velocity) onto a concave spherical surface of radius R near its axis of symmetry. Assuming the collisions absolutely elastic, show that each ball will get to the lowest point of the surface on the first bounce. It may be assumed that the balls do not hit each other.

I. V. Kriuchenkov

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that March 31st 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication please send it us under sepa-

rate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

P794. Two identical thermoisolated calorimeters of height $h=75$ cm are filled to a third, one with ice, the other with water at temperature $t=10°C$. The water from the second calorimeter is poured into the first, filling it by two thirds. After the temperature in the calorimeter is established, the level of its contents increases by $\Delta h=0{,}5$ cm. What was the initial ice temperature in the first calorimeter? The density of ice is $\varrho_I=9\cdot10^2$ kg/m^3, of water — $\varrho_w=10^3$ kg/m^3; the specific heat of ice melting is $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ J/(kg $\cdot$ K); the specific heat capacity of ice is $c_I=2{,}1\cdot10^3$ J/(kg $\cdot$ K), of water — $c_w=4{,}2\cdot10^3$ J/(kg $\cdot$ K).

A. I. Buzdin

P795. Water flows along a long inclined canal with rectangular section. It may be assumed that the force of friction of water against the bottom and the sides of the canal is proportional to the water's mean velocity and inversely proportional to depth. After the spring thaw, the amount of water flowing through the canal's section during one second doubles. How does the water's mean velocity change?

G. I. Kotkin

P796. A small flat mirror is placed on the main optical axis AB of a convergent lens of focal distance F and rotates with angular velocity ω about an axis perpendicular to AB (see figure on page 40). A parallel beam of light falls on the mirror and, after reflection, focuses on a screen situated in the lens focal plane. Find the velocity of the spotof light when it passes the focus of the lens.

E. I. Palchikov

P797. A flat capacitor is filled with a dielectric whose dielectric parmeability depends on the voltage U on the capacitor in accordance to the rule $\varepsilon=\alpha U$, where $\alpha=0.1\text{V}^{-1}$. An ordinary capacitor, charged to the difference of potential $U_0=60$V, is set up parallel to the "nonlinear" flat capacitor (uncharged). What will the voltage on the capacitors then be?

A. I. Buzdin

Решения задач

M759—M761, M763, M764; Ф778—Ф782

M759. *Внутри выпуклого четырехугольника, у которого сумма шести попарных расстояний между вершинами (то есть сумма длин всех сторон и диагоналей) равна S_1, расположен другой, для которого эта сумма равна S_2.*

a) Может ли величина S_2 быть больше S_1?

b) Докажите, что $S_2<4S_1/3$.

c) Докажите, что если внутри произвольного тетраэдра с суммой длин ребер S_1 расположен другой, для которого эта сумма равна S_2, то $S_2<4S_1/3$.

Для любых четырех точек A, B, C, D плоскости или пространства (не обязательно различных) обозначим через P_{ABCD} сумму длин всех шести отрезков, соединяющих попарно эти точки.

a) Ответ: может. Один из примеров показан на рисунке 1: первый четырехугольник $ABCD$ сильно вытянут вдоль диагонали AC, причем $|AB|=|AD|=|AC|=a$, второй — $ABCN$ — вписан в первый так, что его вершина N лежит на отрезке AD вблизи точки A. Ясно, что $S_2=P_{ABCN}>S_1=P_{ABCD}$. Более того, если устремить длины отрезков BD и AN к нулю, то S_2 будет стремиться к $4a$, и S_1 — к $3a$, поэтому $S_2:S_1$ будет стремиться к $4/3$.

b) Доказательство неравенства $S_2<4S_1/3$ для четырехугольников легко получить незначительным изменением приводимого дальше доказательства для тетраэдров*).

c) В основе решения лежит следующая

Лемма (рис. 2). *Если точка H лежит на отрезке H_1H_2, то для любых трех точек E, F, G $P_{EFGH}\leqslant P_{EFGH_1}$ или $P_{EFGH}\leqslant P_{EFGH_2}$.*

---

*) См. также статью В. М. Тихомирова «Об одной олимпиадной задаче (с. 22).

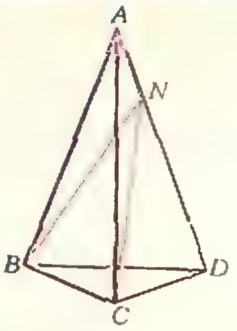


Рис. 1.

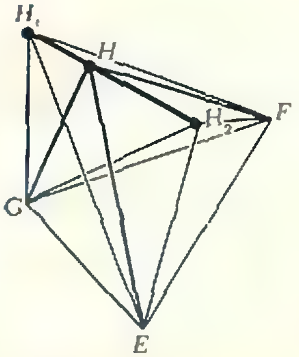


Рис. 2.

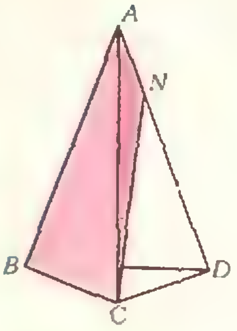


Рис. 3.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{H_1H}=\lambda\overrightarrow{H_1H_2}$. Тогда $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EH_1}+\lambda\overrightarrow{H_1H_2}=\lambda\overrightarrow{EH_2}+(1-\lambda)\overrightarrow{EH_1}$, следовательно, $|EH|<\lambda|EH_2|+(1-\lambda)|EH_1|$.

Аналогично,

$$|FH|<\lambda|FH_2|+(1-\lambda)|FH_1|,$$
$$|GH|<\lambda|GH_2|+(1-\lambda)|GH_1|.$$

Складывая эти три неравенства с равенствами

$$|EF|=\lambda|EF|+(1-\lambda)|EF|,$$
$$|FG|=\lambda|FG|+(1-\lambda)|FG|,$$
$$|GE|=\lambda|GE|+(1-\lambda)|GE|,$$

получим*)

$$P_{EFGH}\leq\lambda P_{EFGH_2}+(1-\lambda)P_{EFGH_1}, \qquad (1)$$

и поскольку $0<\lambda<1$, отсюда вытекает утверждение леммы.

Докажем теперь, что *для любых четырех точек* K, L, M, N, лежащих внутри тетраэдра $ABCD$,

$$P_{KLMN}\leq\frac{4}{3}P_{ABCD}. \qquad (2)$$

Проведем через точку N отрезок N_1N_2 с концами на гранях $ABCD$. По лемме P_{KLMN} не превосходит P_{KLMN_1} или P_{KLMN_2}, поэтому можно считать, что точка N лежит на одной из граней тетраэдра $ABCD$. Но тогда, проводя через точку N отрезок с концами на ребрах этой грани, мы сведем задачу к случаю, когда N лежит на одном из ребер тетраэдра. *Наконец, применяя в этом случае лемму* к точке N и концам содержащего ее ребра, мы получаем, что (2) достаточно проверить для четверок точек K, L, M, N, в которых N — одна из вершин тетраэдра $ABCD$.

Применяя такое же рассуждение последовательно к вершинам K, L, M, заключаем, что неравенство (2) можно доказывать только для точек K, L, M, N, расположенных в вершинах тетраэдра $ABCD$. Если все эти точки различны, то $P_{KLMN}=P_{ABCD}<\frac{4}{3}P_{ABCD}$.

Допустим теперь, что две из точек K, L, M, N совпадают, например, $K=L=A$. Если совпадают и две другие точки, скажем, $M=N=B$, то, очевидно,

$$P_{KLMN}=4|AB|=\frac{4}{3}\cdot3|AB|<\frac{4}{3}(|AB|+(|AC|+$$
$$+|CB|)+(|AD|+|DB|))<\frac{4}{3}P_{ABCD}. \qquad (3)$$

Если точки M и N различны, $M=B$, $N=C$, то $P_{KLMN}=2|AB|+2|AC|+|BC|$. Пользуясь неравенствами $|AB|<|AD|+|DB|$, $|AC|<|AD|+|DC|$ и $|AD|<<\frac{1}{3}(|AD|+(|AC|+|CD|)+(|AB|+|BD|))<<\frac{1}{3}P_{ABCD}$, получим

$$P_{KLMN}<|AB|+|AD|+|DB|+|AC|+|AD|+|DC|+$$
$$+|BC|=P_{ABCD}+|AD|<\frac{4}{3}P_{ABCD}.$$

Наконец, возможен случай, когда совпадают три вершины внутреннего тетраэдра, скажем, $K=L=M=A$, $N=B$. Тогда $P_{KLMN}=3|AB|<4|AB|$; далее см. (3).

Коэффициент 4/3 в условии уменьшить нельзя. Для доказательства вернемся к рисунку 1. Если чуть-чуть приподнять точку C над плоскостью ABD, мы получим два тетраэдра — $ABCN$ и $ABCD$ — первый внутри второго (рис. 3). При этом, как мы показали в п. *а*), отношение $P_{ABCN}:P_{ABCD}$ можно сделать сколь угодно близким к 4/3.

Н. Б. Гусятников

M760. *С замкнутой ломаной $A_1A_2...A_m$, где m нечетно, проделывается такая операция: середины ее звеньев соединяются m отрезками через одну (середина A_1A_2 — с серединой A_3A_4, A_2A_3 — с A_4A_5, ..., $A_{m-1}A_m$ — с A_1A_2, A_mA_1 — с A_2A_3). С полученной ломаной вновь проделывается эта же операция, и т. д. Докажите, что из любой m-звенной ломаной*

а) при $m=5$ — через два шага,

б) при $m=7$ — через три шага,

в) при любом нечетном m — через некоторое (зависящее от m) число шагов получится ломаная, подобная (даже гомотетичная) первоначальной.*

Фиксируем произвольную точку O (ее положение мы уточним в процессе решения), тогда любую точку A можно задавать вектором $\overrightarrow{OA}$ — вектором точки A. Если обозначить векторы вершин данной ломаной $Л$ через $\bar{a}_1=\overrightarrow{OA}_1$, ..., $\bar{a}_m=\overrightarrow{OA}_m$, то векторы вершин ломаной $Л_1$, которая получается из $Л$ в результате указанной в задаче операции, равны

$$\frac{1}{2}(\bar{a}_1+\bar{a}_2),\ \frac{1}{2}(\bar{a}_3+\bar{a}_4),\ \dots$$
$$\dots,\ \frac{1}{2}(\bar{a}_m+\bar{a}_1),\ \frac{1}{2}(\bar{a}_2+\bar{a}_3),\ \dots,\ \frac{1}{2}(\bar{a}_{m-1}+\bar{a}_m),$$

поскольку вектор середины отрезка равен полусумме векторов его концов. Аналогично, векторы вершин следующей ломаной равны

$$\frac{1}{4}(\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4),\ \frac{1}{4}(\bar{a}_5+\bar{a}_6+\bar{a}_7+\bar{a}_8),\ \dots,$$
$$\dots,\ \frac{1}{4}(\bar{a}_{m-3}+\bar{a}_{m-2}+\bar{a}_{m-1}+\bar{a}_m).$$

Вообще, *для нахождения векторов вершин ломаной $Л_k$ нужно 2^k раз записать последовательность векторов вершин ломаной $Л$:*

$$\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \dots\ \bar{a}_m,\ \bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \dots,\ \bar{a}_m,\ \dots,\ \bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \dots,\ \bar{a}_m,$$

сложить первые 2^k векторов этой строки, следующие 2^k векторов и так далее, а затем каждую из полученных m сумм разделить на 2^k.

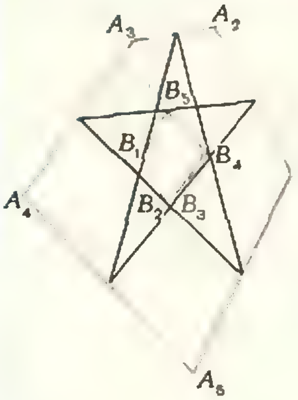
а) Пользуясь выведенным правилом, найдем векторы вершин ломаной $Л_2$ для $m=5$:

$$\frac{1}{4}(\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4),\ \frac{1}{4}(\bar{a}_5+\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3),\ \dots$$
$$\dots,\ \frac{1}{4}(\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4+\bar{a}_5)$$

или, полагая $\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4+\bar{a}_5=\bar{a}$:

$$\frac{1}{4}(\bar{a}-\bar{a}_5),\ \frac{1}{4}(\bar{a}-\bar{a}_4),\ \frac{1}{4}(\bar{a}-\bar{a}_3),\ \frac{1}{4}(\bar{a}-\bar{a}_2),\ \frac{1}{4}(\bar{a}-\bar{a}_1).$$

Теперь заметим, что точку O всегда можно выбрать так, чтобы сумма $\bar{a}$ векторов вершин ломаной $Л$ равнялась $\vec{0}$ (см. конец решения). В этом случае векторы вершин ломаной $Л_2$ будут равны $-\frac{1}{4}\bar{a}_5$, $-\frac{1}{4}\bar{a}_4$, $-\frac{1}{4}\bar{a}_3$, $-\frac{1}{4}\bar{a}_2$, $-\frac{1}{4}\bar{a}_1$, поэтому сами вершины будут гомотетичны вершинам ломаной $Л$ относительно точки O с коэффициентом $-1/4$ (см. рисунок): 1-я вершина ломаной $Л_2$ соответствует 5-й вершине A_5 ломаной $Л$, 2-я — соответствует A_4, 3-я — A_3, 4-я — A_2 и 5-я — A_1. При этом и порядок соединения вершин $Л_2$ будет таким же, как у соответствующих вершин $Л$, хотя направление их обхода будет противоположным.



б), в) Всегда можно выбрать такое k, чтобы число 2^k-1 делилось на нечетное число m. (В частности, в задаче б) $m=7$, а $k=3$). Действительно, среди чисел $1, 2, 2^2, \dots$ обязательно найдутся два, 2^l и 2^n $(l<n)$, которые дают одинаковые остатки при делении на m. Их разность $2^n-2^l=2^l(2^{n-l}-1)$ делится на m без остатка. А так как m нечетно, отсюда вытекает, что при $k=n-l$ число 2^k-1 делится на m; пусть $2^k-1=mp$.

Тогда $2^k=mp+1$, и согласно нашему правилу нахождения векторов вершин ломаной $Л_k$ они представляются в виде

$$\frac{1}{2^k}(p\bar{a}+\bar{a}_1),\ \frac{1}{2^k}(p\bar{a}+\bar{a}_2),\ \dots,\ \frac{1}{2^k}(p\bar{a}+\bar{a}_m),$$

где $\bar{a}=\bar{a}_1+\dots+\bar{a}_m$. Если точка O выбрана так, что $\bar{a}=\overrightarrow{OA}_1+\dots+\overrightarrow{OA}_m=\vec{0}$, то векторы вершин ломаной $Л_k$ равны $2^{-k}\bar{a}_1, \dots, 2^{-k}\bar{a}_m$, и поэтому она гомотетична ломаной $Л$ с центром гомотетии O и коэффициентом 2^{-k}.

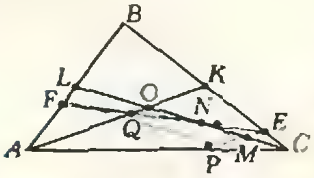
Остается объяснить, как найти нужную нам точку O — центр гомотетии. Сумму векторов вершин можно записать в виде

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_m}=\overrightarrow{OA_1}+(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2})+\ldots$$
$$\ldots+(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_m})=m\cdot\overrightarrow{OA_1}+(\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_1A_m}),$$

поэтому, если $\overrightarrow{A_1O}=\frac{1}{m}(\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_1A_m})$, то $\vec{a}=\vec{0}$. (Эта точка O — центр тяжести одинаковых масс, помещенных в точки A_1, A_2, ..., A_m).

А. В. Келарев, Н. Б. Васильев, А. Н. Землянов

М761. *Через произвольную точку P на стороне AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно (см. рисунок).*



Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три одинаковые части.

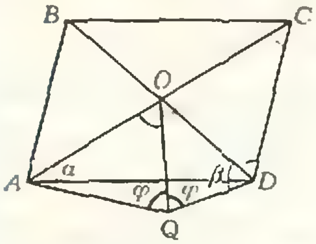
◆

Из подобий $\Delta EMC\sim\Delta OKC$ и $\Delta PMC\sim\Delta AOC$ следует, что $\frac{|ME|}{|OK|}=\frac{|CM|}{|OC|}=\frac{|PM|}{|AO|}$. Поэтому $\frac{|ME|}{|PM|}=\frac{|OK|}{|OA|}=\frac{1}{2}$. Кроме того, $\Delta NEM\sim\Delta EFP$, и поэтому $\frac{|NE|}{|EF|}=\frac{|ME|}{|PE|}=\frac{1}{3}$.

Следовательно, $|EN|=\frac{1}{3}|EF|$. Так же доказывается, что $|FQ|=\frac{1}{3}|EF|$. Поэтому $|FQ|=|QN|=|NE|$.

А. А. Егоров

М763*. *Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. Прямая, симметричная прямой AB относительно диагонали AC, пересекает в точке Q прямую, симметричную прямой DC относительно диагонали DB. Найдите отношение $|QA|:|QD|$, если известно отношение $|AC|:|BD|=k$.*



◆

Ответ: $|QA|:|QD|=k^2$. Пусть O — точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Докажем, что треугольники AQO и OQD подобны (см. рисунок).

Прежде всего, заметим, что QO — биссектриса угла AQD. Действительно, точка O равноудалена от прямых AQ и AB (так как AO — биссектриса угла QAB), от прямых DQ и DC (так как DO — биссектриса угла QDC) и от прямых AB и DC (как центр параллелограмма). Поэтому она равноудалена от прямых AQ и DQ, то есть лежит на биссектрисе образуемого ими угла.

Положим $\widehat{AQO}=\widehat{OQD}=\varphi$, $\widehat{QAO}=\alpha$, $\widehat{QDO}=\beta$. Тогда $\widehat{AOD}=2\pi-\alpha-\beta-2\varphi$. В то же время AOD — внешний угол треугольника ODC, в котором $\widehat{OCD}=\widehat{OAB}=\alpha$, $\widehat{ODC}=\beta$ (см. рисунок). Следовательно, $\widehat{AOD}=\alpha+\beta$, то есть $2\pi-\alpha-\beta-2\varphi=\alpha+\beta$. Отсюда вытекает, что $\alpha+\beta+\varphi=\pi$ и, значит, $\widehat{AOQ}=\pi-\alpha-\varphi=\beta=\widehat{ODQ}$. Поскольку треугольники AQO и OQD имеют соответственно равные углы, они подобны с коэффициентом подобия $|AO|:|OD|=|AC|:|BD|=k$. Таким образом,

$$\frac{|QA|}{|QD|}=\frac{|QA|}{|QO|}\cdot\frac{|QO|}{|QD|}=k^2.$$

Замечание. Стоит пояснить происхождение этой, как будто довольно искусственной, задачи. Дело в том, что Q — это неподвижная точка преобразования подобия (одного из двух возможных), которое переводит точку A в O, а O — в D. Его можно представить как композицию поворота вокруг точки Q на угол φ (на нашем рисунке — по часовой стрелке) и гомотетии H_Q^k. Преобразования этого типа называют *поворотными гомотетиями* или *спиральными подобиями*. Таким образом, построение, описанное в условии задачи, позволяет найти спиральное подобие F, если заданы точки A, $F(A)$ $(=O)$ и $F(F(A))$ $(=D)$. Второе преобразование подобия, переводящее точки A и O в O

и D соответственно, является композицией осевой симметрии и гомотетии с центром на ее оси. Подумайте, как построить его неподвижную точку.*).

В. Н. Дубровский

◆

М764*. *Докажите, что каждое из уравнений а) $x^2+y^3=z^5$; б) $x^2+y^3+z^5=t^7$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.*

а) Попробуем искать решения среди степеней одного и того же натурального числа $a: x=a^k$, $y=a^e$, $z=a^m$ (k, e, m — натуральные).

Подстановка таких x, y, z в уравнение дает равенство $a^{2k}+a^{3e}=a^{5m}$. Легко видеть, что при $2k\neq 3e$ такое равенство невозможно. Поэтому $2a^{2k}=a^{5m}$. Отсюда следует, что $a=2$.

Положим $x=2^{3n}$, $y=2^{2n}$, при этом $x^2+y^3=2^{6n+1}$, и, следовательно, число $6n+1$ должно делиться на 5.

А так как $6n+1$ делится на 5 только при $n=5s+4$ ($s\geqslant 0$), получаем бесконечную серию решений:

$$x=2^{15s+12},\ y=2^{10s+8},\ z=2^{6s+5},\ s\in Z,\ s\geqslant 0.$$

б) Решается аналогично *а*). Нужно искать решения, для которых $x=3^{15n}$, $y=3^{10n}$, $z=3^{6n}$. После подстановки в уравнение получим $3^{30n+1}=t^7$, но $30n+1$ делится на 7 при $n=7s+3$, $s\geqslant 0$, $s\in Z$. Нами получена бесконечная серия решений $x=3^{105s+45}$; $y=3^{70s+30}$; $z=3^{42s+18}$; $t=3^{30s+13}$.

Нетрудно заметить, что вообще уравнение $x_1^{a_1}+x_2^{a_2}+\ldots+x_n^{a_n}=y^b$ имеет бесконечное число решений в целых числах, если наименьшее общее кратное M чисел a_1, a_2, ..., a_n взаимно просто с b. Так же как и в пунктах *а*) и *б*), решения можно искать в виде степеней числа n.

Положим $x_1=n^{\frac{M}{a_1}t}$, ..., $x_n=n^{\frac{M}{a_n}t}$, где $t\in N$. После подстановки x_1, x_2, ..., x_n в уравнение, получим равенство $n^{Mt+1}=y^b$, и так как M и b взаимно простые, существует бесконечное количество t, при которых $Mt+1$ делится на b.

О. В. Мазуров

◆

Ф778. *Колечко массы m, свободно скрепляющее два тонких обруча массы M, начинает соскальзывать вниз; обручи при этом разъезжаются в разные стороны по шероховатой горизонтальной поверхности. Определить ускорение колечка в начальный момент времени, если угол AO_1O_2 (см. рисунок) равен α. Трение между колечком и обручами отсутствует.*

Пусть за малый промежуток времени Δt после начала движения системы колечко опустилось на расстояние Δx от точки A и приобрело скорость v. Скорость поступательного движения обручей в этот момент должна быть равна $u=v\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (Δt настолько мало, что угол α практически не изменился). Следовательно, такова же линейная скорость всех точек обручей. Согласно закону сохранения энергии,

$$mg\cdot\Delta x=2Mu^2+m\frac{v^2}{2}=2Mv^2\mathrm{tg}^2\alpha+m\frac{v^2}{2}$$

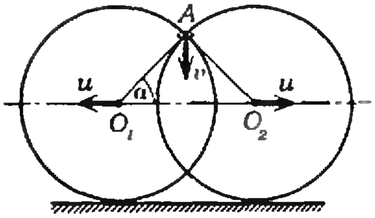
(Mu^2 — полная кинетическая энергия каждого обруча в данный момент). Из этого равенства находим

$$\frac{v^2}{2\cdot\Delta x}=\frac{mg}{4M\,\mathrm{tg}^2\alpha+m}=g\frac{1}{1+4\frac{M}{m}\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

При $\Delta x\to 0$ можно считать, что $v^2=2a\cdot\Delta x$, где a — мгновенное ускорение колечка в начале движения. Следовательно,

$$a=g\frac{1}{1+4\frac{M}{m}\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

С. С. Кротов



---

*) Подробнее о преобразованиях подобия и их применениях в геометрии можно прочитать в следующих книгах: И. М. Яглом «Геометрические преобразования», т. I, (М., Гостехтеориздат, 1955) и Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер «Новые встречи с геометрией» (М., «Наука», 1978)

Ф779. *Квадрат, состоящий из двух половинок, отношение масс которых равно двум, находится на шероховатой поверхности. Под каким углом α к границе раздела половинок необходимо тянуть веревку в горизонтальной плоскости, чтобы квадрат двигался поступательно? Точка приложения силы лежит в точке пересечения стороны квадрата и границы раздела.*

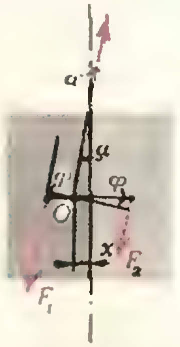
Пусть квадрат движется поступательно и при этом нить составляет угол α с прямой AB (см. рисунок). Сила трения, действующая на левую половину квадрата, направлена против движения квадрата и проходит через центр масс левой половины (мы считаем, что сила нормального давления равномерно распределена по поверхности соприкосновения квадрата с горизонтальной плоскостью). Абсолютное значение этой силы равно

$$F_1 = \mu m_1 g,$$

где μ — коэффициент трения, m_1 — масса левой половины квадрата. Сила трения, действующая на правую половину квадрата, проходит через центр масс этой половины, направлена против движения квадрата, то есть параллельно силе $\vec{F}_1$, и равна по абсолютной величине

$$F_2 = \mu m_2 g,$$

где m_2 — масса правой половины квадрата. Результирующая сил трения равна по абсолютной величине $\mu(m_1+m_2)g$ и приложена к центру масс всего квадрата. Следовательно, линия действия силы, с которой тянут за веревку, должна проходить через центр масс квадрата (точка O на рисунке), то есть веревка должна составлять с линией AB угол α такой, что (см. рисунок)



$$\operatorname{tg}\alpha = x/a.$$

Величину x находим из условия равенства моментов сил F_1 и F_2 относительно центра масс квадрата:

$$\mu m_1 g\left(\frac{a}{2} - x\right)\cos\varphi = \mu m_2 g\left(\frac{a}{2} + x\right)\cos\varphi,$$

откуда

$$x = \frac{a(m_1 - m_2)}{2(m_1+m_2)}.$$

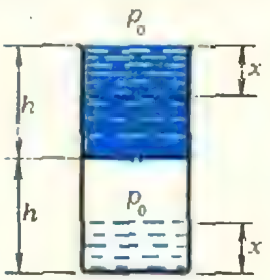
Учитывая, что $m_1/m_2 = 2$, находим $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a} = \frac{1}{6}.$$

Э. С. Алиев

◆

Ф780. *Цилиндрический сосуд высоты 2h, поровну разделенный перегородкой, содержит в верхней части воду (ее плотность ϱ), в нижней — воздух при атмосферном давлении p_0. В перегородке открывается небольшое отверстие, так что вода начинает протекать в нижнюю часть сосуда. Какой толщины будет слой воды в нижней части сосуда, когда воздух начнет проходить из отверстия вверх? Температура постоянна. Ускорение силы тяжести равно g.*



Воздух из нижней части сосуда начнет проходить через отверстие вверх, когда давление его превысит гидростатическое давление воды на уровне отверстия, то есть при давлении

$$p = p_0 + \varrho g(h - x),$$

где x — понижение уровня воды в верхней части сосуда и, соответственно, толщина слоя воды в нижней части сосуда. Так как температура воздуха не меняется, согласно закону Бойля—Мариотта

$$p_0 h S = p(h - x)S,$$

где S — площадь дна сосуда.

Таким образом,

$$p_0(h - x) + \varrho g(h - x)^2 = p_0 h,$$

откуда

$$\varrho g x^2 - (2\varrho g h + p_0)x + \varrho g h^2 = 0.$$

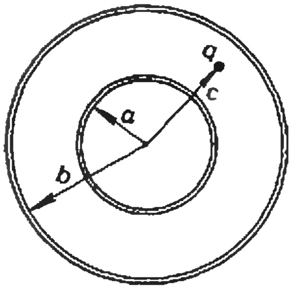
Решая это уравнение, находим x:

$$x = h + \frac{p_0}{2\varrho g}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\varrho g h}{p_0}}\right).$$

(Решение $x = h + \dfrac{p_0}{2\varrho g}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4\varrho g h}{p_0}}\right)$ не подходит, так как заведомо $x < h$.)

В. И. Бородин

Ф781. *Между двумя незаряженными металлическими концентрическими сферами радиусов a и b находится точечный заряд q на расстоянии c от центра сфер. Какой заряд протечет по тонкому проводнику, если им замкнуть сферы?*



Вначале малая сфера была не заряжена. После замыкания сфер на нее перетечет некоторый заряд, который распределится по ее поверхности неравномерно. Обозначим величину этого заряда q_1. При этом на внутренней поверхности большой сферы появится заряд q_2, распределенный по этой поверхности тоже неравномерно. Силовые линии поля, создаваемого зарядом q, заканчиваются на малой сфере и на внутренней поверхности большой сферы. Следовательно, заряд q_2 должен быть равен

$$q_2 = -(q+q_1).$$

Поскольку эти силовые линии не проникают наружу через толщу большой сферы, заряд на внешней поверхности этой сферы распределен равномерно и не создает поля внутри сферы. Значит, приравнивая потенциалы внутренней и наружной сфер (сферы соединены проводником), этот заряд можно не учитывать, а потенциал внешней сферы принять равным нулю. Тогда потенциал в центре сфер также будет равен нулю (внутри малой сферы поля нет и потенциал малой сферы равен потенциалу в центре сфер).

Таким образом,

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} = 0.$$

Подставив $q_2 = -(q+q_1)$, из этого условия найдем q_1:

$$q_1 = -q\,\frac{\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}.$$

Ясно, что величина заряда q_1 не зависит от начальных зарядов сфер и определяется только величиной q и размерами системы. Весь «лишний» заряд расположится на внешней поверхности большой сферы, определяя потенциал проводника в целом. Интересно отметить, что при движении заряда q (при изменении c) величина q_1 (а значит, и q_2, и $q_{внеш}$) может меняться; следовательно, может меняться и поле снаружи. Поле же внутри такого сферического «экрана» не зависит от величины и расположения внешних зарядов.

В. И. Комов

◆

Ф782. *Конденсатор зарядили до напряжения $U_0 = 100$ В и подключили к нему резистор. При этом за некоторый интервал времени выделилась в виде тепла энергия $W_1 = 1$ Дж, и еще за такой же интервал — энергия $W_2 = 0{,}3$ Дж. Определить емкость конденсатора.*

Пусть к концу первого интервала напряжение на конденсаторе уменьшилось до U_1. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{CU_0^2}{2} = W_1 + \frac{CU_1^2}{2},$$

откуда

$$U_1 = U_0\sqrt{1 - \frac{2W_1}{CU_0^2}}.$$

Ясно, что если бы начальное напряжение на конденсаторе было в n раз меньше чем U_0, то за тот же интервал времени на резисторе выделилось бы тепла в n^2 раз меньше чем W_1. Это означает, что

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{U_1^2}{U_0^2}$$

(U_1 — начальное напряжение для следующего интервала времени). Подставляя в это выражение полученное ранее значение U_1, находим C:

$$C = \frac{2W_1}{U_0^2\left(1 - \dfrac{W_2}{W_1}\right)} \approx 29 \text{ мкФ}.$$

А. Р. Зильберман

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

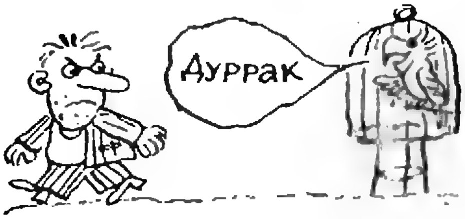
Поэзия? Математика?

Э. П. Казанджан

Из всех наук математика считается самой абстрактной. Справедливо ли это? Действительно, многие ее понятия, методы, теоремы кажутся какими-то неестественными, придуманными. Именно кажутся. Ведь источник всех математических выдумок — сама жизнь. Наше бытие во многом математично, и сознание наше насыщено математикой, да ее ощущают и бессознательно. Уж, кажется, что может быть дальше от математики, чем поэзия? Но, внимательно вглядываясь в некоторые стихотворные строчки, можно не без удивления обнаружить, что их авторы — весьма грамотные математики, хотя бы потенциально, и они очень тонко чувствуют многие важнейшие понятия математики. Примеров много.

Б. Заходер. Попугай

— Если сможешь, угадай,
Что нам скажет попугай?
— То и скажет, полагаю,
Что вдолбили попугаю!

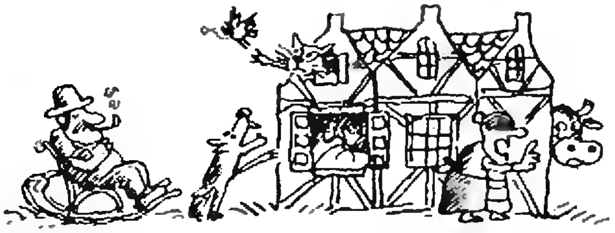


Впечатление такое, что эти стихи сочинены специально с целью дать иллюстрацию к понятию тождественного отображения.

С. Маршак

Вот дом,
Который построил Джек.
А вот пшеница,
Которая в темном чулане хранится
В доме,
Который построил Джек

....



Неплохой пример того, что подмножество подмножества данного множества содержится в этом множестве.

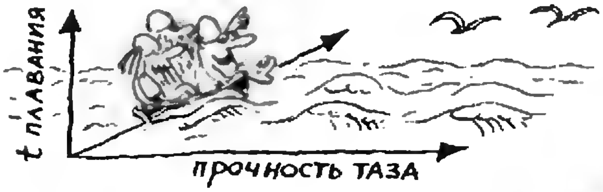
Б. Заходер. Джонни (вольный пер. с англ.)

Жил на свете Джонни.
Знаете его?
Не было у Джонни
Ровно ничего!
Нечего покушать,
Нечего надеть,
Не к чему стремиться,
Не о чем жалеть,
Нечего бояться,
Нечего терять...
Весело живется,
Нечего сказать!

Ведь это же нулевой вектор — все координаты равны нулю.

С. Маршак. Три Мудреца
(вольный пер. с англ.)

Три мудреца в одном тазу
Пустились по морю в грозу.
Будь попрочнее старый таз,
Длиннее был бы мой рассказ.



П. Вяземский

Чтоб более меня читали,
Я стану менее писать.

Наглядные примеры прямой и обратной пропорциональности.

М. Лермонтов

Как я хотел себя уверить,
Что не люблю ее, хотел
Неизмеримое измерить,
Любви безбрежной дать предел.

Как видно, Лермонтов не только знал, что не всякая функция имеет предел, но и нашел конкретный пример. Несколько парадоксальные, но, в принципе, верные примеры на эту тему имеются у К. Бальмонта и С. Смирнова.

К. Бальмонт

Снежная равнина без предела.
По краям все лес, и лес, и лес.

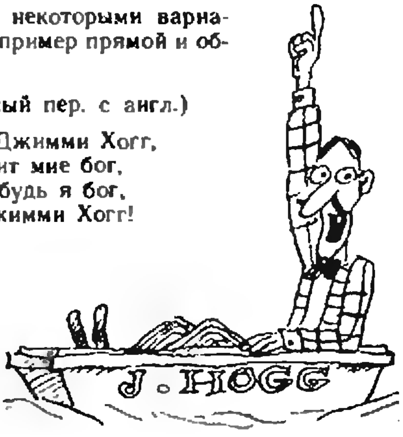
С. Смирнов. Наивная комета

— Я выше всех!—
подумала Комета.
И даже где-то
Подчеркнула это.
А на нее
с улыбкой
поглядела
Вселенная,
Которой нет предела.

Следующую эпитафию с некоторыми вариациями можно давать как пример прямой и обратной теорем.

С. Маршак (вольный пер. с англ.)

Здесь я покоюсь, Джимми Хогг,
Авось грехи простит мне бог,
Как я бы сделал, будь я бог,
А он покойный Джимми Хогг!



Стандартные приемы программирования

Урок 4. Синхронная и асинхронная обработка массивов

Если вам не удалось найти общность и различия в условиях задач, попробуйте ответить на вопрос: с какими элементами массивов будет идти работа, скажем, на 5-м шаге работы алгоритма (шагом считаем обработку одного элемента в любом массиве)? В 3-й и 4-й задаче ответ на этот вопрос прост: на 5-м шаге обрабатываются 5-е элементы в массивах *A* и *B* (3-я задача), 5-й элемент в массиве *B* и 10-й элемент в массиве *A* (4-я задача). Что же касается первых двух задач, то на 5-м шаге обрабатывается 5-й элемент того массива, по которому мы отсчитываем шаги, но про другие массивы мы ничего сказать не можем (за исключением того, что обрабатывается элемент с большим, чем в данном массиве, или меньшим номером). Это и есть **ключевой момент**: в задачах 3 и 4 массивы обрабатываются **синхронно** (то есть имеется явная, *аналитически выражаемая* связь между номерами обрабатываемых элементов в разных массивах; в задачах 1 и 2 между номерами обрабатываемых элементов в каждой паре массивов нельзя указать связь, не зависящую от конкретных массивов, которую можно *выразить формулой, связывающей только эти номера и какие-то константы*. Поэтому можно сказать, что в задачах 1 и 2 массивы обрабатываются **асинхронно**.

Теперь рассмотрим приведенные решения. Все решения правильны, но не все одинаково хороши. Задачи 3 и 4, по-видимому, не вызвали трудностей, однако решение 4б не самое лучшее по краткости и легкости его понимания. Поскольку в задачах 3 и 4 массивы обрабатываются синхронно,

достаточно иметь один индекс для обработки всех синхронно обрабатываемых массивов.

В 1-й и 2-й задачах массивы обрабатываются асинхронно, поэтому попытка обойтись одним индексом заранее обречена на неудачу:

при асинхронной обработке массивов для каждого из асинхронно обрабатываемых массивов необходим свой индекс (см. решения 1а, 1б, 2а, 2б).

Решение

(а)

Задача 1 (Слияние упорядоченных массивов)

```
i:=1; j:=1;
for k:=1 to m+n do
begin if (i<=n)AND(j<=m)
        then if a[i]<b[j]
                then begin
                        c[k]:=a[i]; i:=i+1
                        end
                else begin
                        c[k]:=b[j]; j:=j+1
                        end
        else if i<=n
                then begin
                        c[k]:=a[i]; i:=i+1
                        end
                else begin
                        c[k]:=b[j]; j:=j+1
                        end
end;
```

Задача 2 (Сортировка чисел)

```
j:=1; k:=1;
for i:=1 to n do
begin
   if a[i]>0 then begin пол[j]:=a]i];
                        j:=j+1 end;
   if a[i]<0 then begin отр[k]:=a[i];
                        k:=k+1 end;
end;
пол[j]:=0; отр[k]:=0;
```

Задача 3 (Скалярное произведение)

```
S:=0; for i:=1 to n do
        s:=s+a[i]*b[i];
```

Задача 4 (Копирование через один элемент)

```
for i:=1 to n do b[i]:=a[2*i];
```

В принципе, конечно, можно вместо индекса ввести, например, счетчики, фиксирующие отставание одного индекса от другого (см. решение 2в), *но это не упрощает программу, а только нарушает единообразие обработки массивов.*

Рассмотрим подробнее решения 1а и 1б. В основе этих решений лежат 2 *стратегически* отличающихся подхода. Первое решение можно прокомментировать так: «Выполняем $m+n$ шагов переписывания в массив *C*. На каждом шаге, если массивы *A* и *B* еще не исчерпаны, то переписываем текущий минимальный элемент, иначе — элемент из еще не исчерпанного массива». Второе решение соответствует подходу «Переписываем текущий минимальный элемент пока не исчерпается один из массивов. Затем дописываем оставшийся массив». Оба подхода в целом равноправны, хотя программа 2б будет выполняться быстрее.

Теперь сравним решения 2а и 2б. Формально решение 2б правильно, однако в аналогичных ситуациях здесь применены два *технически* отличающихся подхода: *i* нумерует *первый свободный* элемент массива и изменяется *после переписывания*, а *k* нумерует

(б)

Задача 1

```
i:=1; j:=1; k:=1;
while (i<=n)AND(j<=m) do
begin if a[i]<b[j]
        then begin
               c[k]:=a[i]; i:=i+1 end
        else begin
               c[k]:=b[j]; j:=j+1 end;
  k:=k+1
end;
if j<=m then for j:=j to m do
                begin c[k]:=b[j],
                  k:=k+1 end
             else for i:=i to n do
             begin c[k]:=a[i];
               k:=k+1 end;
```

Задача 2

```
j:=1; k:=0;
for i:=1 to n do
begin
  if a[i]>0 then begin пол[j]:=a[i];
                       j:=j+1 end;
  if a[i]<0 then begin k:=k+1;
                       отр[k]:=a[i] end
end;
пол[j]:=0; отр[k÷1]:=0;
```

Задача 4 (Копирование)

```
j:=2; for i:=1 to n do
begin b[i]:=a[j]; j:=j+2 end;
```

последний занятый элемент и изменяется *до переписывания*. В более сложных случаях такой разнобой в обработке сходных ситуаций может повлечь ошибку, и в любом случае он не способствует легкости понимания программы. В технических вопросах каждый программист должен иметь любимые технические приемы и не изменять им без достаточных оснований, тогда больше творческих сил останется на решение стратегических вопросов.

В программе 2*а* по два раза повторяются одинаковые строчки. Этого можно избежать путем, показанным в программе 2*в*. Хотя формально решение 2*в* правильно, но злоупотреблять «финтами» типа передачи управления внутрь условного оператора не следует, а современная теория не рекомендует пользоваться оператором перехода вообще. Отметим, что обойтись одним оператором **if**, записав условие переписи из *A*, например, так:

$$\textbf{if}((i<=n)AND(j<=m)AND\ (a[i]<b[j]))OR(i>n)\ \textbf{then}$$

нельзя, так как даже при невыполнении условия $i<=n$ ЭВМ все равно может провести вычисление выражения $a[i]<b[j]$, попытавшись обработать несуществующий элемент $a[n+1]$.

Контрольное задание

4.1. Выбросить из текста (массива символов) пробелы и «сжать» текст, сдвинув оставшиеся символы к левому краю. Обработку провести без дополнительного массива.

(в)

Задача 1

```
i:=1; j:=1;
for k:=1 to m+n do
begin if i>n then goto 2;
      if j>m then goto 1;
   if a[i]<b[j]
      then 1 : begin c[k]:=a[i];
                     i:=i+1 end
      else 2 : begin c[k]:=b[j];
                     j:=j+1 end
end;
```

Задача 2

```
j:=0; k:=0;
for i:=1 to n do
begin
  if a[i]>0 then begin   пол[i—j]:=a[i];
                         k:=k+1 end;
  if a[i]<0 then begin   отр[i—k]:=a[i];
                         j:=j+1 end;
  if a[i]=0 then begin k:=k+1; j:=j+1
                         end
end;
пол[i—j]:=0; отр[i—k]:=a[i];
```

4.2. (Сборка по маске). Дано 2 массива равной длины и пустой массив. Элементы 2-го массива (маски) имеют значения **истина/ложь**. Значение ложь *i*-го элемента маски делает невидимым (маскирует) *i*-е значение исходного массива. Собрать видимые (отмеченные значением истина в маске) элементы первого массива в третий массив, прижав их к левому краю и заполнив остаток третьего массива нулями. (Обратите внимание, что 2 массива здесь будут обрабатываться синхронно, а третий — асинхронно по отношению к первым двум.)

4.3. (Разборка по маске). Дан массив, маска и пустой массив. Первые несколько элементов исходного массива разослать в те элементы пустого массива, которые отмечены в маске значением истина, остальные элементы заполнить нулями.

4.4. (Повышенной сложности.) В массиве могут быть несколько максимальных элементов. За один просмотр массива выписать в другой массив номера всех максимальных элементов исходного массива.

Подготовительные задачи к уроку 5

1. Вывести на печать таблицу значений функции $y=x^2$ при x изменяющемся от a до b с шагом h.

2. Найти среднее арифметическое элементов массива.

3. Дан массив действительных чисел. Найти в нем число, равное заданному; получить номер этого числа или нуль, если такого числа нет.

Л. Ф. Штернберг

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Всесоюзная заочная математическая школа Академии педагогических наук СССР при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (сокращенно ВЗМШ) объявляет юбилейный, двадцатый набор учащихся на 1 курс.

Обычно прием в ВЗМШ производился по результатам выполнения вступительной контрольной работы, но в нынешнем году мы решили принять на 1 курс просто по заявлениям всех интересующихся математикой учеников седьмых классов и учащихся ПТУ, за исключением проживающих в гг. Москве и Ленинграде.

Обучение в ВЗМШ бесплатное, программа рассчитана на три года. В течение этого времени наши ученики будут регулярно получать от нас учебные пособия, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения.

Учиться у нас непросто. Здесь мало одного лишь желания, нужны еще усидчивость, настойчивость, сила воли: ведь требуется самостоятельно, с карандашом в руке изучить теорию, а затем (что самое интересное, но и самое трудное) — решить большое количество задач и выполнить контрольную работу. Задания высылаются примерно раз в месяц.

Ваши контрольные работы будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов страны, в которых имеются филиалы ВЗМШ, работающие по той же программе и пособиям. Как правило, контрольные работы состоят из двух частей: обязательной, содержащей сравнительно простые задачи, и дополнительной, которую выполняют более сильные учащиеся.

Программа ВЗМШ направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики. За время обучения в ВЗМШ Вы более основательно познакомитесь с методом координат, углубите свои знания по арифметике целых чисел, будете решать много интересных задач по геометрии, математическому анализу и алгебре, получите представление о письменных и устных вступительных экзаменах в различные вузы.

Учеба в ВЗМШ поможет Вам научиться самостоятельно работать с книгой, а также четко, кратко и грамотно излагать свои мысли на бумаге; эти качества, безусловно, пригодятся Вам в дальнейшем. Итак, ВЗМШ ждет Ваши заявления.

Для зачисления в школу необходимо выслать не позднее 1 марта 1983 г. (по почтовому штемпелю) заявление по адресу «117234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ. На прием.» или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в следующих городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Ижевск, Казань, Калинин, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Ростов-на-Дону, Свердловск, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста; филиалы при педагогических институтах — в городах Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Орел, Славянск, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск, Ярославль.

Учащиеся, проживающие на Северо-Западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской обл., Карельской АССР), в прибалтийских союзных республиках и в Белоруссии (кроме Витебской и Гомельской обл.) должны присылать по адресу: 193130, Ленинград, 8 Советская, 3, ЗМШ.

В заявлении должны быть указаны: область и точный почтовый адрес с индексом; фамилия, имя и отчество учащегося, класс и школа, в которой он учится.

В качестве первого задания мы предлагаем Вам изучить статью Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Арифметика и принципы подсчета» (см. с. 30).

Задание 1 — решить задачи №№ 1 а, г; 2 а, б, в; 3; 8 а, в, г; 9; 11; 14; 16 а, б; 17; 18 а,б; 19; 20 а, б, в; 21 (основные задачи) и №№ 4; 5; 6; 7; 10; 12; 15; 22; 23 (дополнительные задачи) из указанной статьи.

Контрольная работа (Задание 1) должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Задачи должны идти в том порядке, как они даны в статье, сначала условие, затем — решение. На обложке тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1969*
Класс и школа	*7 класс «г» школы № 2 г. Клина*
Фамилия, И. О. учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 1, мать — медсестра*
Полный почтовый адрес	*123456, г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1.*

Срок отправки задания 1 — не позднее 5 мая 1983 г. (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, не обязательно решить все задачи.

Если Вы успешно выполните это задание, то, начиная с сентября 1983 г., Вы будете получать все дальнейшие задания. Ждем Ваших писем.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Для учащихся седьмых классов, проживающих на территории европейской части РСФСР, в *Белоруссии и Казахстане, объявляется прием на заочное отделение Малого* механико-математического факультета — математической школы при механико-математическом факультете МГУ. (Предыдущее сообщение см. «Квант», 1982, № 1).

Основной задачей Малого механико-математического факультета (сокращенно МММФ) является приобщение к математике учащихся и выпускников общеобразовательных школ и других средних учебных заведений, в первую очередь, сельской и рабочей молодежи, и на этой основе расширение круга поступающих на механико-математический и другие факультеты МГУ.

Программа МММФ, направленная на углубление знаний по важнейшим разделам школьной программы и развитие у школьников навыков самостоятельных занятий математикой, составлена под руководством профессоров факультета.

Занятия начнутся с 1 сентября 1983 года. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно окончившие 8 или 9 классы, рекомендуются для поступления в физико-математический интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля 1983 года выслать решения по возможности большего числа задач вступительной контрольной работы МММФ, которая публикуется ниже. Семиклассники, проживающие в Астраханской, Брянской, Белгородской, Владимирской, Волгоградской, Воронежской, Горьковской, Ивановской, Калининской, Калужской, Костромской, Куйбышевской, Курской, Липецкой, Московской, Оренбургской, Орловской, Пензенской, Пермской, Ростовской, Рязанской, Саратовской, Свердловской, Смоленской, Тамбовской, Тульской, Ульяновской, Челябинской, Ярославской, Минской, Брестской, Витебской, Гомельской, Гродненской, Могилевской областях, в Башкирской АССР, Дагестанской АССР, Кабардино-Балкарской АССР, Калмыцкой АССР, Марийской АССР, Мордовской АССР, Северо-Осетинской АССР, Татарской АССР, Удмуртской АССР, Чечено-Ингушской АССР, Чувашской АССР, Краснодарском и Ставропольском краях присылают работы по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, мехмат, МММФ. Школьники из Казахстана обслуживаются Казахским филиалом МММФ МГУ и присылают работы по адресу: 480012, г. Алма-Ата ул. Кирова-Масанчи, 47/39, Казахский госуниверситет (Каз. ГУ), математический факультет, Казахский филиал МММФ МГУ.

Вступительная контрольная работа должна быть выполнена в ученической тетради в клетку. На обложку тетради наклеивается лист бумаги со следующими данными:

1. Область (край, республика)	*РСФСР, Московская обл.*
2. Фамилия и имя учащегося	*Осипов Андрей*
3. Класс и школа (полное название)	*Раменская средняя школа № 27 класс «В»*
4. Фамилия, имя и отчество учителя математики	*Бабенко Валентина Ивановна*
5. Полный домашний адрес	*140191, г. Раменское Московской обл. ул. Космонавтов, дом 3, кв. 36*
6. Сведения о родителях:	
Отец — фамилия, имя и отчество, где и кем работает	*Осипов Иван Матвеевич, слесарь завода МЭЗ*
Мать — фамилия, имя и отчество, где и кем работает	*Осипова Зинаида Андреевна, лаборантка завода МЭЗ*
7. Результаты проверки	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

В работу вкладывается листок 14×6 см, на котором пишется домашний адрес.

Для московских школьников 7—10 классов на механико-математическом факультете МГУ работает очное отделение МММФ (справки по телефону 139-39-43).

Задачи вступительной контрольной работы на Малый механико-математический факультет в 1983 году

1. Разложить многочлен $x^6-6x^4+9x^2-4$ на

а) два множителя;

б) шесть множителей.

2. Докажите, что для любого числа $a>1$ выполнены неравенства $a-\frac{1}{2a-1}<\sqrt{a^2-1}<a-\frac{1}{2a}$.

3. На плоскости нарисован квадрат $ABCD$. Укажите множество всех точек M, не лежащих на сторонах квадрата и удовлетворяющих условию $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}=\widehat{CMD}=\widehat{DMA}$.

4. Билет на автобус называется «счастливым», если сумма первых трех цифр шестизначного номера (написанного на билете) совпадает с суммой трех его последних цифр. Могут ли номера двух «счастливых» билетов различаться на единицу?

5. Найдите все числа a, при каждом из которых уравнение $a^2x-a(x+1)-6x+3=0$ не имеет решений.

6. В правильном треугольнике со стороной 1 расположены пять точек. Докажите, что среди них найдутся две точки, расстояние между которыми не больше 1/2.

7. Решите систему уравнений и неравенств:

$$\begin{gathered}x(y-z)\geqslant 0\\ y(z-x)\geqslant 0\\ z(x-y)\geqslant 0\\ x+y+z=3.\end{gathered}$$

8. Через вершину треугольника с попарно неконгруэнтными сторонами проведена прямая, делящая его на два треугольника.

а) Докажите, что эти треугольники неконгруэнтны;

б) Могут ли эти треугольники быть подобны?

9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны $[AB]$ и $[CD]$ конгруэнтны, но не параллельны. Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей $[AC]$ и $[BD]$, образует равные острые углы с прямыми (AB) и (CD).

10. В канун Нового года Плюшкину стало жалко выбрасывать календарь за истекший год, и он решил воспользоваться им в будущем, дождавшись такого года, в котором каждое число каждого месяца приходится на тот же день недели, что и в его календаре. Через сколько лет ему в первый раз представится такая возможность?

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые и девятые классы на 1983/84 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов и соответствует уровню требований, предъявляемых абитуриентам на вступительных экзаменах в вузы, прежде всего — в МИСиС.

Работа школы организована следующим образом. Пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач. Присланные учащимися контрольные работы проверяются преподавателями института и вместе с оценками и комментариями высылаются учащимся. В качестве годового задания учащимся десятых классов рассылаются материалы вступительных экзаменов в МИСиС за прошлые годы.

Занятия в ЗФТШ (МИСиСа) начнутся с 1 октября 1983 года. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справку нужно выслать не позднее 1 марта по адресу: 117049, Москва, Ленинский проспект, 4, МИСиС, ЗФТШ. О первом задании и первой контрольной работе по математике написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» (см. с. 52).

Несколько слов о самом институте. Московский ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институт стали и сплавов готовит инженерные и научные кадры для металлургической промышленности и ряда новых отраслей науки и техники. На многих кафедрах института обучение строится так, что студенты уже с 3—4 курса приобщаются к самостоятельной научной работе. Работая над курсовыми и дипломными работами, которые обычно входят в план научных исследований соответствующих кафедр, студенты широко используют возможности институтского вычислительного центра, оборудованного современными ЭВМ.

Поступив в Московский институт стали и сплавов, вы сможете заниматься теорией и экспериментом в области физики твердого тела, исследованием свойств вещества при низких температурах, созданием и исследованием сплавов с новыми физическими и химическими свойствами, металловедением, рентгенографией, физикой и химией поверхности, физикой полупроводников, созданием новых полупроводниковых приборов, вычислительной математикой и многими другими увлекательными и актуальными проблемами науки и техники.

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1982 году.

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$81^x + 3^{2x+1} > 54.$$

2. В трапеции $ABCD$ $\widehat{BAD} = 90°$, $\widehat{ADC} = 30°$. Окружность, центр которой лежит на отрезке AD, касается прямых AB, BC и CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен R.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \\ \cos 2y + \sqrt{3} \cos 2x = -1. \end{cases}$$

4. Из точки $M(1;\ 1)$ проведены касательные к двум ветвям гиперболы $y = \frac{k}{x}$ $(k < 0)$, касающиеся этих ветвей в точках A и B, причем треугольник MAB — правильный. Найдите коэффициент k и площадь треугольника MAB.

5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (S — вершина) длина стороны основания равна 2. Вершины K и M ромба $KLMFF$ лежат на ребрах AB и SD соответственно и $|KM| = 3$, а отрезок KL пересекает ребро SB. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_3 x - \frac{2}{1 + \log_x 27} = \frac{6}{3 + \log_3 x}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x - 2 \sin x} = \operatorname{tg} x.$$

3. Равнобедренный треугольник ABC $(\hat{C} = 90°)$ и треугольник DEF расположены так, что точка D лежит на стороне AB, а точка E — на продолжении стороны AB за точку A. Отрезок KL является средней линией в обоих треугольниках, а площадь четырехугольника $DKLB$ составляет $\frac{5}{8}$ площади треугольника ABC. Найдите $\widehat{DEF}$.

4. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 10 \\ 3x^2 - 4x - 32 < 0 \\ (3x - 2y)(3y - x + 10) > 0. \end{cases}$$

5. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина бокового ребра равна 3. Точка M — середина ребра AC, точка N лежит на ребре B_1C_1, а точка P принадлежит грани AA_1B_1B и удалена от плоскости ABC на расстояние 1. Известно, что угол в 30° образуют прямые PM и PN — с плоскостью AA_1B_1B и прямая PN — с плоскостью BB_1C_1C. Найдите объем призмы.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x+5}{2x+1}} - \sqrt{5x-3} = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{2-x}\left(\frac{3-x}{4-x}\right) < 1.$$

3. Квадрат $ABCD$ и окружность расположены так, что окружность касается прямой AC в точке C, а центр окружности лежит по ту же сторону от прямой AC, что и точка D. Касательные к окружности, проведенные из точки D, образуют угол 120°. Найдите отношение площади квадрата к площади круга, ограниченного данной окружностью.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cos(4x - 2y) = \sqrt{2} \cos(2x - 2y) \\ \sqrt{2} \sin(x + y) = 3 \sin(y - x). \end{cases}$$

5. Сферы с центрами в точках O_1 и O_2 радиусов 3 и 1 соответственно касаются друг друга. Через точку M, удаленную от O_2 на расстояние 3, проведены две прямые, каждая из которых касается обеих сфер, причем точки касания лежат на прямых по одну сторону от точки M. Найдите угол между касательными, если известно, что одна из них образует с прямой O_1O_2 угол 45°.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Собака C бежит с постоянной скоростью v_0 по тропинке AB, составляющей угол $\alpha = 60°$ с горизонтально натянутой проволокой MN (рис. 1). К ошейнику собаки привязан легкий, горизонтально висящий трос длины l. Трос соединен с кольцом K массы m, которое может скользить по проволоке без трения. Найдите натяжение троса в момент, когда кольцо и собака находятся на одинаковых расстояниях от места пересечения D тропинки и проволоки.

2. Моль идеального газа нагревается при постоянном давлении, а затем при постоянном объеме переводится в состояние с температурой, равной начальной температуре $T_0 = 300$ К. Оказалось, что в итоге газу передано количество теплоты $Q = 5000$ Дж. Во сколько раз изменился объем, занимаемый газом?

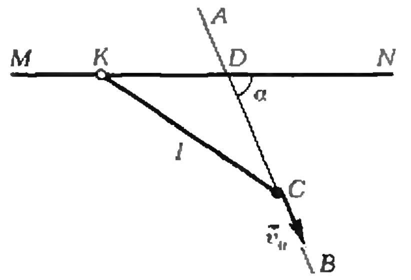


Рис. 1.

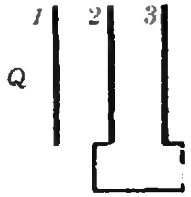


Рис. 2.

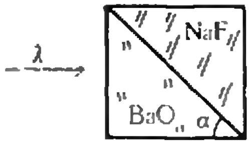


Рис. 3.

Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

3. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор (рис. 2). На пластине *1* находится заряд Q, а незаряженные пластины *2* и *3* закорочены проводником. Определите силу, действующую на пластину *2*. Площадь каждой пластины S.

4. На плоскопараллельную пластинку, составленную из двух прямоугольных призм, падает тонкий монохроматический пучок света с длиной волны $\lambda = 6{,}56 \cdot 10^{-7}$ м (рис. 3). Одна призма изготовлена из кристаллического фтористого натрия NaF, показатель преломления которого для указанной длины волны равен $n_1 = 1{,}324$. Другая призма изготовлена из кристаллической окиси бария BaO, показатель преломления которой равен $n_2 = 1{,}958$. При каких значениях угла α свет не пройдет через границу раздела призм?

Вариант 2

1. Баскетболист бросает мяч в кольцо. Скорость мяча сразу после броска равна $v_0 = 8$ м/с и составляет угол $\alpha = 60°$ с горизонтом. С какой скоростью мяч попал в кольцо, если он долетел до него за одну секунду? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

2. Кристаллическая решетка железа при комнатной температуре — кубическая объемно центрированная. Это означает, что элементарной ячейкой является куб, во всех вершинах которого, а также в центре — на пересечении пространственных диагоналей — находятся атомы железа. Сколько атомов приходится на объем, равный объему одной элементарной ячейки в кристалле железа? Определите минимальное расстояние между атомами железа в кристалле, зная его молярную массу $A = 56$ кг/кмоль и плотность $\rho = 7870$ кг/м^3. Постоянная Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$.

3. Катушка из n_1 витков, площадь каждого из которых равна S, расположена в однородном магнитном поле. Вектор индукции поля $\vec{B}$ перпендикулярен виткам катушки (рис. 4). Вне поля расположена вторая катушка. Обе катушки соединены проводниками. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и проводников, определите величину тока, возникающую в катушках после выключения поля. Индуктивности катушек равны L_1 и L_2 соответственно.

4. На главной оптической оси тонкой положительной линзы диаметром D находится точечный источник света. Из линзы выходит пучок расходящихся лучей с углом расхождения α. Определите, каким будет угол расхождения лучей, если вместо положительной линзы на то же место поставить отрицательную линзу этого же диаметра и с тем же фокусным расстоянием (по модулю). Расстояние между источником и линзой равно d.

Вариант 3

1. Частоты излучения возбужденного атомарного водорода описываются формулой $\nu_{nm} = R\,(1/n^2 - 1/m^2)$, где R — некоторая постоянная, n и m — целые числа. Первоначально невозбужденный водород начинает излучать фотоны, если через него пропустить пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов не менее $U_0 = 10{,}2$ В. Какую минимальную ускоряющую разность потенциалов должен пройти пучок протонов, чтобы при пропускании их через первоначально невозбужденный водород последний начал излучать фотоны? Чему равна энергия ионизации атома водорода (в электронвольтах)? Считать, что масса электрона много меньше массы протона и что атом водорода перед ударом неподвижен.

2. В теплоизолированный сосуд объемом $V = 22{,}4$ дм^3, содержащий $n_1 = 1$ моль водорода при температуре $T_1 = 200$ К, добавляют $m_2 = 4$ г водорода. После установления равновесия давление в сосуде оказалось равным $p = 3 \cdot 10^5$ Па. Определите первоначальную температуру добавленного водорода.

3. В схеме, показанной на рисунке 5, в начальный момент ключ K замкнут и по цепи течет установившийся постоянный ток. Затем ключ размыкают. Определите количество теплоты, которое выделится в резисторе сопротивлением R_1, при следующих параметрах цепи: ЭДС источника $\mathcal{E}$, его внутреннее сопротив-

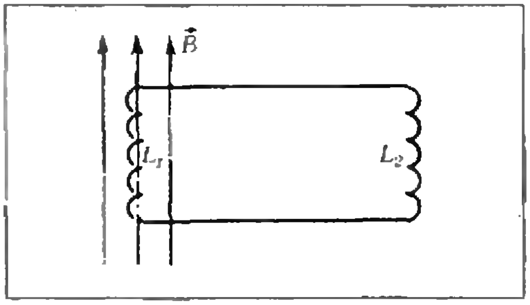


Рис. 4.

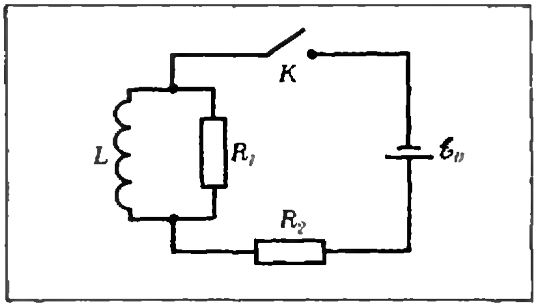


Рис. 5.

ление равно сопротивлению обоих резисторов: $r=R_1=R_2=R$, индуктивность катушки L.

4. С помощью тонкой линзы на экране получено изображение предмета с увеличением $\Gamma_1=2$. Предмет передвинули на $l=1$ см. Для того чтобы снова получить резкое изображение, пришлось передвинуть экран. При этом увеличение предмета оказалось равным $\Gamma_2=4$. На какое расстояние передвинули экран?

Публикацию подготовили
С. П. Коновалов, А. А. Шеронов

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-a+2}=1.$$

2. На координатной плоскости заданы точки $A(1;\,0)$, $B(0;\,1)$ и $C(5;\,5)$. Вычислите площадь треугольника ABC и укажите все перемещения плоскости, при которых он отображается на себя.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2\sin x}=-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

а) на отрезке $[0;\,2]$, б) на промежутке $]2;\,4[$.

5. Решите уравнение

$$|3x+3|=ax+4$$

и определите значения a, при которых оно имеет единственное решение.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{x-y}(2x^2-4x+y+1)=2\\ x+y-3=a-a^2.\end{cases}$$

2. Даны две вершины равностороннего треугольника $A(-1;\,1)$ и $B(-1;\,3)$. Найдите его площадь и координаты третьей вершины C. Укажите все перемещения плоскости, при которых треугольник ABC отображается на себя.

3. Решите уравнение

$$\sin x+\cos x=\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=x^2-3|x-3|-5x+10$$

а) на промежутке $[0;\,2[$, б) на промежутке $[2;\,4[$.

5. Решите уравнение

$$|3x+3|=ax^2+4$$

и определите значения a, при которых оно имеет единственное решение.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Человек начинает подниматься по движущемуся вверх эскалатору метро с ускорением $a=0{,}21$ м/с². Добежав до середины эскалатора, он поворачивает и начинает спускаться вниз с тем же ускорением. Сколько времени человек находился на эскалаторе, если длина эскалатора $l=100$ м, а скорость движения эскалатора $v=2$ м/с?

2. В некоторый момент времени протон и α-частица покоятся на расстоянии $a=10$ Å друг от друга. С какими скоростями будут двигаться эти частицы, когда расстояние между ними удвоится? Масса протона $m_p=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, его заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

3. В сосуд, имеющий форму прямого кругового усеченного конуса с радиусом основания $R=10$ см, налита вода так, что ее уровень находится на высоте $h=10$ см от дна. Определите силу F давления воды на боковую поверхность сосуда, если образующая конуса составляет угол $\alpha=45°$ с его высотой.

4. Свинцовая пуля, летящая горизонтально со скоростью $v_0=500$ м/с, пробивает доску на высоте $h=2$ м над поверхностью земли, не изменяя направления своей скорости. На каком расстоянии от доски пуля упадет на землю, если при движении через доску она нагрелась на $\Delta t=200\,°$C? Считать, что все выделившееся при движении через доску количество теплоты пошло на нагревание пули. Удельная теплоемкость свинца $c=130$ Дж/(кг · К). Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Цилиндр разделен на две части поршнем. В одной его части находится азот, а в другой — воздух. Температуры газов одинаковы и равны $T_0=300$ К, а соотношение их масс таково, что поршень делит цилиндр на две равные части объемом $V_0=1{,}3$ л каждая. На какое расстояние сместится поршень, если температура газа в одной из половин цилиндра увеличится на $\Delta T=50$ К, а в другой останется неизменной? Сечение цилиндра $S=100$ см².

6. Два одноименно заряженных шарика массой $m=0{,}5$ г каждый подвешены в вакууме на очень тонких невесомых, нерастяжимых и непроводящих нитях одинаковой длины (рис. 1). Каждая из нитей образует с вертикалью угол $\alpha=30°$. Затем вся система погружается в неэлектропроводящую жидкость с плотностью, равной плотности материала шариков, и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$. Найдите силу натяжения нитей после погружения в жидкость. Каков характер равновесия шариков?

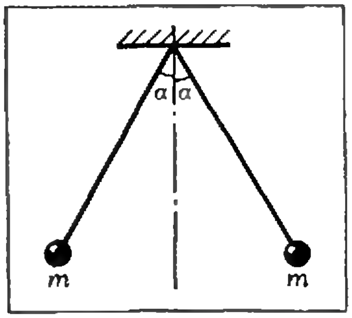


Рис. 1.

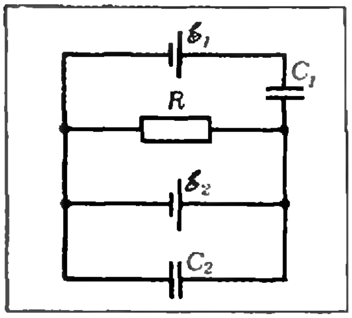


Рис. 2.

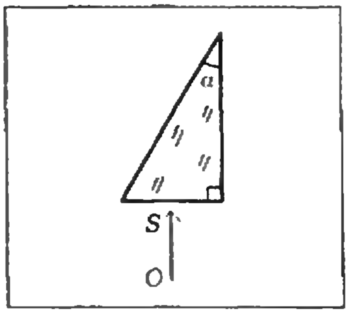


Рис. 3.

7. Определите заряды конденсаторов емкостью $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 5$ мкФ (рис. 2), если $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $\mathcal{E}_2 = 5$ В, внутренние сопротивления источников $r = 2$ Ом, сопротивление $R = 38$ Ом.

8. В катушке индуктивности сила тока линейно увеличивается со скоростью $\Delta I/\Delta t = 10$ А/с. Найдите ЭДС индукции, возникающую при этом в катушке, если резонансная частота колебательного контура, образованного из этой катушки и конденсатора емкостью $C = 100$ пФ, равна $\nu = 100$ кГц.

9. Световой луч OS падает на основание прямоугольной призмы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$ (рис. 3). Под каким углом к направлению первоначального распространения пойдет этот луч при выходе из призмы, если угол при вершине призмы $\alpha = 30°$, и угол падения OS на основание равен нулю?

10. Определите скорость свободных электронов, образующихся при фотоионизации атомов водорода электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 500$ Å. Энергия ионизации водорода $E = 2{,}17 \cdot 10^{-18}$ Дж, масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Импульсом фотона пренебречь.

Публикацию подготовили
Г. В. Ефашкин, В. А. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Найдите $f'(1)$, если $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos x} = 2(\sin x + \cos x).$$

3. Решите неравенство

$$\log_4 \frac{x}{5x-1} < 1.$$

4. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45°. Длина стороны основания равна a. Определите площадь боковой поверхности призмы.

5. Найдите все значения a, при которых корни уравнения

$$ax^2 + 2(a+3)x + a + 2 = 0$$

неотрицательны.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Найдите производную функции $y = \frac{\sin x + \cos x}{x}$.

2. Решите уравнение

$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0.$$

3. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Диагональ большей боковой грани и диагональ другой боковой грани, исходящие из одной вершины, образуют между собой угол α. Найдите объем призмы.

4. Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ — единичные, ортогональные. Докажите, что треугольник ABC, где $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, — прямоугольный, и найдите его площадь.

5. Решите уравнение

$$2^x + 3^{x-2} = 3^x - 2^{x+1}.$$

Вариант 3
(индустриально-педагогический факультет)

1. Найдите производную функции $y = x \cdot \ln x$.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{3(x-1)+8}{4} > 2(x+1) \\ 1 + \dfrac{2(1-x)}{3} < \dfrac{5}{3} + x. \end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0.$$

4. Решите уравнение

$$\log_2 x + \log_2(x+5) = \log_2 50.$$

5. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно d. Угол между образующей и высотой равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Физика

Задачи устного экзамена

1. За пятую секунду прямолинейного равнозамедлительного движения точка проходит

путь $l=5$ см и останавливается. Какой путь проходит точка за третью секунду этого движения?

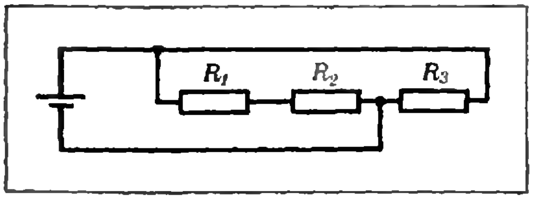
2. Тело положили на наклонную плоскость, составляющую с горизонтом угол $\alpha=30°$. С каким ускорением будет двигаться тело, если коэффициент трения тела о плоскость $\mu=0{,}03$?

3. В вагоне, движущемся горизонтально с постоянным ускорением $a=3$ м/с², на проволоке висит груз массой $m=2$ кг. Определите силу натяжения проволоки и угол ее отклонения от вертикали. Груз относительно вагона неподвижен.

4. Конькобежец массой $M=60$ кг, стоя на льду, бросает в горизонтальном направлении шайбу массой $m=0{,}3$ кг со скоростью $v=40$ м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}04$?

5. Какой груз нужно положить на плоскую льдину, чтобы она полностью погрузилась в воду? Площадь льдины $S=1$ м², ее толщина $d=20$ см, плотность льда $\varrho_л=0{,}9$ г/см³.

6. Внешняя цепь гальванического элемента составлена из трех резисторов (см. рисунок). Найдите сопротивление этой цепи, если сопротивления резисторов $R_1=R_2=R_3=R=1$ Ом.



7. Две лампы, рассчитанные на одно и то же напряжение, имеют номинальные мощности $P_1=60$ Вт и $P_2=100$ Вт соответственно. На какой из ламп и во сколько раз будет выделяться бóльшая мощность при последовательном включении обеих ламп в сеть с номинальным напряжением?

8. На каком расстоянии от рассеивающей линзы с оптической силой $D=-5$ дптр надо поместить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось в $n=4$ раза меньше самого предмета?

9. Диапозитив имеет размеры 8×8 см. Определите фокусное расстояние объектива проекционного аппарата, если на экране, находящемся от него на расстоянии $l=4{,}5$ м, получается изображение размером 2,5×2,5 м.

10. Работа выхода электронов из натрия $A=2{,}27$ эВ. Найдите красную границу фотоэффекта для натрия. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж · с.

Публикацию подготовили
А. М. Березман, О. Ю. Овчинников,
С. В. Пчелинцев

Меандры рек

Найдем форму поверхности жидкости, вращающейся в стакане с угловой скоростью ω. Обратимся к рисунку 1 (см. с. 18). Если линейный размер выделенного кубика Δr, то его масса равна

$$\Delta m=\varrho\cdot\Delta s\cdot\Delta r.$$

Используя это выражение для Δm, из уравнений (1) и (2) (см. с. 18) получаем:

$$\Delta h=(\omega^2/g)r\cdot\Delta r.$$

Таким образом, тангенс угла α наклона касательной к кривой, изображающей сечение свободной поверхности жидкости на рисунке 1, растет пропорционально расстоянию от центра:

$$\operatorname{tg}\alpha=\Delta h/\Delta r=(\omega^2/g)r.$$

Если высота уровня жидкости на оси вращения равна h_0, то для того, чтобы найти ее на расстоянии r, надо добавить к h_0 величину среднего значения $\operatorname{tg}\alpha$, умноженную на r. Среднее значение величины, изменяющейся по линейному закону, легко найти, взяв полусумму крайних значений. Соответственно получаем

$$h(r)=h_0+\frac{\omega^2r}{2g}r.$$

Как видно, зависимость $h\ (r)$ является квадратичной, и ее график изображается параболой. (Те, кто знакомы с интегральным исчислением, конечно, поняли, что мы таким образом вычислили интеграл.)

Любопытно, что параболичность формы вращающейся жидкости использовалась на практике для создания телескопа. Знаменитый американский физик Роберт Вуд построил телескоп с параболическим зеркалом, поместив на дне колодца вращающийся сосуд со ртутью.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант I

1. $\left]\frac{1}{2}\log_3 6;\ +\infty\right[$.

2. $\frac{6-\sqrt{3}}{2}R^2$. Указание. Данная окружность касается прямой AB в точке A.

3. $x=-\frac{5}{12}\pi+\pi k,\ y=-\frac{\pi}{6}+\pi l\ (k,\ l\in Z)$. Указание. Первое уравнение системы равносильно уравнению

$$\frac{\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}=1,$$

которое, если x и y не являются числами вида $\frac{\pi}{2}+\pi m$, в свою очередь, равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}(y-x)=1.$$

4. $k=-\frac{1}{2}$, $S_{\triangle MAB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Указание. Точки A и B симметричны относительно прямой $y=x$. Для определения k используйте равенство $|AB|=|AM|$.

5. $6\sqrt{3}$. Решение. Проведем через точку S прямую, параллельную (FM); обозначим точку пересечения этой прямой с (ABC) через P (рис. 1). Из $S\in(FSD)$ и $(FM)\subset(FSD)$ следует $(SP)\subset(FSD)$. Поскольку $P\in(FSD)$ и $P\in(ABC)$, $P\in(FD)$. Так как отрезок KL пересекает ребро SB, $(KL)\subset(ASB)$. Из $(SP)\parallel(KL)$ и $S\in(ASB)$ следует $(SP)\subset(ASB)$. Поскольку $P\in(ASB)$ и $P\in(ABC)$, $P\in(AB)$. Итак, $(AB)\cap(FD)=P$. Так как $\widehat{FAD}=\widehat{FAP}$ и $\widehat{AFD}=90°$, $|PF|=|FD|$. По теореме Фалеса $|SM|=|MD|$.

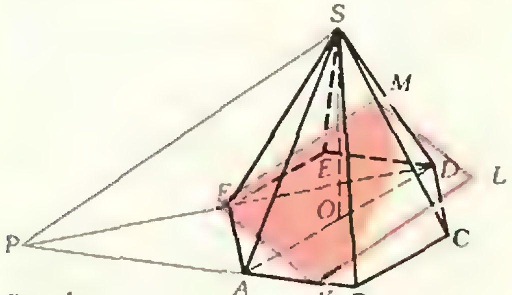


Рис. 1.

Положим $|SA|=b$, $|AK|=x$. Из $\triangle AFD$ $|FD|=2\sqrt{3}$. Из $\triangle FSD$ $|FM|^2=\frac{b^2}{4}+6$. Из $\triangle AFK$ $|FK|^2=x^2+2x+4$. Итак,

$$\frac{b^2}{4}+6=x^2+2x+4. \qquad (1)$$

Пусть M_1 — ортогональная проекция точки M на (ABC), M_2 — проекция точки M_1 на (AB), O — основание высоты пирамиды. $|KM|^2=|KM_2|^2+|M_2M_1|^2+|M_1M|^2=\left(|AM_2|-|AK|\right)^2+\left(\frac{3}{4}|BD|\right)^2+\left(\frac{1}{2}|SO|\right)^2=$

$$=\left(\frac{3}{4}\cdot 2-x\right)^2+\left(\frac{3}{4}\sqrt{16-4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4}\right)^2=x^2-3x+8+\frac{b^2}{4}.$$

Итак,

$$x^2-3x+8+\frac{b^2}{4}=9. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) находим $b=\sqrt{13}$, $x=\frac{3}{2}$ (значит, $M_2=K$). Следовательно, $|SO|=3$, $V=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 3=6\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. $\{9\}$.

2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ $(k\in\mathbf{Z})$. Указание. Перенесите $\operatorname{tg}x$ в левую часть уравнения и приведите дроби к общему знаменателю.

3. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. Указание. $(KL)\parallel(AB)$.

4. $27\frac{11}{27}-5\pi$. Указание. Прямая $3y-x+10=0$ касается окружности $x^2+y^2=10$.

5. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Решение. Пусть M_1 — проекция точки M на (ABB_1), N_1 — проекция N на (ABB_1), P_1 — проекция P на (BCC_1) (рис. 2).

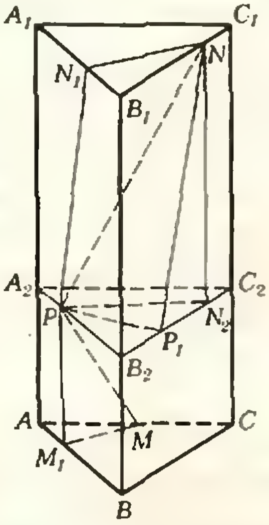


Рис. 2.

Проведем через точку P плоскость, параллельную (ABC); обозначим точки ее пересечения с соответствующими боковыми ребрами призмы через A_2, B_2, C_2. Поскольку боковые грани правильной призмы перпендикулярны плоскостям ее оснований, $M_1\in[AB]$, $N_1\in[A_1B_1]$, $P_1\in[B_2C_2]$. Из прямоугольного треугольника PNN_1 $(\widehat{NPN_1}=30°)$ $|NN_1|=\frac{1}{2}|PN|$. Из прямоугольного треугольника B_1NN_1 $|B_1N|=\frac{|PN|}{\sqrt{3}}$. Аналогично, из треугольников PNP_1 и PB_2P_1 $|B_2P|=\frac{|PN|}{\sqrt{3}}$. Обозначим через N_2 проекцию точки N на (B_2C_2). Тогда $|B_2N_2|=|B_1N|=|B_2P|$; значит, $|PN_2|=|B_2P|$. Из прямоугольного треугольника PNN_2 по теореме Пифагора находим $(|NN_2|=2)$ $|PN|=\sqrt{6}$, откуда $|B_2P|=\sqrt{2}$. Из $\triangle ABC$ $|MM_1|=\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|$, $|AM_1|=\frac{1}{4}|AB|$, $|BM_1|=\frac{3}{4}|AB|$. Из прямоугольного треугольника PMM_1 $(\widehat{MPM_1}=30°)$ $|PM_1|=\frac{3}{4}|AB|$. Из прямоугольной трапеции PB_2BM_1 находим $(|BB_2|=1)$ $|AB|=\sqrt{2}$. Замечание. Так как $|B_2P|=|B_1N|=|AB|$, получаем $P=A_2$ и $N=C_1$. На рисунке 2 — не так, поскольку, когда мы его рисовали, мы этого еще не знали.

Вариант 3

1. $\{1\}$.

2. $]-\infty;\ 1[\ \cup\ \left[\frac{5-\sqrt{5}}{2};\ 2\right[$.

3. $\frac{4+\sqrt{15}}{3\pi}$. Указание. Из $\triangle DOE$ (O — центр окружности, E — любая из точек касания указанных в условии касательных) выразите $|DO|$ через радиус окружности R, примените к $\triangle DOC$ теорему косинусов.

4. $x=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\pi k$, $y=\mp\frac{3}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$. Указание. Перемножив, соответственно, левые и правые части уравнений, преобразуйте полученные произведения в сумму синусов. Не забудьте, что при таком способе решения необходима проверка!

5. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Решение. Пусть первая прямая касается сфер в точках A и B, а вторая — в точках C и D, O_1' и O_2' — центры сечений сфер плоскостью AMC (рис. 3).

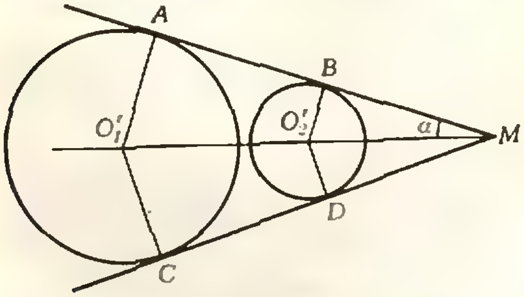
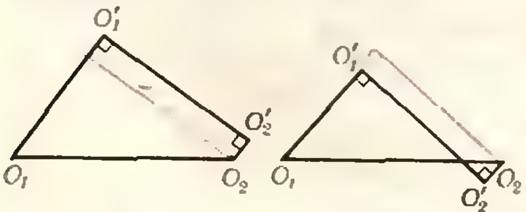


Рис. 3.

Так как $(O_2D)\perp(MD)$, $|DM|=\sqrt{|O_2M|^2-|DO_2|^2}=2\sqrt{2}$. Умножив скалярно обе части равенства $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2D}$ на вектор $\overrightarrow{CD}$, получим $|CD|^2=|CD|\cdot|O_1O_2|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$, поскольку $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CO_1}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{O_2D}=0$. Отсюда $|CD|=2\sqrt{2}$. Положим $\widehat{AMO_1'}=\alpha$. Имеем $|DO_2'|=2\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$, $|CO_1'|=4\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$, $|O_1'O_2'|=\frac{2\sqrt{2}}{\cos\alpha}$. Далее, $|O_1O_1'|=\sqrt{|O_1C|^2-|CO_1'|^2}=\sqrt{9-32\operatorname{tg}^2\alpha}$, $|O_2O_2'|=\sqrt{|O_2D|^2-|DO_2'|^2}=\sqrt{1-8\operatorname{tg}^2\alpha}$. Отрезки O_1O_2 и $O_1'O_2'$ могут не пересекаться (рис. 4, *а*) и могут пересекаться (рис. 4, *б*). Не зная пока, каково их расположение в данном случае, мы можем составить уравнение $16=|O_1O_2|^2=(|O_1O_1'|\pm|O_2O_2'|)^2+|O_1'O_2'|^2=(\sqrt{9-32\operatorname{tg}^2\alpha}\pm\sqrt{1-8\operatorname{tg}^2\alpha})^2+\frac{8}{\cos^2\alpha}$, из которого находим $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{9}$. Проверка показывает, что внутри скобки должен стоять знак $+$.



а) *б)*

Рис. 4.

Физика

Вариант 1

1. Рассмотрим кольцо K, скользящее по проволоке (рис. 5). На него действуют две силы: натяжение троса $\vec{T}$ и реакция проволоки $\vec{F}$, направленная перпендикулярно проволоке (так как трение отсутствует). Под действием этих сил кольцо с ускорением скользит по проволоке. Если из кинематических соображений определить ускорение кольца в заданный в условии момент времени, то можно будет найти и искомое натяжение троса.

Введем косоугольную систему координат, направив оси X и Y, как показано на рисунке 5. В любой момент времени расстояние между кольцом и собакой равно длине троса l, а координаты x кольца и y собаки связаны с l по теореме косинусов:

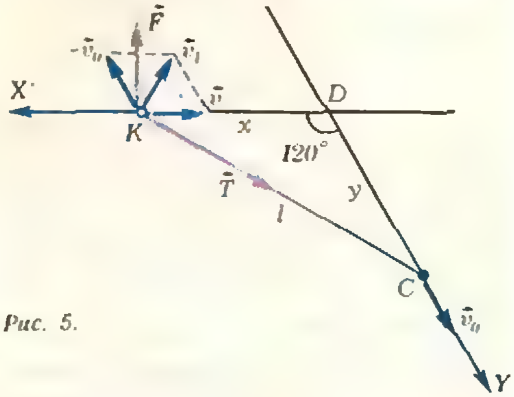


Рис. 5.

$$l^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=x^2+y^2+xy.$$

Продифференцируем это равенство дважды по времени:

$$2(x')^2+2xx''+2(y')^2+2yy''+2x'y'+xy''+yx''=0.$$

Поскольку собака бежит с постоянной скоростью v_0, в любой момент времени $y'=v_0$ и $y''=0$. Так как трос нерастяжим, проекции скоростей кольца и собаки на направление троса KC одинаковы, а в данный момент времени одинаковы и модули этих скоростей: $v=v_0$, $x'=-v_0$ (знак «минус» связан с выбором положительного направления оси X). Координаты x и y можно связать с длиной троса l с помощью теоремы синусов: $x=y=l\operatorname{tg}30^\circ$.

Таким образом, ускорение кольца в рассматриваемый момент времени равно

$$x''=-\frac{2v_0^2}{2x+y}=-\frac{2v_0^2}{3l\operatorname{tg}30^\circ},$$

а натяжение троса (согласно второму закону Ньютона) —

$$T=\frac{m|x''|}{\cos 30^\circ}=\frac{2mv_0^2}{3l\sin 30^\circ}=\frac{4mv_0^2}{3l}.$$

Приведем еще одно, более короткое, решение этой же задачи. Будем рассматривать движение кольца в инерциальной системе отсчета, связанной с собакой. В этой системе кольцо движется по окружности радиуса l со скоростью $\vec{v}_1=\vec{v}-\vec{v}_0$ (из рисунка 1 видно, что $v_1=v=v_0$).

По второму закону Ньютона

$$\frac{mv_1^2}{l}=T-F\sin 30^\circ,$$

где $v_1=v_0$, а $F=T\sin 30^\circ$ (в неподвижной системе кольцо движется вдоль горизонтальной проволоки и по вертикали не смещается). Отсюда получается приведенное выше значение для силы натяжения троса.

2. По условию задачи конечная температура газа равна начальной T_0. Это означает, что внутренняя энергия газа не изменилась, а все подведенное количество теплоты Q пошло на совершение газом работы A по расширению во время нагревания при постоянном давлении p_0 (при изохорном охлаждении работа газа равна нулю):

$$Q=A=p_0(V-V_0)=p_0V_0(V/V_0-1)=$$
$$=RT_0(V/V_0-1).$$

Отсюда отношение объемов равно

$$\frac{V}{V_0}=\frac{Q}{RT_0}+1\approx 3$$

— объем газа увеличился приблизительно в 3 раза.

3. Прежде всего, определим заряды, индуцированные на пластинах *2* и *3*. Поскольку пластины закорочены и суммарно не заряжены, на них могут возникать лишь равные по модулю и противоположные по знаку заряды.

Пусть, для определенности, заряд Q первой пластины положительный, тогда заряд q_2 второй пластины отрицательный, а заряд q_3 третьей — положительный: $q_2=-q$ и $q_3=+q$. Разность потенциалов между пластинами *2* и *3* равна нулю; следовательно, электрическое поле в области между этими пластинами, представляющее суперпозицию полей зарядов Q, q_2 и q_3, равно нулю:

$$\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}-2\frac{q}{2\varepsilon_0 S}=0, \text{ и } q=\frac{Q}{2}.$$

Сила F, действующая на заряд второй пластины, определяется суммарным полем зарядов Q и q_3:

$$F=q_2\left(\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}-\frac{q_3}{2\varepsilon_0 S}\right)=-\frac{Q^2}{8\varepsilon_0 S}$$

(знак «минус» означает, что сила направлена к первой пластине).

4. Угол падения света на границу раздела призм равен 90° — α. Свет испытает полное отражение, а значит, не пройдет через границу раздела призм, при условии $90^\circ-\alpha>\arcsin(n_1/n_2)$. Отсюда

$$\alpha<90^\circ-\arcsin(n_1/n_2)\approx 47{,}5^\circ.$$

Вариант 2

1. $v=\sqrt{(v_0\sin\alpha-gt)^2+(v_0\cos\alpha)^2}\approx 5$ м/с (здесь $t=1$ с).

2. Очевидно, что каждый из атомов, находящихся в вершинах куба со стороной a, принадлежит одновременно восьми ячейкам. Поэтому на объем, равный объему одной элементарной ячейки, приходится 2 атома (один из них находится в центре куба). Этот объем равен $V=a^3=2A/(\varrho N_\text{A})$ (здесь A/ϱ — объем моля, содержащего N_A атомов). Минимальное расстояние между атомами равно

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2A}{\varrho N_\text{A}}\right)^{1/3}\approx 2{,}5\cdot 10^{-10}\text{ м}.$$

3. Поскольку омическим сопротивлением катушек можно пренебречь, сумма всех ЭДС, возникающих в катушках при выключении магнитного поля, равна нулю:

$$n_1S\frac{\Delta B}{\Delta t}-L_1\frac{\Delta I}{\Delta t}-L_2\frac{\Delta I}{\Delta t}=0.$$

Как видно, изменение тока в контуре ΔI связано с изменением магнитного поля ΔB коэффициентом пропорциональности $n_1S/(L_1+L_2)$, не зависящим от времени. Поэтому величина установившегося тока равна

$$I=n_1SB/(L_1+L_2).$$

4. Тангенс угла расхождения лучей β, вышедших из рассеивающей линзы, определяется формулой

$$\operatorname{tg}(\beta/2)=D/d-\operatorname{tg}(\alpha/2).$$

Вариант 3

1. $U_p=U_0\dfrac{1+m_p/m_\text{в}}{1+m_e/m_\text{в}}\approx 2U_0\approx 20{,}4$ В;

$$E_\text{и}=\frac{4}{3}\,\frac{eU_0}{1+m_e/m_\text{в}}\approx\frac{4}{3}eU_0\approx 13{,}6\text{ эВ}.$$

(Здесь m_p — масса протона, $m_\text{в}$ — масса атома водорода, m_e — масса электрона, причем $m_p\approx m_\text{в}$ и $m_e\ll m_p$.)

Указания. 1) Энергия ионизации атома водорода $E_\text{и}$ соответствует переходу $n=1$, $m\to\infty$, а минимальная энергия, требующаяся для возбуждения атома из основного состояния, соответствует переходу $n=1$, $m=2$. 2) При возбуждении атома столкновением минимальная кинетическая энергия налетающей частицы (а значит, и минимальная ускоряющая разность потенциалов) достигается при абсолютно неупругом ударе.

2. $T_2=\dfrac{(pV/R-n_1T_1)}{m_2/\mu}\approx 310$ К ($\mu=2$ г/моль — молярная масса водорода).

3. $Q=L\mathcal{E}_0/(8R^2)$.

4. $L=\Gamma_1\Gamma_2 l=8$ см.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $\varnothing$ при $a<1$, $\left\{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{7}{4}\right\}$ при $a\geqslant 1$.

Указание. Данное уравнение равносильно каждой из систем

$$\begin{cases}(\sqrt{x+2}-1)^2=(\sqrt{x-a+2})^2\\ \sqrt{x+2}-1\geqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+1=2\sqrt{x+2}\\ x\geqslant -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+1)^2=4(x+2)\\ x\geqslant -1\\ a+1\geqslant 0.\end{cases}$$

Можно также просто возвести обе части уравнения $\sqrt{x+2}-1=\sqrt{x-a+2}$ в квадрат, но сделать потом проверку.

2. $\frac{9}{2}$; $\triangle ABC$ отображается на себя при тождественном отображении и при осевой симметрии относительно прямой $y=x$.
Указание. При искомых перемещениях плоскости вершина C и множество $\{A, B\}$ отображаются на себя. (Подробнее — см. «Квант», 1979, № 7, с. 60.)

3. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{5}{6}\pi+2\pi l\ (k, l \in \mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\sin x=3\operatorname{tg}^2 x \\ \operatorname{tg} x<0. \end{cases}$$

4. а) $\max\limits_{[0;\,2]} f(x)=f(1)=5$, $\min\limits_{[0;\,2]} f(x)=f(0)=1$;
б) $\min\limits_{]2;\,4[} f(x)=f(3)=1$, $\max\limits_{]2;\,4[} f(x)$ не существует.
Указание. Область значений функции f на $]2;4[$ — промежуток $[1;5[$.

5. $\left\{\frac{1}{3-a}\right\}$ при $a>4$ и при $a<-3$, $\left\{-\frac{7}{a+3}\right\}$ при $3<a<4$, $\left\{\frac{1}{3-a}, -\frac{7}{a+3}\right\}$ при $-3<a<3$.
Указание. Нарисуйте график функции $y=|3x+3|$ и вращайте прямую $y=ax+4$ вокруг точки $(0; 4)$.

Вариант 2

1. $\{(a; 3-a^2)\}$ при $a>3$ и при $2<a<3$, $\{(1-a;\ 2+2a-a^2)\}$ при $-2<a<-1$ и при $a<-2$, $\varnothing$ при $a=3$, $-1<a<2$ и $a=-2$. Указание. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} (x-2)^2=2x^2-4x+y+1 \\ x+y-3=a-a^2 \\ x-2>0 \\ x-2\neq 1. \end{cases}$$

2. $\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}-1; 2)$ или $(-\sqrt{3}-1; 2)$; $\triangle ABC$ отображается на себя при тождественном отображении, осевых симметриях относительно высот и поворотах вокруг центра треугольника на ±60°. Указание. При искомых перемещениях плоскости множество $\{A, B, C\}$ отображается на себя.

3. $x_1=2\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi l$, $x_3=\frac{\pi}{4}+2\pi m$ $(k, l, m \in \mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (\sin x+\cos x)^2=1+\operatorname{tg} x \\ \sin x+\cos x>0. \end{cases}$$

4. а) $\max\limits_{[0;\,2]} f(x)=f(0)=1$, $\min\limits_{[0;\,2]} f(x)=f(1)=0$;
б) $\max\limits_{]2;\,4[} f(x)=f(3)=4$, $\min\limits_{[2;\,4[} f(x)=f(2)=1$.
Указание. Нарисуйте график функции f.

5. $\varnothing$ при $a>\frac{9}{4}$, $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ при $a=\frac{9}{4}$, $\left\{\frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2a}\right\}$ при $\frac{9}{28}<a<\frac{9}{4}$ и при $a<-4$, $\left\{-\frac{14}{3}, \frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2a}\right\}$ при $a=\frac{9}{28}$, $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{9-28a}}{2a}, \frac{3\pm\sqrt{9-4a}}{2a}\right\}$ при $0<a<\frac{9}{28}$, $\left\{-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ при $a=0$, $\left\{\frac{-3+\sqrt{9-28a}}{2a}, \frac{3-\sqrt{9-4a}}{2a}\right\}$ при $-4<a<0$. Указание. Нарисуйте график функции $y=|3x+3|$ и рассмотрите семейство кривых $y=ax^2+4$, изменяя a от $+\infty$ до $-\infty$ (все эти кривые проходят через точку $(0; 4)$).

Физика

1. $t=2\sqrt{v^2+la}/a\approx 47{,}6$ с.
2. $v_\alpha=e/\sqrt{10am_p}\approx 3{,}7\cdot 10^3$ м/с.
$v_p=4e/\sqrt{10am_p}\approx 1{,}5\cdot 10^4$ м/с.
3. $F=\frac{\pi\varrho g h^2(3R-h\operatorname{tg}\alpha)}{3\cos\alpha}\approx 29{,}2$ Н.
4. $l=\sqrt{2h(v_0^2-2c\Delta t)}/g\approx 286$ м.
5. $x=\frac{V_0}{S}\frac{\Delta T}{2T_0+\Delta T}=1$ см.
6. $T=\frac{mg\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{e}\approx 3{,}5\cdot 10^{-4}$ Н.
равновесие безразличное.
7. $Q_1=C_1\frac{(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)R+\mathscr{E}_1 r}{R+r}=10^{-5}$ Кл;
$Q_2=C_2\frac{\mathscr{E}_2 R}{R+r}\approx 2{,}4\cdot 10^{-5}$ Кл.
8. $\mathscr{E}=\frac{\Delta I/\Delta t}{4\pi^2\nu^2 C}\approx 0{,}25$ В.
9. $\beta=\pi/2-\arcsin(n\cos 2\alpha)\approx 48{,}6°$.
Указание. На первой боковой грани луч претерпевает полное отражение.
10. $v=\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda}-E\right)}\approx 2\cdot 10^6$ м/с.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 0.
2. $x=\operatorname{arctg}(1\pm\sqrt{2})+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.
3. $]-\infty; 0[\ \cup\ ]\frac{4}{19}; +\infty[$.
4. $3\sqrt{3}a^2$.
5. $[-2\frac{1}{4}; -2]$.

Вариант 2

1. $\frac{(x-1)\cos x-(x+1)\sin x}{x^2}$.
2. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$.
3. $\frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.
4. 5. Указание. Найдите $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.
5. $\{3\}$.

Вариант 3.

1. $\ln x+1$
2. $\varnothing$.
3. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.
4. $\{5\}$.
5. $\pi d^2\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}$.

Физика

1. $l'=5l=25$ см.
2. $a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\approx 4{,}6$ м/с².
3. $F_{н}=m\sqrt{g^2+a^2}\approx 20{,}5$ Н; $\alpha=\operatorname{arctg}(a/g)\approx 17°$.
4. $l=\dfrac{m^2v^2}{2\mu gM^2}\approx 0{,}05$ м.
5. $m=Sd(\varrho_{в}-\varrho_{л})=20$ кг (здесь $\varrho_{в}=10^3$ кг/м³ — плотность воды).
6. $R_{общ}=\dfrac{(R_1+R_2)R_3}{R_1+R_2+R_3}=\dfrac{2}{3}R=\dfrac{2}{3}$ Ом $\approx 0{,}7$ Ом.
7. Бо́льшая мощность будет выделяться на первой лампе, при этом $P_1'/P_2'=P_2/P_1=5/3$.
8. $d=\dfrac{1-n}{D}=0{,}6$ м.
9. $F=\dfrac{lh}{H+h}\approx 0{,}14$ м (здесь $h=8$ см и $H=2{,}5$ м).
10. $\lambda_{к}=\dfrac{hc}{A}\approx 5{,}5\cdot 10^{-7}$ м.

Квант для младших школьников

(см. «Квант», 1982, № 12)

1. Для того чтобы число делилось на 36, нужно, чтобы оно делилось на 4 и на 9. Чтобы число делилось на 4, нужно, чтобы число, образованное двумя его последними цифрами, делилось на 4. Отсюда последней цифрой может быть либо 0, либо 4, либо 8. Для того, чтобы число делилось на 9, нужно, чтобы сумма его цифр делилась на 9. Отсюда мы получаем для цифры, замененной второй звездочкой, в первом случае 9, во втором 5 и в третьем 1. Таким образом, условию удовлетворяют числа 52920, 52524 и 52128.

2. Первой была положена желтая салфетка, а коричневая была положена раньше белой.

3. Задача основана на путанице одинаковых названий для единиц времени и величин углов. В условии «секунда» означает единицу времени, «минута» — единицу величины угла.

4. Для чисел 43 и 63. Составим уравнение, выражающее условие задачи: $10x+y=x^2+y^3$. Преобразуем его: $x(10-x)=(y-1)(y+1)$. Выражение справа есть произведение трех последовательных чисел и, следовательно, $x(10-x)$ делится на 2 и на 3. Отсюда следует, что x четно. Кроме того, либо x, либо $10-x$ должно делиться на 3. Это может быть в двух случаях: $x=6$ и $x=4$. В обоих случаях $y=3$. Получаем два решения: $43=16+27$ и $63=36+27$.

5. 33 числа, причем среднее — четное, а остальные — нечетные.

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1982, № 10)

Задание 19. 1. Кf3 Кf6 2. Ке5 d6 3. Кс6 Кfd7 4. К:b8 К:b8.

Задание 20. За три хода позиция получается очень просто: 1. е4 е6 2. Сb5 с6 3. С:с6 dc (или 2. Сс4 с6 3. С:е6 de). За четыре хода получить ее намного сложнее. Цель достигается очень хитрым и притом единственным маневром: **1. е4 е6 2. Сb5 Кре7!! 3. С:d7 с6! 4. Се8! Кр:е8.**

Интересно, что эта задача предлагалась для решения многим гроссмейстерам, но быстро справиться с ней сумел только Михаил Таль.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, М. П. Сидоров, И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурина, П. И. Чернуский

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор А. Л. Ипатова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 251-82-42

Сдано в набор 17.11.82 Подписано в печать 31.12.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,74 Т-21000
Цена 40 коп. Заказ 2876 Тираж 170528 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ПЯТЬ ЗАДАЧ О ФЕРЗЯХ

1. *Сколькими способами можно расставить на доске восемь ферзей, чтобы они не угрожали друг другу, то есть никакие два из них не стояли на одной вертикали, горизонтали и диагонали?*

Это — одна из самых знаменитых математических задач на шахматной доске. Она называется задачей о восьми ферзях. В прошлом веке ею увлекался великий математик Карл Гаусс. Любопытно, что и задачу, и ее решение иногда ошибочно приписывают самому Гауссу. На самом деле, она была впервые поставлена в 1848 году немецким шахматистом М. Беццелем, а все расстановки (их 92) были найдены доктором Ф. Науком в 1850 году.

Одна из расстановок такова: a3, b7, c2, d8, e5, f1, g4, h6. Из нее можно получить еще семь при помощи поворотов доски на 90°, 180° и 270°, а также при симметриях относительно линий, разделяющих доску пополам. Аналогично и другие расстановки разбиваются на группы, в каждой из которых все расстановки получаются из одной поворотами и симметриями. Всего получается 12 групп — 11 из 8 расстановок и одна из 4 расстановок (в ней поворот на 180° приводит к той же позиции). Взяв по одной расстановке из каждой группы, мы получим «основной» набор из 12 расстановок все остальные получаются из них поворотами и симметриями.

2. *Расставить на доске наибольшее (n) число ферзей так, чтобы каждый из них нападал ровно на p ферзей.*

Задача о восьми ферзях допускает множество обобщений, мы привели одно из наиболее интересных. Условие $p=0$ означает, что ферзи не должны нападать друг на друга. Доказано, что при $p=1$ (под боем у каждого ферзя находится один ферзь) $n=10$ (a8, b3, b5, c7, d2, e7, f2, g4, g6, h1), а при $p=2$ имеем $n=14$ (a2, a3, a5, b1, c7, c8, d1, e8, f1, g1, h1, h4, h6, h8). Для бóльших значений p задача до конца еще не решена. Для $p=3$ найдена расстановка 16 ферзей (первая и последняя горизонтали), а для $p=4$ — 20 ферзей (вся граница доски кроме полей a1, a8, c8, d8, e8, f8, h8, h1).

3. *Может ли один белый ферзь на доске 4×3 перегнать черного короля из левого нижнего угла a1 в правый верхний d3? Ферзь стоит на поле c2.*

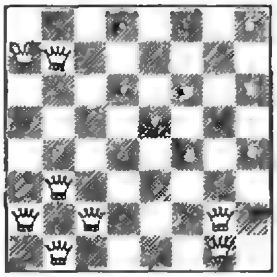
Цель достигается за десять ходов. **1. Фc3+ Крa2 2. Фc1 Крb3 3. Фa1 Крc2 4. Фa2+ Крc3** (4...Крc1 «проигрывает» быстрее: 5. Фb3 Крd2 6. Фb1 Крc3 7. Фa2 Крd3) **5. Фb1 Крd2 6. Фb2+ Крd1.** Возникла позиция, центрально симметричная исходной, с той, однако, разницей, что короля теперь нужно загнать в ближайший угол доски. **7. Фa2!** (самое тонкое место решения) **7... ...Крc1 8. Фb3 Крd2 9. Фb1 Крc3 10. Фa2 Крd3.**

Для того, чтобы короля из исходной позиции загнать на угловое поле a3, следует сразу воспользоваться идеей приведенного решения: **1. Фd2! Крb1 2. Фc3 Крa2 3. Фc1 Крb3 4. Фd2 Крa3.**

Ферзь может загнать короля в любой угол доски $m\times n$, если только $m\neq n$. Удивительно, но на квадратных досках завлечь короля на угловые поля, ближайшие к исходному, не удается — король блуждает между двумя диагонально противоположными углами доски, и ферзь не в состоянии изменить его траекторию.

4. *Расставить на доске восемь ферзей так, чтобы наибольшее число ее полей находилось вне поля зрения ферзей.*

Искомое число полей равно 11, причем при помощи ЭВМ удалось установить, что существует семь основных решений (не получающихся друг из друга при поворотах и отражениях доски). Наиболее симметричное из них приведено на следующем рисунке (неатакованные поля отмечены точками).

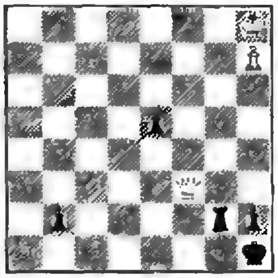


5. *Поставить на доске как можно больше ферзей с тем условием, чтобы при снятии любого из них появлялось ровно одно неатакованное поле.*

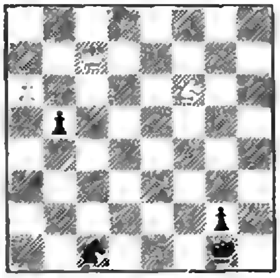
Эту задачу связывает с предыдущей... общий ответ! На доске можно расставить 11 ферзей, например: a1, a3, a4, c1, c2, d1, f1, g1, g2, g3, g4.

Конкурсные задания

В этом номере начинается наш новый шахматный конкурс, который пройдет в течение всего года. Победители его, как всегда, будут награждены шахматно-математической литературой с автографами ведущих шахматную страничку.

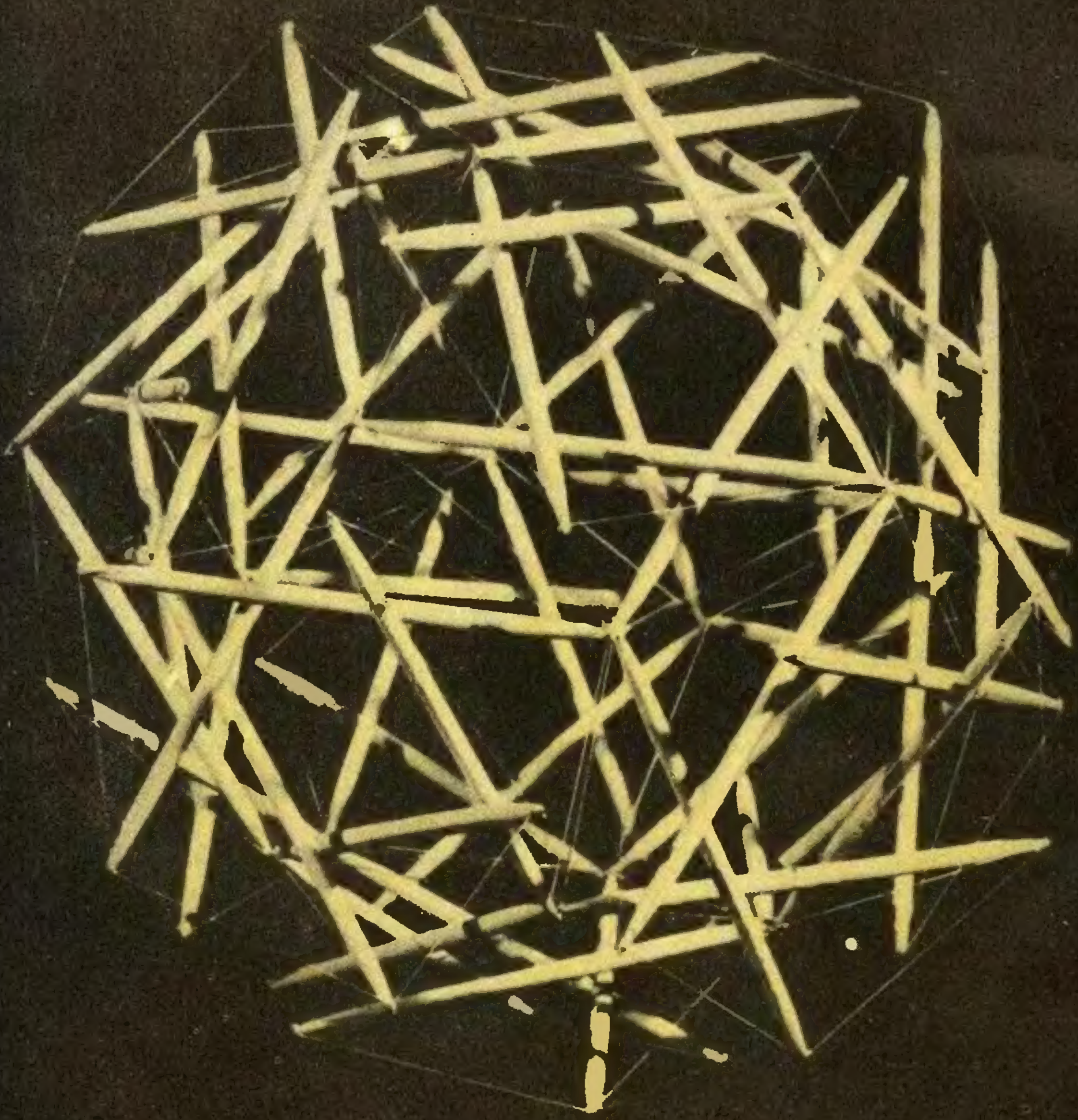


1. Мат в 8 ходов.



2. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 марта 1983 г. по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, редакция журнала «Квант» с пометкой на конверте «Шахматный конкурс, задания 1, 2».



Эта конструкция из тонких проводов и стилизованных палочек, названная ее создателем Э. Хандюковым «стержне-вантовым многогранником», демонстрировалась в прошлом году в Москве на выставке «Архитектурная бионика, новые формы и конструкции». Воздушность и изящество ее линий сочетаются со сложностью геометрического замысла. Для любителей математики «стержне-вантовый многогранник» Э. Хандюкова — источник интересных вопросов. Хочется разобраться в его геометрии, выяснить, в какой мере он является переплетением правильных многогранников, как кажется на первый взгляд. Хотелось бы также понять математические основы подобных конструкций, понять, почему нитки и палочки без единого жесткого соединения могут образовывать жесткую конфигурацию.

Фотография, которую мы воспроизвели на первой странице обложки, сделана из космоса с помощью специальной аппаратуры.

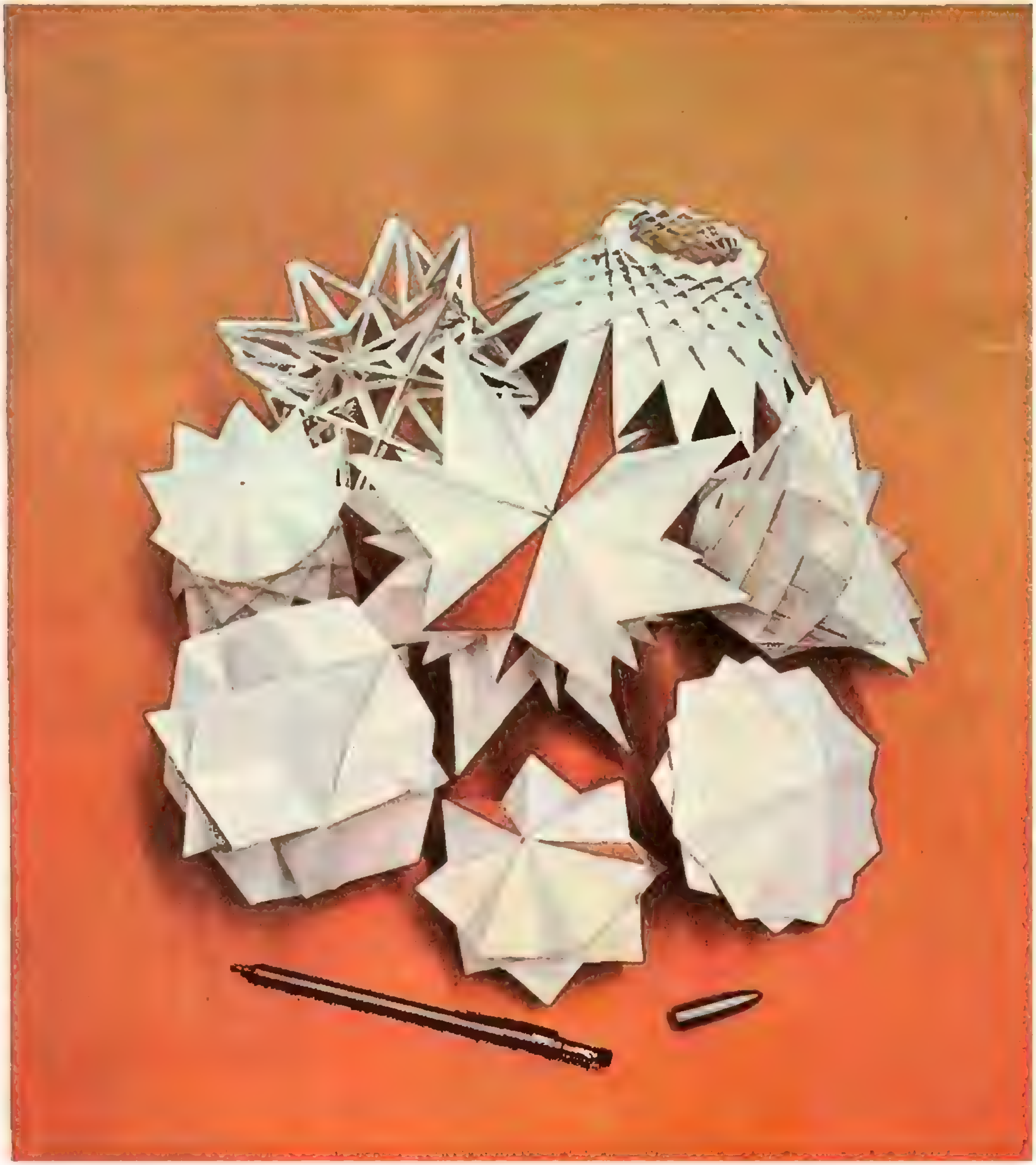
Обратите внимание на извилистое русло реки. На участке, видном на фотографии, река протекает по низменности. Чем объясняется тот факт, что реки, текущие даже по гладкой равнине, извиваются, и на изгибах один берег, как правило, пологий, а другой — крутой?

Об этом вы узнаете, прочитав статью «Меандры рек».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этой фотографии показаны модели многогранников, изготовленные А. С. Близнюком и названные им «структурными образованиями гиперболоидов». Однополостный гиперболоид — поверхность, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, *— особенно хорошо поддается моделированию, так как у него имеется два семейства прямолинейных образующих (см. «Квант», 1979, № 1, с. 26). В части моделей рёбра как раз идут по этим образующим — поэтому прямолинейной многогранной конструкцией удается создать иллюзию искривленной поверхности.*



НОМЕР
2

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

2 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука" Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	*А. П. Ершов.* Программирование — вторая грамотность	*A. P. Ershov.* Programming — the second literacy
8	*И. К. Кикоин.* Анатолий Петрович Александров	*I. K. Kikoin.* Anatoly Petrovich Alexandrov
11	*Я. А. Смородинский.* Черные дыры	*Ya. A. Smorodinski.* Black holes
16	*Л. С. Понтрягин.* Комплексные числа	*L. S. Pontriagin.* Complex numbers
	Новости науки	**Science news**
20	*М. А. Кожушнер.* Холодный взрыв	*M. A. Kojushner.* Cold explosions
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
21	*В. И. Пентегов.* Давайте нагреем воду сверху	*V. I. Pentegov.* Heating water from above
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
25	*В. Е. Белонучкин.* Уравнение газового состояния	*V. E. Belonuchkin.* Equation of gazeous state
28	*А. А. Болибрух, В. М. Уроев, М. И. Шабунин.* Задачи с устного экзамена в МФТИ	*A. A. Bolibrukh, V. M. Uroev, M. I. Shabunin* Oral examination problems from M. P. T. I.
29	*Л. Ф. Штернберг.* Многофигурная стереометрическая задача	*L. F. Shternberg.* Multiple figure space geometry problem
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
35	Задачи	Problems
36	*Л. А. Лещинский, Т. С. Петрова.* Дано... Требуется определить.	*L. A. Leschinski, T. S. Petrova.* Given.. Determine...
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
38	Задачи М786—М790; Ф798—Ф802	Problems M786—M790; P798—P802
41	Решения задач М765—М769, М771—М774; Ф783—Ф787	Solutions M765—M769, M771—M774; P783—P787
	Олимпиады	**Olympiads**
51	Задачи республиканских олимпиад	Olympiad problems from our Republics
	Искусство программирования	**The art of programming**
54	Стандартные приемы программирования. Урок 5	Standart programming methods. Lesson 5
56	**Практикум абитуриента**	**College applicant's section**
60	**Ответы, указания, решения**	**Anwers, hints, solutions**
	Наша обложка *(34)*	**Our cover page** *(34)*
	Смесь *(52)*	**Miscellaneous** *(52)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Каспаров — победитель Московского межзонального турнира *(3-я с. обложки)*	Kasparov wins the Moscow interzone tournament *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1983

Программирование — вторая грамотность

Член-корреспондент АН СССР
А. П. ЕРШОВ

Эта статья основана на выступлении автора на открытии конференции Международной Федерации по обработке информации и ЮНЕСКО «Применение ЭВМ в обучении» в Лозанне (Швейцария) в июле 1981 г. Текст выступления переработан специально для «Кванта».

Я сознаю, что сравнение программирования с грамотностью многим покажется рискованным. По одну сторону нашего сравнения — необычная профессия, требующая способности и длинного обучения, а по другую — общее достояние, важнейшее свойство современного человека.

Тем не менее я сразу постараюсь пояснить, чем это сравнение поучительно.

Прежде всего, не нужно забывать, что всеобщая грамотность существовала не испокон веков. Как и программирование, она имела свое предначало, возникновение и развитие. Мы привыкли к тому, что СССР — страна практически сплошной грамотности; а ведь 100 лет тому назад в России грамотных было лишь около 20%. Еще сейчас на Земле насчитывается порядка 800 млн. неграмотных.

Далее, как в основе всеобщей грамотности, так и в основе широкого распространения программирования, лежит *техническое изобретение:* печатный станок и ЭВМ соответственно. Развитие и распространение книгопечатания привело к всеобщей грамотности. Развитие и распространение ЭВМ приведет к всеобщему программированию.

Так же как слово «грамотность», смысл которого теперь значительно шире, чем просто умение писать и читать, слово «программирование», приобретает более широкое значение. Это не просто умение писать программы для ЭВМ на каком-то специальном языке, а способность составлять четкие, целенаправленные правила действия в самых различных ситуациях. В этом широком смысле программирование является такой же *органической способностью* человека, как и грамотность. Эта способность подготовлена организацией нервной системы человека, она присуща людям в труде, при общении друг с другом, в созерцании природы и во взаимодействии с ней.

Наконец, хотя грамотность и программирование можно, конечно, всячески сравнивать, находя между ними много аналогий, самое главное, пожалуй, состоит в том, что они *дополняют друг друга* и вместе составляют новое представление о гармонии человеческого ума.

На последнем тезисе стоит немного остановиться.

Мы все помним простые и емкие слова Максима Горького: «Любите книгу, источник знания». Мы понимаем грамотность как способность выразить знания в виде текста. Однако остается проблема: *как перейти от знания к действию.* «Сообразуйте действия со словами, а слово с действием», говорит один из героев Шекспира. Вот здесь — в переходе от знания к действию — и возникает программирование.

В докнижный период единство слова и дела осуществлялось естественно и понятно. Словами и примером старший (учитель) обучал младшего (ученика) делу. Понимание было не чисто умственным озарением, а достижением поставленной цели, овладением приемами изучаемого дела.

Появление книги нанесло сильнейший удар единству слова и дела. Отделился процесс накопления знаний от их применения, появились новые формы жажды знаний и новые ощущения постижения истины. Во всех языках образовались специальные выражения для людей, отдающих предпочтение книге в своем стремлении к знанию. В этих выражениях бывает оттенок пренебрежения, в целом несправедливый, но иногда заслуженный.

Постепенно стало ясно, что книжное накопление знаний требует *новых механизмов* для превращения этих знаний в действие. Так, задача программирования появилась задолго до ЭВМ. Появление ЭВМ лишь сделало проблему программирования актуальной, так же как книгопечатание сделало актуальной проблему грамотности.

Но грамотность и способность к действию сами по себе еще ничего не значат. В этом противопоставлении трудно сказать от чего мы страдаем больше: от невежества или бездеятельности. Гёте предупредил: «Нет ничего страшнее деятельного невежества». Однако опыт подсказывает, что оно произрастает при недостаточно активной жизненной позиции образованных и культурных людей. Отсюда наше стремление ко второй грамотности — не только к обучению писать команды, но к воспитанию человека, решительного и предусмотрительного вместе.

Книгопечатание

Вернемся снова к отправной точке нашего сравнения — к книгопечатанию. Я приведу лишь некоторые данные, характеризующие темп, размах и взаимообусловленность книгопечатания и грамотности.

Первые печатные издания увидели свет в 1445 году. Еще не истек XV-й век, а в мире уже работало свыше 1000 типографий, выпустивших порядка 10 млн. экземпляров книг, почти мгновенно превысив весь наличный запас рукописных изданий. В 1962 г. во всем мире было напечатано 10 млрд. книг, то есть каждый житель земли приобрел в среднем две книги. Средняя семья в СССР покупает в год 30 книг в условиях постоянного дефицита.

Есть, как мне кажется, глубокие аналогии между книгой и ЭВМ как продуктом и их общие отличия от остальных изделий. Все остальные изделия носят специализированный характер, выполняют некоторую частную функцию. Отношение объема производства такого продукта к числу потребителей — малая константа. С книгами и ЭВМ дело обстоит по-другому. И книги, и вычислительные машины несут в себе информационную модель внешнего мира во всем его разнообразии и изменчивости. Здесь пытливость и любознательность человека не позволит ограничиваться малой константой.

Взаимосвязь между грамотностью и книгопечатанием за последнее столетие, на примере опыта СССР, видна из графика на рисунке 1.

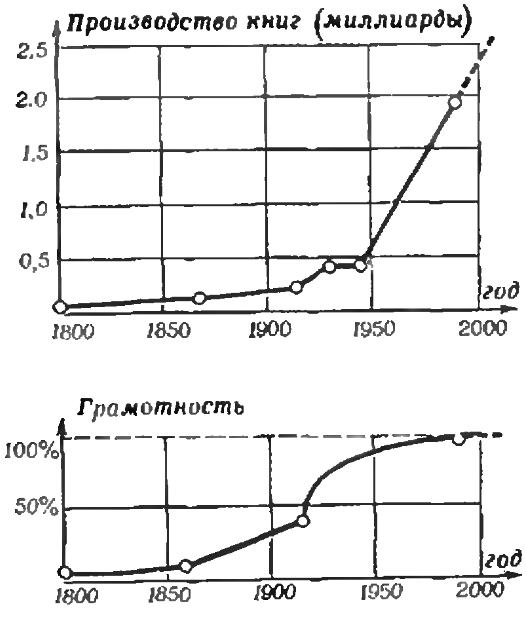


Рис. 1

Если поверить в справедливость наших аналогий, то тогда надо признать, что в отношении ЭВМ и программирования мы находимся примерно на том месте, на котором книгопечатание и грамотность находились в середине XIX века. Это дает некоторое представление о размахе и объеме работы, которую надо предпринять для подготовки встречи мира ЭВМ с миром людей.

Мир ЭВМ

Средства массовой информации создали у нас привычное видение вычислительной машины: экран и клавиатура дисплея, бобины магнитных лент, кружево перфоленты, длинное полотно выдач с печатающего устройства, мигающие огоньки инженерного пульта, угловатые шкафы, забитые электронными деталями. Но это представление уже не соответствует основным путям развития вычислительной техники. Машина будущего — это прежде всего тончайший срез кристалла кремния, вставленный в миниатюрную рамку, опутанную паутиной тончайших проводов, и помещенный в укромное место практически каждого промышленного изделия.

Вы наверное поняли, что речь идет о *микропроцессорах*, которые хотя и появились всего чуть больше десяти лет, но уже производятся десятками миллионов штук в год. Появление и развитие микропроцессоров — по моему глубокому убеждению — самое революционное техническое новшество XX-го века. Сейчас информационно-вычислительное устройство, со скоростью примерно 100 тысяч операций в секунду, с оперативной памятью в 5 тысяч чисел (слов) и с внешней памятью, сравнимой с книгой средней величины, помещается в спичечный коробок!

На пути этого развития возникает, однако, одно принципиальное препятствие. В настоящее время способность человека передавать знания машине безнадежно отстает от способности создать эту машину. Затраты на создание микропроцессора

Книгопечатня XVI в. Гравюра на дереве.

исчисляются в человеко-часах, а затраты на создания программ для них — в человеко-месяцах (даже с учетом того, что программы делаются в большом числе экземпляров). Наглядно динамика соотношения затрат на информационное оборудование («hardware») к затратам на их программное обеспечение («software») видна на известной кривой Боэма. Рис. 2. Простые расчеты показывают: для того чтобы запрограммировать все производимые через двадцать лет микропроцессоры, надо будет посадить за программирование... все взрослое население земного шара.

Руководители производства не могут отмахиваться от этих расчетов как от еще одного парадокса, которых там много в нашем сложном мире. Иначе они могут оказаться, выражаясь словами писателя-фантаста Артура Кларка, «в точно таком положении, как неграмотные средневековые бароны, гордо заявлявшие, что счетом и письмом у них занимаются секретари». Средневековые бароны и их потомки ушли в небытие, считать и писать научился каждый, а у секретарей появились новые хозяева и новые обязанности. То же должно случиться в программировании: организаторы производства, не имеющие представления об ЭВМ и программировании, уйдут в небытие, а программировать научится каждый — это я и называю *второй грамотностью.*

Таким образом мы переходим от мира машин к миру программ.

Мир программ

Герой Мольера, месье Журдэн, был в высшей степени удивлен, когда узнал, что всю жизнь говорил прозой, не подозревая этого. Сегодня человечество оказывается в положении месье Журдэна, с удивлением обнаруживая, что оно живет в мире программ.

Да, мы живем в мире программ и сами постоянно программируем, не сознавая этого.

Программами буквально напичкан наш организм, само развитие организма есть выполнение генетической программы. Все без исключения физиологические процессы — это огромная, тщательно отлаженная и сложно устроенная библиотека программ поведения организма.

Как правило, производственный процесс — это работа по программам. Хорошо работающий цех всегда внутренне формализован, его эффективность зависит от отлаженности программ, выполняемых людьми. Даже если процесс связан со случайностью, например охота или вождение автомашины, непредсказуемость сказывается лишь на выстраивании цепочки ситуации, но не на реакции на эти ситуации. Реакция осуществляется по программе, почти

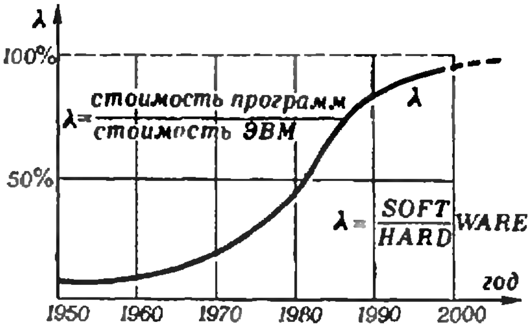


Рис. 2.

всегда работающей в автоматическом режиме.

Повседневная жизнь человека, особенно городская — это деятельность по программам. Каждый человек, придерживающийся режима, с гордостью почувствует себя программистом, если представит себе свою обычную утреннюю последовательность действий, начиная от звонка будильника и кончая началом работы.

Мы жалуемся на социальные болезни века, в частности — отстраненность от общих дел, пассивность, ратуем за формирование активной жизненной позиции. Что это такое? Попросту говоря, это способность выработать программу действий и *следовать* ей.

Таким образом, мир программ — это далеко не только начинка памяти ЭВМ. Это, прежде всего,— огромный запас операционного знания. Это «деятельное знание» хранится в библиотеках программ для ЭВМ, в обычных библиотеках, в генофонде всего живого. А используется оно как вычислительными машинами, роботами, автоматическими устройствами, так и живыми организмами, в частности, человеком.

До сих пор многим кажется, что овладение программированием должно начинаться с ознакомления с устройством какой-нибудь ЭВМ и кропотливого заучивания деталей записи программ для этой ЭВМ на каком-нибудь конкретном алгоритмическом языке. Без навыков, конечно, нельзя обойтись нигде, но основные законы программирования, способы перехода от знания к действию, организация действий в пространстве и во времени носят, на самом деле, гораздо более фундаментальный и общий характер, приближающий их к основным законам математики или речи и письма.

На меня всегда производит сильное впечатление один простой пример задачи на программирование, показывающий переход от знания к действию. Я выпишу последовательные этапы перехода от формул, выражающих знание, к программе, выражающей действие, для задачи возведения числа $x>0$ в целую степень n:

$x^0=1$ $x^{n+m}=x^n\cdot x^m$ $x^{mn}=(x^m)^n$ I	$x^0=1$ $x^{n+1}=x^n\cdot x$ $x^{2n}=(x^n)^2$ II
$x^0=1$ $x^{2n}=(x^n)^2$ $x^{2n+1}=x^{2n}x$ III	если $n=0$ 1 если n четное $(x^{n/2})^2$ если n нечетное $x\cdot x^{n-1}$ IV

```
V
степень (x, n)=
если $n=0$ то 1
иначе если чет $n$ то (степень $(x, n/2))^2$
        иначе $x\cdot$степень $(x, n-1)$ все
все
```

Предлагаю каждому дать свое объяснение того, какие законы и какое знание здесь применяются при переходе от этапа к этапу, для того, чтобы перейти от очевидного знания к весьма нетривиальной программе.

Вы почувствуете, что это, одновременно, и легкая и трудная задача, так как, с одной стороны, понятно, что делается, и, с другой стороны — трудно объяснить эти действия в общей форме.

Таким образом, перед нами стоит важнейшая задача — выработать общие принципы программирования, выделить в нем основные понятия и выразить в общепонятной форме. Такие задачи наука всегда решала вместе с образованием, и это значит, что рано или поздно мир ЭВМ и программ соприкоснется с миром школы.

ЭВМ в школе

Сейчас, после появления микропроцессоров, нет смысла ставить вопрос о том, быть или не быть ЭВМ в школе. ЭВМ уже есть во многих школах и будет приходить туда в нарастающих количествах.

Часто активно высказывается мнение, что ЭВМ с программой — это то же самое, что задача с известным решением; появление электронного помощника воспитает леность ума и ничего больше. Одна из лучших юмористических картинок американского журнала «Нью Йоркер» изображает бедного Джонни, уныло глядящего на кучку карманных калькуляторов перед ним, и не менее измученную Маму, терпеливо повторяющую свой

Программисты за работой

вопрос: «Ну, посмотри, если у тебя пять карманных калькуляторов и ты возьмешь от них два, сколько же останется?»

Эти предостережения опасности «кнопочного» образования раздавались и раньше. Однако многочисленный опыт общения детей самых разных возрастов с ЭВМ подтверждает обратное: активность, пытливость, а с ними и способности возрастают очень сильно.

В нашей местной школе половина одного из классов выучила исторические даты назубок, после того как один из юных программистов вложил в ЭВМ диалоговую программу, сообщающую исторические даты, а другой, подвергнув учительницу экзамену с помощью ЭВМ, поймал ее несколько раз на неточностях.

Какая-то компания выпустила на рынок игру-компьютер, которая проверяет правописание английских слов. С помощью синтезатора речи слово произносится, ребенок набирает это слово по буквам, машина проверяет и реагирует. В карманную игру трудно вложить хороший синтезатор речи, но авторы обратили его недостаток в достоинство, сделав его очень похожим на голос Буратино. Представляете себе восторг детей, когда игрушка пищит им голосом Буратино: «Пробуй снова, пробуй снова, ты не знаешь это слово!»

Перед конкурсными вступительными экзаменами в одном из вузов установили консультационную информационную систему, реализованную на ЭВМ. Около терминалов всегда толпилась очередь. В интересах ребят рядом посадили двух преподавателей, чтобы разгрузить машину. Преподаватели сидели без дела, а у терминалов — по-прежнему очередь. Почему? «А мы не стесняемся перед машиной обнаружить свое незнание, а перед преподавателем стесняемся»,— говорили ребята. ЭВМ создает игровую обстановку, которая тут ценней реальной жизни,— ведь из игры можно выйти не утратив достоинства.

Заключение

Я начал свою статью со сравнения. Сейчас мы можем раскрыть его конкретное содержание. Мы стоим на пороге практически беспредельного развития и распространения электронной вычислительной техники в обществе. Машина становится интеллектуальным орудием и партнером практически во всех сферах жизни и деятельности человека. Развитие мира программ, постоянное усложнение окружающей среды требуют и одновременно делают возможным значительно повысить интеллектуальную силу человечества.

Для того чтобы не затеряться в этом стремительно развивающемся мире, мире удивительной техники и усложняющихся программ, уже не хватает грамотности в традиционном ее смысле. Необходимо преодолеть и рубеж, который я назвал рубежом второй грамотности. И, в первую очередь, это относится к учащимся.

Анатолий Петрович Александров

(к 80-летию со дня рождения)

Академик И. К. КИКОИН

13 февраля исполнилось 80 лет выдающемуся советскому физику, Президенту Академии наук СССР академику Анатолию Петровичу Александрову. Мне выпало большое счастье работать совместно с академиком А. П. Александровым много лет. Сначала это было в Ленинградском физико-техническом институте, которым тогда руководил замечательный советский физик, академик А. Ф. Иоффе, затем — в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова, где мы продолжаем работать вот уже свыше 30 лет. Поэтому у меня есть полное право дать объективную характеристику научной деятельности этого выдающегося ученого.

Анатолий Петрович Александров известен своими научными работами в области ядерной физики и ядерной техники. Весь мир знает его как главного ядерного энергетика Советского Союза. Замечательно, что он начал заниматься ядерной физикой уже будучи крупным специалистом совсем в другой области — в физике диэлектриков и полимеров. Во время войны А. П. Александров еще был далек от ядерной физики, занимаясь проблемой защиты кораблей от вражеских магнитных мин. Лишь в самом конце войны и в первые послевоенные годы он в течение короткого времени переквалифицировался в физика-ядерщика, занялся ядерной техникой и стал одним из крупнейших ученых в этой новой для него области. Вскоре А. П. Александров стал заместителем И. В. Курчатова и с тех пор практически взял на себя тяжелый труд научного руководства проблемой промышленного ядерного реакторостроения. И. В. Курчатов был поглощен реализацией идеи сооружения первой в мире атомной электростанции. Это была трудная проблема, нелегко было убедить специалистов в возможности решения этой сложной задачи. В те, теперь уже далекие, годы мало кто верил в целесообразность и техническую возможность строительства промышленных атомных электростанций, способных конкурировать с обычными тепловыми станциями. Анатолий Петрович со своими сотрудниками провел огромную научную и инженерную работу, чтобы обосновать такую возможность. В результате была разработана и принята научно обоснованная программа развития атомной энергетики в нашей стране.

Достигнутый в этом деле блестящий успех побудил А. П. Александрова заняться проблемой применения ядерной энергетики и в судостроении, решить научно-технические проблемы судовых ядерных установок. Триумфом этой деятельности явилось создание первого в мире атомного ледокола «Ленин». Без преувеличения можно сказать, что ледокол «Ленин» — это детище Александрова. Он был научным руководителем при проектировании судна, непосредственно руководил конструированием ядерного реактора — сердца корабля, участвовал в швартовых испытаниях. Следующие поколения атомных ледоколов — «Брежнев» и «Сибирь» — также сооружались под его научным руководством.

Заслуги А. П. Александрова в области атомной науки и техники нашли свое наиболее яркое выражение в том, что при его непосредственном участии вырабатывалась ядерно-энергетическая политика нашей страны. Для решения столь важной государственной задачи Александрову пришлось организовать целый комплекс научно-технических исследований, обеспечивающих безошибочность принимаемых решений.

Примером реализации ядерно-энергетической программы нашего государства может служить знаменитая Ленинградская атомная станция (ЛАЭС). По мощности она была первой в мире (около миллиона киловатт в блоке); за рубежом только теперь начали сооружать блоки такой мощности. Научное руководство проектированием этой станции также осуществлял А. П. Александров. Проектированию и сооружению ЛАЭС предшествовали научные исследования крупного масштаба. В частности, пришлось провести трудные, но чрезвычайно важные исследования в области теплофизики. Дело в том, что тепловые нагрузки в тепловыделяющих элементах реактора столь большой мощности очень велики и поэтому поведение этих элементов трудно предвидеть. Нужно было разработать специальные теплофизические стенды, на которых можно было в крупном масштабе моделировать те опасные явления, которые могут возникать в эксплуатационных условиях.

Под руководством Анатолия Петровича, по его идеям, при его непосредственном участии создание таких стендов было осуществлено в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова, которым А. П. Александров руководит без малого 25 лет. Проведение этих теплофизических исследований в институте обеспечило возможность эксплуатации мощных атомных электростанций без каких бы то ни было существенных неполадок. Такая тесная связь научных исследований и технических решений позволила нашей стране выйти на передовые позиции в области ядерной энергетики.

Обладая широким научным кругозором, Анатолий Петрович ясно понимает значение перспективных работ, которые относятся к дальнейшему развитию ядерной энергетики, в частности к проблеме XXI века — термоядерной энергетике. Работы по управляемому термоядерному синтезу были начаты по инициативе И. В. Курчатова, который уделял им особое внимание. В настоящее время известно, что для технического использования термоядерной энергии необходимы большие магнитные поля. Однако их создание связано с огромным расходом энергии, который может оказаться больше, чем энергия, выделяемая при термоядерной реакции. И только один способ позволит избежать этой трудности — создание магнитного поля с помощью сверхпроводящих материалов. Поэтому в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова при активном участии Анатолия Петровича широко развернуты работы по технической сверхпроводимости. Первая в мире термоядерная установка типа «Токамак» — «Т-7», в которой магнитное поле создано с помощью сверхпроводящих обмоток, разработана и создана у нас, в Советском Союзе.

Академик А. П. Александров — член Центрального комитета КПСС, депутат Верховного Совета СССР. Его исключительные заслуги высоко оценены Родиной: он трижды Герой Социалистического Труда, награжден многими орденами и медалями.

Свое восьмидесятилетие Анатолий Петрович встречает полным сил и энергии, и я уверен, что широкие круги советского народа, в том числе читатели нашего журнала, от души желают ему долгих лет плодотворной деятельности, благополучия и личного счастья.

В глубинах Вселенной. *Фрагмент картины художника А. Соколова.*

Черные дыры

Доктор физико-математических наук
Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

Общая теория относительности всегда поражала воображение своими предсказаниями удивительных явлений. Среди всех ее предсказаний рекорд побивает вывод, что во Вселенной могут существовать черные дыры — небесные тела с большой плотностью, в недра которых попадает, проваливается практически все, что находится в окрестности.

Пока еще трудно сказать, доказано ли существование черных дыр, и хотя о них естествоиспытатели рассуждали более 200 лет тому назад, основываясь на теории тяготения Ньютона, их поиски начались только в наши дни, когда поняли, что их можно «увидеть».

Если черные дыры — реальность, то для них есть дело во Вселенной: они могли бы взять на себя роль гигантских генераторов энергии, обеспечивающих эволюцию Вселенной. Может быть, такой генератор увидели недавно астрономы, получив фотографию центра нашей галактики. Наука о черных дырах только начинается. Каковы будут ее успехи и где нас ждут разочарования — сказать нельзя, но о свойствах черных дыр физики могут рассказать много интересного.

Движение тел в окрестности черной дыры

Рассмотрим небесное тело (звезду) с радиусом R и массой M. Предположим, что никаких других тел поблизости нет и поле тяготения создается только им одним. Пусть какое-то другое тело (массу и радиус которого для простоты рассуждений будем считать малыми по сравнению с M и R соответственно), двигаясь из бесконечности, попадает в это поле тяготения. Согласно законам Кеплера, оно либо будет двигаться вокруг звезды по эллипсу, либо, придя из бесконечности, обогнет тело по параболе или гиперболе и уйдет обратно на бесконечность, навсегда покинув звезду.

Аналогично, если тело начинает свое движение с поверхности звезды, где ему сообщается некоторая скорость, то оно (если, конечно, не упадет на звезду) либо станет спутником звезды, либо навсегда покинет ее.

Чтобы покинуть звезду, тело должно иметь энергию, достаточную для совершения работы против сил тяготения. Другими словами, его кинетическая энергия $mv^2/2$ должна быть не меньше, чем GmM/R (ибо такова работа, которую надо затратить, чтобы тело массой m переместить с поверхности звезды в бесконечность*)):

$$\frac{mv^2}{2} \geqslant G\frac{mM}{R}.$$

Отсюда можно найти минимальную скорость, которая дает возможность телу покинуть звезду; ее называют второй космической скоростью:

$$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Если радиус звезды R уменьшается, а ее масса M остается неизменной, то скорость v_{II} увеличивается и становится сколь угодно большой, если R стремится к нулю. Другими словами, тело, падающее по прямой на точечную звезду, приобретает, формально, бесконечно большую скорость.

---

*) См., например, Приложение I к статье К. Кикоина «Что такое потенциальная яма» («Квант», 1982, № 8) или п. 61 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10» (М., «Просвещение», 1982).

Такой результат противоречит утверждению теории относительности, что никакое тело не может иметь скорость, бо́льшую скорости света. Наша формула верна не всегда и ее можно использовать лишь тогда, когда скорость v_{II} оказывается много меньше скорости света c:

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \ll c.$$

Это неравенство можно записать по-другому:

$$R \gg \frac{2GM}{c^2}.$$

Величина, стоящая в правой части, играет в теории важную роль и ей присвоено особое название — гравитационный радиус звезды:

$$R_{гр} = \frac{2GM}{c^2}.$$

Теперь условие применимости классической механики к описанию движений в поле тяготения небесных тел будет выглядеть так:

$$R \gg R_{гр}.$$

Гравитационный радиус большинства небесных тел очень мал. Для Солнца он равен приблизительно 3 км, для Земли — 0,8 см, то есть он существенно меньше их линейных размеров ($R_С = 7 \cdot 10^5$км, $R_З = 6{,}4 \cdot 10^3$ км). Так что обычно скорость тела, даже падающего из бесконечности на поверхность звезды (или планеты), очень мала:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{R_{гр}}{R}}\, c \ll c.$$

Всегда ли это неравенство сохраняется или возможно, чтобы оно нарушилось? Конечно, возможно, но для этого нужно, прежде всего, чтобы радиус звезды — источника гравитационного поля — был бы по крайней мере равен гравитационному радиусу. Солнце, например, понадобилось бы для этого сжать приблизительно в 230 000 раз. Плотность его оказалась бы невообразимо большой: $\sim 2 \times 10^{19}$ кг/м^3 (средняя плотность Солнца $\sim 1{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3), большей, чем плотность атомного ядра (плотность атомных ядер $\sim 10^{17}$ кг/м^3). Тем не менее именно такие объекты и имеют в виду, когда говорят о черных дырах — сгустках невероятно сжатой материи.

Что же отличает поведение тел вблизи этих объектов? Если тело движется издалека, до тех пор пока расстояние r до него много больше гравитационного радиуса: $r \gg R_{гр}$, его движение подчиняется законам Кеплера. Если же тело попадает на более близкое расстояние такое, что отношение $R_{гр}/r$ оказывается не слишком малым, движение приобретает совсем другой характер. (Формальная причина этого состоит в том, что сила притяжения перестает подчиняться закону обратных квадратов — закону всемирного тяготения. А это сразу нарушает стройную классическую картину движения.) Наконец, в окрестности черной дыры, то есть на расстояниях, сравнимых с гравитационным радиусом, притяжение к черной дыре будет столь большим, что никакое тело не сможет пройти мимо — оно затягивается ею и исчезает в ее «черных» недрах. В классической ньютоновской механике комета, например, может пролететь сколь угодно близко от центра притяжения и все же уйдет от него в бесконечность. Черная же дыра собирает вокруг себя все, что пролетает сравнительно близко. Луч света и тот ведет себя необычным образом. Проходя около черной дыры, луч отклоняется столь сильно, что его траектория закручивается в спираль и, таким образом, он тоже захватывается черной дырой.

А может ли какое-нибудь тело (или хотя бы световой луч) покинуть черную дыру? Оказывается, нет, поскольку для того, чтобы вылететь наружу, недостаточно даже скорости света. Никакой энергии тела не хватит, чтобы преодолеть колоссальное гравитационное поле черной дыры.

Немного истории

У теории черных дыр есть давняя история. Неожиданная сторона ее состоит в том, что связь между радиусом и массой черной дыры была обнаружена двести лет назад. И хотя основания для этого открытия были ложными, оно заслуживает того, чтобы о нем рассказать.

В XVIII веке в Англии научные сообщения посылались в виде писем и зачитывались на заседании Королевского общества (так называлась Английская академия наук). Однажды такое письмо было послано одним из членов этого общества бакалавром богословия Джоном Мичеллом другому члену — знаменитому Генри Кавендишу*). Оно было зачитано на заседании 27 ноября 1783 года. Как теперь известно из записок Кавендиша, изданных Максвеллом, Кавендиш также обратил внимание на возможность существования объектов, которые мы сейчас называем черными дырами. Может быть, поэтому именно ему и сообщал о своих соображениях Мичелл.

Процитируем отрывок из его письма, которое было опубликовано в известном журнале Philosophical Transactions Королевского общества в 1784 году: «...если радиус шара, который имеет ту же плотность, что и Солнце, будет превышать радиус Солнца в отношении 500:1, то тело, падающее на шар с бесконечно большой высоты, приобретет на его поверхности скорость, превышающую скорость света. Можно заключить, предполагая, что свет, как и другие тела, притягивается с силой, пропорциональной массе, что свет, излучаемый таким шаром, будет принужден вернуться обратно из-за собственной тяжести». Так звучало первое теоретическое предсказание.

Откуда взял свою оценку Мичелл? Попробуем ответить на этот вопрос, решив обратную задачу — найдем, каким должно быть отношение радиусов рассматриваемого шара и Солнца, чтобы вторая космическая скорость для шара стала равной скорости света.

Будем исходить из выражения для второй космической скорости, в котором массу тела M выразим через его плотность ϱ:

$$v_{II}^2 = \frac{2GM}{R} = \frac{8\pi G}{3}\varrho R^2.$$

Отсюда видно, что при постоянной плотности v_{II} пропорционально R. Следовательно, для того чтобы скорость v_{II} была равна скорости света c, радиус шара $R_ш$ должен быть во столько раз больше радиуса Солнца $R_С$, во сколько скорость света больше второй космической скорости для Солнца:

$$\frac{R_ш}{R_С} = \frac{c}{v_{II\,С}}.$$

Или, используя формулу $v_{II\,С} = \sqrt{R_{гр\,С}/R_С}\;c$, —

$$\frac{R_ш}{R_С} = \sqrt{\frac{R_С}{R_{гр\,С}}}.$$

Зная, что $R_С \approx 700\,000$ км, а $R_{гр\,С} \approx 3$ км, получаем для отношения радиусов значение ≈ 480, что, действительно, близко к 500.

Заметим, что Мичелл, вычисляя вторую космическую скорость для Солнца, конечно же, не мог воспользоваться понятием гравитационного радиуса (в то время такого понятия просто не существовало). Как же он считал?

Мичелл знал скорость движения Земли вокруг Солнца: $v = 30$ км/с и отношение радиуса орбиты Земли R к радиусу Солнца $R_С$:

$$k = \frac{R}{R_С} \approx \frac{150 \cdot 10^6\ \text{км}}{0{,}7 \cdot 10^6\ \text{км}} \approx 214.$$

Согласно второму закону Ньютона, орбитальная скорость Земли

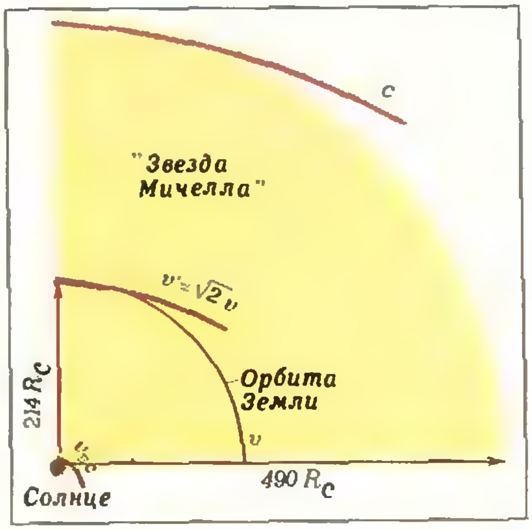
$$v = \sqrt{\frac{GM_С}{R}}.$$

Чтобы покинуть Солнечную систему с орбиты Земли, нужна скорость

$$v' = \sqrt{\frac{2GM_С}{R}},$$

что в $\sqrt{2}$ раз больше скорости v.

Скорость, необходимая для того, чтобы



---

*) Кавендиш был первым, кто изучал гравитационное притяжение тел в лаборатории и измерил гравитационную постоянную.

покинуть Солнечную систему с поверхности Солнца, то есть вторая космическая скорость для Солнца $v_{\text{п с}}$, должна быть в $\sqrt{k}$ раз больше скорости v' (эти скорости обратно пропорциональны корню квадратному из расстояния до центра Солнца).

Таким образом, отношение радиуса $R_{\text{ш}}$ «звезды (шара) Мичелла» к радиусу $R_{\text{С}}$ Солнца равно

$$\frac{R_{\text{ш}}}{R_{\text{С}}} = \frac{c}{v_{\text{п с}}} = \frac{c}{\sqrt{2}\,v\,\sqrt{k}} \approx 500.$$

В чем же ошибочность рассуждений Мичелла? Он думал, что свет, преодолевая поле тяготения, теряет свою кинетическую энергию, то есть, согласно механике Ньютона, уменьшает свою скорость. Он даже предлагал измерять скорость света, исходящего от разных звезд, и определять таким образом массу звезд. Идея Мичелла, конечно, очень смелая, но, как мы сейчас знаем, неверная. У света нет кинетической энергии в обычном смысле этого слова. При совершении работы против поля тяготения звезды уменьшается энергия кванта света, что по формуле $E = h\nu$ означает, что уменьшается частота ν, а не скорость света. Это есть эффект «красного смещения» (то есть смещения спектральных линий в длинноволновую часть спектра) в гравитационном поле массивных тел. «Красное смещение» наблюдалось даже в земных условиях и было одним из первых подтверждений общей теории относительности.

В письме Мичелла есть еще одно замечательное место, относящееся к задаче о том, как можно было бы обнаружить несветящиеся объекты. Темные звезды — черные дыры — он надеялся найти в том случае, если они оказываются одной из компонент двойной звезды, изменяющей свою яркость, когда светящийся спутник затмевается, заходя в тень черной дыры.

Такое предположение оказалось пророческим. В наше время черные дыры пытаются найти именно в двойных системах, только не из измерений яркости, а по их рентгеновскому излучению. Источником этого излучения может быть поток вещества, которое перетекает к черной дыре со второй, светящейся компоненты двойной звезды. При падении в черную дыру вещество разогревается до очень высокой температуры и излучает электромагнитные волны в рентгеновском диапазоне. Так, в пользу того, что двойная звезда Лебедь Х-1 содержит черную дыру, говорят затмения в интенсивном рентгеновском излучении, зарегистрированные в созвездии Лебедя.

Через несколько лет, в 1796 году рассказ о черной дыре появился в «Изложении системы мира», написанном знаменитым французским математиком и астрономом Пьером Симоном Лапласом. Его рассказ почти совпал с тем, что писал Мичелл.

Рождение черных дыр

Откуда во Вселенной могли бы появиться черные дыры? Если они не возникли на самых ранних этапах эволюции Вселенной, о которых мы очень мало знаем, то они могли бы быть конечной стадией эволюции звезд.

Как и все тела природы, звезды не остаются неизменными, они рождаются, эволюционизируют и, наконец, умирают. Вещество каждой звезды находится под действием двух типов сил — гравитационных, стремящихся сжать звезду, и сил давления звездного вещества, препятствующих этому сжатию. В состоянии равновесия эти силы уравновешены.

Давление внутри обычной звезды (типа нашего Солнца) поддерживается внутренними источниками энергии и поэтому тесно связано с ее температурой. Когда источники энергии начинают иссякать, звезда остывает, давление уменьшается, и радиус звезды начинает уменьшаться — она сжимается под действием сил тяготения. Этот процесс продолжается до тех пор, пока какие-то другие силы, отличные по своей природе от гравитационных, не воспрепятствуют дальнейшему сжатию звезды.

Исход этого процесса зависит от массы звезды. Если масса звезды примерна такая, как у Солнца, сжатие будет происходить до тех пор, пока не начнут разрушаться электронные оболочки атомов — звезда превратится в холодный белый карлик. Если масса звезды несколько больше, примерно две-три солнечные массы, то гравитационные силы окажутся достаточно сильными, чтобы «раздавить атомы» и загнать электроны внутрь ядер, превратив протоны в нейтроны. Звезда превратится в нейтронную звезду.

Но если масса звезды будет превышать 3—5 масс Солнца, то, начав сжиматься, она не сможет остановить своего сжатия до тех пор, пока не превратится в бездонную пропасть — черную дыру.

Так могут возникнуть эти странные объекты. Вопрос только в том, реализуется ли на самом деле во Вселенной такой процесс, может ли в процессе эволюции звезда сохранить столь большую массу, избежав взрывов и разрушений, чтобы реально достичь неизбежного превращения в черную дыру.

Излучение черных дыр

Как мы уже говорили, из недр черной дыры не выходит ничего, поэтому она и называется черной. Тем не менее место черной дыры дает себя знать по мощному потоку излучения. Далекие небесные тела — квазары, расположенные от нас на расстоянии миллиардов световых лет, излучают энергию, в сотни раз превышающую энергию, которую выделяют целые галактики. Что происходит в этих областях — мы не знаем. Существует гипотеза, что источниками энергии являются гигантские черные дыры, масса которых превышает массу Солнца в 10^6—10^9 раз и которые родились вместе со Вселенной. К сожалению, проверить эту гипотезу очень трудно.

Астрономы предполагают, что в центре нашей Галактики находится черная дыра с массой около 10^9 масс Солнца. Вокруг нее обращается другое тело — примерно такой же (или даже большей) массы, но с бо́льшим радиусом. В этой системе возникают потоки вещества, устремляющиеся в направлении черной дыры. Это и маленькие частицы, и большие тела — осколки звезд, разорванных огромными гравитационными силами черной дыры. Они порождают потоки гравитационных и электромагнитных волн.

Излучая энергию, частицы все время приближаются к поверхности черной дыры и при этом теряют свою кинетическую энергию. Но запас этой энергии все время восполняется за счет уменьшения потенциальной энергии. (Потенциальную энергию на поверхности черной дыры можно оценить по ньютоновской формуле:

$$E_{п} = -G\frac{mM}{R_{гр}} = -\frac{1}{2}mc^2.$$

При вычислении по формулам общей теории относительности коэффициент 1/2 исчезает.) Поэтому тело, падающее с бесконечно большого расстояния (когда $E_{п}=0$), имеет запас энергии, равный сумме кинетической энергии $mv^2/2$ (при условии, что $v \ll c$) и энергии покоя mc^2. В процессе падения этот запас практически полностью теряется.

Таким образом, с теоретической точки зрения черная дыра оказывается механизмом, который способен «перерабатывать» в излучение всю энергию частиц, включая и энергию покоя. Такой «двигатель», способный работать с коэффициентом полезного действия очень близким к единице, уникален. Было бы несправедливым, если бы природа нигде не реализовала эту возможность.

* * *

Итак, у черных дыр могут быть разные обличия. Либо это грустные остатки звезд, некогда блиставших во всем своем великолепии, либо это гигантские «энергетические станции», с которыми связано само существование Вселенной.

Комплексные числа

Академик Л. С. ПОНТРЯГИН

Здесь я прежде всего очень кратко рассказываю о том, как возникли в математике и постепенно утвердились в ней комплексные числа. Затем даю определение комплексных чисел, действий над ними и их геометрическую интерпретацию. Попутно доказываются формулы косинуса и синуса суммы, тесно связанные с умножением комплексных чисел.

Историческая справка

Из курса математики известно, что отрицательные числа введены прежде всего для того, чтобы операция вычитания, обратная к операции сложения, была всегда возможна. По аналогичной причине в математике появились комплексные числа. Если рассматривать только действительные числа, то операция извлечения квадратного корня, обратная к операции возведения в квадрат, не всегда возможна, так как нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа. Этого, однако, недостаточно, чтобы заводить в математике новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречается корень квадратный из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему корень квадратный из отрицательного числа. В XVI веке Кардано нашел формулу для решения кубического уравнения («Квант», 1976, № 9, с. 2). Оказалось, что именно в том случае, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается корень квадратный из отрицательного числа (там же, с. 11). Обнаружилось таким образом, что, производя вычисления с выражениями, содержащими корень квадратный из отрицательного числа, можно получить вполне понятные результаты. Поэтому эти корни стали употреблять в математике. Назвали их мнимыми числами — тем самым они как бы приобрели право на нелегальное существование. Полные гражданские права мнимым числам на грани XVIII—XIX столетий дал Гаусс («Квант», 1977, № 8, с. 2), который назвал их комплексными числами, дал им геометрическую интерпретацию и, что самое главное, доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный *или* комплексный корень.

Определение комплексных чисел

Мы будем исходить из того, что действительные числа нам известны. Мы знаем, что для них определены два основных действия — сложение и умножение — и имеются обратные к ним действия — вычитание и деление. Для этих действий выполняются хорошо известные правила, которые обычно употребляются совершенно автоматически — поэтому я их не буду здесь формулировать. Множество объектов, для которых определены действия сложения и умножения и обратные к ним действия вычитания и деления, причем выполнены обычные правила, имеющие место для действительных чисел, называется в современной абстрактной алгебре *полем*.

Таким образом, с точки зрения современой абстрактной алгебры множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел представляет собой поле. Поставим теперь перед собой задачу расширить понятие числа или, как

Статья публиковалась в журнале «Квант» № 3 за 1982 год. Перепечатывается в связи с замеченными опечатками.

говорят в абстрактной алгебре, расширить поле **R** до поля K таким образом, чтобы в этом новом поле K уравнение

$$z^2+1=0 \qquad (1)$$

имело решение. Элемент поля K, который удовлетворяет уравнению (1), мы обозначим через i. Таким образом, для i имеем

$$i^2=-1. \qquad (2)$$

Так как поле K содержит все действительные числа и элемент i и так как в нем возможны действия сложения и умножения, в поле K должны содержаться всевозможные многочлены относительно i с действительными коэффициентами, в частности — все многочлены первой степени, то есть выражения вида

$$z=x+yi=x+iy,$$

где x и y — действительные числа. Эти выражения и называются *комплексными числами*. Действия над ними мы определим как действия над многочленами, учитывая при этом условие (2). Комплексные числа вида

$$z=x+0i=x$$

являются действительными числами. Комплексные числа вида

$$z=0+yi=yi$$

называются *чисто мнимыми числами*.

Пусть $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ — два комплексных числа. Согласно высказанному правилу сумма и произведение этих комплексных чисел определяются равенствами

$$z_1+z_2=(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)=$$
$$=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i; \qquad (3)$$

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=$$
$$=x_1x_2+(x_1y_2+y_1x_2)i+y_1y_2i^2=$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i. \qquad (4)$$

При получении последнего равенства мы использовали условие (2).

В случае, если число $z_1=x_1$ — действительное, получаем

$$x_1z_2=x_1x_2+x_1y_2i. \qquad (5)$$

Из формул (3) и (4) видно, что сумма и произведение двух комплексных чисел есть также комплексное число.

Для того чтобы убедиться, что действие вычитания, обратное действию сложения, существует, достаточно найти число $-z$, противоположное числу z, а для того чтобы убедиться в том, что возможно деление, достаточно для $z\neq 0$ указать число z^{-1}, обратное числу $z=x+yi$. Числа эти, как легко видеть, задаются формулами

$$-z=-x-yi,$$

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i.$$

Таким образом, величина z^{-1}, обратная к z, существует всегда, когда $z\neq 0$.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Обозначим через P плоскость нашего чертежа и выберем на ней прямоугольную систему координат (рис. 1). Комплексное число $z=x+yi$ мы поместим в точку $z=(x;\ y)$ с координатами x, y. Обозначим также через z вектор, идущий из начала координат O в точку z. Таким образом, буква z обозначает у нас одновременно комплексное число, точку z, изображающую это комплексное число, и вектор z, соответствующий этому комплексному числу. При этом изображении действительные числа попадают на ось абсцисс — поэтому ось абсцисс называется *действительной осью* плоскости P комплексного переменного, а чисто мнимые числа попадают на ось ординат — поэтому ось ординат называется *мнимой осью* плоскости P комплексного переменного. Нуль попадает в начало координат.

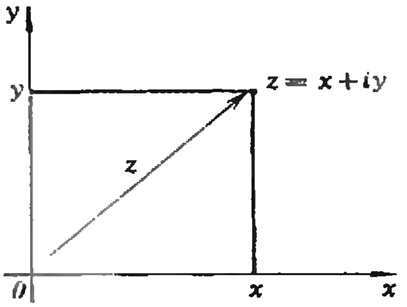


Рис. 1.

Длина вектора z называется *модулем* комплексного числа $z=x+yi$ и обозначается $|z|$:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Комплексные числа z, удовлетворяющие условию $|z|=1$, составляют окружность радиуса 1 с центром в начале координат. На этой окружности лежит число 1. Из точки 1 отложим по окружности дугу заданной длины φ в направлении против часовой стрелки. Конец этой дуги обозначим через (φ). Если φ — отрицательное число, то для получения (φ) нужно отложить от точки 1 длину дуги $|\varphi|$ по часовой стрелке. Как известно, абсцисса точки (φ) называется $\cos\varphi$, а ее ордината $\sin\varphi$. Таким образом, комплексное число (φ) задается формулой

$$(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi. \qquad (6)$$

Итак, всякое комплексное число z, по модулю равное 1, записывается в виде (6). Если z — произвольное комплексное число, модуль которого $|z|=\varrho$ отличен от 0, то число z/ϱ является комплексным числом, по модулю равным 1, и потому записывается в виде (6). Из равенства

$$\frac{z}{\varrho}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

мы получаем

$$z=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (7)$$

Запись (7) называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Число φ называется *аргументом* комплексного числа. Если модуль ϱ комплексного числа z отличен от нуля, то аргумент φ определен с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k — целое число. Если же модуль ϱ комплексного числа равен 0, то формула (7) также имеет место, однако в этом случае аргумент комплексного числа вовсе не определен.

Числа ϱ и φ называются *полярными координатами* точки z.

Дадим теперь геометрическое истолкование действий над комплексными числами.

Из формул (3) и (5) следует, что комплексные числа складываются и умножаются на действительные числа, как векторы.

Геометрический смысл сложения комплексных чисел очевиден: вектор z_1+z_2 — это диагональ параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2. Отсюда вытекает важное неравенство:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \qquad (8)$$

Для того чтобы дать геометрическое истолкование умножения комплексных чисел, нужно употребить операцию поворота вектора или, что то же самое, комплексного числа. Повернув вектор z против часовой стрелки на угол α, мы получим некоторый новый вектор, который обозначим через $R_\alpha(z)$. Геометрически ясно, что операция поворота R_α имеет следующее свойство: если a — действительное число, то

$$R_\alpha(az)=aR_\alpha(z),$$
$$R_\alpha(z_1+z_2)=R_\alpha(z_1)+R_\alpha(z_2).$$

Из этих двух формул следует, что если a_1 и a_2 — два действительных числа, то имеет место соотношение

$$R_\alpha(a_1z_1+a_2z_2)=a_1R_\alpha(z_1)+a_2R_\alpha(z_2). \qquad (9)$$

Непосредственно ясно также, что

$$R_\alpha(1)=\cos\alpha+i\sin\alpha. \qquad (10)$$

Докажем теперь, что поворот комплексного числа $z=x+yi$ на угол α равносилен умножению его на комплексное число $\cos\alpha+i\sin\alpha$, то есть что

$$R_\alpha(z)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z. \qquad (11)$$

Для этого рассмотрим сначала отдельно поворот на угол $d=\frac{\pi}{2}$. В этом случае $\cos d+i\sin d=i$, и равенство (11) принимает вид $R_d(z)=iz$. С одной стороны, геометрически очевидно, что $R_d(1)=i$, $R_d(i)=-1$. С другой стороны, $i\cdot 1=i$, $i\cdot i=-1$. Таким образом,

$$R_d(1)=i\cdot 1,\ R_d(i)=i\cdot i.$$

Из формулы (9) непосредственно вытекает

$$iz = i\cdot(x+iy) = x\cdot i + y(-1) = \\ = xR_d(1) + yR_d(i) = R_d(x\cdot 1 + y\cdot i) = \\ = R_d(x+iy) = R_d(z).$$

Таким образом, формула (11) доказана для $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь α — произвольное действительное число. При $\hat{z} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ получаем

$$\hat{z}\cdot i = i\hat{z} = R_d(\hat{z}) = R_d(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \\ = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = R_\alpha\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = R_\alpha(i). \quad (12)$$

Таким образом, формула (11) доказана при $z = i$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (11) для произвольного комплексного числа

$$z = x + iy.$$

В силу формул (9), (10), (12) имеем

$$R_\alpha(z) = R_\alpha(x+iy) = xR_\alpha(1) + yR_\alpha(i) = \\ = x(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \\ + y(\cos\alpha + i\sin\alpha)i = \\ = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x+iy) = \\ = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z.$$

Таким образом, формула (11) полностью доказана.

Применяя формулу (11) к комплексному числу $z = \cos\beta + i\sin\beta$, получаем

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ = R_\alpha(\cos\beta + i\sin\beta) = R_\alpha(R_\beta(1)) = \\ = R_{\alpha+\beta}(1) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

Таким образом,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

Производя перемножение комплексных чисел, стоящих в левой части, по формуле (4), мы получим

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \\ + (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)i.$$

Значит, мы получили формулы для косинуса и синуса суммы:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Для произвольных комплексных чисел, которые мы запишем в виде $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $s(\cos\beta + i\sin\beta)$, получаем

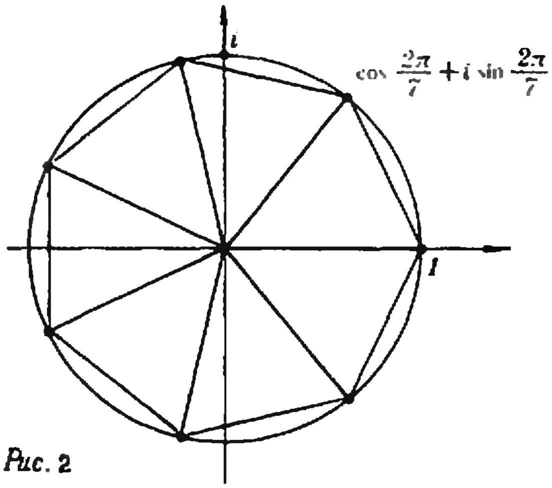


Рис. 2

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot s(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ = rs(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)). \quad (13)$$

Таким образом, *при перемножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Формулу (13) очевидным образом можно распространить на произвольное число сомножителей. Если все эти сомножители равны между собой и равны комплексному числу $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, то мы получаем

$$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = \\ = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Эта формула очень интересна. Она дает возможность извлечь корень n-й степени из произвольного комплексного числа $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Именно, оказывается, что число корней n-й степени из числа $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ равно n, причем корни эти расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат и составляют вершины правильного n-угольника. Это утверждение я предоставляю для доказательства читателям.

В частности, корень n-й степени из единицы имеет n значений, которые являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичный круг, причем одна из его вершин есть единица (рис. 2). В виде формулы эти корни записываются следующим образом:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Холодный взрыв

Доктор физико-математических наук
М. А. КОЖУШНЕР

В 1980 году исследователи из Института химической физики АН СССР открыли новое интересное явление: способная к химической реакции смесь взрывалась не при нагревании, а при охлаждении.

Взрыв смеси метилциклогексана и хлора происходил при температурах около 10 К.

Всем известно, что холод замедляет химические процессы, а интенсивные реакции — взрывы — происходят при нагревании. Химическая реакция, приводящая к обычному тепловому взрыву, как правило, протекает по цепному механизму: смесь подогревается и при определенной температуре в результате взаимодействия молекул число реагирующих частиц (радикалов) в смеси лавинообразно возрастает. При этом столь же стремительно усиливается выделение тепла. Если выделяемое при реакции тепло не успевает отводиться, то температура смеси будет так быстро возрастать, что реакция приобретет характер взрыва.

Холодный взрыв происходил по такому же цепному механизму. Начальные радикалы — химически активные атомы хлора создавались с помощью лазера: квант света разбивал молекулу хлора иа два атома. Далее смесь быстро охлаждалась, образуя аморфное стекло. В интервале температур от 60 К до 10 К начинался взрыв. Чем ниже была исходная концентрация радикалов, тем при более низкой температуре смесь взрывалась. Более того, нагревание тормозило реакцию.

В чем же причина столь парадоксального явления? Авторы эксперимента объясняют его наличием в образце деформаций сжатия, которые возникают как при быстром замораживании смеси, так и в процессе самой реакции.

Известно, что при высоких температурах энергия химически активных частиц велика и они могут сближаться настолько, что становится возможным химическое взаимодействие между ними. В твердых телах можно добиться сближения между химически активными частицами за счет деформаций. При этом чем выше температура, тем быстрее рассасываются (релаксируют) деформации. Их энергия переходит в тепловую. При пониженной температуре деформации, напротив, не успевают релаксировать, а накапливаются лавинообразно, и реакция начинает идти с возрастающей скоростью. Возникает холодный взрыв (его можно было бы назвать деформационным).

Но каким же образом при низких температурах (всего лишь на несколько градусов выше абсолютного нуля!) реагирующие молекулы смогут вступить в реакцию? Ведь при столь тесном сближении они начинают отталкиваться, а вблизи абсолютного нуля движение молекул замедляется и их энергии недостаточно для преодоления сил отталкивания. Существует, как говорят, энергетический барьер, для преодоления которого требуется достаточная кинетическая энергия. Однако при низких температурах в поведении частиц все явственнее начинают проявляться квантовые закономерности, в частности, так называемый туннельный эффект. Он заключается в том, что частицы могут преодолевать энергетические барьеры, не обладая превышающей такие барьеры энергией,— образно говоря, проходят не поверх барьера, а сквозь него, как бы по туннелю, сближаясь до расстояний, при которых начинается реакция. Этот эффект, видимо, и делает возможным холодный взрыв.

Давайте нагреем воду сверху

В. И. ПЕНТЕГОВ

Люди ежедневно греют воду и почти всегда награватель помещают внизу, под сосудом с водой. Это и понятно — конвекция жидкости, происходящая по всему объему сосуда, обеспечивает равномерное прогревание всей жидкости до необходимой температуры.

А что будет, если расположить нагреватель сверху? Этот вопрос не праздный. Вспомним, что 70% земной поверхности покрыто водой, для которой основным источником энергии является Солнце. Так что в природе в огромных масштабах происходит нагрев воды именно сверху. Многие процессы, связанные с этим, настолько сложны, что до сих пор нет единого мнения об их причинах. Например, относительно недавно было установлено, что температура воды в океане меняется с глубиной не плавно, а скачками. Эти скачки происходят в очень узком промежутке между слоями, в которых температура постоянна. Внутри каждого слоя постоянны также плотность и «соленость» (процентное содержание соли) воды. С течением времени скачки сглаживаются (при этом выравнивание температур происходит значительно быстрее, чем выравнивание «солености»), но границы между слоями не перемещаются и сохраняются практически все время. Естественно спросить, почему так происходит. Но прежде чем попытаться разобраться в этом, проведем несколько опытов и наблюдений.

Две разные жидкости: вода и ... вода

Возьмем трехлитровую банку с водой и кипятильник. Погрузим кипятильник неглубоко в воду (рис. 1), включим его в сеть и подождем, пока вода в верхней части банки закипит или будет близка к кипению (от кипятильника в этот момент начнут отрываться крупные пузырьки). Теперь подкрасим воду чернилами. Мы увидим, что в жидкости образовались две зоны: одна (верхняя) — окрашенная, другая (нижняя) — чистая; между ними четкая граница, через которую молекулы красителя не проникают (рис. 2,*а*). Измерения температуры воды в этих зонах дают следующие результаты: вверху температура всюду одна и та же и близка к температуре кипения ≈95°С, а внизу температура не поднимается выше 40—45°С. Это означает, что на границе этих двух участков существует скачок температуры ($\Delta T \approx \approx 50-60$°С), а вода в верхнем и нижнем участках ведет себя как две разные несмешивающиеся жидкости.

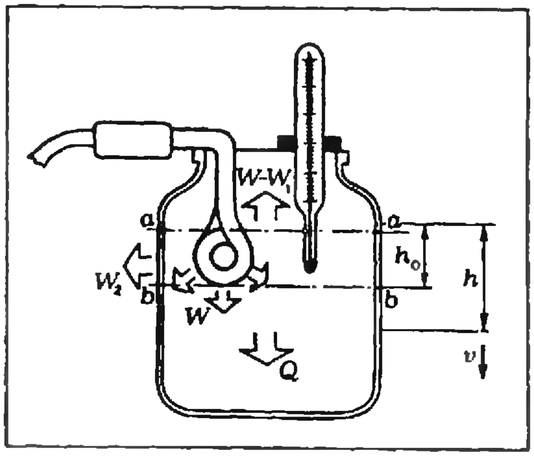


Рис. 1. Схема установки.

Когда Всеволод Пентегов написал эту статью, он был учеником 10 класса 145 средней школы г. Киева. Сейчас Всеволод студент Московского физико-технического института.

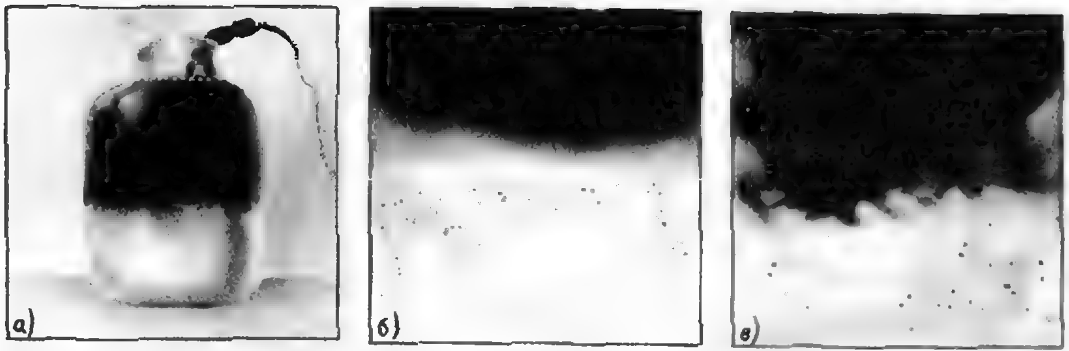


Рис. 2. а) Две зоны в жидкости. Здесь и на других фотографиях черные точки под верхней зоной — это пузырьки воздуха на стенках банки. б) Волны на границе. в) Прохождение вихревого кольца через границу.

Волны под водой

Из фотографии, приведенной на рисунке 2,*б*, видно, что на поверхности раздела могут возникать поперечные волны. (Кстати сказать, границу можно видеть и без подкрашивания — из-за рассеивания и отражения света от волн на ней.) Следовательно, граница обладает поверхностным натяжением. Наглядной иллюстрацией этого может служить, например, отражение вихревых колец от границы.

Отключим нагреватель (чтобы уменьшить перемещение жидкости в горячем слое) и капнем чернилами из пипетки с высоты 1—2 см над уровнем воды. В воде образуется вихревое кольцо, движущееся вниз. Если энергия кольца не очень велика, оно упруго отразится от границы (при этом граница несколько прогнется), а затем разрушится; если же энергия кольца достаточно большая, оно может пройти через границу, но сразу же после этого разрушится (рис. 2,*в*).

Движущаяся граница

Понаблюдав за поверхностью раздела различных слоев жидкости некоторое время, мы обнаружим, что она движется. Экспериментальные графики зависимости толщины верхнего слоя воды h от времени t и скорости движения границы v от толщины верхнего слоя, точнее — от разности уровней $h-h_0$ (см. рис. 1), приведены на рисунках 3 и 4 (измерения проводились для 3-х литровой банки при мощности нагревателя $P \approx 120$ Вт).

Обратим внимание на то, что заметное движение границы происходит только тогда, когда температура верхнего слоя близка к температуре кипения или равна ей — стоит только отключить нагреватель, как движение границы прекращается. Можно предположить, что движение границы есть следствие интенсивного перемешивания в горячем слое (которое возникает именно при высоких температурах). Чтобы проверить это, проделаем следующее. Отключим нагреватель (при этом движение границы прекратится) и начнем каким-нибудь механическим способом осторожно перемешивать воду в верхнем слое. Как мы и ожидали, граница снова начнет двигаться.

Опираясь на приведенные факты, можно предложить такое объяснение движения границы. Рассмотрим поверхность раздела слоев горячей и холодной воды в некоторый момент времени и выделим на ней очень малый участок (рис. 5,*а*; здесь красные точки изображают молекулы горячей воды, синие — холодной). В результате процесса диффузии и соударений молекул под поверхностью раздела появляются «горячие» молекулы. Тонкий слой воды становится горячим и через некоторое время «смывается» конвективными потоками горячей воды (рис. 5,*б* и *в*). Этот микропроцесс и приводит к движению границы вниз.

Итак, в случае нагрева жидкости сверху тепло передается не только с помощью теплопроводности (что совершенно естественно), но и благодаря движению границы, обусловленному конвекцией жидкости в горячем слое. При этом конвекция обеспечивает практически одинаковую температуру во всех точках верхней зоны.

Попробуем ответить еще на один вопрос, возникающий при проведении опытов: зависит ли движение границы от мощности нагревателя?

Очевидно, что толщина верхнего слоя не может быть меньше глубины уровня *a—a* (см. рис. 1), так как выше всегда происходит конвекция. В то же время вначале она не может быть больше глубины уровня *b—b*, так как ниже конвекции еще нет (при плоском или точечном нагревателе уровни *a—a* и *b—b* совпадают). Следовательно, существует некоторая начальная толщина верхнего слоя, определяемая, в основном, глубиной погружения нагревателя. Движение границы начинается с началом интенсивного перемещения жидкости в этом слое. Как уже говорилось, это происходит при температуре, близкой к температуре кипения. Значит, нагреватель должен обеспечить нагрев слоя жидкости начальной толщины практически до кипения при наличии потерь тепла в окружающее пространство. Это условие и определяет минимальную мощность нагревателя, при которой начинается движение границы.

Как показали опыты, при мощностях нагревателя, больших минимальной, скорость движения границы будет линейно зависеть от мощности (подробнее об этом сказано в Приложении к статье).

Итоги экспериментов

Из приведенных опытов можно сделать несколько основных выводов. Вот они:

1) Граница раздела между теплой и холодной водой может существовать длительное время, не разрушаясь, только при наличии конвективных потоков жидкости у границы: эти потоки ликвидируют последствия диффузии, сохраняя границу.

2) Граница движется, и скорость ее движения зависит от перепада температур. При уменьшении перепада скорость уменьшается вплоть до остановки границы, но сама граница при этом сохраняется, если сохраняются течения жидкости у границы.

3) Большие перепады температур (и высокое значение температуры нагретой воды) в проведенных опытах были необходимы только затем, чтобы в горячей жикости возникали конвекционные течения доста-

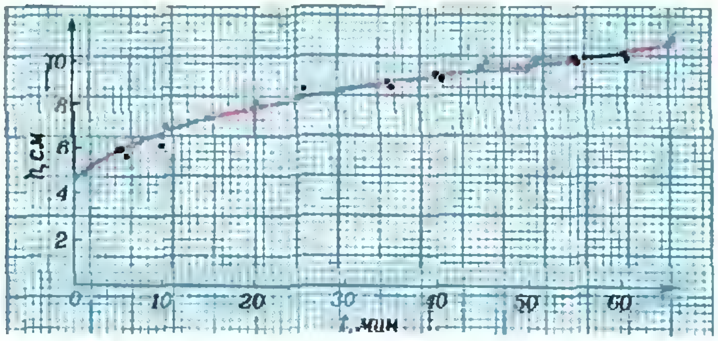


Рис. 3. График зависимости толщины верхней зоны h от времени t (по результатам двух опытов).

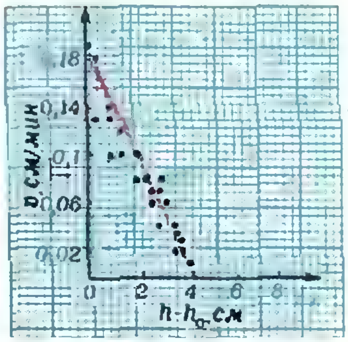


Рис. 4. График зависимости скорости движения границы υ от глубины h—h₀ (по результатам двух опытов).

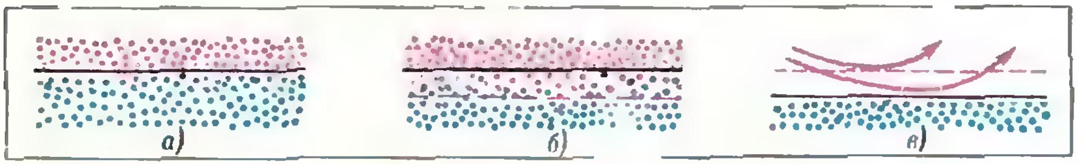


Рис. 5. К объяснению механизма движения границы.

точной интенсивности. Если движение жидкости по одну или обе стороны границы обеспечивается каким-либо другим путем, например механическим, то перепад температур может быть и небольшим.

Догадки и предположения

Теперь вернемся к разговору о нагревании солнечными лучами воды в океане и попытаемся ответить на некоторые вопросы. Почему границы между различными слоями в океане с течением времени не перемещаются, хотя происходит постепенное выравнивание температуры и «солености»? Почему выравнивание «солености» происходит существенно медленнее, чем выравнивание температуры?

Объяснить это можно опять-таки конвекцией, которая в океане существует во всех слоях (а не только в горячем слое, как в наших опытах).

Рассмотрим два соседних слоя. В результате диффузии и соударений между молекулами по обе стороны границы раздела оказываются как «холодные», так и «горячие» молекулы. Они подхватываются конвективными потоками и уносятся от границы. При этом, если конвекция одинаково интенсивна с обеих сторон границы, сама граница не движется, хотя передача энергии происходит и температуры постепенно уравниваются.

Что касается выравнивания «солености» воды, то этот процесс идет гораздо медленнее. Связано это с поверхностным натяжением, которым обладает граница раздела. Известно, что коэффициент поверхностного натяжения раствора соли больше, чем чистой воды. Граница, как и всякая физическая система, стремится иметь минимальную поверхностную энергию. Поэтому ионы, на которые в воде распадаются молекулы соли, в большинстве своем находятся вдалеке от границы, и их диффузия начнет заметно проявлять себя только тогда, когда поверхностное натяжение границы существенно уменьшится.

Возникновением границы между теплой и холодной водой можно, наверное, объяснить не только слоистость океана. Возможно, что это явление объяснит существование четких и устойчивых границ океанических течений и недавно открытых гигантских вихрей в океане, а также многое-многое другое.

Приложение

Обозначим через W мощность нагревателя (пусть она больше минимальной). Некоторая часть этой мощности тратится на испарение жидкости, но если температура постоянна, то эти потери тоже постоянны. Поэтому для удобства введем величину W_1, равную разности мощности нагревателя и мощности, идущей на испарение жидкости и будем считать ее постоянной.

Естественно предположить, что мощность W_2, отдаваемая в окружающее пространство через боковую поверхность сосуда, пропорциональна толщине h горячего слоя: $W_2=kh$. Коэффициент пропорциональности k зависит только от условий эксперимента и во время опыта не изменяется.

Пусть за время dt граница переместилась на расстояние dh. Это значит, что слой жидкости толщиной dh нагрелся от температуры холодного слоя до температуры горячего слоя, то есть на ΔT градусов. На это требуется количество теплоты $dQ=c\varrho S\Delta T dh=k_1 dh$ (здесь c — удельная теплоемкость жидкости, ϱ — ее плотность, S — площадь горизонтального сечения сосуда).

Согласно закону сохранения энергии,

$$W_1 dt=dQ+W_2 dt,$$

или

$$W_1 dt=k_1 dh+khdt.$$

Перепишем это равенство по-другому:

$$\frac{dh}{W_1-kh}=\frac{dt}{k_1},$$

проинтегрируем его и получим зависимость толщины горячего слоя h от времени t:

$$h=a-be^{-\alpha t},$$

где $a=W_1/k$, $b=W_1/k-h_0$ и $\alpha=k/k_1$ — постоянные коэффициенты, h_0 — начальная глубина, на которой образуется граница.

Теперь найдем скорость движения границы v:

$$v=\frac{dh}{dt}=\frac{W_1-kh}{k_1}.$$

Отсюда видно, что скорость границы линейно зависит от толщины слоя, причем при некоторой толщине (равной W_1/k) скорость должна стать равной нулю. Это происходит потому, что по мере увеличения толщины растут потери энергии и должен наступить момент, когда вся энергия от нагревателя будет уходить в окружающее пространство. В момент остановки границы конвективные потоки вблизи нее ослабевают настолько, что перемещение жидкости практически прекращается, и за счет диффузии и теплопроводности граница будет постепенно «рассасываться».

Уравнение газового состояния

В. Е. БЕЛОНУЧКИН

Уравнение состояния идеального газа (или просто уравнение газового состояния, или уравнение Менделеева — Клапейрона) описывает связь между параметрами состояния — давлением, температурой и объемом — одной из простейших физических систем. Прост объект, поэтому и уравнение его состояния достаточно просто:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где p — давление газа, V — его объем, m — масса, μ — молярная масса, T — температура, а R — универсальная газовая постоянная.

Итак, согласно уравнению, давление идеального газа пропорционально его температуре. Как это надо понимать? Означает ли это, например, что всегда при повышении температуры давление газа растет, а при понижении температуры — падает? Конечно, нет. Это безусловно справедливо, только если не меняются ни объем, ни масса, ни молярная масса. Даже для фиксированной массы определенного газа с ростом температуры давление может не расти, а падать, если при этом занимаемый газом объем достаточно быстро растет. Возможны и другие ситуации. Пожалуй, удобнее всего их обсудить на конкретных задачах (все задачи взяты из билетов приемных экзаменов в Московский физико-технический институт).

Задача 1. *Температура и давление некоторой массы идеального газа изменяются, как показано на рисунке 1. Изменяется ли занимаемый газом объем? Как именно?*

Как видно из рисунка, давление с ростом температуры линейно возрастает. Может быть, при этом объем остается постоянным? Если нет, то как отличить график процесса, при котором объем не меняется?

При неизменном объеме давление не просто растет с ростом температуры, а растет прямо пропорционально температуре. А график прямой пропорциональной зависимости отличается от других линейных графиков тем, что проходит через начало координат. Таким образом, на диаграмме в p—T координатах изохора — прямая, проходящая через начало координат.

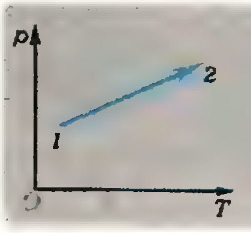


Рис. 1.

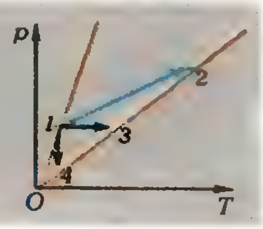


Рис. 2.

Проведем изохоры через интересующие нас точки *1* и *2* (рис. 2). Изохоры разные; значит, в состояниях *1* и *2* объемы различны. Какой из них больше? Проще всего это определить при помощи графика. Соединим эти две изохоры, например, изобарой *1—3* (или изотермой *1—4*, или любой другой изобарой или изотермой). На участке *1—3* температура увеличивается при постоянном давлении. Ясно, что при этом объем должен расти.

Итак, точка *2* лежит на изохоре с бо́льшим объемом, то есть при переходе из состояния *1* в состояние *2* объем газа увеличился.

А не может ли все-таки график на рисунке 1 изображать процесс с постоянным объемом? Впрочем, давайте уточним вопрос.

Задача 2. *В сосуде постоянного объема находится гелий. К сосуду присоединены манометр и термометр. Показания приборов меняются в соответствии с рисунком 1. Что можно сказать о состоянии газа?*

В частности, давление в сосуде выше или ниже атмосферного?

В данном случае объем газа не меняется, а давление не пропорционально температуре. Возможно ли такое?

Обратимся к уравнению Менделеева — Клапейрона. Кроме параметров p, V и T в нем фигурируют еще m и μ. Молярная масса гелия μ измениться не должна — гелий газ одноатомный и диссоциировать не может. Конденсации тоже не должно быть, поскольку температура растет. По-видимому, единственная возможность — изменение массы m газообразного гелия.

Так как давление растет медленнее, чем было бы при изохорном процессе для неизменной массы, масса газа должна уменьшаться; то есть газ должен вытекать из сосуда. А это означает, что давление в сосуде больше атмосферного, иначе бы газ не вытекал.

Уравнение Менделеева — Клапейрона позволяет сравнивать не только различные состояния одного газа, но и состояния различных газов. Вот пример.

Задача 3. *Шаровая молния представляет собой слабо светящийся газовый шар, свободно плавающий в воздухе. Согласно модели Стаханова (одной из моделей, построенных для объяснения природы и поведения шаровой молнии), газ внутри шара представляет собой комплексное соединение, каждая частица которого состоит из иона азота, связанного с несколькими молекулами воды. Потерянные азотом электроны захватываются водой, так что каждая комплексная молекула в целом оказывается нейтральной. Определите, сколько молекул воды связывает каждый ион азота, если температура внутри шара $t = 600°C$, а температура окружающего воздуха $t_0 = 20°C$.*

Так как шаровая молния плавает в воздухе, плотность составляющего ее газа равна плотности окружающего воздуха. Давление в молнии, по-видимому, также равно атмосферному. Эти два условия в совокупности дают

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}, \text{ или } \frac{pV}{m} = \frac{p_0V_0}{m_0}$$

(здесь все величины без индекса относятся к комплексу, а с индексом — к воздуху).

Используя уравнение газового состояния, получаем

$$\frac{T}{\mu} = \frac{T_0}{\mu_0},$$

откуда, зная молярную массу воздуха ($\mu_0 = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), найдем молярную массу комплексного соединения:

$$\mu = \mu_0 \frac{T}{T_0} \approx 86 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Молярная масса атомарного азота равна $14 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а воды — $18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; следовательно, каждый ион азота связывает четыре молекулы воды.

Внешние условия, в которых находится газ, могут быть изменены различными способами, но всякий раз состояние газа можно описать уравнением газового состояния.

Задача 4. *Цилиндрический сосуд сечения $S = 10$ см^2 закрыт массивным поршнем. Внутри сосуда находится газ. Сосуд начинают поднимать с ускорением $2g$. Когда температура газа сравнялась с первоначальной, объем газа под поршнем уменьшился в 1,5 раза. Найдите массу поршня. Внешнее давление $p_0 = 10^5$ Па.*

В неподвижном состоянии сила тяжести поршня уравновешивалась разностью сил давления газа внутри сосуда и снаружи:

$$mg = (p - p_0)S.$$

При движении сосуда суммарная сила, действующая на поршень, сообщает ему ускорение $2g$, направленное вверх:

$$2mg = (1{,}5p - p_0)S - mg, \text{ или}$$
$$3mg = (1{,}5p - p_0)S$$

(при неизменной температуре объем уменьшится в 1,5 раза; значит, давление возросло тоже в 1,5 раза). Решая совместно полученные два уравнения, получаем

$$m = \frac{p_0S}{3g} \approx 3{,}4 \text{ кг}.$$

Мы рассмотрели несколько примеров использования уравнения газового состояния (конечно, ими не исчерпывается диапазон задач, в которых находит применение уравнение Менделеева — Клапейрона). Однако не менее важным является вопрос, когда нельзя пользоваться этим уравнением, или, другими словами — какова область его применения.

Модель идеального газа основывается на предположении малости энергии взаимодействия молекул по сравнению с их кинетической энергией. Молекулы рассматриваются как упругие шарики, взаимодействующие лишь при непосредственном контакте. Размеры этих шариков ничтожно малы по сравнению с длиной их свободного пробега.

Конечно, такая модель весьма условна. Действительно, как, например, определить размеры молекул? Безусловно, разумно под так называемым эффективным диаметром молекул понимать то расстояние, при сближении на которое движение молекул заметно изменяется. Ясно, что при таком определении размер молекул должен зависеть от многих условий, в частности — от температуры. Опыт это подтверждает — он показывает, что с ростом температуры эффективный диаметр молекул уменьшается. Это и понятно: при повышении температуры кинетическая энергия молекул возрастает, молекулы должны ближе подойти друг к другу, чтобы потенциальная энергия их взаимодействия оказалась одного порядка с кинетической (иначе движение заметно не изменится). Правда, оказывается, что зависимость эта очень слабая и не так уж бессмысленно говорить о конкретных постоянных значениях размеров молекул.

Значительные отклонения от поведения идеального газа у реальных газов начинаются тогда, когда нельзя считать, что молекулы бо́льшую часть времени не взаимодействуют, то есть когда длина свободного пробега молекул — от соударения до соударения — становится сравнимой с размером молекул. В этом случае молекулы находятся, в основном, недалеко друг от друга, и их взаимодействием пренебрегать уже нельзя.

При каких же условиях это происходит? Прежде чем ответить на этот вопрос, рассмотрим следующую задачу.

Задача 5. *Оцените длину свободного пробега молекул воздуха при нормальных условиях. Диаметр молекул принять равным $d = 3{,}7 \cdot 10^{-10}$ м.*

Молекула столкнется с другой молекулой, если расстояние между их центрами окажется меньше диаметра молекул d. Пусть за какое-то время молекула прошла путь l. При этом она столкнулась с молекулами, центры которых находятся в ломаном цилиндре (изломы в точках столкновений) длины l и сечения πd^2. Число молекул в этом объеме $nl\pi d^2$ (n — число молекул в единице объема) и есть общее число столкновений. Подсчитаем путь от одного столкновения до другого, то есть длину свободного пробега молекулы:

$$\lambda = \frac{l}{nl\pi d^2} = \frac{1}{n\pi d^2} = \frac{RT}{N_A p \pi d^2} \approx 8{,}75 \cdot 10^{-8}\ \text{м}$$

(здесь давление $p = 10^5$ Па, температура $T = 273$ К, число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$). Экспериментальное значение для таких условий — $6{,}20 \cdot 10^{-8}$ м. Расхождение связано, в основном, с тем, что мы считали все молекулы, кроме выбранной, неподвижными. Подробный анализ, выходящий за рамки школьного курса, показывает, что учет относительного движения молекул приводит к изменению длины свободного пробега в $1/\sqrt{2}$ раз. Помножив полученный нами результат на этот множитель, получим $6{,}19 \cdot 10^{-8}$ м.

Но сейчас нас больше интересует другая сторона дела. При нормальных условиях длина свободного пробега примерно в 200 раз больше диаметра молекул, и модель идеального газа работает довольно хорошо. Но если давление возрастет в 100—200 раз (а температура не изменится), длина свободного пробега станет сравнимой с размером молекул. Это значит, что при таких

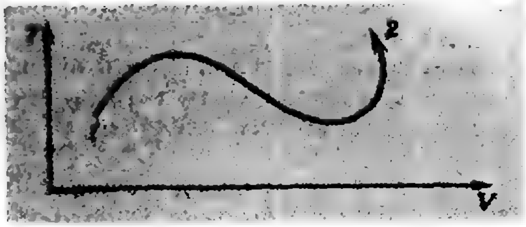


Рис. 2.

давлениях, или точнее — при таких плотностях, которые возникнут при нормальной температуре и высоких давлениях, молекулы практически никогда не будут находиться далеко друг от друга и их взаимодействием пренебрегать уже нельзя. В таком случае модель идеального газа оказывается непригодной. (Действительно, плотности конденсированных фаз — жидкостей и твердых тел — примерно в 1000 раз больше плотностей газов, а газ, в 5—10 раз менее плотный, чем жидкость, — это уже не идеальный газ.)

Однако если температура достаточно велика, то и при высоких давлениях газ зачастую можно считать идеальным, поскольку решающую роль (подчеркнем это еще раз) играет плотность газа.

Упражнения

1. На рисунке 3 изображен график изменения состояния некоторой массы идеального газа. Укажите, на каких участках графика давление растет, на каких падает.

2. В сосуде, где находился кислород, произведен электрический разряд. В результате весь кислород превратился в озон, а температура возросла в 2 раза. Как изменилось давление? Объем сосуда считать неизменным.

3. Сосуд сечения $S=10$ см^2 закрыт поршнем массы $m=5$ кг. В сосуде находится газ. При движении сосуда вниз с ускорением $4g$ объем газа под поршнем увеличился в 2 раза. Температура газа не изменилась. Найдите внешнее давление.

4. Спутник сечения $S=1$ м^2 движется с первой космической скоростью $v=7{,}8$ км/с по околоземной орбите. Атмосферное давление на высоте орбиты (200 км) равно $p=1{,}37\cdot10^{-4}$ Па, температура $T=1226$ К. Определите число соударений спутника с молекулами воздуха за 1 секунду.

Задачи с устного экзамена в МФТИ

Ниже приводятся задачи, предлагавшиеся в разные годы на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт. Здесь собраны задачи относящиеся лишь к одной теме — простейшим свойствам целых чисел.

1. Является ли число 123456789 простым?

2. Докажите, что уравнение

$$x^2-y^2=1982$$

не имеет решений в целых числах.

3. Пусть p_1 и p_2 — два последовательных нечетных простых числа и $p_1+p_2=2n$, $n\in N$. Докажите, что число n — составное.

4. Докажите, что если число $1\cdot2\cdot\ldots\cdot n+1$, $n\in N$, делится на $n+1$, то число $n+1$ — простое.

5. Докажите, что для всякого натурального числа n, большего двух, одно из чисел 2^n-1 и 2^n+1 является составным.

6. Может ли число $3n+2$, где n — натуральное, быть квадратом некоторого целого числа?

7. Докажите, что сумма n^3+6n^2-4n+3 делится на 3 при любом натуральном n.

8. Докажите, что среди любых трех простых чисел, больших 3, всегда по крайней мере два обладают тем свойством, что либо их сумма, либо их разность делится на 12.

9. Докажите, что число $333^{777}+777^{333}$ делится на 37.

10. Сколько существует натуральных чисел n таких, что

$$1982<\sqrt{n}<1983?$$

11. Докажите, что если m — целое число, то число $\frac{m}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{6}$ также является целым.

12. Найдите пятизначное число, которое при умножении на 9 дает число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

13. Докажите, что всякое натуральное число A есть либо степень числа 2, либо сумма различных степеней числа 2.

14. Может ли число a^b, где a и b — иррациональные числа, быть рациональным?

А. А. Болибрух, В. М. Уроев, М. И. Шабунин

Многофигурная стереометрическая задача

Л. Ф. ШТЕРНБЕРГ

Стереометрия — самое слабое место в подготовке абитуриентов. Многие из них даже не берутся за стереометрическую задачу. И это объяснимо: стереометрическая задача — царица школьного задачника. Если остальные задачи — это задачи «на что-то» («на квадратные уравнения», «на подобие»), то стереометрическая — на все вместе взятое: для ее решения надо применять как чисто стереометрические приемы, так и планиметрические, алгебраические и т. д. Очень важно научиться определять, что и в какой последовательности применять. Об этом и пойдет у нас речь.

Два ключевых момента предлагаемого здесь метода решения многофигурных стереометрических задач — это

а) разбиение задачи на ряд более простых задач;

б) последовательное применение алгебры.

Рассмотрим пример.

Задача 1. *В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S вписан шар. Второй шар касается первого шара, а также плоскости основания пирамиды в точке A. Через центр второго шара и сторону BC основания пирамиды проведена плоскость, пересекающая ребро SA в точке K. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания пирамиды, если известно, что ребро SA и диагональ сечения CK перпендикулярны.*

Приступая к решению этой задачи, неискушенный школьник обычно пытается нарисовать чертеж, на котором все условия задачи были бы «хорошо видны», и последовательно выразить одни элементы конфигурации через другие. И то, и другое сделать очень трудно, если не невозможно.

Поступим иначе. Нарисуем примерный общий чертеж (рис. 1) и попробуем ответить на вопрос: «Какие размеры надо знать, чтобы точно описать эту конструкцию?» Чтобы полностью определить пирамиду, надо знать, например, длину стороны основания и угол наклона боковой грани, для шаров нужны радиусы, для секущей плоскости — угол ее наклона. Конечно, можно выбрать и другие параметры, скажем высоту пирамиды вместо стороны основания и т. п. Надо лишь, чтобы они позволяли достаточно просто записать условия задачи и выразить искомые величины. Бывает, что первый выбор не совсем удачен и по ходу решения приходится менять переменные или вводить новые. Итак, пусть a — длина стороны основания пирамиды, α — угол наклона грани пирамиды к основанию, r и R — радиусы первого и второго шаров, φ — угол наклона секущей плоскости.

Ясно, что между этими величинами имеются определенные соотношения, их мы и попытаемся найти. Обратите внимание: не выразить одно через другое, а найти соотношения. Вычислить в итоге нам надо будет только φ.

Выделим теперь связки фигур, то есть группы фигур данной конструкции, связанных друг с другом условиями задачи:

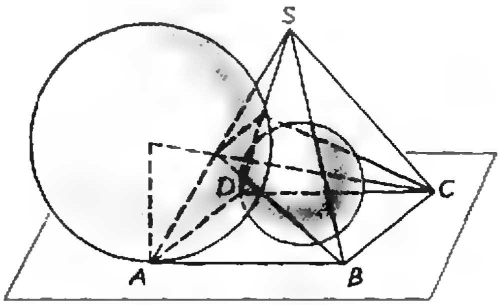


Рис. 1. Общий вид.

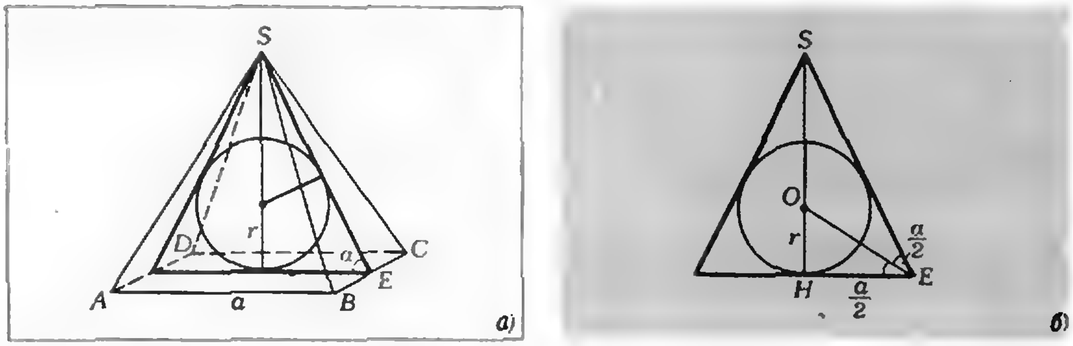


Рис. 2. Первая связка фигур.

1) пирамида и вписанный шар;

2) основание пирамиды и два шара (подчеркнем: только основание, а не вся пирамида);

3) основание пирамиды, второй шар и секущая плоскость;

4) секущая плоскость и пирамида (а здесь нельзя обойтись одной прямой SA, так как существенно, что это — ребро пирамиды).

Сделаем для каждой связки отдельный чертеж, развернув её так, чтобы было удобно видеть составляющие её фигуры. Рядом с отрезками, длины которых нам известны, напишем эти длины (в виде формул). Это очень важный момент: длины на чертеже помогут увидеть уравнения. Процесс расстановки длин на чертеже мы назовем *разметкой чертежа*. Теперь для каждой связки выпишем получающиеся соотношения.

1-ая связка фигур. Плоскость, проходящая через высоту пирамиды и апофему SE грани SBC, пересекает пирамиду по равнобедренному треугольнику, а шар — по вписанному в него кругу радиуса r (рис. 2, *а*). (Это и подобные ему утверждения в записи решения должны быть доказаны, сколь бы очевидными они ни казались. Но для нас сейчас важнее сам поиск решения и получение ответа, поэтому такого рода пояснения мы опускаем. А тому, что и как доказывать, как «навести строгость», уделяется достаточно много внимания в школе и в различных пособиях для поступающих*).) Начертим сечение отдельно (рис. 2, *б*). Центр O вписанного шара лежит на биссектрисе угла SEH, который по величине равен углу между боковой гранью и основанием пирамиды. Отсюда вытекает первое соотношение:

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Заметим, что тот же рисунок 2, *б* можно было бы получить, пользуясь не сечением, а проекцией пирамиды на плоскость, перпендикулярную ребру BC.

2-я связка фигур. Вынесем на отдельный чертеж оба шара и основание пирамиды (рис. 3, *а*). Выберем такой ракурс, чтобы нужные нам отрезки и углы были видны в натуральную величину (рис. 3, *б*). Проведя очевидные вспомогательные построения (не забудьте проделать нужные доказательства) и разметив чертеж, получим уравнение

$$(R+r)^2-(R-r)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

(Тот же чертеж получается в сечении, проходящем через центры шаров и точки их касания с основанием.)

3-я связка фигур. Процедура аналогична: вынося связку на отдельный чертеж (рис. 4, *а*), проводя вспомогательные построения и разметку (докажите, что $\widehat{PBA}=\varphi$!) и рисуя сечение (плоскостью PAB — рис. 4, *б*), из прямоугольного треугольника PAB получаем уравнение

$$R=a\operatorname{tg}\varphi.$$

4-я связка фигур. Еще раз

---

*) См., например, Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов «Пособие по математике для поступающих в вузы» (М., «Наука», 1976), раздел III, § 1.

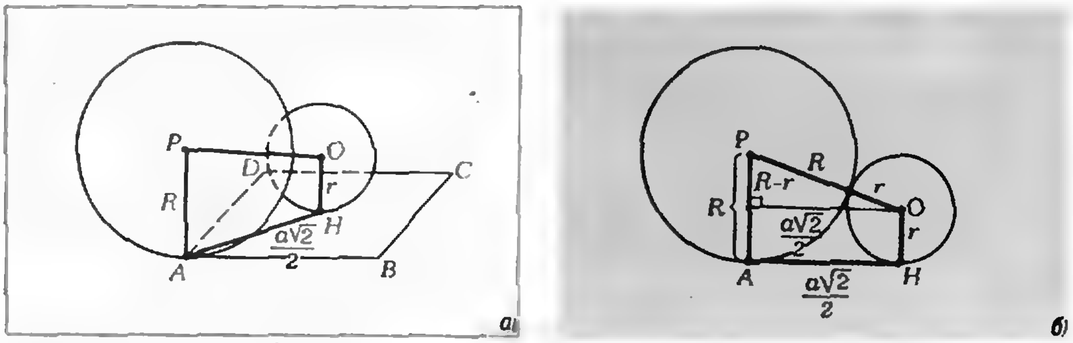

P
O
D
C
R
r
$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
H
A
B
а)
P
R
R-r
R
r
O
r
$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
A
H
$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
б)

Рис. 3. Вторая связка фигур.

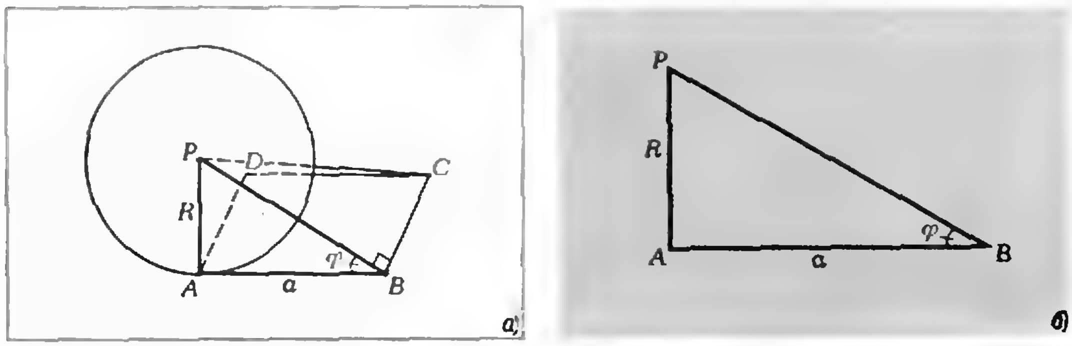

P
D
C
R
φ
A
a
B
а)
P
R
φ
A
a
B
б)

Рис. 4. Третья связка фигур.

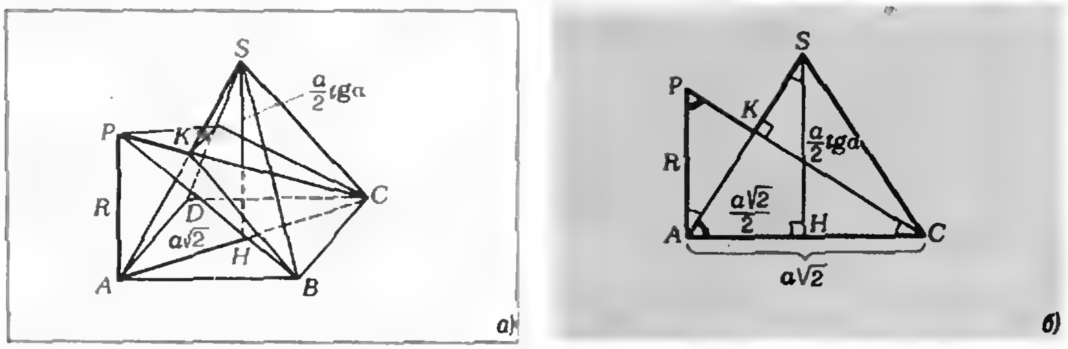

S
$\frac{a}{2}$tgα
P
K
C
R
D
$a\sqrt{2}$
H
A
B
а)
S
P
K
R
$\frac{a}{2}$tgα
$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
A
H
C
$a\sqrt{2}$
б)

Рис. 5. Четвертая связка фигур.

та же процедура; на рисунке 5, а показан чертеж связки с разметкой, на рисунке 5, *б* — чертеж «удобного» сечения плоскостью ACS, на котором все нужные углы (они помечены дужками) видны в натуральную величину. Некоторые из этих углов, как легко заметить по рисунку, равны. Отсюда вытекает подобие треугольников PAC и AHS и уравнение

$$\frac{R}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}/2}{(a\,\mathrm{tg}\,\alpha)/2} \quad \text{или} \quad R = 2a\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

А теперь проверим условия — это очень полезный прием контроля.

1) *Пирамида правильная.* Условие использовано при определении длин отрезков в пирамиде.

2) *Первый шар вписан.* Использовано при составлении уравнения 1-й связки и на рисунке 3, *б* ($\widehat{AHO}=90°$).

3) *Второй шар касается первого.* Использовано при определении расстояния между центрами шаров (рис. 3, *б*).

4) *Второй шар касается плоскости основания.* Использовано на рисунке 3, *б* ($\widehat{HAP}=90°$) и при составлении уравнения 3-й связки ($\widehat{PAB}=\varphi$).

5) *Перпендикулярность ребра SA и диагонали сечения CK.* Использована при составлении уравнения 4-й связки.

Итак, все условия использованы. Получено 4 уравнения с 5-ю неизвестными. Так как надо найти только одну величину, которая размерности не имеет, то размерные величины должны сократиться. Значит, нехватка одного уравнения помешать не должна.

Все! Геометрия окончена — начинается алгебра (в которой абитуриент обычно чувствует себя увереннее). Соберем полученные уравнения в систему:

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$(r+R)^2-(R-r)^2=$$

$$=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \text{ или } 8Rr=a^2$$

$$R=a\operatorname{tg}\varphi$$

$$R=2a\operatorname{ctg}\alpha.$$

Размерные величины R, r и a из нее без труда исключаются, после чего остается система из двух уравнений с неизвестными φ и α:

$$\begin{cases} 4\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1 \\ \operatorname{tg}\varphi=2\operatorname{ctg}\alpha. \end{cases}$$

Решение этой системы оставим читателям. (Ответ: $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{6}$.)

Подведем итоги. Решение стереометрической задачи со многими фигурами и связями между ними можно разбить на следующие этапы:

1. Построить чертеж — общий вид конфигурации. На чертеже не должно быть вспомогательных линий: они лишь затемняют общую картину.

2. Ввести переменные, определяющие размеры элементов чертежа. Не бояться, если этих переменных окажется много: их должно быть достаточно, чтобы построить каждый элемент конфигурации в отдельности.

3. Выделить связки фигур, пользуясь общим чертежом и условиями задачи.

4. Вынести на отдельный чертеж каждую связку, разметить чертежи.

5. Выбрать такой ракурс (или такое сечение) для каждой связки, чтобы все отрезки и углы, которые предполагается связать уравнением, были видны в натуральную величину. Разметить полученный чертеж.

6. Выписать уравнения, получающиеся из каждой связки фигур. Не торопиться их разрешать относительно какой-либо величины.

7. Проверить использование всех условий, количество уравнений и неизвестных и возможность нахождения того значения, которое требуется по условию.

8. Свести уравнения в систему и решить ее, забыв про геометрию и пользуясь приемами алгебры и тригонометрии.

9. Проверить решение. Техника проверки геометрических решений заслуживает отдельного разговора*). Сейчас мы познакомимся с одним из ее приёмов — прикинем, насколько чертежи и ответ в нашей задаче согласуются друг с другом.

Простой подсчет показывает, что при найденном нами значении φ угол α близок к прямому ($\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}/12$), то есть пирамида довольно сильно вытянута, а радиус второго шара меньше (!) радиуса первого (вписанного): $R=2r/3$. По сути дела, наше решение опиралось на неправильные, вернее — не совсем правильные, чертежи! Но недаром говорят, что «геометрия — это искусство делать правильные выводы из неправильных чертежей». Легко убедиться, что уравнения, которые мы вывели из 1-й, 3-й и 4-й связок, никак не зависят от степени «вытянутости» пирамиды. А вот в рассмотрение 2-й связки поправку внести надо. Исправленный вариант рисунка 3, *б* показан на рисунке 6. Впрочем, на окончательном виде уравнения эта поправка не сказывается. Подчеркнем, что в записи решения должны быть учтены все возможные варианты расположения фигур.

Роль общего чертежа в приведенной схеме решения сводится, в основном, к тому, чтобы помочь выделить связки. Порой, как в следующей задаче, это можно сделать непосредственно по условию, и тогда он вообще не нужен.

Задача 2. *Точки A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на сфере. Отрез-*

---

*) См., например, В. Матизен «Найдем ошибку» («Квант», 1980, № 10).

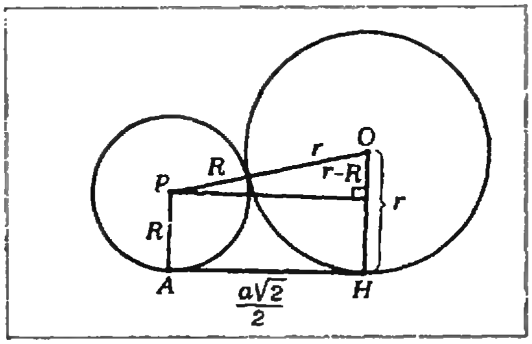


Рис. 6.

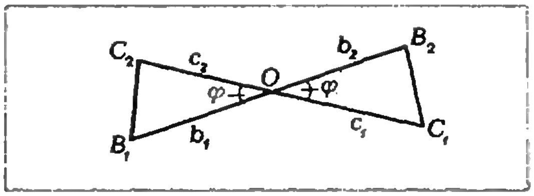


Рис. 7.

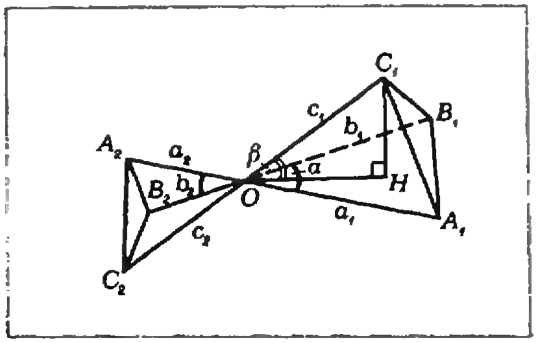


Рис. 8.

ки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2 пересекаются в точке O, которая делит отрезок D_1D_2 пополам. Известно, что $D_1D_2=2l$, отношение площадей треугольников OB_2C_1 и OB_1C_2 равно k, отношение объемов пирамид $OA_1B_1C_1$ и $OA_2B_2C_2$ равно m, а отношение объемов пирамид $OA_2B_1D_1$ и $OA_1B_2D_2$ равно n. Найти длины отрезков OA_1, OB_1 и OC_1.

Читатель может убедиться самостоятельно, что общий чертеж к этой задаче способен, пожалуй, только напугать, ибо по нему не видно ничего*). Поэтому, не обращаясь к нему, сразу приступим к выделению связок и составлению уравнений. Пусть $a_1=|OA_1|$, $a_2=|OA_2|$, $b_1=|OB_1|$. Аналогично определим величины b_2, c_1, c_2, d_1 и d_2. (Надеемся, 8 неизвестных не смущают читателя и он готов ввести еще хоть сотню, если потребуется.) Два уравнения видны сразу:

$$d_1=d_2=l \qquad (1)$$

(«связка» здесь — отрезок D_1D_2 и его середина O). Вторая связка — треугольники OB_2C_1 и OB_1C_2 (рис. 7). Выражая их площади через угол $\varphi=\widehat{B_2OC_1}=\widehat{B_1OC_2}$ и заключающие его стороны, получим

$$\frac{S_{OB_2C_1}}{S_{OB_1C_2}}=\frac{0{,}5\cdot b_2c_1\sin\varphi}{0{,}5\cdot b_1c_2\sin\varphi}=\frac{b_2c_1}{b_1c_2},$$

следовательно,

$$\frac{b_2c_1}{b_1c_2}=k. \qquad (2)$$

Аналогично записывается и отношение объемов пирамид (связка состоит из тетраэдров $OA_1B_1C_1$ и $OA_2B_2C_2$). Найдем, например, объем пирамиды $OA_1B_1C_1$ (рис. 8). Пусть C_1H — её высота, опущенная на основание OA_1B_1, тогда

$$V_{OA_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\cdot S_{OA_1B_1}\cdot|C_1H|=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1b_1\sin\alpha\cdot c_1\sin\beta=$$

$$=\frac{1}{6}a_1b_1c_1\sin\alpha\sin\beta,$$

где $\alpha=\widehat{A_1OB_1}$, а β — угол между ребром OC_1 и основанием. Точно так же

$$V_{OA_2B_2C_2}=\frac{1}{6}a_2b_2c_2\sin\alpha\sin\beta,$$

поэтому $V_{OA_1B_1C_1}:V_{OA_2B_2C_2}=a_1b_1c_1:a_2b_2c_2$. Отсюда получаем следующее уравнение:

$$\frac{a_1b_1c_1}{a_2b_2c_2}=m \qquad (3)$$

и, таким же образом,

$$\frac{a_2b_1d_1}{a_1b_2d_2}=n. \qquad (4)$$

Остается неиспользованным лишь одно условие: все точки (кроме O) лежат на сфере. Его нужно записать в виде соотношения между длинами отрезков OA_1, OA_2, OB_1, ... Рассмотрим связку, состоящую из сферы и отрезков A_1A_2 и B_1B_2. Пересекая её плоскостью, содержащей эти отрезки, получим рисунок 9. Треугольники

---

*) Еще «страшнее» в этом смысле последняя задача из приведенных в конце статьи. Но и ее можно решить, последовательно пользуясь принципом «разделяй и властвуй».

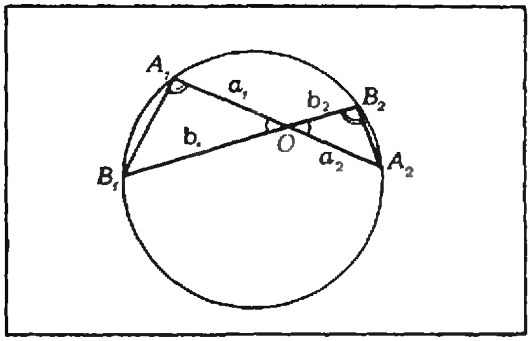


Рис. 9.

OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны (так как $\widehat{A_1OB_1}=\widehat{A_2OB_2}$, $\widehat{B_1A_1O}=\widehat{OB_2A_2}=\frac{1}{2}\smile{B_1A_2}$), поэтому $|OA_1|:|OB_1|=|OB_2|:|OA_2|$, то есть

$$a_1a_2=b_1b_2. \qquad (5)$$

Аналогично,

$$b_1b_2=c_1c_2=d_1d_2. \qquad (6)$$

Очевидно, равенства (1)—(6) содержат фактически 8 уравнений (столько же, сколько неизвестных), и все условия задачи использованы. Решаем систему из этих уравнений и получаем ответ: $a_1=\left(\frac{m}{kn^2}\right)^{\frac{1}{6}}l$, $b_1=\left(\frac{mn}{k}\right)^{\frac{1}{6}}l$, $c_1=(k^2mn)^{\frac{1}{6}}l$.

Приемы, с которыми мы познакомили читателей, с большим или меньшим успехом можно применять почти к любой стереометрической задаче. Поэтому овладеть ими необходимо: это поможет преодолеть робость, которую испытывают многие абитуриенты, сталкиваясь со стереометрией на конкурсных экзаменах.

Упражнения

1 (МГУ, экономический ф-т, 1972). В треугольнике ABC $|AC|=12$ см, $|AB|=|BC|=3\sqrt{10}$ см. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами этих шаров равно 15 см. Центр третьего шара находится в точке B, и этот шар касается двух данных шаров. Определить радиус третьего шара.

2 (МГУ, ф-т вычислительной математики и кибернетики, 1972). Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается продолжения ребра BS за вершину S. Через центр шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

3 (МГУ, геологический ф-т, 1980). На сфере радиуса 11 см расположены точки A, A_1, B, B_1, C и C_1. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, отстоящей от центра сферы на расстояние $\sqrt{59}$ см. Найти длину отрезка AA_1, если известно, что $|BB_1|=18$ см, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $(8+\sqrt{2}):(8-\sqrt{2})$.

4 (МГУ, мехмат, 1981). Отрезок DE, лежащий в двугранном угле AD с точками B и C на его гранях, параллелен плоскости треугольника ABC, имеющего площадь S. В тетраэдр $BCDE$ вписан шар, k — отношение расстояния от центра шара до прямой DE к расстоянию от (DE) до плоскости ABC. Пусть B' — проекция точки B на плоскость CDE; известно, что $\operatorname{tg}\widehat{B'DE}:\operatorname{tg}\widehat{BDE}=l$. Через середину $[AD]$ проводится плоскость P, параллельная плоскости ABC. Найти площадь сечения многогранника $ABCDE$, составленного из тетраэдров $ABCD$ и $BCDE$, плоскостью P, если известно, что сумма площадей всех граней тетраэдра $BCDE$ равна σ.

Наша обложка

На первой странице обложки мы публикуем фотографию «большой интегральной схемы» микропроцессора (увеличено в 50 раз).

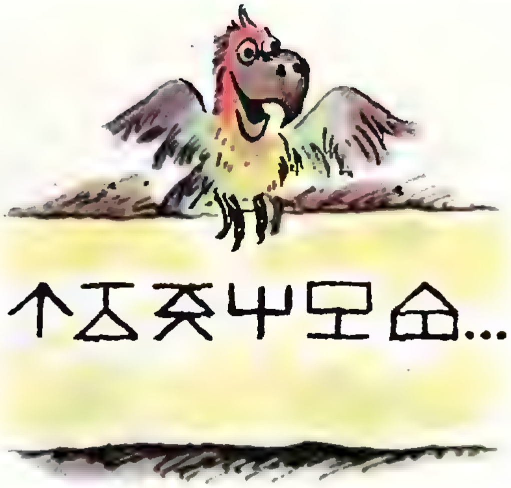
Появление микропроцессоров связано с огромным прогрессом микроэлектроники, впитавшей в себя успехи многих областей науки и техники, — физики, химии, вычислительной техники, точной металлургии, приборостроения и машиностроения. Сейчас в «большой интегральной схеме» — такой, как на обложке (ее размеры — до 50 квадратных миллиметров, толщина — менее миллиметра), — помещаются десятки тысяч элементов размером 2—3 микрона и потребляет она энергию всего в несколько ватт.

Одна из первых отечественных ЭВМ БЭСМ-1 занимала площадь в десятки квадратных метров и потребляла десятки киловатт энергии. Современные микро-ЭВМ размером в небольшую книгу, работающие на больших интегральных схемах, имеют значительно большую производительность, чем ЭВМ БЭСМ-1, и потребляют энергию в тысячу раз меньше.

Микро-ЭВМ стали мозгом огромного числа приборов и машин, от бытовых (стиральные машины, печи для приготовления пищи и т. д.) до сложных роботизированных промышленных установок, составляющих основу высокоэффективного автоматизированного производства во всех областях народного хозяйства.

А. И. Березенко, В. И. Юшков

Квант для младших школьников



Задачи

1. Угадайте закономерность форм фигурок. Какую фигуру следует поставить следующей?

◆

2. Отношение двух чисел равно десятичной дроби, целая часть которой равна делителю, а после запятой записан делитель. Какие это числа?

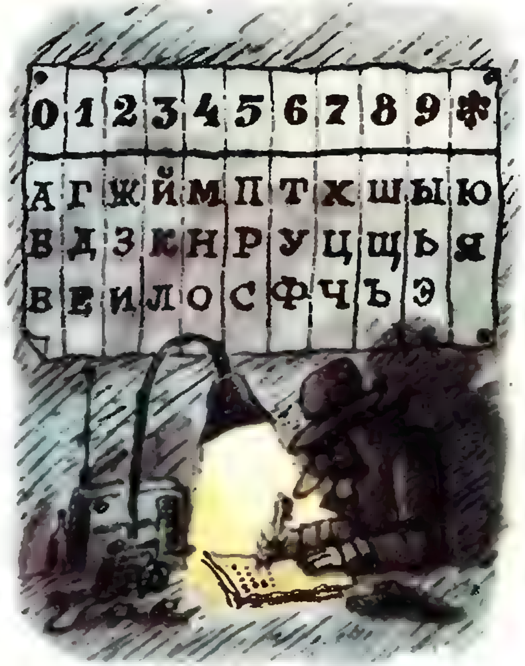
◆

3. Вертушку погрузили целиком в ручей так, что ее ось расположилась горизонтально и перпендикулярно направлению течения. Будет ли она крутиться?

◆

4. Текст шифруется с помощью таблицы: каждой цифре сопоставляется одна из трех букв, расположенных под ней в таблице, а знаку «•» — пробел или одна из букв «ю», «я». Расшифруйте следующий вопрос и ответьте на него:

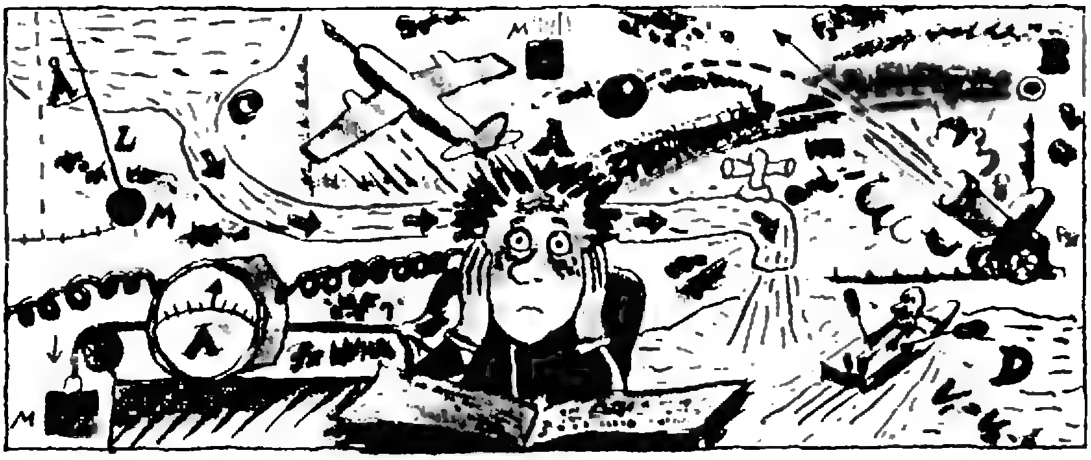
5343934*150413*6*8156215044414*
*305041080?



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	✤
А	Г	Ж	Й	М	П	Т	Х	Ш	Ы	Ю
Б	Д	З	К	Н	Р	У	Ц	Щ	Ь	Я
В	Е	И	Л	О	С	Ф	Ч	Ъ	Э	

◆

Эти задачи нам предложили
Н. И. Бовсуновский, А. К. Звонкин,
Б. А. Мукушев, А. П. Савин,
А. В. Бутлевич



Дано... Требуется определить...

Л. А. ЛЕЩИНСКИЙ,
Т. С. ПЕТРОВА

Как вы решаете задачи по физике? Возможно, многим из вас этот вопрос покажется странным — уж очень очевиден ответ: сначала читаю условие, потом думаю над решением, потом его записываю, получаю ответ, если в задачнике приведены ответы, то проверяю свой ответ по задачнику.

Ну, а если решение сразу не «вырисовывается»? Вы смотрите в ответы? Думаем, что многие из вас делают именно так. А жаль. Поломайте голову над задачей, подойдите к ней и так, и эдак, сами доберитесь до ответа — и мы уверены, что, получив правильный результат, вы испытаете чувство большого удовлетворения. Польза же, которую приносит такая работа над задачей, несомненна.

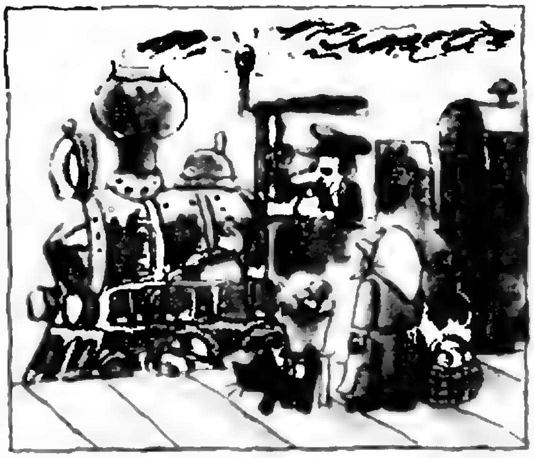
Конечно, бывают очень трудные задачи, и дать какой-либо универсальный рецепт решения невозможно. Однако есть условия, выполнять которые совершенно необходимо, если вы хотите научиться решать задачи. Каждому ясно, что перед тем, как приступать к задачам, надо разобраться в теории. Но вот вы выучили теоретический материал, поняли его и беретесь за задачу. Прочитали, что «дано», что «требуется определить». Приступаете к решению? Подождите! Прежде чем думать над решением, подумайте над условием. Представьте себе то физическое явление, тот процесс, о котором идет речь в задаче. Проанализируйте все данные, приведенные в условии,— ведь, как правило, ничто из того, что в условии «дано», не бывает дано напрасно. И очень часто, осмыслив до конца это «дано», вы сможете догадаться (не угадать, а именно догадаться), что «требуется определить». Если эта связь вами установлена, можете считать, что полдела сделано.

Чтобы вы лучше поняли, о чем мы говорим, предлагаем вам сделать несколько задач. В условиях этих задач приведено только то, что «дано». Вы сами придумайте, что «требуется определить», и определите*).

Задача 1. Две дороги пересекаются под прямым углом. Участки дорог, образующие перекресток, покрыли асфальтом. Длина каждого участка 25 м, ширина 4 м. На покрытие израсходовали 5520 кг асфальта.
Задача 2. Стальной шар, масса кото-

---

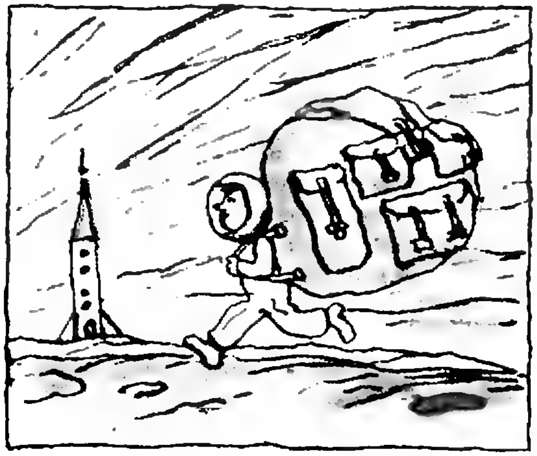
*) При решении вам придется иногда пользоваться разными табличными данными.



рого равна 1,2 кг, имеет объем 200 $см^3$.

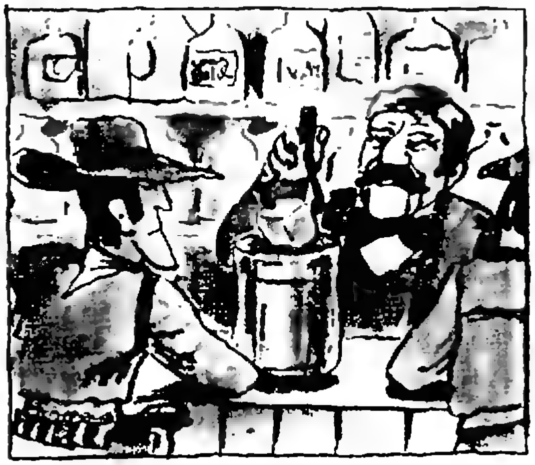
Задача 3. Длина платформы железнодорожной станции равна 60 м. Товарный состав, движущийся со скоростью 45 км/ч, идет мимо платформы 16 с.

Задача 4. Атмосферное давление у поверхности Венеры — 10,3 мПа, сила тяжести — в 1,2 раза меньше, чем на Земле.



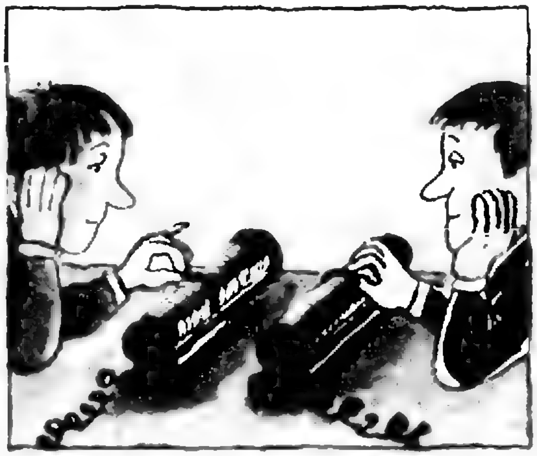
Задача 5. Металлический шар массы 900 г, нагретый до 155°С, опустили в калориметр, в котором было 3 л воды при температуре 10°С. В результате в калориметре установилась температура 15°С. Теплоемкость калориметра пренебрежимо мала по сравнению с теплоемкостью шара и воды.

Задача 6. В цилиндрическом сосуде с площадью дна 125 $см^2$ находится вода. Когда в сосуд положили кубик льда, уровень воды повысился на 9 мм.



Задача 7. Сопротивление железной проволоки, масса которой 390 г, равно 5 Ом.

Задача 8. Два ползунковых реостата, рассчитанных на сопротивление 20 Ом каждый, намотаны один из никелиновой проволоки, а другой — из нихромовой. Длины проволок, использованных для обмоток, одинаковы.



Нам хотелось бы, чтобы придуманные вами вопросы к этим задачам и их решения вы прислали в редакцию. Наиболее удачные из них будут опубликованы в журнале. Желаем вам успехов!

◆

задачник кванта

Задачи

М786—М790; Ф798—Ф802

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 апреля 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М786, М787» или «Ф798». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М786. Докажите, что для любых натуральных n и k (больших 1) число n^k можно представить в виде суммы n последовательных нечётных чисел. (Например, $4^3=13+15+17+19$; $7^2=1+3+5+7+9+11+13$; $3^4=25+27+29$.)

А. Н. Козаченко

М787. Найдите отношение сторон прямоугольного треугольника, если известно, что одна половина гипотенузы (от вершины до середины гипотенузы) видна из центра вписанной окружности под прямым углом.

Б. С. Пицкель

М788. а) На графике $y=x^2$ отмечены точки $A(a;\ a^2)$ и $B(b;\ b^2)$. Найдите между ними точку $M(m;\ m^2)$, для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM, наименьшая.

б) На графике дифференцируемой функции $y=f(x)$ отмечены точки A и B. Известно, что график и отрезок AB ограничивают выпуклую фигуру. Пусть M —точка графика, расположенная между A и B, для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM, наименьшая. Докажите, что касательная к графику в точке M параллельна хорде AB.

Е. Д. Москаленский, Ю. В. Чиняев

М789. *а*) 10 точек, делящие окружность на 10 равных дуг, попарно соединены 5 хордами. Обязательно ли среди них найдутся две хорды одинаковой длины?

б)* 100 точек, делящие окружность на 100 равных дуг, попарно соединены 50 хордами. Докажите, что среди них обязательно найдутся две хорды одинаковой длины.

В. В. Произволов

М790. *а*) Про числовую функцию f известно, что если $|x-y|=1$, то $|f(x)-f(y)|=1$. Верно ли, что при любых x и y будет выполнено равенство

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|?$$

Пусть про отображение F плоскости в себя известно, что любые две точки X, Y, находящиеся на расстоянии 1, оно переводит в две точки $F(X)$, $F(Y)$, также находящиеся на расстоянии 1:

$$\varrho(X,\ Y)=1 \Rightarrow \varrho(F(X),\ F(Y))=1;$$

Тогда для любых двух точек X, Y плоскости

$$\varrho(X,\ Y)=\varrho(F(X),\ F(Y)),$$

то есть отображение F сохраняет расстояние. Докажите следующие утверждения, из которых вытекает эта теорема: для любых X, Y

б) $\varrho(F(X),\ F(Y))\leqslant\varrho(X,\ Y)+1$;

в) * $\varrho(X,\ Y)=\sqrt{3} \Rightarrow \varrho(F(X),\ F(Y))=\sqrt{3}$;

г) * $\varrho(F(X),\ F(Y))\leqslant\varrho(X,\ Y)$;

д) * $\varrho(F(X),\ F(Y))\geqslant\varrho(X,\ Y)$.

(Вы можете, конечно, предложить и другой план доказательства теоремы.)

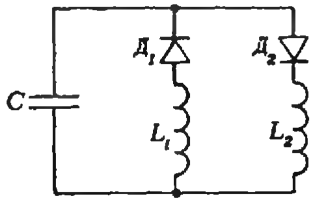
А. Тышка

Ф798. В реку, скорость течения которой везде равна u, из точки O на берегу бросают камень перпендикулярно берегу. Скорость поверхностных волн в воде равна v. Через какое время после падения камня волна придет в точку O, если камень упал на расстоянии L от берега?

П. И. Зубков

Ф799. Высота вертикального водяного фонтана от уровня выходной трубы насоса равна H. Во сколько раз следует изменить мощность насоса, чтобы полная высота фонтана осталась прежней после подсоединения к выходной трубе насоса вертикальной трубы такого же диаметра с высотой $h<H$?

П. И. Зубков



Ф800. Схема состоит из конденсатора емкости C, диодов $Д_1$ и $Д_2$, и катушек с индуктивностями L_1 и L_2, собранных, как показано на рисунке. Найти период колебаний напряжения на конденсаторе в этой схеме.

Г. Л. Коткин, Г. В. Меледин

Ф801. В исходном состоянии центры двух шаров с массами m и радиусами R разнесены на расстояние $10\,R$. На одном из них равномерно распределен заряд $+Q$, на втором $-Q$. Первый шар привязан к удаленной стенке ниткой, которая выдерживает на разрыв натяжение T. Второй шар в некоторый момент отпускают. Найти скорость шаров после соударения, если удар абсолютно неупругий. Заряды не перераспределяются.

Г. В. Федотович

Ф802. Закрытый с торцов теплоизолированный цилиндр массы m перегорожен неподвижным поршнем массы M. С обеих сторон от поршня находится по одному молю идеального газа, внутренняя энергия которого равна $U=cT$. Коротким ударом цилиндру сообщают скорость $\vec{v}$, направленную вдоль его оси. На сколько изменится температура газа после затухания колебаний поршня? Трения между поршнем и цилиндром нет.

В. Г. Дудников

Problems

M786 — M790; P798 — P802

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that April 30th, 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, K-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M786. Prove that for any two integers n and k greater than 1, the number n^k can be represented as the sum of successive odd numbers, e. g.

$4^3=13+15+17+19$; $7^2=1+3+5+7+9+11+13$; $3^4=$ $=25+27+29$.

A. N. Kozachenko

M787. Half the hypothenuse (from its midpoint to a vertex) is seen from the centre of the incircle of a right triangle under a right angle. Find the quotient of lengths of the two other sides of the triangle.

B. S. Pitskel

M788. a) Two points A $(a;\ a^2)$ and B $(b;\ b^2)$ are picked on the graph of $y=x^2$. Find a point M $(m;m^2)$ between them such that the sum of areas of the two figures bounded by the graph and the line segments AM and BM is minimal.

b) Two points A and B are picked on the graph of a differentiable function $y=f\ (x)$. It is known that the graph and the line segment AB bound a convex figure. Suppose that M is the point of the graph for which the sum of areas of the two figures bounded by the graph and the segments AM and BM is minimal. Prove that the tangent to the graph at the point M is parallel to AB.

E. D. Moskalenski, Yu. B. Chinyaev

M789. a) 10 points, which divide the circle into 10 congruent arcs, are joined pairwise by 5 line segments. Will two segments necessarily be of the same length?

b)* 100 points, which divide the circle into 100 congruent arcs, are joined pairwise by 50 line segments. Prove that at least two of them will be of the same length.

V. V. Proizvolov

M790. a) For the numerical function f it is known that $|x-y|=1$ implies $|f(x)-f(y)|=1$. Will the inequality

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|$$

necessarily hold for all x, y?

For the map F of the plane into itself it is known that it sends any two points X, Y whose distance is 1 into points $F(X)$, $F(Y)$ at the same distance:

$$\varrho(X,Y)=1 \Rightarrow \varrho(F(X),\ F(Y))=1$$

Then for any two points X, Y of plane

$$\varrho(X,Y)=\varrho(F(X),F(Y)),$$

i. e. the map F is distance-preserving. Prove the following statements, which imply this theorem: for all X, Y
b) $\varrho(F(X), F(Y) \leq \varrho(X, Y)+1$;
c)* $\varrho(X, Y)=\sqrt{3} \Rightarrow \varrho(F(X), F(Y))=\sqrt{3}$;
d)* $\varrho(F(X), F(Y))<\varrho(X, Y)$;
e)* $\varrho(F(X), F(Y))>\varrho(X, Y)$
(Of course, you can propose a different plan for proving the theorem.)

A. Tyszka

P798. A stone is thrown perpendicularly to the shore from the point O on it into a river which flows with the same velocity u everywhere. The velocity of surface waves in water is v. How long will the waves from the stone's splash take to reach O if the stone fell at the distance L from the shore?

P. I. Zubkov

P799. The height of a fountain of water, measured from the open end of the output pipe of a pump, is H. How should the power of the pump be altered in order to leave the total height of the fountain unchanged when a vertical pipe of the same diameter and of height $h<H$ is attached to the output pipe?

P. I. Zubkov

P800. A circuit consists of a condensator of capacity C, of the diodes Д_1, Д_2 and the coils of inductivity L_1, L_2 assembled as shown on the figure on p. 39. Find the period of voltage oscillations on the capacitor in this circuit.

G. L. Kotkin, G. V. Meledin

P801. At the initial moment the distance between the centres of two solid balls of mass m and radius R is $10\,R$. The charge $+Q$ is uniformely distributed on one of them, the charge $-Q$ — on the other. The first is tied to a far-away wall by a string which will withstand the tension T before ripping. Find the velocity of the balls after their collision, which is assumed absolutely inelastic. No redistribution of charges is assumed to occur.

G. V. Fedotovich

P802. A thermoisolated cylinder of mass m, sealed at both ends, is divided by a motionless piston of mass M and contains one mole of ideal gas with internal energy, $U=cT$ on each side of the piston. The velocity $\vec{v}$ along the cylinder's axis is communicated to the cylinder by a short push. How will the temperature of the gas have changed when the oscillations about the piston of the cylinder cease? There is no friction between piston and cylinder.

V. G. Dudniko

Решения задач

М765—М769, М771—М774; Ф783—Ф787

М765. *Пусть B — конечное множество точек на плоскости, не принадлежащих одной прямой.*

а) Докажите, что найдутся три точки множества B такие, что проходящая через них окружность не содержит внутри себя других точек множества B.

*б) * Назовем триангуляцией множества точек B се-*

а) Пусть P и Q две ближайшие точки из данного множества B. Третью точку R выберем так, чтобы величина $\widehat{PRQ}$ была наибольшей. Так как $|PR|>|PQ|$, $|RQ|>|RQ|$, величина угла $\widehat{PRQ}$ не больше 60°. Легко видеть, что (рис. 1) $\widehat{PMQ}>\widehat{PRQ}$ для всех точек M внутри окружности, описанной около $\triangle PQR$ (независимо от того, по какую сторону от PQ лежит M), поэтому ни одна из точек M не принадлежит B.

б) Решение этой задачи тесно связано с замечательным разбиением плоскости на многоугольные «страны» со «столицами» в точках B по следующему принципу: каждая точка плоскости относится к той стране, столица которой

мейство треугольников с множеством вершин B, не налегающих друг на друга и в объединении дающих выпуклый многоугольник (триангуляцию множества B можно получить, соединяя его точки непересекающимися отрезками, пока это возможно). Докажите, что для любого B существует такая триангуляция, что окружность, описанная около любого треугольника этой триангуляции, не содержит внутри себя точек множества B. Укажите способ построения такой триангуляции.

в) Докажите, что если никакие четыре точки множества B не лежат на одной окружности, то описанная в пункте б) триангуляция единственна.*

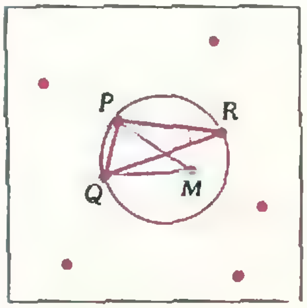


Рис. 1.

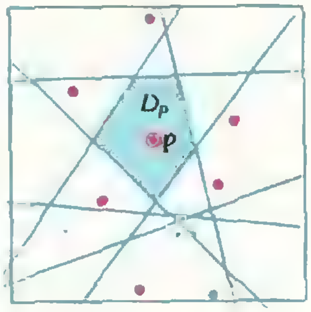


Рис. 2.

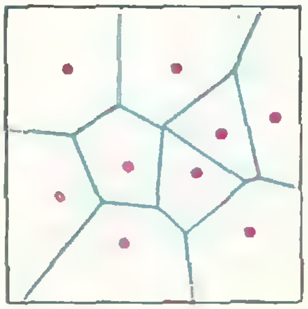


Рис. 3.

расположена ближе к ней, чем все остальные столицы. Покажем, как построить это разбиение и получить из него искомую триангуляцию.

Обозначим через $C=C(B)$ выпуклую оболочку B, то есть наименьший выпуклый многоугольник, покрывающий B (его вершинами служат некоторые точки из B, которые мы будем называть *крайними*).

Для любых двух точек P, Q из B назовем *осью* пары (P, Q) прямую $l\,(P, Q)$, проведенную через середину отрезка PQ перпендикулярно этому отрезку. Заметим, что ось $l\,(PQ)$ служит множеством центров всех окружностей, проходящих через точки P и Q. Нам понадобится также следующее очевидное утверждение, на которое мы будем ссылаться как на «основную лемму»: ось $l\,(P, Q)$ разбивает плоскость на две части, в одной из которых находятся точки, которые ближе к P, чем к Q, а в другой — ближе к Q, чем к P.

Для данной точки P из B назовем *страной со столицей* P область D_P, полученную следующим образом: проведем прямые $l\,(P, Q)$, где Q — все точки B, отличные от P, и среди тех областей, на которые эти прямые делят плоскость, выберем область D_P, содержащую точку P (рис. 2). Это будет либо выпуклый многоугольник, либо (если P — крайняя точка B) — неограниченная, «уходящая в бесконечность» выпуклая область, граница которой состоит из двух лучей и, возможно, еще одного или нескольких отрезков.

Пользуясь основной леммой, мы видим, что каждая страна D_P состоит из всех точек плоскости, которые расположены к точке P ближе, чем к другим точкам из B (на границе двух стран D_P и D_Q лежат точки, одинаково удаленные от столиц P и Q). Отсюда следует, что страны D_P, где P пробегает все множество B, покрывают плоскость и пересекаются лишь по границам (рис. 3)*).

Назовем точки P, Q из B *близкими*, если их страны D_P и D_Q имеют общий участок границы, лежащий на прямой $l\,(P, Q)$, и *далекими*, если их страны не имеют ни одной общей граничной точки. (В исключительном случае, когда в одной точке O сходятся границы более чем трех стран, возникают пары точек P, R, для которых пересечение границ $D_P \cap D_R$ состоит из одной точки — при этом точки P, Q не близкие и не далекие.)

Теперь построим триангуляцию многоугольника $C(B)$ с вершинами во всех точках B, обладающую требуемым в условии свойством. Для этого соединим отрезками все пары близких точек (красные отрезки на наших рисунках); эти отрезки разобьют многоугольник $C(B)$ на треугольники (и многоугольники). Заметим, что если PQ и PR — соседние отрезки, ведущие из некоторой столицы P в близкие к ней столицы Q и R, то есть в угле $\widehat{QPR}$ нет точек, близких к P, то страны D_Q, D_R и D_P имеют общую точку границы O (рис. 4). Рассмотрим один из треугольников (или многоугольников), на которые разделен $C(B)$ проведенными отрезками. Страны со столицами в его вершинах имеют общую точку O границы; точка O удалена от этих столиц на одинаковое расстояние, а от всех остальных точек B — на большее расстояние, то есть внутри описанной окружности нашего треугольника (многоугольника) с центром O нет точек B. Многоугольники с числом вершин более трех (они возникают лишь в исключительных случаях, когда более трех стран имеют общую точку границы) мы можем произвольным образом разбить диагоналями на треугольники (рис. 5). Полученная триангуляция удовлетворяет условию задачи.

Очень советуем вам, разбирая решение, взять любые 5—10 точек плоскости и практически построить для

---

*) Об этом разбиении плоскости, называемом *разбиением Дирихле*, см., например, в книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые» (М., «Наука», 1978, § 3, с. 59, решение «Задачи про сыр»)

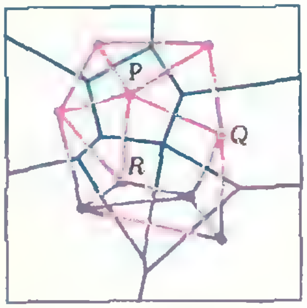


Рис. 4.

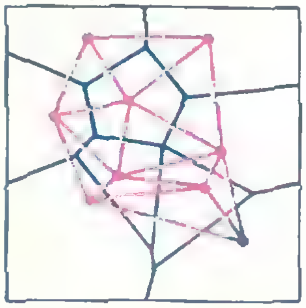


Рис. 5.

них разбиение на «страны» и описанную триангуляцию (см. рисунок на 4-й странице обложки).

в) Пусть никакие четыре точки не лежат на одной окружности (тогда каждая пара этих точек — близкая или далекая). Докажем, что любая триангуляция T, удовлетворяющая условиям задачи, обязательно совпадает с той, которую мы построили выше (соединив близкие точки).

Предположим, что некоторая точка P соединена с далекой от нее точкой R. Центр O любой окружности, проходящей через P и R, лежит на оси $l(P, R)$ и (поскольку P и R — далекие точки) отделен от P некоторой прямой $l(P, Q)$, где Q — близкая к P точка; следовательно, Q лежит внутри окружности. Значит, PR не может быть стороной треугольника триангуляции T.

Итак, мы доказали, что в триангуляции T могут быть соединены лишь пары близких точек. Но для того чтобы получить триангуляцию, то есть разбиение $C(B)$ на треугольники с вершинами B, как мы видели, надо соединить все пары близких точек.

Замечание: вы, наверное, обратили внимание на то, что требование, чтобы никакие 4 точки не лежали на окружности, является излишним для доказательства единственности. Достаточно потребовать, чтобы любая окружность, проходящая через 4 точки из B, содержала бы внутри по крайней мере одну точку из B.

Подумайте, как можно обобщить эту задачу и ее решение на конечные множества точек, лежащие в трехмерном пространстве.

Ф. В. Вайнштейн,
Н. Б. Васильев

◆

М766. *Докажите, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел не может быть кубом натурального числа.*

Сумма квадратов трех последовательных целых чисел $a-1$, a, $a+1$ равна $3a^2+2$. При делении на 9 это число дает в остатке 2 или 5. Однако куб любого целого числа либо делится на 9, либо дает в остатке 1 или 8 ($(3k\pm1)^3=27k^3\pm27k^2+9k\pm1$).

Ю. И. Ионин

◆

М767. *а) Прямая l делит площадь выпуклого многоугольника пополам. Докажите, что отношение, в котором эта прямая делит проекцию многоугольника на перпендикулярную к ней прямую, не превосходит $1+\sqrt{2}$.*

б) Каждая из трех прямых делит площадь данной фигуры пополам. Докажите, что площадь части фигуры, заключенная в треугольнике между тремя прямыми, не превосходит 1/4 всей площади фигуры.

Пусть A и B — точки пересечения прямой l с контуром многоугольника, h и k — отрезки его проекции на перпендикулярную ей прямую, $h>k$ (рис. 1: отрезок h — проекция голубой, k — красной половины многоугольника). Докажем, что $h/k\leqslant1+\sqrt{2}$. Соединим самую далекую от l точку C многоугольника в голубой полуплоскости (она проектируется в конец отрезка h) с точками A и B и продолжим отрезки CA и CB до пересечения в точках E и F с прямой, параллельной l и содержащей самую далекую от l точку G в красной полуплоскости (эта прямая проходит через конец отрезка k). Поскольку многоугольник выпуклый, отрезки AC и BC и весь $\triangle ABC$ содержатся в голубой половине многоугольника, а отрезки EA и BF лежат вне многоугольника, так что трапеция $EABC$ содержит его красную половину. Поскольку площади той и другой половин многоугольника равны, то площадь трапеции $EABC$ не меньше площади $\triangle ABC$, поэтому $S_{ECF}\geqslant2S_{ABC}$, а поскольку треугольники ECF и ACB подобны, причем коэффициент подобия (отношения высот) $(k+h)/h$, то

$$\left(\frac{k+h}{h}\right)^2\geqslant2,\quad \frac{k}{h}+1\geqslant\sqrt{2},\quad \frac{h}{k}\leqslant\sqrt{2}+1.$$

Из решения видно, что равенство достигается только для треугольников, одна сторона которых параллельна l.

б) Пусть каждая из прямых l_1, l_2 и l_n делит площадь фигуры пополам, $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ — площади частей, на которые фигура разбивается этими прямыми (см. рис. 2), а S — площадь всей фигуры.

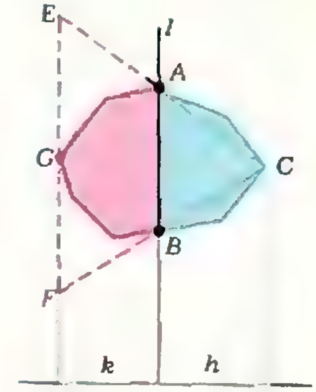


Рис. 1.

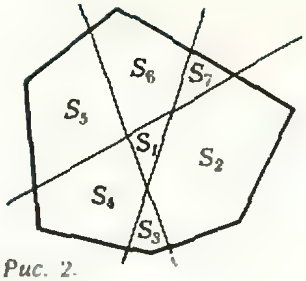


Рис. 2.

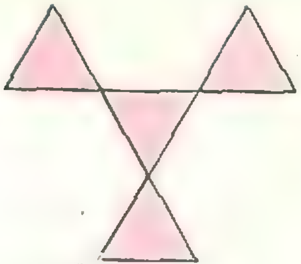


Рис. 3.

Поскольку $S_3+S_4+S_5=S_3+S_2+S_7=\frac{S}{2}$, то $S_4+S_5=S_2+$ $+S_7$, и поэтому $S_3=S_1+S_6$. Значит, $S_3\geqslant S_1$.

Кроме того, $\frac{1}{2}S=S_2+S_4+S_3+S_1$, откуда следует, что $\frac{1}{2}S\geqslant 2S_1$, то есть $S_1\leqslant\frac{1}{4}S$. Равенство достигается для невыпуклой фигуры, показанной на рисунке 3.

Пункты *а*) и *б*) этой задачи возникли при попытках выяснить, каким может быть отношение площади треугольника S_1, ограниченного тремя прямыми l_1, l_2, l_3, каждая из которых делит площадь данного выпуклого многоугольника пополам, к площади S всего многоугольника. По-видимому, это отношение наибольшее в случае, когда исходный многоугольник является треугольником, а прямые l_1, l_2, l_3 параллельны его сторонам, то есть всегда справедливо неравенство $S_1\leqslant aS$, где $a=\frac{17-12\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}0147$. Попробуйте выяснить, верно ли это.

В. В. Прасолов

◆

М768. *Сумма n чисел, каждое из которых не превосходит по модулю 1, равна s. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, что сумма выбранных чисел будет отличаться от s/3 не более чем на 1/3.*

Докажем, что данные числа можно разбить на три группы так, что суммы чисел в этих группах $s_1\leqslant s_2\leqslant s_3$ отличаются не более чем на 1, то есть $s_3-s_1\leqslant 1$. (Мы допускаем и «пустые» группы, состоящие из 0 чисел — сумма чисел в такой группе считается равной 0.) Для этого достаточно выбирать числа в произвольном порядке по одному и записывать в три столбика, причем каждое очередное число добавлять в тот столбик, где сумма чисел наибольшая, если это число отрицательно, и в тот столбик, где сумма наименьшая, если это число неотрицательно (вначале мы возьмем три числа одного знака из данных n чисел и запишем их первыми в разные столбики). Легко видеть, что после каждого шага суммы чисел в столбиках отличаются не более чем на 1, так что в результате мы получим нужное разбиение*).

Теперь проверим, что средняя по величине сумма s_2 удовлетворяет требованиям $-1/3\leqslant s_2-s/3\leqslant 1/3$, где $s=$ $=s_1+s_2+s_3$ — сумма всех чисел:

$$3s_2\leqslant(s_1+1)+s_2+s_3=s+1,$$
$$3s_2\leqslant s_1+s_2+(s_3-1)=s-1.$$

Интересно выяснить (для каждого θ между 0 и 1), для какого наименьшего $d=d\,(\theta)$ верно аналогичное неравенство $|s'-\theta s|\leqslant d$, где s — сумма произвольных n чисел,

---

*) Подобный алгоритм был использован в решении задачи М575 — одной из самых трудных задач Всесоюзной олимпиады в Тбилиси 1979 года. Заметим, что для $n=3$ и $n=4$ чисел, среди которых не более двух чисел одного знака, средняя группа у нас может оказаться пустой; убедиться в справедливости утверждения задачи (наличия непустой группы из одного или нескольких чисел с нужной суммой) можно с помощью перебора

s' — сумма некоторой группы из них. (Простые примеры показывают, что для $\theta=1/3$ оценку $d=1/3$ нельзя заменить меньшей.)

В. П. Гринберг

M769*. *Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке L, их продолжения пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 2). Пусть R — радиус описанной, r — радиус вписанной окружностей треугольника ABC. Докажите равенства*

а) $\dfrac{|LA_1|\cdot|LC_1|}{|LB|}=R$;

б) $\dfrac{|LA|\cdot|LC|}{LB_1}=2r$;

в) $=\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{2r}{R}$.

◆

а) Заметим сначала (обозначения ясны из рисунка), что $\widehat{ALB}=\widehat{LBA_1}$ (это следует из того, что угол A_1LB — внешний для треугольника ALB и поэтому $\widehat{A_1LB}=\alpha+\beta$. С другой стороны, по свойству вписанного угла, $\widehat{A_1BL}=\widehat{CBA_1}+\widehat{CBB_1}=\alpha+\beta$. Поэтому $|A_1B|=|A_1L|$. Аналогично, $|CL|=|BC_1|$.

По теореме синусов, $|A_1B|=2R\sin\alpha$, $|C_1B|=2R\sin\gamma$. Из $\triangle A_1LB$ получаем $|LB|=2|A_1L|\sin\gamma=4R\sin\alpha\cdot\sin\gamma$.

Итак, $\dfrac{|A_1L|\cdot|C_1L|}{|BL|}=\dfrac{2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\gamma}{4R\sin\alpha\cdot\sin\gamma}=R$.

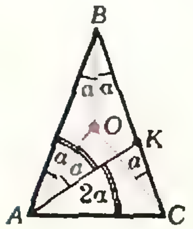
б) Поскольку $|A_1L|=\dfrac{r}{\sin\alpha}$, $|CL|=\dfrac{r}{\sin\gamma}$, а $|B_1L|=\dfrac{|CL|}{2\sin\alpha}=\dfrac{r}{2\sin\alpha\cdot\sin\gamma}$ ($\triangle B_1CL$ — равнобедренный, причем $|B_1C|=|B_1L|$), то $\dfrac{|AL|\cdot|CL|}{|B_1L|}=2r$.

в) По известной формуле, $S_{ABC}=\dfrac{abc}{4R}$, $S_{A_1B_1C_1}=\dfrac{a_1b_1c_1}{4R}$, и поэтому $\dfrac{S_{abc}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{abc}{a_1b_1c_1}$. Из подобия $\triangle CLB\sim\triangle B_1LC_1$ следует, что $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{|LB|}{|LC_1|}$. Аналогично, $\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{|CL|}{|LA_1|}$; $\dfrac{c}{c_1}=\dfrac{|LA|}{|LB_1|}$. Итак, $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{|LA|\cdot|LB|\cdot|LC|}{|LA_1|\cdot|LB_1|\cdot|LC_1|}=\dfrac{2r}{R}$ по доказанному в пунктах *а)* и *б)*.

Из решения задачи нетрудно получить неравенство $2r\leqslant R$, а также соотношение $|AL|\cdot|LA_1|=2Rr$, которое удобно использовать при доказательстве формулы Эйлера $d^2=R^2-2Rr$, где d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника. Ряд интересных следствий результатов задачи можно получить, заметив, что прямые A_1A, B_1B, C_1C содержат высоты $\triangle A_1B_1C_1$; одно из них: площадь треугольника равна половине произведения радиуса описанной окружности на периметр треугольника, обусловленного основаниями высот.

Р. А. Мазов

M771. *В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Известно, что центры окружностей: вписанной в треугольник ABK и описанной около треугольника ABC — совпадают. Найдите углы треугольника ABC.*



◆

Ответ: $\widehat{A}=\widehat{C}=72°$, $\widehat{B}=36°$. Пусть O — общий центр указанных в условии окружностей. Тогда AO и BO — биссектрисы углов KAB и ABC соответственно (см. рисунок). Кроме того, точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, поэтому треугольники AOB, BOC и COA равнобедренные. Следовательно, если $\widehat{OAB}=\alpha$, то $\widehat{OAK}=\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\alpha$. Отсюда $\widehat{ABC}=2\alpha$, $\widehat{CAB}=2\widehat{KAB}=4\alpha$, $\widehat{BCA}=\widehat{BCO}+\widehat{OCA}=\alpha+(\widehat{OAK}+\widehat{KAC})=4\alpha$. А так как сумма углов треугольника равна 180°, $\widehat{ABC}+\widehat{CAB}+\widehat{BCA}=2\alpha+4\alpha+4\alpha=10\alpha=180°$, и поэтому $\alpha=18°$, $\widehat{ABC}=36°$, $\widehat{CAB}=\widehat{BCA}=72°$.

M772. *В мастерской имеется пять различных станков. Обучение одного рабочего работе на одном станке стоит 1000 рублей. С какими наименьшими затратами можно обучить 8 рабочих так, чтобы при отсутствии любых трех из них все станки могли быть одновременно использованы в работе? Каждый рабочий может одновременно работать только на одном станке.*

Ответ: 20 000 рублей. На каждом станке должны уметь работать по меньшей мере четверо рабочих: если на каком-нибудь станке умеют работать только трое (или меньше) рабочих, то при их отсутствии станок будет простаивать. Следовательно, расходы на обучение не могут быть меньше $5\cdot 4\cdot 1000=20\,000$ рублей. Как видно из таблиц 1 и 2, задающих две разные схемы обучения, этой суммой можно обойтись. (В таблицах в столбце каждого рабочего плюсами отмечены станки, на которых он обучен работать.) Условию задачи удовлетворяют также все таблицы, получающиеся из таблиц 1 и 2 перестановкой столбцов (перенумерация рабочих) и строк (перенумерация станков).

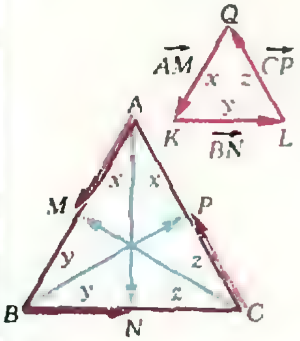
Таблица 1

Рабочий станок	1	2	3	4	5	6	7	8
№ 1	+	+	+	+	0	0	0	0
№ 2	+	+	+	0	+	0	0	0
№ 3	+	+	+	0	0	+	0	0
№ 4	+	+	+	0	0	0	+	0
№ 5	+	+	+	0	0	0	0	+

Таблица 2

Рабочий станок	1	2	3	4	5	6	7	8
№ 1	+	+	+	+	0	0	0	0
№ 2	0	+	+	+	+	0	0	0
№ 3	0	0	+	+	+	+	0	0
№ 4	0	0	0	+	+	+	+	0
№ 5	0	0	0	0	+	+	+	+

M773. *Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и P соответственно. Известно, что* $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$. *Докажите что треугольник ABC правильный.*



◆

Преобразуем условие задачи:

$$\vec{0}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})=$$
$$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AM}),$$

то есть $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$. Значит, откладывая векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{CP}$ один за другим, начиная с произвольной точки Q (см. рисунок) мы получим треугольник QKL.

Обозначим длины сторон треугольника QKL через $x=|QK|=|AM|$, $y=|KL|=|BN|$ и $z=|LQ|=|CP|$. Тогда $|AB|=|AM|+|MB|=|AM|+|BN|=x+y$, так как по свойству касательных, проведенных из одной точки, $|BM|=|BN|$; аналогично $|BC|=y+z$, $|CA|=z+x$. Треугольники ABC и QKL имеют соответственно параллельные стороны, поэтому они подобны и $|AB|:|QK|=|BC|:|KL|=|CA|:|LQ|$. Следовательно,

$$\frac{x+y}{x}=\frac{y+z}{y}=\frac{z+x}{z}=\frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{x+y+z}=2.$$

Итак, $x+y=2x$, $y+z=2y$. Отсюда $x=y=z$ и $|AB|=|BC|=|CA|$.

И. Б. Гусятников, С. В. Резниченко

M774. *Функция* $f(x)$, *определенная на отрезке* $[0;\ 1]$, *такова, что*

$$f(0)=f(1)=0 \qquad (1)$$

и

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<f(x)+f(y) \qquad (2)$$

для всех $x,\ y\in[0;\ 1]$.

Докажите, что

а) $f(x)>0$ *при всех* $x\in[0;\ 1]$;

б) $f(x)$ *имеет бесконечно много нулей на отрезке* $[0;\ 1]$;

◆

а) Полагая в неравенстве (2) условия задачи $x=y$, получим, что $f(x)<2f(x)$, то есть $f(x)>0$.

б) Докажем, что $f(x)=0$ для всех *двоично-рациональных* $x\in[0,\ 1]$, то есть для чисел вида $x=k/2^n$, где $k=0,1,\ldots,2^n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ (очевидно, множество таких чисел бесконечно). Доказательство проведем индукцией по n.

При $n=0$ на отрезке $[0;\ 1]$ имеются только два двоично-рациональных числа — 0 и 1. По условию, $f(0)=f(1)=0$.

Теперь остается показать, что из предположения $f(k/2^n)=0$ при $k=0,1,\ldots,2^n$ вытекает равенство $f(k/2^{n+1})=0$ при всех $k=0,1,\ldots,2^{n+1}$. Если k четно, $k=2l$, то $f(k/2^{n+1})=f(l/2^n)=0$ по предположению индукции. Если же $k=2l+1$, то *в) если существует такое число $A>0$, что для всех $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ выполнено неравенство $f(x)<A$, то $f(x)<A$ для каждого $x \in [0; 1]$;*

г) если функция $f(x)$ непрерывна хотя бы в одной точке x_0 отрезка $[0; 1]$, то $f(x)=0$ для всех $x \in [0; 1]$;*

д) существуют функции $f(x)$, удовлетворяющие условиям (1), (2), не равные тождественно нулю.*

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)=f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2^n}+\frac{l+1}{2^n}\right)\right)<f\left(\frac{l}{2^n}\right)+f\left(\frac{l+1}{2^n}\right)=0.$$

В то же время $f(k/2^{n+1})>0$ в силу *а*); следовательно, $f(k/2^{n+1})=0$.

в) Пусть $f(a)<A$ и b — середина отрезка $[a; 1]$ $(b=(a+1)/2)$, тогда $f(b)<f(a)+f(1)<A$. Поэтому, если неравенство $f(x)<A$ выполняется для всех точек некоторого отрезка $I \subset [0; 1]$, оно справедливо и для середин всех отрезков $[a; 1]$, где $a \in I$, то есть для всех точек отрезка I', который получается из отрезка I при гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и центром в точке E оси Ox с абсциссой $x=1$ (см. рисунок). По условию оно выполняется на отрезке $I_1=\left[0; \frac{1}{2}\right]$, следовательно, и на отрезке $I_2=I_1'=\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, далее, на отрезке $I_3=I_2'=\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right]$ и, вообще, на любом из отрезков $I_n=\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}, 1-\frac{1}{2^n}\right]$ $(n=1, 2, \ldots)$. Но объединение этих отрезков — это весь полуинтервал $[0; 1[$. А поскольку $f(1)=0<A$, неравенство $f(x)<A$ верно при любом $x \in [0; 1]$.

Очевидно, что точно таким же образом можно распространять неравенство $f(x)<A$ с произвольного отрезка $[a; b]$ длины $l=b-a$ на больший отрезок $[a; c]$ при $b<c<b+l$ (или $[c; b]$ при $a-l<c<a$), если только $f(c)=0$. (В нашем рассуждении было $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$.) А так как $f(x)=0$ при всех двоично-рациональных x (пункт *б*)) и на любом отрезке имеются двоично-рациональные точки, отсюда вытекает, что *если $f(x)<A$ на произвольном промежутке, содержащемся в отрезке* $[0; 1]$, *то $f(x)<A$ для всех $x \in [0; 1]$.*

г) Пусть функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)=y_0$. По определению это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=y_0$, то есть для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что $y_0-\varepsilon<f(x)<y_0+\varepsilon$ при $x_0-\delta<x<x_0+\delta$. В интервале $I_\delta=]x_0-\delta; x_0+\delta[$ имеются двоично-рациональные точки; пусть x_1 — одна из них. Тогда в силу *б*) $f(x_1)=0$, поэтому $y_0-\varepsilon<f(x_1)=0$ или $y_0<\varepsilon$. Следовательно, $f(x)<y_0+\varepsilon<2\varepsilon$ для всех $x \in I_\delta$ и согласно доказанному выше (см. п. *а*) и конец п. *в*)) $0<f(x)<2\varepsilon$ при всех $x \in [0; 1]$. Поскольку ε здесь — произвольное положительное число, $f(x) \equiv 0$.

д) Определим функцию $f(x)$ при $x \in [0; 1]$ равенством

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Тогда $f(0)=f(1)=0$. Докажем, что $f\left(\frac{x+y}{2}\right)<f(x)+f(y)$. Левая часть этого неравенства всегда не больше 1, поэтому оно заведомо выполняется, если хотя бы одно из чисел x и y иррационально (ибо тогда $f(x)$ или $f(y)$ равно 1). Если же и x, и y — рациональные числа, то их полусумма $\frac{x+y}{2}$ также рациональна и $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=0=f(x)+f(y)$.

И. Б. Гусятников

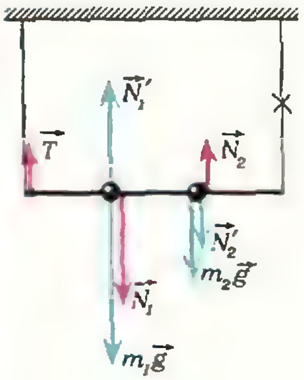
◆

Ф783. *Горизонтально расположенный невесомый стержень длины $3l$ с закрепленными на нем грузами с массами m_1 и m_2 удерживается в положении равновесия при помощи двух вертикальных нитей. Определить силу натя-*

В момент обрыва правой нити на стержень действуют сила $\vec{T}$ натяжения левой нити и силы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ нормального давления грузов m_1 и m_2. Поскольку стержень невесом,

$$\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{N}_2=\vec{0},$$
$$N_1 l=2N_2 l.$$

Из второго уравнения (условие равенства нулю суммы *жения левой нити в первый момент времени, если правую нить перерезают.*



моментов всех сил относительно точки O) следует:

$$N_1 = 2N_2,\ \vec{N}_1 = -2\vec{N}_2. \qquad (1)$$

С учетом этих соотношений получаем (см. рисунок):

$$T = N_1 - N_2 = N_2. \qquad (2)$$

Ускорения грузов m_1 и m_2 в первый момент после обрыва правой нити будут направлены вертикально (точка O неподвижна, стержень нерастяжим) и связаны соотношением

$$a_2 = 2a_1. \qquad (3)$$

Запишем уравнения движения грузов в этот момент:

$$m_1g - N_1' = m_1a_1,$$
$$m_2g + N_2' = m_2a_2,$$

где N_1' и N_2' — модули сил $\vec{N}_1'$ и $\vec{N}_2'$ реакции стержня, действующих на грузы m_1 и m_2. Поскольку $N_1' = N_1$ и $N_2' = N_2$, с учётом соотношений (1) и (3) получаем:

$$m_1g - 2N_2 = m_1a_1,$$
$$m_2g + N_2 = 2m_2a_1.$$

Отсюда находим N_2, а следовательно (см. (2)), и T:

$$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + 4m_2}\, g.$$

С. С. Кротов

Ф784. *На движущееся с постоянной скоростью v тело начинает действовать постоянная сила F. Спустя время τ скорость тела стала равной $v/2$. За следующий такой же интервал времени скорость уменьшилась еще в два раза. Определить, чему будет равна скорость тела спустя интервал времени 3τ с начала действия силы F.*

◆

Из условия задачи следует, что сила $\vec{F}$ направлена под некоторым углом $\alpha \neq 0$ к вектору начальной скорости тела v (в противном случае, то есть при $\alpha = 0$, изменения скорости за одинаковые промежутки времени были бы одинаковы).

Пусть $\vec{OA}$ — вектор начальной скорости тела, $\vec{AB}$ — вектор изменения скорости за время τ с начала действия силы $\vec{F}$ (см. рисунок). Тогда $\vec{OB}$ — вектор, равный по модулю скорости $v_1 = v/2$ тела через время τ. Отложим от точки B вектор $\vec{BC}$, составляющий угол α с направлением вектора $\vec{OA}$ и равный по модулю $|\vec{AB}|$. Тогда вектор $\vec{OC}$ будет равен по модулю скорости $v_2 = v/4$ тела спустя время 2τ с начала действия силы $\vec{F}$. Повторив еще раз такую же операцию, построим вектор $\vec{OD}$, равный по модулю скорости v_3 тела спустя время 3τ с начала действия силы $\vec{F}$.

Пусть проекции вектора $\vec{AB}$ на оси X и Y (см. рисунок) равны соответственно Δv_x и Δv_y. Тогда

$$(v + \Delta v_x)^2 + \Delta v_y^2 = v^2/4,$$

$$(v + 2\Delta v_x)^2 + (2\Delta v_y)^2 = v^2/16.$$

Учитывая, что модуль скорости v_3 должен удовлетворять соотношению

$$v_3^2 = (v + 3\Delta v_x)^2 + (3\Delta v_y)^2,$$

с учетом предыдущих уравнений находим v_3:

$$v_3 = v\sqrt{7}/4.$$

С. К. Сергеев

Ф785. *В стакане с водой плавает кусок льда. На поверхности воды налит слой масла (рис. 1). Как изменится уровень жидкости в стакане, когда лед растает? Куда сместится при этом граница раздела воды и масла?*

◆

Заменим мысленно масло водой, так, чтобы положение льда относительно стакана не изменилось. Поскольку плотность воды больше плотности масла, уровень воды в стакане в этом случае будет ниже, чем верхний уровень масла (рис. 2). В этой новой ситуации при таянии льда общий уровень жидкости не изменится (рис. 3).

Теперь «вернем» масло на место, убрав долитую воду (рис. 4). Часть масла заполнит «лунку», образовавшуюся при таянии льда.

Таким образом, общий уровень жидкости (вода + масло) после таяния льда понизится; уровень, на котором находится граница раздела масла и воды, повысится (рис. 5).

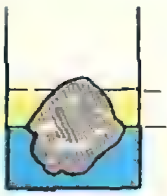


Рис. 1.

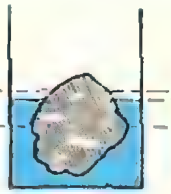


Рис. 2.

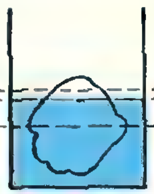


Рис. 3.

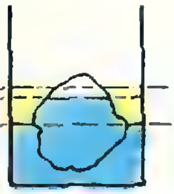


Рис. 4.

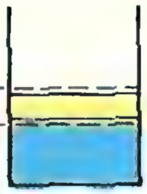


Рис. 5.

Справедливость этого качественного решения можно проверить количественным расчетом. Проделайте это самостоятельно.

С. В. Казаков

◆

Ф786. *В неидеальном одноатомном газе между молекулами действуют силы притяжения. Считая, что потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия пропорциональна плотности газа, то есть $\Pi = \alpha \frac{N}{V}$, где N — число молекул газа, V — объем, занимаемый газом, α — коэффициент пропорциональности ($\alpha < 0$). Определить разность молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении (c_p) и при постоянном объеме (c_V).*

Сообщим газу некоторое количество тепла ΔQ. Согласно первому закону термодинамики,

$$\Delta Q = \Delta U + A$$

где ΔU — изменение внутренней энергии газа, A — работа, совершаемая газом.

Внутренняя энергия неидеального газа складывается из кинетической энергии теплового движения молекул, которая является такой же, как и идеальном газе, и потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия: $U = U_{\text{ид}} + \Pi$. Из условия задачи следует, что между молекулами газа действуют силы притяжения. Действительно, тот факт, что энергия межмолекулярного взаимодействия отрицательна ($\alpha < 0$), означает, что для удаления любой молекулы из области взаимодействия необходимо совершить положительную работу, то есть преодолеть силы притяжения.

Пусть при сообщении *газу малого количества тепла* ΔQ объем, занимаемый газом, изменился на малую величину ΔV, а температура газа изменилась на ΔT. Изменение внутренней энергии газа —

$$\Delta U = \Delta U_{\text{ид}} + \Delta \Pi,$$

работа, совершенная газом, —

$$A = p \cdot \Delta V.$$

Согласно условию задачи,

$$\Delta \Pi = \frac{\alpha N}{V + \Delta V} - \frac{\alpha N}{V} = \frac{\alpha N}{V}\left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta V}{V}} - 1\right) \approx$$

$$\approx \frac{\alpha N}{V}\left(1 - \frac{\Delta V}{V} - 1\right) = -\frac{\alpha N}{V^2} \cdot \Delta V.$$

Изменение внутренней энергии идеального газа при изменении его температуры на ΔT равно

$$\Delta U_{\text{ид}} = C_V \cdot \Delta T,$$

где C_V — теплоемкость данной массы газа при постоянном объеме (при $\Delta V = 0$).

Таким образом, $\Delta U = C_V \cdot \Delta T - \frac{\alpha N}{V^2} \cdot \Delta V$, и

$$\Delta Q = C_V \cdot \Delta T - \frac{\alpha N}{V^2} \cdot \Delta V + p \cdot \Delta V =$$

$$= C_V \cdot \Delta T + \left(p - \frac{\alpha N}{V^2}\right) \cdot \Delta V. \qquad (1)$$

При отсутствии межмолекулярного взаимодействия (при решении задачи с моделью «идеальный газ»)

$$\Delta Q = C_V \cdot \Delta T + p' \cdot \Delta V,$$

где $p' = \frac{N}{V} kT$ — давление идеального газа. Таким образом, в результате действия межмолекулярных сил притяжения давление газа оказывается меньше давления идеального газа на величину

$$p' - p = -\frac{\alpha N}{V^2}$$

и равно

$$p=\frac{N}{V}kT+\frac{aN}{V^2}\quad(a<0). \qquad (2)$$

(Качественное объяснение этого факта очевидно: средняя сила, действующая на элемент поверхности стенки сосуда при соударении молекул со стенкой (именно эта сила и определяет давление газа), из-за притяжения ударяющихся о стенку молекул к молекулам, находящимся в глубине сосуда, оказывается меньше, чем при отсутствии этих сил притяжения, то есть меньше, чем в случае идеального газа.)

Соотношение (2) позволяет установить связь между ΔV и ΔT при постоянном давлении. Перепишем это соотношение в виде

$$NkT=V\left(p-\frac{aN}{V^2}\right).$$

Тогда

$$Nk\cdot\Delta T=\Delta V\cdot\left(p-\frac{aN}{V^2}\right)+\frac{2aN}{V^2}\cdot\Delta V=$$

$$=\left(\frac{NkT}{V}+\frac{2aN}{V^2}\right)\cdot\Delta V,$$

откуда

$$\Delta V=\frac{NkV^2}{NkTV+2aN}\cdot\Delta T. \qquad (3)$$

Подставив в равенство (1) найденные выражения (2) и (3) для p и ΔV, получим:

$$\Delta Q=C_V\cdot\Delta T+\frac{Nk}{1+2a/VkT}\cdot\Delta T.$$

Следовательно, теплоемкость данной массы газа при постоянном давлении равна

$$C_p=\frac{\Delta Q}{\Delta T}=C_V+\frac{Nk}{1+2a/VkT}.$$

Разность молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объеме равна

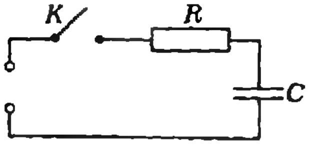
$$c_V-c_p=\frac{N_A k}{1+2a/VkT}=\frac{R}{1+2a/VkT}.$$

(Заметим, что теплоемкость C_p зависит от объема, занимаемого газом, что является прямым следствием взаимодействия молекул. Теплоемкость же C_V — такая же, как и у идеального газа, поскольку при постоянном объеме потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия в газе не меняется.)

В. В. Тугушев

◆

Ф787. *Напряжение на источнике меняется со временем по линейному закону. В начальный момент напряжение было равно нулю. С помощью ключа K источник можно подключить к схеме, приведенной на рисунке. В какой момент нужно замкнуть ключ, чтобы ток в цепи был постоянным по величине? Сопротивление резистора R, емкость конденсатора C.*



Пусть напряжение источника $U=at$, где $a=\text{const}$. Тогда в моменты времени t_1 и t_2 после замыкания ключа выполняются условия

$$at_1=RI+\frac{Q_1}{C},$$

$$at_2=RI+\frac{Q_2}{C},$$

где I — постоянный ток, текущий через резистор, Q_1 и Q_2 — заряды на конденсаторе в моменты t_1 и t_2. Вычитая из второго равенства первое, получим

$$a(t_2-t_1)=\frac{Q_2-Q_1}{C}=\frac{I(t_2-t_1)}{C},$$

откуда $I=aC$.

В момент времени t_x, в который замкнули ключ K (отсчет времени ведется от момента $t=0$ при $U=0$), заряд на конденсаторе был равен нулю, и выполнялось условие

$$at_x=RI=RaC.$$

Отсюда находим t_x:

$$t_x=RC.$$

А. Р. Зильберман

Задачи республиканских олимпиад

Многие наши читатели уже включились в начальные этапы очередного цикла Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников. «Квант» ежегодно в одном из последних номеров рассказывает о заключительном (всесоюзном) этапе и публикует полный список предлагавшихся там задач. Здесь мы печатаем некоторые задачи республиканских олимпиад 1981 и 1982 гг. Задачи 1—5 взяты из рекомендательного списка задач республиканского этапа, составляемого методической комиссией по математике Центрального оргкомитета олимпиады; остальные задачи были предложены местными жюри. После задачи в скобках указан класс, в котором она предлагалась.

1. Числа a, b, c удовлетворяют соотношениям

$$\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}.$$

Чему может равняться число

$$p=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}? \qquad (8)$$

2. Докажите, что для любых чисел p и q суммарная длина отрезков оси Ox, на которых выполняется неравенство $|x^2+px+q|<2$, не превосходит 4. *(9)*

3. Всюду определенная функция f при любых x и y удовлетворяет соотношению $f(xy)=f(x)\cdot f(y)-f(x+y)+1$, причем $f(1)=2$. Найдите: *а*) $f(m)$ для произвольного целого m; *б*) $f(\frac{m}{n})$ для произвольного рационального числа $\frac{m}{n}$. *(9)*

4. Докажите, что многочлен $3x^{1982}+4$ нельзя представить в виде суммы квадратов трех многочленов с целыми коэффициентами. *(10)*

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$; прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые AD и BC — в точке K. Докажите неравенство $S_{ABCD} > (|AB|\cdot|CD|\times$ $\times\sin\widehat{AMD}+|BC|\cdot|AD|\cdot\sin\widehat{AKB})/2$. *(10)*

6. Докажите, что множество чисел 1, 2, 3, ..., 1413, 1414 можно разбить на группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе равнялась 1981. *(8)*

7. Найдите длину стороны наименьшего квадрата, в котором можно поместить без наложений три круга радиусов 1, 2, 2. *(8)*

8. Последовательность (a_n) определяется следующим образом: из последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ... берем первые три числа (то есть $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$), затем следующие два числа пропускаем и берем три числа (то есть $a_4=6$, $a_5=7$, $a_6=8$), четыре числа пропускаем, три числа берем, шесть пропускаем и т. д. Вычислите a_{1000}. *(8)*

9. Чемпионат страны по футболу проходит в два круга. По его окончании выяснилось, что команды набрали очки в арифметической прогрессии, и последняя команда имеет 17 очков. Сколько команд участвовало в чемпионате? *(8)*

10. В пятиугольнике проведены все диагонали. Какие семь углов между диагоналями или диагоналями и сторонами надо отметить, чтобы из равенства друг другу этих углов следовало, что пятиугольник правильный? *(8)*

11. Вычислите при каждом a предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{[(n+a)^2]}-n)$, где $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x. *(9)*

12. Пусть m_a, m_b, m_c — длины медиан $\triangle ABC$. Докажите, что $m_a^2+m_b^2+m_c^2>$ $>\frac{3}{4}\sqrt{abc}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$. Для каких треугольников достигается знак равенства? *(9)*

13. Точка с координатами $(x(t), y(t))$ движется в плоскости так, что в каждый момент времени t выполнены равенства $y'(t)=\frac{1}{x(t)}$, $x'(t)=-\frac{1}{y(t)}$. Известно, что в некоторый момент времени точка имела координаты (12; 3). Может ли эта точка в некоторый другой момент времени иметь координаты (6; 5)? *(9)*

14. Докажите неравенство

$$\left(1+\frac{1}{2^{51}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{52}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{53}}\right)\dots\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2^{100}}\right)<1+\frac{1}{2^{49}}. \qquad (9)$$

15. Сколько звеньев может содержать замкнутая ломаная в пространстве, если ее смежные звенья взаимно перпендикулярны? *(10)*

16. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной осями Ox и Oy, прямой $x=\frac{\pi}{2}$ и графиком функции $y=\frac{\sin x}{x}$, не меньше 1. *(10)*

17. Докажите, что если для всех $x\in\,]-1;\,1[$ выполняется неравенство $|a_1\sin b_1x+a_2\sin b_2x+\dots+a_n\sin b_nx|<|\sin x|$, то

$|a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n|<1$. *(10)*

18. Существует ли пирамида, у которой сумма плоских углов каждого многогранного угла равна а) 150°, б) 210°, в) 180°? *(10)*

19. Автобусные билеты занумерованы натуральными числами от 000 001 до 999 999. Сколько всего цифр 1 встречается на билетах? *(10)*

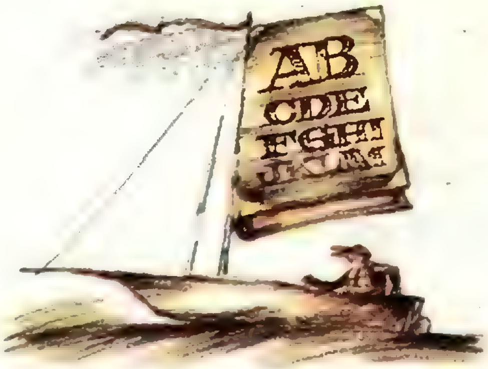
20. Решите систему уравнений

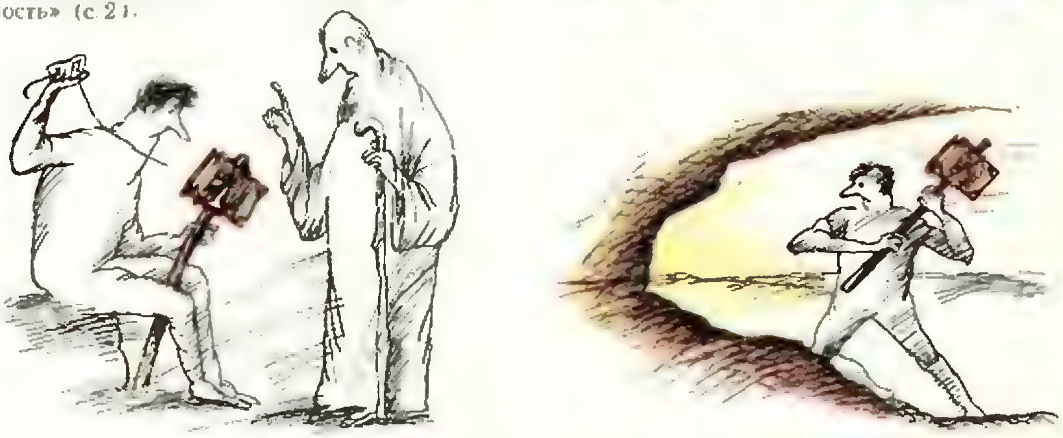
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14,\\ xy+xz+yz=11,\\ xyz=6. \end{cases} \qquad (10)$$

Публикацию подготовила
Т. А. Сарычева

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

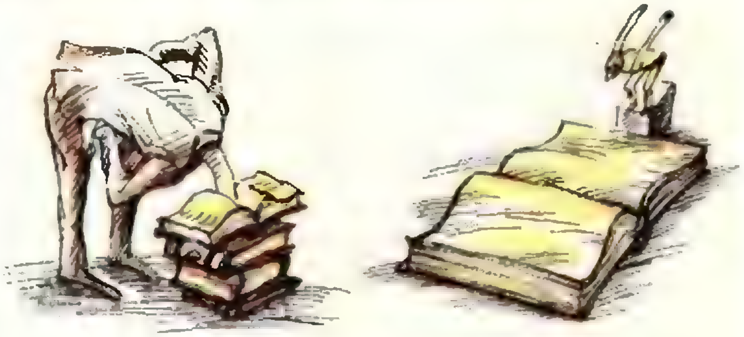
Когда в 1981 году член-корреспондент АН СССР А. П. Ершов получил предложение выступить с установочным докладом на открытии конференции «Применение ЭВМ в обучении» в Лозанне, ему пришла мысль проиллюстрировать свой доклад не только техническими схемами и графиками, как это обычно делается, но и рисунками, отображающими в ассоциативной форме его основные идеи. Такие рисунки сделал по его просьбе художник М. М. Златковский; они показывались одновременно с докладом с помощью диаскопа. Здесь мы публикуем подборку этих рисунков. В качестве подписей к ним мы поместили отрывки из статьи А. П. Ершова «Программирование — вторая грамотность» (с. 2).





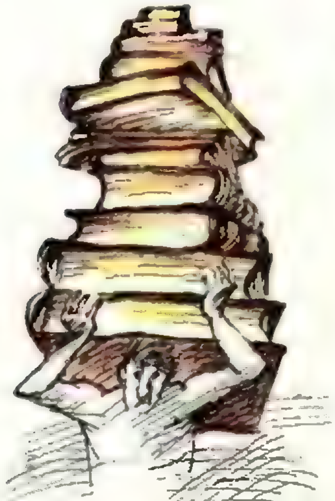
Словами и примером старший (учитель) обучал младшего (ученика) делу. Понимание было не чисто умственным озарением, а овладением приемами изучаемого дела.

Отделился процесс накопления знаний от их применения, появились новые формы жажды знаний и новые ощущения постижения истины.

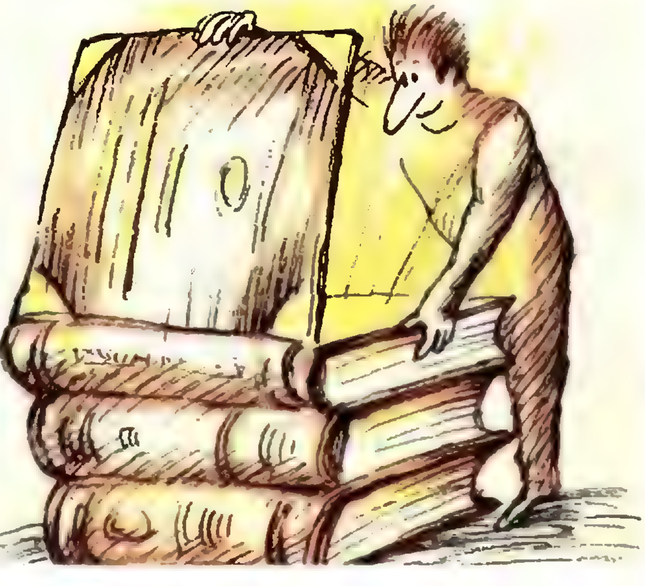


Мы все помним простые и емкие слова Максима Горького: «Любите книгу, источник знания».

▼



В 1962 г. во всем мире было напечатано 10 млрд. книг.



В настоящее время способность человека передавать знания машине безнадежно отстает от способности создать эту машину.

Программами буквально напичкан наш организм, само развитие организма есть выполнение генетической программы.

IF
begin
do
Σ
F
N
A

ЭВМ уже есть во многих школах и будет приходить туда в нарастающих количествах.

Грамотность и программирование дополняют друг друга, и вместе составляют новое представление о гармонии человеческого ума.

Стандартные приемы программирования

Урок 5. Сколько будет 2×2 на ЭВМ, или Машинная арифметика и как с нею бороться

Знание ответа на вопрос «Сколько будет 2×2?» является совершенно необходимым для человека, который претендует на знание математики хотя бы в объеме начальной школы. А как отвечает на этот вопрос ЭВМ? Неожиданность заключается в том, что на ЭВМ

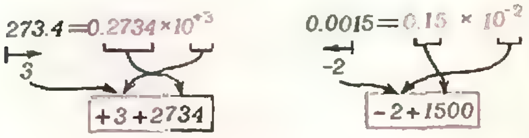
$$2\times2=4$$

$$\text{но}\ \ 2.0\times2.0\neq4.0,\ \ \text{точнее}\ \ 2.0\times2.0\approx4.0\text{*)}$$

Дело в том, что *целые числа — точные*, а *действительные — приближенные*. Мало того, все числа еще имеют *ограниченный диапазон изменения*. Какие же выводы из этого должен сделать программист?

Рассмотрим приведенные в таблице решения подготовительных задач. Задачи, по-видимому, показались вам чрезвычайно легкими, и приведенные решения не вызывают сомнений. А тем не менее все решения не верны, точнее **могут дать неправильные результаты или не дать их вовсе.** И происходит это из-за *особенностей машинной арифметики*.

Действительные числа в ЭВМ представляются в так называемой *форме с плавающей точкой*, то есть число a представляется в виде $a\cdot n^b$, где $1/n<|a|<1$, n — основание той системы счисления, в которой работает данная ЭВМ (как правило, это двоичная или шестнадцатеричная система, что, впрочем, для понимания сути дела совершенно неважно). Предположим, что наша ЭВМ работает в десятичной системе счисления и имеет 4 разряда под *мантиссу* и 1 разряд под *порядок*. Тогда (см. рис. 1) в ячейке памяти запоминаются только цифры и знак мантиссы и порядка, точка *подразумевается* перед первой цифрой мантиссы, а порядок показывает, в какую сторону и на сколько цифр «уплывает» точка на самом деле (отсюда и термин «плавающая точка»). Таким образом, максимальное представление в нашей ЭВМ число — это 0.9999×10^9, то есть около миллиарда.



Теперь рассмотрим задачу 2 и предположим, что $n=1000$, а все a_i имеют значения около 2×10^6. Тогда попытка получить сумму элементов массива не даст результата, так как эту сумму нельзя записать в память ЭВМ. Чтобы избежать этого, формулу среднего арифметического надо переписать в виде

$$m=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n}$$

и программировать деление на n каждого a_i. Разумеется, это замедляет программу, но наша более короткая программа, приведенная в таблице, может **просто не дать результата.**

Теперь при том же $n=1000$ допустим, что

$$\sum_{i=1}^{900}a_i=9555,\ a_{901}=a_{902}=\ldots=a_{1000}=0.2.$$

При сложении a_{901} с накопленной суммой получим 0.95552×10^4, но ЭВМ отбросит последний знак «2» (теряются разряды, вышедшие за границы разрядной сетки). Таким образом, последние 100 компонент не внесут свой вклад в результат и получится грубая ошибка (равная $0.2\times100=20.0$).

(В данном случае следовало бы отдельно просуммировать все числа с малыми порядками, а затем использовать полученную сумму как элемент для дальнейшего суммирования.)

Можно привести примеры невыполнения в машинной арифметике ассоциативных и дистрибутивных законов*).

Реальные ЭВМ работают с гораздо большим диапазоном и большей точностью представления чисел, поэтому в большинстве случаев разница между машинной и обычной арифметикой не ощущается. Тем не менее известны случаи, когда программа на языке фортран при переносе с ЭВМ БЭСМ-6 (которая работает с точностью около 12 десятичных знаков на ЭВМ серии ЕС (точность около 7 десятичных знаков) зацикливалась: низкая точность ЕС ЭВМ приводила к ошибкам из-за накопления погрешностей.

Как правило, диапазона и точности ЭВМ хватает с избытком. Так, однократное сложение чисел с резко различающимися порядками нам не мешает: когда счет идет на миллионы, десятые доли не важны; а для потери точности при многократном сложении чисел близких порядков надо сделать около 10^8 сложений на ЕС ЭВМ и около 10^{13} на БЭСМ-6. Особенности машинной арифметики начинают сказываться, если нужна точность, близкая к точности ЭВМ, или если объем вычислений подходит к критическому для данной ЭВМ.

---

*) Для дотошных читателей сообщим, что 2.0×2.0 все же в точности равно 4.0, так как и 2.0 и 4.0 представляются в памяти точно. Но если один из сомножителей получается вычислением, то результат уже может оказаться не точным: $(1.0/3.0)\times6.0\neq2.0$, так как промежуточный результат 1/3 не может быть представлен точно на ЭВМ, работающих в двоичной или десятичной системе счисления.

*) Посчитайте, сколько получится на нашей гипотетической четырехразрядной ЭВМ при вычислении $(a+b)c$ и $ac+bc$, если $a=0.4440$, $b=0.00002$, $c=5$. Невыполнение ассоциативности вы только что видели на примере вычисления Σa_i.

Решение подготовительных задач

Задача 1 (таблица значений x^2)

```
x: = a;
while x< =b do
begin writeln (x, '**2=', x**2);
  x: = x+h
end;
```

Задача 2 (среднее арифметическое).

```
s: =0;
for i: =1 to n do s: = s+a [i] ;
s: =s/n;
```

Задача 3 (поиск данного числа).

```
k: =0; i: =1;
while (i< =n) AND (k=0) do
begin if a [i] =x then k: =i;
  i: =i+1
end;
```

В упомянутом примере с программой на фортране нужна была точность 10^{-5} при точности ЭВМ равной 10^{-7}, а точность 10^{-3} программа на ЕС ЭВМ обеспечивала.

Какие же выводы следуют из всего сказанного выше? Вывод один: программист должен быть **морально готов к встрече с машинной арифметикой.** Что конкретно он должен делать, встретившись с ней? Общего приема не существует, и приходится выбирать из следующих вариантов.

а) Доказать, что для данного алгоритма погрешности машинной арифметики не выходят за допустимые пределы.

б) Доказать то же при дополнительных условиях на исходные данные (установить, что при ваших данных все будет в порядке, хотя этого гарантировать в общем случае нельзя).

в) Разработать алгоритм, компенсирующий погрешности.

г) Использовать вычисления с увеличенной точностью (реализованные аппаратно или программно), в частности, просчитать программу на другой модели ЭВМ с более точной арифметикой.

На практике чаще всего используются варианты *в*) или *г*). В некоторых языках программирования (фортран и ПЛ/1, например) есть возможность указать, что вычисления надо вести с увеличенной точностью. Это на ЕС ЭВМ реализуется аппаратными средствами (с некоторым замедлением программы), а на БЭСМ-6 — программно (со значительным замедлением программы).

Действительные числа лучше не сравнивать на равенство,

так как с почти стопроцентной вероятностью получим результат «не равно». Поэтому оператор в задаче 3

```
if a[i] =x then...
```

надо заменить на

```
if abs (a[i]—x) <eps then...
```

где *eps* — константа, описанная, например, как *eps* = 0.0001 (в зависимости от точности ЭВМ и нужной вам точности). Тогда действительные числа считаются равными, если они различаются не более чем на некоторое ε.

В задаче 1, если $a=0$, $b=1$, и $h=0{,}1$, то у нас нет гарантии, что мы получим все 11 значений функции: после 10-кратного сложения *x* с *h* может получиться значение чуть меньшее *b*, или чуть большее *b*, и в последнем случае для него уже цикл работать не будет. Для достижения нужного результата нужно либо организовать цикл с условием **while** $(x<b+{}$ $+h/2)$, либо заранее вычислить число повторений цикла *n*: = *round*((*b*—*a*)*h*) и организовать цикл **for** *i*: = *o* **to** *n* **do**... Однако и этот путь может не привести к желаемому результату: если значение *n* (необходимое число шагов) получится достаточно большим, то при многократном выполнении оператора *x*: = *x* + *h* может накопиться погрешность, превосходящая значение *h*. Тогда цикл, организованный через **while**, выполнится на один (или даже несколько) раз меньше или больше, а цикл, организованный через **for**, выполнится нужное количество раз, но последнее значение будет весьма далеко от *b*. Для компенсации этого нам придется организовать цикл следующим образом:

```
n: =round((b—a)/h);
for i: =0 to n do
begin x: =a+i*h;
writeln (x, '**2=', x**2)
end;
```

(Разумеется, эта программа будет работать медленнее, так как каждое вычисление значения аргумента требует больше операций.)

На трех простых примерах мы рассмотрели выполнение варианта *в*) — разработку специального алгоритма. Обратите внимание, что варианты *в*) и *г*) требуют выполнения в качестве составной части пунктов *а*) и *б*), чтобы убедиться, что разработанный алгоритм дает нужный эффект. Иногда это просто. Так, например, очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{n} < \max\{a_i\} \ (k<n),$$

поэтому при счете по формуле $\sum \frac{a_i}{n}$ переполнение нам не грозит — доказан вариант *а*). Но если $n \cdot \max\{a_i\}$ меньше максимального представимого числа, то можно работать по формуле $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ — это вариант *б*): при наших данных работать можно, хотя, вообще говоря, алгоритм таит опасность. Доказательства здесь были выполнены только эскизно, более подробно их предлагается выполнить самостоятельно (для этих простых случаев вам это доступно). В других случаях нужные доказательства *а*) или *б*) могут оказаться сложными.

Контрольное задание

5.1. Дана ЭВМ, работающая в *p*-ичной системе счисления с длиной мантиссы в *n* разрядов. Для задачи 1, разобранной выше, определите, при каких соотношениях между *a*, *b*, *h*, *p* и *n* можно строить таблицу циклом **while** с последовательным увеличением *x* на величину *h* с тем, чтобы гарантировать правильное количество повторений цикла.

(Подготовительных задач к следующему (последнему) уроку не дается!)

Л. Ф. Штернберг

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1982 году.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

На выполнение работы было предоставлено 5 часов.

Вариант 1

(механико-математический, физический и экономический факультеты)

1. Решите уравнение

$$14x-2x^2=|x-7|.$$

2. Решите уравнение

$$4+2\cos^2x=7\sin 2x.$$

Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Дан ромб $ABCD$. Окружность радиуса R описана около треугольника ABD и проходит через центр окружности, вписанной в треугольник. CBD. Определите площадь ромба.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2+2(a-1)x+3a+1=0$ удовлетворяет неравенству $x<-1$.

5. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1. Точка M — середина ребра CD, N — середина ребра BC, точка P принадлежит ребру AB, причем $|AP|=3|BP|$. Сфера касается плоскостей ABC и ACD, причем точки ее касания с плоскостями лежат, соответственно, на прямых NP и AM. Найдите радиус сферы.

Вариант 2

(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Найдите область определения и множество значений функции $f(x)=\sqrt{6x-x^2-5}$.

2. Решите неравенство

$$\log_2(4x^4+3x^2+6)+\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)>$$
$$>\log_2(3x^2+6).$$

3. Угол между векторами $\vec{a}=\left(\alpha;1;\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ и $\vec{b}=(3;1;0)$ равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите α (базис прямоугольный).

4. Решите уравнение

$$\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin 6x=\sin\left(10x-\frac{\pi}{4}\right).$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, плоскости граней SAB и ABC перпендикулярны, $|SA|=|SB|$, высота пирамиды равна 1. На ребре SA выбрана точка M так, что $|MA|=2|SM|$, точка N — середина ребра SC. Плоскость α проходит через точки B, M и N. Найдите расстояние от точки A до плоскости α.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов. На решение задач давалось пять часов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные численные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент, хорошо представляя явление, может сам выбрать необходимые для решения задачи физические величины и их численные значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Работа оценивалась в зависимости от суммы набранных баллов (за сумму от четырех до двенадцати баллов ставилась оценка «три», от тринадцати до двадцати одного — «четыре»). Ниже после текста каждой задачи указан балл за ее полное решение и процент решивших ее (при этом задача считалась решенной, если за нее было поставлено не менее половины полного количества баллов).

Вариант 1

1. Схема состоит из конденсатора емкости C, диодов D_1 и D_2 и катушек с индуктивностью L_1 и L_2, собранных, как показано на рисунке 1. Найдите период колебаний напряжения на конденсаторе в этой схеме. (4 б.; 64%)

2. Закрытый с торцов теплоизолированный цилиндр массы m перегорожен подвижным поршнем массы M. С обеих сторон от поршня находится по одному молю идеального газа, внутренняя энергия которого $U=cT$. Коротким ударом цилиндру сообщают скорость $\vec{v}$, направленную вдоль его оси. На сколько изменится температура газа после затухания колебаний поршня? Трения между поршнем и цилиндром нет. (7 б.; 40%)

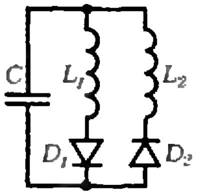


Рис. 1.

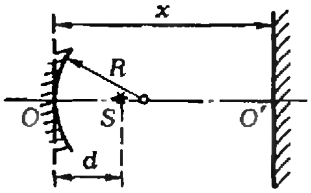


Рис. 2.

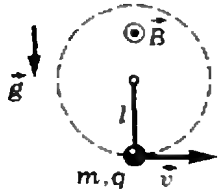


Рис. 3.

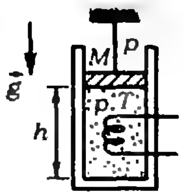


Рис. 4.

3. Цилиндрический стакан до высоты h заполнен кусочками льда. Поры между кусочками льда сквозные, и в исходном состоянии заполнены воздухом. Льдинки занимают долю объема $\alpha = 60\%$. Лед начинает таять, причем соотношение объемов льдинок и пор между ними остается неизменным. Найдите уровень воды в стакане в момент, когда растаяла доля льда $\beta = 70\%$. Плотность сплошного льда $\varrho_л = 900$ кг/м³, плотность воды $\varrho_в = 1000$ кг/м³. (9 б.; 41%)

4. Оцените мощность, выделяющуюся в виде тепла при экстренном торможении грузовика. (4 б.; 67%)

5. Спираль лампочки накаливания проецируется на экран с помощью объектива. Затем часть объектива по диаметру перекрывают широкой полоской из непрозрачного материала, оставляя неперекрытыми симметричные сегменты линзы. При смещении лампочки из плоскости оптимальной фокусировки наблюдаются раздвоенные размытые изображения нити. Если полоску убрать, эти изображения исчезают. Объясните наблюдаемое явление. (5 б.; 52%)

Вариант 2

1. На главной оптической оси OO' небольшого вогнутого зеркала с радиусом кривизны R помещен точечный источник света S на расстоянии $d = 3/4R$ от зеркала (рис. 2). На каком расстоянии x от вогнутого зеркала надо поставить плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси OO', чтобы лучи от источника, отраженные сначала одним, а потом другим зеркалом, снова сфокусировались в точку S? (5 б.; 59%)

2. Небольшое тело с массой m и положительным зарядом q, прикрепленное к гибкой нити длины l, может двигаться по окружности в вертикальной плоскости. Однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ перпендикулярно этой плоскости (рис. 3). При какой минимальной скорости тела в нижней точке оно совершит полный оборот? Ускорение силы тяжести g. (7 б.; 32%)

3. Высота вертикального водяного фонтана от уровня выходной трубы насоса равна H. Во сколько раз следует изменить мощность насоса, чтобы полная высота фонтана осталась прежней после подсоединения к выходной трубе насоса вертикальной трубки такого же диаметра с высотой $h < H$? Потерями энергии на трение можно пренебречь. (9 б.; 29%)

4. Оцените силу, необходимую для отрыва по всему периметру контакта хорошо поставленной медицинской банки. (5 б.; 57%)

5. Грузик на бечевке подвешен к подставке, которая может скользить по столу. Грузик раскачивают, дергая его за нитку все время в одну сторону. В одном случае маятник колеблется свободно, в другом движение бечевки ограничивается перекладиной. Объясните, почему при этом изменяется направление движения подставки с грузиком (в первом случае — к дергающему нить, во втором случае — от него). (5 б.; 21%)

Вариант 3

1. В реку, скорость течения которой везде равна u, из точки O на берегу бросают камень перпендикулярно берегу. Скорость поверхностных волн в воде равна v. Через какое время после падения камня волна придет в точку O, если камень упал на расстоянии L от берега? (3 б.; 78%)

2. На каком расстоянии x от прозрачного шара с радиусом R и показателем преломления n следует поместить точечный источник света S, чтобы его изображение S' оказалось с другой стороны на таком же расстоянии x от шара? Изображение создается узким пучком лучей, близких к оси, для которых $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$. (7 б.; 32%)

3. В теплоизолированном высоком цилиндрическом сосуде на расстоянии h от дна висит на нити поршень массы M (рис. 4). Под поршнем находится 1 моль идеального газа. Давление под поршнем в начальный момент равно внешнему давлению p, температура газа T. Какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы поршень поднялся до высоты $2h$ от дна? Трение отсутствует. Внутренняя энергия моля газа $U = cT$, газовая постоянная R. Ускорение силы тяжести g. (9 б.; 65%)

4. Оцените глубину ямы на поверхности воды под вертолетом, зависшим на небольшой высоте над озером. (5 б.; 65%)

5. Катушка из медного провода с разомкнутыми концами, подвешенная в зазоре между полюсами сильного постоянного магнита, свободно колеблется. Если концы провода замкнуть, колебания резко затормаживаются в зазоре и быстро прекращаются. Объясните наблюдаемое явление. (5 б.; 54%)

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} - \frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{2\sqrt[3]{x} + 1} -$$

$$-\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(2\sqrt[3]{x}-1)}{6\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}+3}+(0{,}2)^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt{x}}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(2^x-2^{2y})(4^x-2^{4y})=45\\ 2^x+4^y=5.\end{cases}$$

3. Среди равнобедренных трапеций с острым углом 45° и суммой длин высоты и большего основания, равной a, найдите трапецию наибольшей площади.

4. Найдите все корни уравнения

$$2\cos^2 2x-2\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)\cdot\sin\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=$$

$=1$, удовлетворяющие неравенству $\sqrt{2\pi^2+3\pi x-9x^2}>0$.

5. В основании четырехугольной пирамиды лежит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона a равна меньшей стороне основания, а острый угол равен α. Найдите объем пирамиды, если высота ее равна диагонали основания.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left[\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}}-x}-\right.$$

$$\left.-(x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})^{-1}\right]^{-1}\cdot(1+\sqrt[3]{x})\cdot x\cdot(0{,}1)^{\lg}$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x)=\left(-1-\log_5(\sqrt{x}-1)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2}\log_5 x-\log_5(x-\sqrt{x})\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Число -10 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наибольшей.

4. Найдите все корни уравнения

$$1-2\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin 2x-\cos 2x=0,$$

лежащие на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right]$.

5. Основание $[AD]$ трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания $[BC]$ и вдвое длиннее боковой стороны $[AB]$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$, если $\widehat{BAC}=\alpha$ и площадь треугольника ABC равна S.

Задачи устного экзамена

1. Какое число больше: $(0{,}9)^{-1{,}2}$ или $(1{,}2)^{-0{,}9}$?

2. Сколько цифр содержит число 2^{100} (считайте, что $\lg 2=0{,}301$)?

3. Найдите период функции $y=5\sin(\pi x-1)$.

4. Постройте график функции

$$y=\sin^2\sqrt{\operatorname{tg}x}+\cos^2\sqrt{\operatorname{tg}x}.$$

5. Решите неравенство

$$\sqrt{2-x}>x.$$

6. Найдите производную функции $y=2^{\cos\frac{1}{x}}$.

7. Найдите сумму $\sum\limits_{n=1}^{100}\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\right]$.

8. С помощью одной линейки из точки, лежащей вне окружности, опустите перпендикуляр на ее диаметр.

9. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($(BC)\parallel(AD)$, $|AB|=|CD|$) острый угол равен $\frac{\pi}{3}$. Выразите вектор $\overrightarrow{BC}$ через $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

10. В трапеции длина нижнего основания равна a, длина верхнего основания равна b. Найдите длину отрезка, проведенного через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям.

Физика

В зависимости от выбранного факультета абитуриенты сдавали экзамен по физике либо письменно, либо устно.

Вариант письменного экзамена

1. Понятие о потенциале. Разность потенциалов. Связь разности потенциалов с напряженностью для однородного электрического поля.

2. Почему при выпуске газа из баллона вентиль покрывается росой или даже инеем?

3. Тело массой $m=2$ кг двигалось по окружности, причем в некоторой точке A оно имело скорость $v_A=4$ м/с, а, пройдя четверть окружности, в точке B—$v_B=3$ м/с. Определите модуль ΔP вектора изменения импульса тела.

4. При облучении поверхности катода фотоэлемента монохроматическим светом частоты ν максимальная скорость вылетающих фотоэлектронов равна v_0. Определите красную границу фотоэффекта $\lambda_м$ для материала катода.

5. К источнику постоянного тока параллельно подключены конденсатор емкостью $C=20$ мкФ и катушка с индуктивностью $L=0{,}02$ Гн. При этом напряжение на конденсаторе $U_1=100$ В, а ток через катушку $I_1=2$ А. Затем источник отключают. Какой заряд Q будет на конденсаторе в момент, когда ток в катушке равен $I_2=1$ А? Потерями энергии на нагревание пренебречь.

Задачи устного экзамена

1. Шарик массой $m=20$ г падает на стальную плиту со скоростью $v_1=5$ м/с и отскакивает от нее в прямо противоположном направлении со скоростью $v_2=4$ м/с. Определите изменение импульса $\Delta\vec{P}$ шарика и модуль F средней силы, действующей на шарик во время удара, если соударение длилось $\tau=10^{-2}$ с.

2. Какое количество теплоты Q выделится в проводнике при разряде через него плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $\Delta\varphi=2$ кВ? Площадь пластин конденсатора $S=0{,}2$ м^2, расстояние между пластинами $d=2\cdot10^{-3}$ м, диэлектрическая проницаемость диэлектрика, находящегося между пластинами конденсатора, $\varepsilon=10$, электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

3. Проволочное кольцо радиуса $r=0{,}3$ м и сопротивлением $R=2$ Ом расположено в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости кольца. Определите величину заряда Q, который протечет по кольцу, если оно повернется вокруг одного из своих диаметров на угол $\varphi=\pi$.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Упростите при $x>1$ выражение

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{1-2x+x^2}}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\left|\frac{x-1}{x+2}\right|}>\frac{4}{9}.$$

3. Найдите промежутки монотонности функции $y=\frac{3}{2}\ln^2 x-\ln^3 x$.

4. На основаниях AB и CD вне трапеции построены квадраты. Докажите, что прямая, соединяющая их центры, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

5. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Упростите выражение

$$\left[\frac{xy^{\frac{3}{2}}-yx^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}:\frac{(xy)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-3(xy)^{\frac{1}{2}}}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy^{\frac{1}{2}}+yx^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}$$

2. Решите уравнение

$$(0.4)^{\lg^2 x+1}=(6.25)^{2-\lg x^3}.$$

3. Решите уравнение

$$2\cos 2x+\cos^2\frac{x}{2}-10\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\frac{7}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\cos x.$$

4. Найдите точки максимума и минимума функции $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60°. Докажите, что один из двугранных углов этой пирамиды вдвое меньше другого.

Задачи устного экзамена

1. Зная, что $\lg 64=k$, найдите $\lg\sqrt[3]{25}$.

2. Определите знак числа $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Решите уравнение

а) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3\frac{x-2}{x-3}}=\frac{\log_3 3}{x-2}$;

б) $\log_2\log_3 x+1=\log_2\log_3(4x-3)$;

в) $1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{7}{16}$.

4. Решите неравенство

а) $(0{,}3)^{\log_3(\log_3(x^2-19))-2}>1$;

б) $\left|\frac{2-3|x|}{1+|x|}\right|<1$;

в) $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5}>50$.

5. Найдите область определения функции

а) $\frac{\arccos(4-x)}{\sqrt{x^2-x-12}}$;

б) $\log_{7-2x}(x^2+11x-26)$;

в) $(\sin x+\cos x)^2-\frac{1-\cos 4x}{2\sin 2x}-\cos x$.

6. Найдите множество значений функции

а) $(\sin x+\cos x)^2-\frac{1-\cos 4x}{2\sin 2x}-\cos x$;

б) $1-6\cos^2 x+6\sin^2 x$.

7. Постройте график функции

а) $\frac{2x(2x+3)}{\sqrt{4x^2+12x+9}}-4$;

б) $\cos^2 x\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sin^2 x}{2}$.

8. В ромб вписан круг. Каждая сторона ромба точкой касания делится на отрезки, длины которых a и b. Найдите площадь круга.

9. Через точку внутри треугольника проведены прямые параллельно сторонам. Площади треугольников, образовавшихся при этом, равны S_1, S_2 и S_3. Найдите площадь данного треугольника.

10. Дано круговое кольцо, площадь которого Q. Определите длину хорды большего круга, касательной к меньшему.

11. Из точки O, не принадлежащей прямой b, проведены к b перпендикуляр (OB) и наклонная (OM) $(M\in b,\ B\in b)$. Докажите, что $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}$ не зависит от положения точки M на прямой b.

12. Определите площадь полной поверхности конуса, если угол между образующей и плоскостью основания равен α, а площадь осевого сечения равна Q.

13. Высота правильной четырехугольной пирамиды 6 см, плоский угол при вершине пирамиды 60°. Найдите объем пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Тело за время $t=6$ с переместилось на $s=270$ см. Первые три секунды тело двигалось равнопеременно, а последние три секунды — равномерно. Определите начальную скорость тела, если его перемещение за пятую секунду равно $s'=40$ см.

2. К аккумулятору с внутренним сопротивлением $r=2$ Ом подключили проволоку сопротивлением $R=2$ Ом, а затем — параллельно еще такую же проволоку. Во сколько раз изменится количество теплоты, выделенное первой проволокой после подключения второй?

3. Определите оптическую силу тонкой рассеивающей линзы, если известно, что узкий предмет, помещенный перед ней на расстоянии $d=40$ см, дает изображение в 4 раза уменьшенное. Изменится ли величина изображения, если вплотную за линзой на пути лучей установить плоское зеркало?

Математический факультет

1. Автомобиль и велосипедист равномерно движутся навстречу друг другу со скоростями, соответственно, $v_1=10$ м/с и $v_2=5$ м/с. Расстояние между ними в начальный момент времени было $l=300$ м. Графически и аналитически определите место и время их встречи. Изменится ли время и место встречи, если их скорость будет в два раза большей?

2. Постройте график зависимости плотности водорода от температуры при изобарном нагревании. Газ находится под давлением $p=760$ мм рт. ст.

3. Постройте график зависимости напряжения на клеммах источника тока от внешнего сопротивления, если ЭДС источника $\mathcal{E}=4$ В, а его внутреннее сопротивление $r=2$ Ом.

4. Индуктивность колебательного контура равна 40 мГн. Постройте график зависимости частоты колебаний тока от электроемкости для данного контура.

Индустриально-педагогический факультет

1. Треть пути тело двигалось со скоростью $v=36$ км/ч. Остальной путь $l=300$ м тело прошло за $t=60$ с. Определите среднюю скорость движения тела.

2. Три пятилитровых сосуда заполнены водой с температурой, соответственно, 20, 80 и 100°C. Имеется также пустой десятилитровый сосуд. Как, используя имеющуюся воду, получить 10 л воды с температурой 70°C? Теплоемкостью сосудов и потерями тепла при переливании пренебречь.

3. Имеются тонкие собирающая и рассеивающая линзы с известными фокусными расстояниями и точечный источник света. Предложите один из вариантов расположения источника и линз для получения параллельного пучка света. Постройте соответствующий ход лучей

Уравнение газового состояния

1. Переход от роста давления к его падению происходит в тех точках графика (см. рис. 3 в статье), где изобара является касательной к графику.

2. Давление увеличилось в 4/3 раза.

3. $p=7mg/S=3{,}5\cdot10^5$ Па.

4. $z=pvSN_А/(RT)\approx6\cdot10^{19}$ $с^{-1}$, где $N_А=6\times\times10^{23}$ $моль^{-1}$ — число Авогадро, $R=8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная.

Указание. Поскольку средняя скорость теплового движения молекул гораздо меньше скорости спутника, молекулы можно считать неподвижными.

Многофигурная стереометрическая задача

1. 5 см.

2. $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

3. $|AA_1|=20$ см.

4. $\frac{1}{4}(S+\sqrt{2}\ \sigma k\sqrt{1-l}\ )$.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $\left\{7,\ \frac{1}{2}\right\}$.

2. $x_1=\operatorname{arctg}3+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi l$ $(k, l\in Z)$;

$\operatorname{arctg}3$, $\operatorname{arctg}3+\pi$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi$.

3. $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. Указание. Если V — центр окружности, вписанной в $\triangle CBD$, то $\widehat{BAV}=\widehat{BDV}$. Отсюда следует, что $\triangle ABD$ — правильный.

4. $]-\infty;\ -4[\ \cup\{5\}$.

5. $\frac{\sqrt{6}}{8}$. Указание. Докажите, что если из произвольной точки $H\in(AC)$ провести в плоскостях ABC и ACD перпендикуляры к (AC), то H тогда и только тогда будет точкой пересечения с (AC) плоскости, проходящей через центр O искомой сферы перпендикулярно (AC), когда $|HR|=|HQ|$ (R и Q — точки пересечения проведенных перпендикуляров с прямыми PN и AM соответственно). Выведите отсюда, что такая точка H и, следовательно, искомая сфера единственны (при доказательстве используется условие $|AP|=3|BP|$), причем $R=N$, $Q=M$. Искомый радиус легко находится из четырехугольника $OMHN$.

Вариант 2

1. $[1;5]$, $[0;2]$.

2. $]-\infty;\ -\sqrt{6}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{6};\ +\infty[$.

3. 1.

4. $x_1=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}k,\ x_2=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}l\ (k,\ l\in \mathbf{Z})$.

5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Указание. Пусть O — основание высоты пирамиды; тогда $O\in[AB]$ и $|AO|=|OB|$. В системе координат с началом O и осями OB, OC, OS найдите координаты точек A, B, M, N; затем найдите уравнение плоскости $\alpha=(BMN)$ как плоскости, проходящей через три известные точки; наконец, примените формулу из § 62 «Геометрии 9—10». Задачу можно решить и чисто геометрически: пусть $K=\alpha\cap(AC)$, L — основание перпендикуляра, опущенного из A на α; докажите, что $(KB)\perp(SAB)$; выведите отсюда, что $L\in(BM)$.

Физика

Вариант 1

1. См. решение задачи Ф800, которое будет опубликовано позже.

2. См. решение задачи Ф802, которое будет опубликовано позже.

3. После того как часть льда растаяла, толщина слоя оставшегося пористого льда равна $(1-\beta)h$. Слой воды, проникшей в поры льда, имеет толщину $h_1=(1-\beta)h\rho_{\text{л}}/\rho_{\text{в}}$ (рис. 1) и массу $m_{\text{в}}=(1-\alpha)\rho_{\text{в}}Sh_1=(1-\alpha)(1-\beta)\rho_{\text{л}}Sh$. Масса всей воды, образовавшейся в результате таяния, равна $m'_{\text{в}}=\alpha\beta\rho_{\text{л}}Sh$. Если $m'_{\text{в}}-m_{\text{в}}>0$ (что реализуется по условиям задачи, поскольку $\alpha+\beta=1{,}3>1$), то лед всплывет. Высота уровня воды под слоем льда равна $h_2=(m'_{\text{в}}-m_{\text{в}})/(\rho_{\text{в}}S)=(\alpha+\beta-1)h\rho_{\text{л}}/\rho_{\text{в}}$, а искомая полная высота уровня воды в стакане равна

$$H=h_1+h_2=\alpha h\rho_{\text{л}}/\rho_{\text{в}}=0{,}54h.$$

Этот результат можно получить проще. Действительно, если лед плавает, то от его таяния уровень воды в стакане не меняется: лед, плавая, вытесняет столько воды, какова масса его самого. Значит, при таянии образуется столько воды, сколько вытеснилось. Поэтому растопим мысленно весь лед и найдем искомую высоту уровня воды из равенства $\alpha h\rho_{\text{л}}S=H\rho_{\text{в}}S$.

4. Грузовик массы m, имея в начале торможения скорость v, обладает кинетической энергией $mv^2/2$. Вся эта энергия переходит в тепло за время торможения $t\sim 2l/v$, где l — длина пути торможения. Таким образом, средняя мощность $P\sim mv^2/2:2l/v\sim mv^3/(4l)$. При значениях $v\sim 60$ км/ч ~ 16 м/с, $m\sim 10^4$ кг и $l\sim 10$ м получаем $P\sim 10^6$ Вт, то есть порядка мегаватта.

5. Как видно из рисунка 2, полоска разбивает световой поток на два, формирующих два размытых изображения каждой точки предмета (штриховой линией указано положение экрана, при котором эти изображения сливаются в одно резкое). Правильное объяснение эффекта получается и в том случае, если незакрытые части объектива рассматривать как две разнесенные линзы.

Вариант 2

1. $x=\frac{d^2}{2d-R}=\frac{9}{8}R\ \left(\frac{R}{2}<d<R\right)$.

2. $v_{\min}=\left(5gl+\frac{q^2B^2l^2}{2m^2}\left(1-\sqrt{1+\frac{4m^2g}{q^2B^2l}}\right)\right)^{1/2}$.

3. Масса воды, поступающая из насоса в единицу времени при скорости v через сечение S, равна ρvS. Мощность насоса без трубки равна

$$N_0=\rho vS\cdot\frac{v^2}{2}.$$

При наличии трубки высоты h вода, кроме кинетической энергии, обладает еще и потенциальной энергией, связанной с подъемом жидкости на высоту h, поэтому мощность

$$N=\rho uS\cdot\frac{u^2}{2}+\rho uS\cdot gh,$$

где u — скорость воды. Из кинематики имеем

$$v^2=2gH,\ u^2=2g(H-h).$$

Тогда окончательно получаем

$$\frac{N}{N_0}=\frac{u}{v}\left(\left(\frac{u}{v}\right)^2+\frac{2gh}{v^2}\right)=\frac{u}{v}=\sqrt{1-\frac{h}{H}}.$$

Можно решить задачу проще, заметив, что сила напора насоса в обоих случаях одна и та же (так как одинаковы высоты фонтанов). Тогда, используя формулы $N=Fu$ и $N_0=Fv$, получаем $N/N_0=u/v=\sqrt{1-h/H}$.

4. После остывания воздуха от температуры T до температуры среды T_0 давление в банке падает от p_0 до p, создавая силу присасывания $F\sim(p_0-p)S$. Масса и объем воздуха внутри не изменяются, так что $p_0/T=p/T_0$. Отсюда

$$F\sim p_0\frac{T-T_0}{T}S\sim p_0\frac{\Delta T}{T}S.$$

Выбирая $\Delta T\sim 100$ К, $T\sim 400$ К, $S\sim 10$ см$^2\sim 10^{-3}$ м^2 и $p_0\sim 10^5$ Па, получаем

$$F\sim p_0\frac{\Delta T}{T}S\sim 25\text{Н}.$$

5. В первом случае, без перекладины (рис. 3, *а*), силу трения преодолевают, натягивая нить по горизонтали на себя. При отпускании нити горизонтальная сила трения покоя держит подставку. Во втором случае, как и в первом, подставка неподвижна до взаимодействия с перекладиной *П* (рис. 3, *б*).

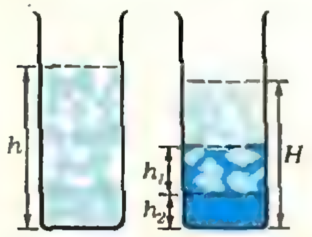


Рис. 1.

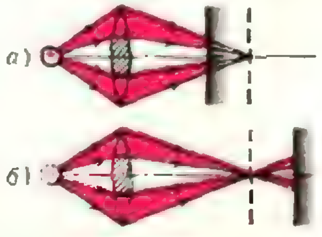


Рис. 2.

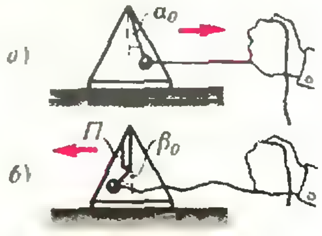


Рис. 3.

А после этого взаимодействия импульс шарика за укороченное (из-за уменьшения длины маятника) время передается подставке, и сила трения преодолевается большей горизонтальной силой. Можно подойти к объяснению и иначе. Горизонтальная проекция силы натяжения нити легко выражается через углы отклонения нити от вертикали: $T_г = mg \sin \alpha \times \times (3 \cos \alpha - \cos \alpha_0)$. Чем больше максимальный угол отклонения α_0, тем больше горизонтальная сила. После взаимодействия нити с перекладиной максимальный угол отклонения β_0 увеличивается, увеличивается и горизонтальная сила, преодолевающая силу трения покоя. Это и приводит к смещению подставки в направлении от руки к перекладине.

Вариант 3

1. См. решение задачи Ф798, которое будет опубликовано позже.

2. $x = R/(n-1)$.

3. Запишем уравнение состояния газа до и после подвода тепла:

$$phS = RT \quad и \quad (p + Mg/S)2hS = RT'$$

и закон сохранения энергии:

$$Q = \Delta U + A = c(T' - T) + (Mg + pS)h.$$

Отсюда получаем

$$Q = (c + R)T + Mgh(1 + 2c/R).$$

4. Из условия равновесия вертолета следует, что он выталкивает столько воды, какова его масса (воздух при этом играет роль передающего посредника и из рассмотрения может быть исключен). Выбрав массу вертолета $m \sim 10^4$ кг и длину лопастей $l \sim 5$ м, получаем глубину ямы $h \sim \frac{m}{\varrho_{вод} \pi l^2} \sim 0{,}1$ м.

5. При разомкнутых концах проводов взаимодействие катушки с магнитным полем практически отсутствует, и колебания почти не затухают. Если концы замкнуть, в витках катушки, при ее попадании в магнитное поле, наводится индукционный ток. По правилу Ленца ток имеет такое направление, чтобы воспрепятствовать изменению магнитного потока через катушку. В результате на переднюю часть витка, вошедшего в сильное магнитное поле, действует сила, направленная против движения. На другую часть витка, находящегося в периферийной области поля, где оно значительно слабее, действует сила противоположного направления. Но поскольку первая сила по модулю существенно больше второй, результирующая сила тормозит движение. При выходе катушки из поля возникает результирующая сила, препятствующая этому выходу. Индукционные токи приводят к тепловым потерям энергии в проводе катушки, в результате колебания быстро затухают.

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. При $x > 0$ $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$.

2. $\{(2; 0), (0; 1)\}$.

3. Большее основание $\frac{3}{4}a$.

4. $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$.

5. $\frac{4}{3} a^3 \sin \alpha \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2}$.

Вариант 2

1. 1. Замечание. Область определения упрощаемого выражения $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

2. $]1; 1\frac{11}{25}] \cup [36; +\infty[$.

3. $-10 = (-5) + (-5)$.

4. $-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi$.

5. $-4S \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Указание. $\vec{AD} \cdot \vec{DC} = \vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AD})$.

Задачи устного экзамена

1. $(0{,}9)^{-1{,}2}$. **2.** 31. **3.** 2. **4.** См. рис. 4. **5.** $]-\infty; 1[$.

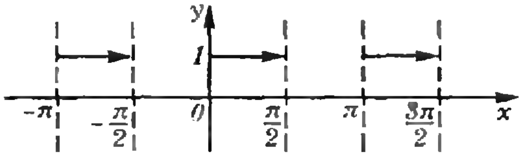


Рис. 4.

6. $\ln 2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot 2^{\cos \frac{1}{x}}$. **7.** $\frac{100}{101}$. Указание. $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. **8.** Решение. Данную точку A соедините с концами C и D данного диаметра. Точку C соедините с точкой F пересечения (AD) с данной окружностью, а точку D соедините с точкой E пересечения (AC) с данной окружностью. Прямая, проходящая через A и $(CF) \cap (DE)$, — искомая. **9.** $\frac{|\vec{b}| - |\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$. Указание. $|BC| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$. **10.** $\frac{2ab}{a+b}$. Решение. Из подобия треугольников AEO и ABC (обозначения см. на рис. 5) $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|EO|}{b}$, из подобия треугольников BEO и BAD $\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|EO|}{a}$; отсюда $\frac{|EO|}{a} + \frac{|EO|}{b} = 1$, $|EO| = \frac{ab}{a+b}$. Аналогично находим $|OF|$.

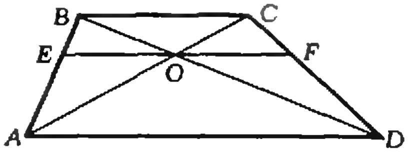


Рис. 5.

Физика

Вариант письменного экзамена

2. При быстром истечении газа из баллона теплообменом с окружающей средой можно

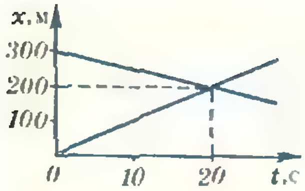


Рис. 6

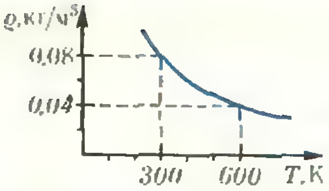


Рис. 7.

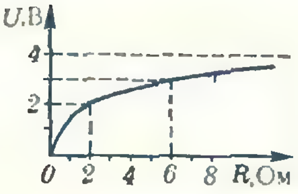


Рис. 8.

пренебречь. Газ, расширяясь, совершает положительную работу, поэтому, согласно первому закону термодинамики, его внутренняя энергия уменьшается, и газ охлаждается, что приводит к охлаждению вентиля. Когда температура вентиля станет равной точке росы, начнется конденсация водяных паров, содержащихся в воздухе, то есть выпадает роса. При дальнейшем уменьшении температуры возможно и образование инея.

3. $\Delta P=m\sqrt{v_A^2+v_B^2}=10$ кг · м/с.

4. $\lambda_м=\frac{hc}{h\nu-mv_0^2/2}$, где h — постоянная Планка, c — скорость света, m — масса электрона.

5. $Q=C\sqrt{U_1^2+L(I_1^2-I_2^2)/C}\approx 2{,}3\cdot 10^{-3}$ Кл.

Задачи устного экзамена

1. $\Delta\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$; $\Delta P=m(v_1+v_2)=0{,}18$ кг · м/с; $F=mg+\Delta P/\tau=18{,}2$ Н.

2. $Q=\varepsilon_0\varepsilon SU^2/(2d)\approx 1{,}8\cdot 10^{-2}$ Дж.

3. $Q=2\pi Br^2/R\approx 2{,}8\cdot 10^{-2}$ Кл.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $1-x$.
2. $]-\infty;\ -5]\ \cup\ [-1;\ +\infty[$.
3. $]0;\ 1]$ и $[e;\ +\infty[$ — промежутки убывания, $[1;\ e]$ — промежуток возрастания.
4. Указание. Соедините точку O пересечения диагоналей трапеции с центрами O_1, O_2 квадратов и докажите, что треугольники OBO_1 (O_1 — центр квадрата, построенного на AB) и ODO_2 подобны.
5. $\frac{4}{3}R^3\frac{\operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi}{\sin\alpha}$. Указание. Вершина S данной пирамиды проектируется в точку O пересечения диагоналей основания $ABCD$. Центр K вписанного шара лежит на $[SO]$. Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из O на (CD); тогда $[FK)$ — биссектриса $\angle SFO$.

Вариант 2

1. -1.
2. $\{10,\ 10^5\}$.
3. $x=(-1)\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in Z)$.
4. $x=-1$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума.

Задачи устного экзамена

1. $\frac{6-k}{9}$. **2.** +. **3.** а) $\{6\}$; б) $\{3\}$; в) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\ (k\in Z)$ **4.** а) $]-10;\ -2\sqrt{5}[\ \cup\ ]2\sqrt{5};\ 10[$; б) $]-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{4}[\ \cup\ ]\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}[$; в) $]11;\ +\infty[$. **5.** а) $[4;\ 5]$; б) $]-\infty;\ -13[\ \cup\ ]2;\ 3[\ \cup\ ]3;\ 3\frac{1}{2}[$; в) $x\neq\frac{\pi}{2}k\ (k\in Z)$. **6.** а) $]0;\ 1[\ \cup\ ]1;\ 2[$; б) $[-5;\ 7]$. **8.** πab. **9.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. **10.** $2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$. **12.** $\pi Q\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **13.** 144 см³.

Физика

Физический факультет

1. $v_0=(4s-18s')/t=0{,}6$ м/с.
2. Количество теплоты уменьшится в $(2r+R)^2/(r+R)^2=2{,}25$ раза.
3. $D=-3/d=-7{,}5$ дптр; изображение уменьшится.

Математический факультет

1. $t=l/(v_1+v_2)=20$ с (см. также рис. 6); $x=v_1t=200$ м; во втором случае время до встречи уменьшится в два раза, и место встречи не изменится.
2. См. рис. 7.
3. См. рис. 8.
4. См. рис. 9.

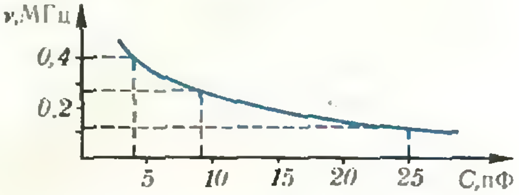


Рис. 9

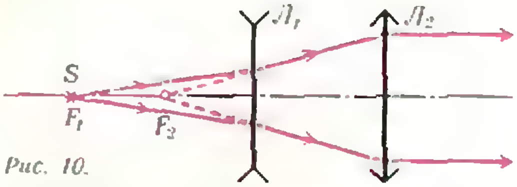


Рис. 10.

Индустриально-педагогический факультет

1. $v_{ср}=\frac{3l}{2l+l/v}=6$ м/с.
2. Сначала в пустой сосуд выливают воду из первого и третьего сосудов. Затем половину

этой воды переливают в один из освободившихся сосудов, а ее место занимают водой из второго сосуда.

3. Источник света надо поместить в фокусе рассеивающей линзы, а собирающую линзу надо расположить так, чтобы ее фокус находился посередине между источником и рассеивающей линзой (рис. 10).

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1982, № 11)

Задание 21 (К. Фабель, 1948 г.). У белых ладья b1 нечет, ладья g1 тоже нечет, король чет. Кони на полях разного цвета — чет. Пешки, слоны и ферзь не двигались — чет. Итого: у белых чет. Легко проверить, что у черных нечет. Значит, ход их, и матуют они — **К:с2**×.

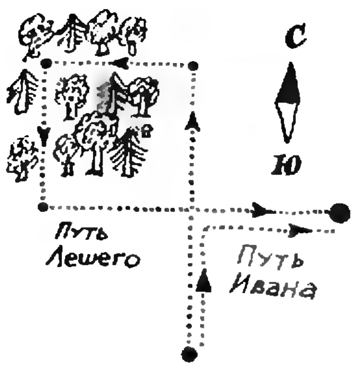
Задание 22. Произведя подсчет, легко убедиться, что черные сделали четное число ходов, а белые нечетное, то есть на ход больше. Можно подумать, что сейчас ход черных, но они не в состоянии взять ни одну фигуру противника.

Значит, за свою фигуру держатся белые, которые уже сделали ход, но еще не успели отпустить руку. Какой же это ход? Король, ферзь, ладьи, слоны и пешки не могли пойти, а ход Кf6—g8 не мог быть последним. Следовательно, ход был сделан **белым конем**, только что поставленным на b8. Итак, белые сыграли **Кс6—b8**, и еще не успели отпустить руку от этого коня!

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 1)

1. Поскольку Леший шел по лесу со скоростью вдвое меньшей, чем по дороге, то он за двое суток (вторые и третьи) прошел столько же, сколько за первые, то есть треть пути, следовательно, 100 верст, пройденные за последние сутки, также составили треть пути. Итак, Леший прошел 300 верст. Его маршрут изображен на рисунке. Иван-царевич рассуждал так: если пройти полпути на север и повернуть на восток, то еще через полсуток он окажется в Кащеевом царстве, пройдя половину пути на север и половину пути на восток, то есть 100 верст.



2. Задумано число 163.

3.
$$\begin{array}{r} 271\\ \times205\\ \hline 1355\\ 542\\ \hline 55555 \end{array}$$

4. На одной и той же высоте механическая энергия у падающего шарика будет меньше, чем у поднимающегося, так как часть ее уйдет на преодоление трения о воздух. В то же время потенциальная энергия у них будет одинакова. Значит, кинетическая энергия у падающего шарика меньше, отсюда меньше и его скорость на этой высоте. Таким образом, шарик будет падать дольше, чем подниматься.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
М. Б. Дубак, С. В. Красовский, Э. Е. Назаров, А. М. Пономарева, М. П. Сидоров, Э. А. Смирнов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина;
фото: А. Маршани (фотохроника ТАСС), В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 231-82-42

Сдано в набор 15.12.82.
Подписано в печать 14.1.83 Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,8 Т-02913
Тираж 170675
Цена 40 коп. Заказ 3131

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

КАСПАРОВ — ПОБЕДИТЕЛЬ МОСКОВСКОГО МЕЖЗОНАЛЬНОГО ТУРНИРА

Два года назад на нашей страничке вы уже встречались с Гарри Каспаровым («Квант», 1981, № 5). Самый молодой гроссмейстер на планете — сейчас ему всего 19 лет — стал тогда чемпионом мира по шахматам среди юношей. А теперь он уже один из претендентов на «взрослую» корону. Осенью 1982 года, показав блестящий результат — 10 очков в тринадцати партиях (без единого поражения), он стал победителем Московского межзонального турнира. Посмотрите две его эффектные миниатюры, сыгранные в этом соревновании.

И. Ван дер Виль — Г. Каспаров. Дебют ферзевой пешки

1.d4 Kf6 2.Cg5 Ke4 3.Cf4. Голландский шахматист отказывается от обычного 2.c4, опасаясь староиндийской защиты — любимого дебюта Каспарова. **3...c5 4.d5 Фb6 5.Cc1.** Стоило ли делать два хода подряд слоном, чтобы тут же возвращаться им на место? **5...e6 6.f3 Фa5+ 7.c3 Kf6 8.e4 d6 9.Ka3 ed 10.ed Ce7 11.Kc4 Фd8 12.Ke3 0—0 13.Ke2 Лe8 14.g4.**

Как известно, рекордная шахматная партия продолжается всего два хода — 1.f3 e5 2.g4 Фh4× (такой мат называется «дурацким»). Здесь белые придерживаются примерно той же стратегии — они уже пошли f3, а теперь играют g4, оголяя диагональ e1 — h4. Правильно было 13.Cd3, 14.Ke2, и подобраться к белому королю не так просто. **14...Kfd7!** Освобождая упомянутую диагональ. Правда, до мата в этой партии дело не дойдет. **15.Kg3 Cg5 16.Kpf2 Ke5 17.Cb5 Cd7 18.C:d7 Kb:d7 19.Kef5 c4! 20.Kh5.** Проигрывает фигуру, но и после лучшего 20.Kpg2 C:c1 21.Л:c1 Kc5 положение белых незавидно. **20...Kd3+ 21.Kpg2 C:c1 22.Л:c1 g6.** Белые сдались, на 22.Kh6+ Kpf8 23. Kg3 решает 23...Фg5.

Если в предыдущей партии к белым легко предъявить претензии, то победой над румынским гроссмейстером Каспаров обязан самому себе.

Г. Каспаров — Ф. Георгиу
Новоиндийская защита

1.d4 Kf6 2.c4 e6 3.Kf3 b6 4.a3 Cb7 5.Kc3 d5 6.cd K:d5 7.Фc2 c5 8.e4 K:c3 9.bc Ce7 10.Cb5+ Cc6 11.Cd3 Kd7 12.0—0 h6. Наверное, лучше было отступить слоном обратно на b7. **13.Лd1 Фc7 14.d5!** Излюбленный прием Каспарова, при помощи которого он одержал немало красивых побед — белые жертвуют центральные пешки, но зато вскрывают линии для атаки. **14...ed 15.ed C:d5 16.Cb5 a6 17.Cf4!** Дальше все идет как по маслу. **17...Ф:f4 18.C:d7+ Kp:d7 19.Л:d5+ Kpc7 20.Лe1! Cd6 21.Лf5 Фc4 22.Лe4 Фb5 23.Л:f7+ Kpb8 24.Лe6 Лd8 25.c4 Фc6 26.Ke5 Фc8 27.Фb1.** Черные сдались.

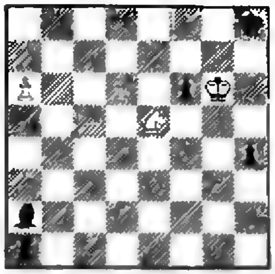
Вторую путевку в матчи претендентов завоевал советский гроссмейстер А. Белявский. Следующая партия с кубинским гроссмейстером была важной во многих отношениях. Гарсиа в шести первых турах набрал 5,5 очков! В последующих встречах с тремя советскими участниками он сделал три ничьи. Уверенное шествие кубинца удалось остановить А. Белявскому.

Г. Гарсиа — А. Белявский
Ферзевый гамбит

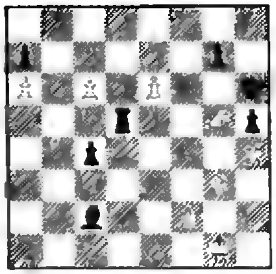
1.d4 d5 2.c4 e6 3.Kc3 Ce7 4.Kf3 Kf6 5.Cg5 h6 6.Ch4 0—0 7.e3 b6 8.Лc1 Cb7 9.C:f6 C:f6 10.cd ed 11.Ce2 Фe7 12.0—0 Лd8 13.Фb3 c5 14.dc bc 15.Лfd1 d4! Этот ход черных застал противника врасплох. Гарсиа долго думал, но ничего хорошего не придумал. **16.Ka4 Ka6 17.C:a6 C:a6 18.K:c5.** Разумеется, потеря пешки была предусмотрена Белявским заранее. Инициатива, которую он получает взамен, заставляет белых вернуть материал обратно. **18...Ce2 19.Л:d4.** Приходится отдавать качество, на 19.Лd2 сильно 19...Лab8, затем C:f3 и de, 19...Лdc8! Ладья никуда не денется, прежде чем взять ее, черные крепко связывают коня. **20.Фd5.** Можно сохранить качество, но после 20.Лd5 Лab8 ни одна из белых фигур не чувствует себя уютно. **20...C:f3 21.Ф:f3 C:d4 22.ed.** В принципе у белых достаточный эквивалент за качество — две пешки. Однако искусно маневрируя, Белявскому вскоре удается забрать одну из них. **22...Лab8 23.b3 Лd8 24.Фe3 Фd6 25.Лc4 Лe8 26.Фd2 Фf4! 27.Фd1 Лbd8 28.g3 Фf5 29.Kpg2 Лd6.** Возможно, белые рассчитывали сцементировать позицию посредством 30.Фf3, но теперь на это следует 30...Ф:f3+ 31.Kp:f3 Лf6+ 32. Kpg2 Лc2. **30.a4 Лf6 31.Лc2 Фd5+ 32.Kpg1 Лb6 33.Лe2 Лd8 34. Фe1 Ф:d4 35.Лe8+ Kph7 36.Л:d8 Ф:d8 37.Фe4+ Kpg8 38.b4 Лd6 39.b5 Лd1+ 40. Kpg2 Фd5.** Белые сдались.

Напомним, что турнир в Москве был последним межзональным, в двух других успех сопутствовал В. Смыслову, З. Рибли, Л. Портишу и Э. Торре. Если добавить финалистов предыдущего цикла В. Корчного и Р. Хюбнера, то теперь нам полностью известна восьмерка претендентов на шахматную корону. Осенью этого года мы узнаем имя нового соперника А. Карпова.

Конкурсные задания

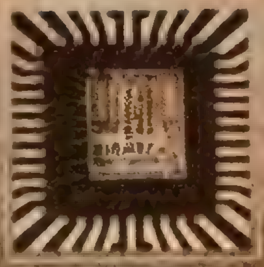


3. Белые начинают и выигрывают.



4. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 апреля 1983 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4»).

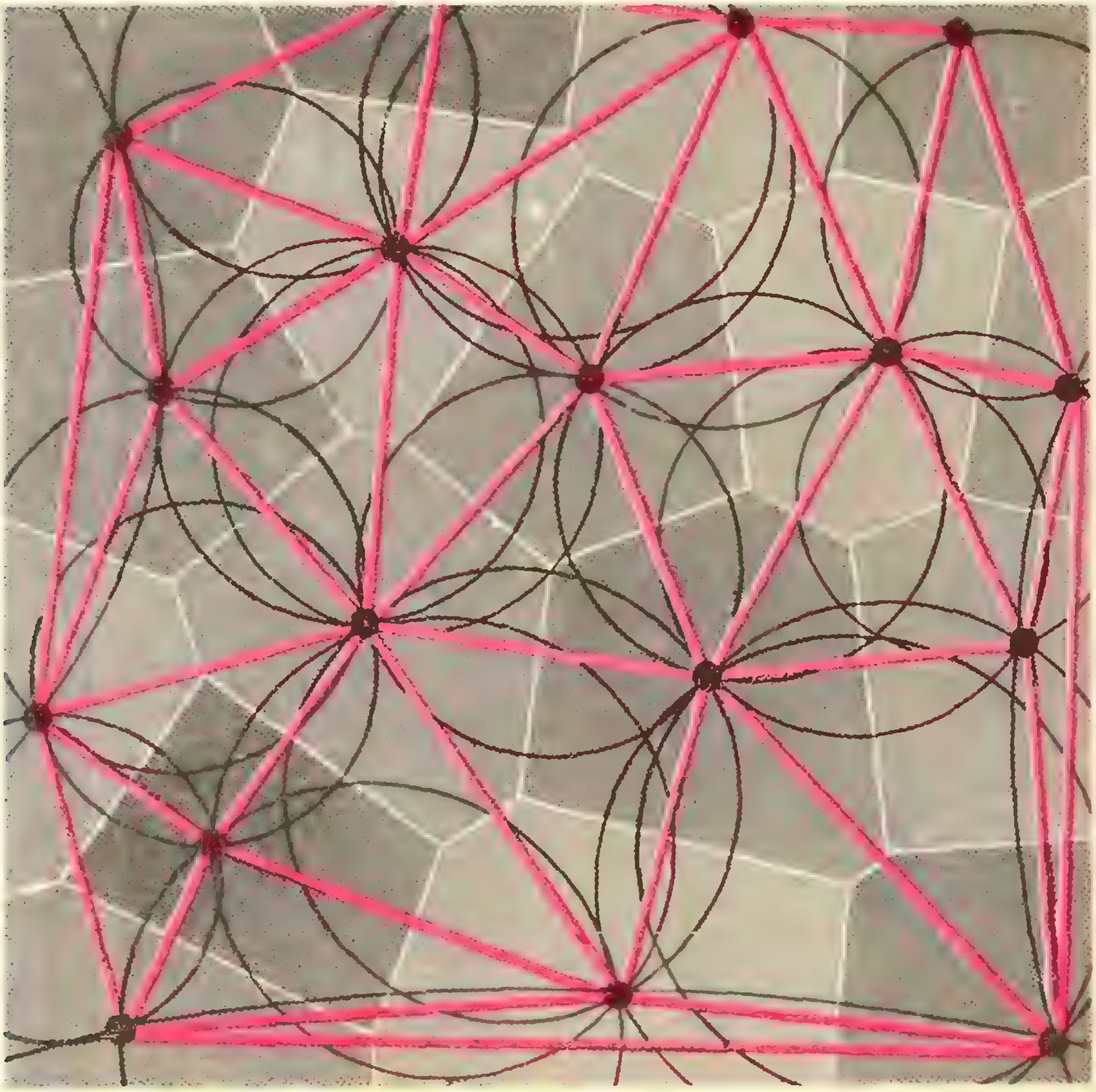


Один микропроцессор размером с канцелярскую кнопку по запасу вмещаемой информации заменяет множество книг. Слева — фотография микропроцессора, внизу — фрагмент картины голландского художника Я. Хеема «Стол, заваленный книгами» (1628 г.).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Красные треугольники с вершинами в черных точках, показанные на этом рисунке, обладают следующим свойством: ни одна из описанных около них окружностей не содержит внутри себя ни одной черной точки. Существование таких специальных триангуляций обсуждается в решении задачи М770 в этом номере.



НОМЕР
3

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

КВАНТ

3 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука“ Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

В НОМЕРЕ: | **IN THIS ISSUE:**

2	*И. К. Кикоин.* Физика и научно-технический прогресс	*I. K. Kikoin.* Physics and technological progress
6	Рудольф Мёссбауэр отвечает на вопросы редакции журнала «Квант»	Rudolph Mössbauer answers Kvant's questions
7	*Ю. А. Самарский.* Эффект Мёссбауэра (или резонансное ядерное поглощение γ-квантов в кристаллах)	*Ju. A. Samarski.* The Mössbauer effect (or the resonance nuclear absorbtion of γ-quantums in crystals)
16	*В. Г. Болтянский.* Метод итераций	*V. G. Boltianski.* The iteration method
	Новости науки	**Science news**
15	*В. А. Бронштэн.* Загадочный Плутон	*V. A. Bronshten.* Mysterious Pluto
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
22	*А. А. Боровой.* Первоапрельский калейдоскоп	*A. A. Borovoy.* April fool's day kaleidoscope
	Математический кружок	**Mathematics circle**
26	*М. И. Башмаков.* Равномерное движение	*M. I. Bashmakov.* Uniform motion
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
31	*С. А. Юрский.* Проводящая сфера в задачах по электростатике	*S. A. Yurski.* Conducting spheres in electrostatic problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-shildren**
38	Задачи	Problems
39	*С. Л. Табачников.* У нас в гостях — математический радиокружок	*S. L. Tabachnikov.* Our guest — the mathematical radio circle
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
42	Победители конкурса «Кванта»	Prizewinners of the Kvant contest
43	Задачи М791—М795; Ф803—Ф807	Problems M791—M795; P803—P807
47	Решения задач М770, М775—М779; Ф788—Ф792	Solutions M770, M775—M779; P788—P792
54	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correst solutions
	Искусство программирования	**The art of programming**
55	Стандартные приемы программирования. Урок 6	Standart programming methods. Lesson 6
57	**Практикум абитуриента**	**College applicant's section**
60	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка *(25)*	**Our cover page** *(25)*
	Смесь *(56)*	**Miscellaneous** *(56)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Фигуры в безопасности *(3-я с. обложки)*	Secure pieces *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1983

Физика и научно-технический прогресс

Академик И. К. КИКОИН

Физика служит основой почти всей современной техники. Большинство технических наук были в свое время разделами физики. По пальцам можно пересчитать те отрасли техники, которые существовали до зарождения физики как науки. Это, в первую очередь, — строительная техника, которую человечество использовало уже в глубокой древности (вспомним, например, египетские пирамиды); это — металлургия (бронзовый и железный века), судостроение*), полиграфическая техника (первая печатная машина изобретена в XV веке). Вот основные отрасли техники, которые зародились без заметного влияния физики**). Положение существенно изменилось с появлением таких титанов науки, как Галилей, Ньютон, Ломоносов и другие. Настоящая техническая революция произошла в XIX столетии, когда физики заложили основы современной электротехники и теплотехники. Недаром XIX век назвали веком электричества и пара.

Слово «электричество» произошло от греческого слова «электрон»—янтарь. Древние греки заметили, что янтарь, если его потереть, например, шерстью, притягивает к себе легкие изоляторы. В конце XVI века это явление подробно изучил английский ученый Гильберт (он и ввел термин «электричество»). Но существенного технического значения электрические явления в то время не имели. Начало электрическому веку положили исследования итальянского физика Вольта. Шутки ради следует сказать, что поводом к исследованиям Вольта послужила лягушка. Дело в том, что итальянский врач Гальвани заметил, что если к ножкам препарированной лягушки приложить циркуль, сделанный из двух разных металлов, то мышцы ее сокращаются. Вольта решил выяснить причину этого явления. В результате он обнаружил, что если два разных металла поместить в раствор кислоты, щелочи или соли, то между металлами (электродами) возникает постоянное электрическое напряжение. На основании этого Вольта сконструировал первый гальванический элемент, который называли Вольтовым столбом, — прообраз современных электрических батарей. Это был первый источник постоянного электрического тока.

Физики получили возможность проводить опыты и изучать свойства электрического тока. В начале XIX века датский физик Эрстед обнаружил, что протекающий по проводнику электрический ток вызывает отклонение магнитной стрелки. Он показал, что если проводник расположить параллельно магнитной стрелке, то при включении тока она повернется на 90°. Так было открыто явление взаимодействия электрического тока с магнитной стрелкой. Тогда же французский физик Ампер показал, что электрический ток действует с некоторой силой не только на магнитную стрелку, но и на другие проводники с током, помещенные на некотором расстоянии от него.

Так впервые была установлена связь между электрическими и магнитными явлениями.

Силы взаимодействия между электрическими токами — это те самые силы, которые приводят в движение миллионы электродвигателей, используемых человеком в самых разных областях техники и в бытовых приборах.

---

*) См. книгу Тура Хейердала «Путешествие на „Кон-Тики"».

**) Мы не рассматриваем, конечно, ремесел.

Машинный зал Красноярской ГЭС.

Один из первых электрических двигателей был создан петербургским академиком Б. С. Якоби.

Явление электромагнетизма послужило основой для создания электромагнитного телеграфа, ставшего впоследствии основным видом связи между городами и странами. Первый электромагнитный телеграф был создан членом-корреспондентом Российской Академии наук П. Л. Шиллингом.

В 1831 году английский физик Фарадей сделал открытие, приведшее к революции в основных областях физики и техники. Речь идет об открытии электромагнитной индукции. Это явление заключается в том, что вокруг изменяющегося со временем магнитного поля возникает замкнутое электрическое поле и соответствующая ему электродвижущая сила. Эта электродвижущая сила, как и само электрическое поле, прямо пропорциональна быстроте изменения магнитного поля. До Фарадея физики говорили об электрических и магнитных жидкостях. Понятие о поле, как электрическом, так и магнитном, впервые было введено Фарадеем. Открытие электромагнитной индукции дало возможность создать генератор электрического тока. По существу, любая современная электрическая станция — это воплощение в грандиозных масштабах лабораторных опытов Фарадея.

Открытие электромагнитной индукции было воспринято всем научным миром как крупная научная сенсация и принесло Фарадею всемирную известность. Существует легенда, связанная с этим. Тогдашний премьер-министр Англии узнал об открытии Фарадея из газет. Чтобы ознакомиться более подробно с сущностью открытия, принесшего его автору всемирную славу, премьер-министр посетил лабораторию Фарадея. Фарадей продемонстрировал ему на самодельных примитивных приборах свои знаменитые опыты (сейчас они демонстрируются на уроках физики в любой средней школе). Посмотрев опыт, премьер-министр воскликнул, обращаясь к Фарадею: «И эти детские игрушки принесли Вам такую славу?!» Легенда утверждает, что на это восклицание последовал следующий ответ Фарадея: «Сэр, я думаю, что из этих игрушек Вы будете извлекать налоги!»

Это только легенда, но в действительности уже три десятилетия спустя вошли в строй первые промышленные электростанции, владельцы которых, вероятно, уплачивали налоги. Электрические генераторы и до сих пор служат основными источниками электроснабжения, без которого трудно себе представить жизнь современного общества. В 70-х годах прошлого столетия великий английский физик Максвелл, которого можно назвать Ньютоном в электричестве, тщательно изучив многочисленные опыты, проведенные Ампером, Фарадеем и другими физиками, сумел обобщить полученные результаты и написать соответствующие им математические уравнения (уравнения Максвелла)*). Из этих уравнений следовали все закономерности в области электромагнетизма, полученные его предшественниками. Больше того, Максвелл догадался, что наряду с явлением электромагнитной индукции, открытой Фарадеем, должно существовать новое явление, обратное явлению, открытому Фарадеем. Если Фарадей открыл, что изменение магнитного поля вызывает появление электрического поля, то явление, теоретически предсказанное Максвеллом, заключается в том, что изменение электрического поля вызывает появление вокруг него магнитного поля, и напряженность этого магнитного поля так же прямо пропорциональна быстроте изменения электрического поля. Это означает, что изменяющееся магнитное поле не может существовать без возникающего вокруг него электрического поля, так же как изменяющееся электрическое поле не может существовать без изменяющегося магнитного поля, возникающего вокруг него. Так появилось представление об электромагнитном поле.

Из уравнений Максвелла следовало, что при сравнительно небольших магнитных полях, даже не очень быстро меняющихся, возникают значительные электрические поля, которые легко наблюдать по вызываемому ими току в замкнутом проводнике. Обнаружить же магнитное поле, возникающее при изменении электрического поля, очень трудно, так как магнитные силы малы по сравнению с электрическими силами. Для этого требуется, чтобы технически максимально достижимое электрическое поле изменялось с огромной быстротой. Так, для обнаружения магнитного поля самыми чувствительными современными приборами требуется, чтобы электрическое поле с напряженностью 10^6 В/см уменьшалось до нуля в течение примерно миллиардной доли секунды. Такой эксперимент в лаборатории неосуществим.

Главнейший вывод, который Максвелл сделал из своих уравнений, заключается в том, что электромагнитное поле, периодически меняющееся со временем, должно распространяться в пространстве волнообразно — так, например, как распространяются звуковые волны от колеблющейся струны или другого источника звука. Но скорость распространения электромагнитных волн должна, согласно Максвеллу, равняться скорости распространения света, то есть 300 000 000 м/с, что примерно в миллион раз больше, чем скорость звука в воздухе. Вот это обстоятельство и привело Максвелла к гениальной догадке, что свет представляет собой электромагнитные волны (электромагнитная теория света).

Поначалу большинство физиков считало, что уравнения Максвелла носят чисто математический характер и его идея об электромагнитной природе света не имеет под собой достаточных оснований. Вскоре после появления труда Максвелла знаменитый немецкий физик Гельмгольц поручил молодому сотруднику Герцу экспериментально проверить казавшиеся парадоксальными выводы Максвелла.

В 1888 году Герц опубликовал результаты своих опытов, блестяще подтвердившие выводы Максвелла. Он создал экспериментальную установку, состоящую из конденсатора, к обкладкам которого присоединялся высоковольтный генератор, напряжение которого периодически менялось с высокой частотой, то есть время изменения высокого напряжения было очень мало. Ему удалось наблюдать распространение в пространстве электромагнитных волн длиною около ста метров. Это вполне соответствовало теории Максвелла. Для сравнения напомним, что длина волны видимого глазом света составляет примерно 10^{-6} м. Таким образом, была доказана возможность передачи электромагнитных колебаний на большие расстояния. По существу, установка Герца была прообразом первой радиостанции. Парадоксально, что сам Герц не понимал практического значения своего открытия, принесшего ему научную славу. Утверждают, что на вопрос журналистов о практическом применении его опытов, Герц ответил, что они имеют чисто научное значение и никакого практического интереса не представляют. Но Герц оказался плохим пророком. В 1895 году 7 мая профессор физики Петербургского университета А. С. Попов впервые продемонстрировал изобретенные им передатчик и радиоприемник и тем доказал возможность беспроволочной связи (так в те времена назвали радиосвязь). Вскоре им же была осуществлена связь по радио между Кронштадтской гаванью и военными кораблями.

---

*) Сам Максвелл «Ньютоном электричества» называл Ампера.

Важность работы А. С. Попова по достоинству была оценена мировой общественностью — в 1900 году на Международном элетротехническом конгрессе в Париже ему была вручена Золотая медаль и Почетный диплом. Так основополагающая теория Максвелла и фундаментальные работы Герца и Попова положили начало веку радиотехники. Несколько позже те же принципы легли в основу работ итальянца Маркони. Сейчас трудно себе представить жизнь человечества без радиосвязи. Конечно, современные радиостанции и радиоприемники не похожи на передатчик и приемник А. С. Попова. Но физические принципы, лежащие в основе современного радиовещания, остались прежними. В начале нашего века работы по созданию средств радиосвязи осуществлялись в основном в лабораториях физиков. Но в скором времени эти работы переросли в самостоятельную науку — радиотехнику, и дальнейшее развитие радиовещания, радиосвязи и т. д. привело к созданию во всем мире широко разветвленной радиотехнической промышленности.

1895 год ознаменовался еще одним крупным открытием в физике. Немецкий физик Рентген открыл новое невидимое глазом излучение, которое, тем не менее, засвечивало закрытую черной бумагой фотографическую пластинку. Сам он не знал природы этого излучения и назвал его «Х-лучами».

Открытие Рентгена произвело сенсацию в широких слоях общества, особенно когда появились фотографии внутренних органов живых людей.

В 1913 году было доказано, что это излучение, которое общепринято называть рентгеновскими лучами, представляет собой электромагнитные волны с длиной порядка 10^{-10} м. Общеизвестно огромное практическое значение рентгеновских лучей в технике и особенно в медицине.

Вскоре после работ Рентгена было сделано открытие, которому суждено было произвести техническую революцию уже в нашем, XX веке. *)

---

*) Продолжение этой статьи будет напечатано в майском номере нашего журнала.

Рудольф Мёссбауэр отвечает на вопросы редакции журнала «Квант»

В 1958 году немецкий физик Рудольф Мёссбауэр обнаружил эффект, названный его именем, — явление резонансного поглощения, испускания и рассеяния гамма-квантов ядрами в твердых телах без потери энергии кванта на отдачу ядру. Через три года за эту работу он получил Нобелевскую премию.

Прошло четверть века с момента открытия. На основе эффекта Мёссбауэра разработаны новые методы исследования веществ — мёссбауэровская спектроскопия и мёссбауэрография, которые применяются в различных областях физики, техники, химии, биологии, медицины.

В сентябре 1982 года профессор Мёссбауэр был избран иностранным членом АН СССР. Мы встретились с ним и попросили ответить на наши вопросы.

— Какие, по Вашему мнению, проблемы в физике наиболее актуальны?

— Проблем в физике очень много. Наибольший прогресс следует ожидать в области элементарных частиц. Здесь выделяются вопросы об устойчивости протона, массе нейтрино и существовании монополя Дирака. Конечно, много проблем в астрофизике и космологии. С другой стороны, следует отметить такую важную область, как биофизика. Сейчас, например, начали изучать динамику больших биологических молекул. Наконец, важнейшая проблема, которую я рассматриваю как некий аспект инженерных проблем,— это управляемый термоядерный синтез. Многие открытия делаются случайно, трудно прогнозировать реальные сроки решения отдельных вопросов.

— Как Вы стали физиком?

— В школе мне нравились и математика, и физика; я увлекался также химией. Любил экспериментировать. Очень интересовался электроникой. Вместе с группой товарищей мы делали телефоны, усилители. Именно увлечение электроникой оказало решающее влияние на мой выбор, и я стал физиком.

— Советуете ли Вы молодым людям получать физическое образование, становиться физиками?

— Конечно. Физика изучает фундаментальные явления. Физическое образование позволяет легко переквалифицироваться, если возникнет необходимость перейти в другие области исследований, например, в биологию или химию. Физические закономерности используются везде.

— Каким должно быть современное образование?

— Я считаю, что нет необходимости в прямом смысле изменять систему образования, ее нужно приспособить к нуждам современной науки. В физическом образовании очень важно понимать основополагающие моменты, а не уделять слишком много внимания частностям. Сейчас современная электроника, миникомпьютеры и ЭВМ вторгаются в жизнь буквально каждого человека. Этот факт следует также учитывать даже на самой начальной стадии образования.

— Какая математика нужна физику?

— Хотя часто физики в своей работе опираются на интуитивные соображения, знание математики необходимо. Чем лучше физик знает математику, тем успешнее он сможет работать. Нужно хорошо владеть практической математикой. Математика — язык физика. Однако следует различать потребности в математике для физика-теоретика и физика-экспериментатора. Существует опасность слишком увлекаться компьютерами. Многие молодые люди настолько полагаются на них, что перестают сами думать.

— Ваши пожелания читателям «Кванта».

— Учиться настойчиво и плодотворно. За годы учебы много усвоить. Изучая математику и физику, не забывать, что это только часть общечеловеческой науки и культуры.

Эффект Мёссбауэра

или резонансное ядерное поглощение γ-квантов в кристаллах

Кандидат физико-математических наук
Ю. А. САМАРСКИЙ

Немного о резонансе

Даже людям, далеким от физики, хорошо знакомы самые разнообразные явления резонанса. Кто не крутил ручку радиоприемника, настраиваясь на нужную волну? Или не слышал дребезжания стекол в оконной раме от проходящего мимо трамвая? Многие, наверное, помнят фольклорную историю о том, как рота солдат, шагая строем по мосту и случайно попав в такт с его собственными колебаниями, рухнула вместе с мостом в реку.

В этих и многих других случаях резонанс — резкое возрастание амплитуды колебаний — возникает при совпадении частоты внешнего воздействия на систему с собственной частотой колебаний этой системы. Если вблизи рояля сыграть на музыкальном инструменте какую-нибудь ноту, рояль откликнется звучанием именно этой ноты: частота звука, издаваемого инструментом (частота внешнего воздействия), совпадает с собственной частотой колебаний соответствующей струны рояля.

Для приемного контура радиоприемника внешнее воздействие — это радиоволны от передающей станции, а собственная частота определяется параметрами контура — сопротивлением, индуктивностью и емкостью, которые мы меняем, вращая ручку настройки.

На примере радиоприема удобно обсудить и еще одну сторону явления резонанса. Кроме частоты, на которую мы хотим настроить приемник, очень важна точность настройки. У хорошего приемника даже ничтожный поворот ручки резко меняет условие приема. Это означает, что приемный контур обладает острым резонансом. Величина, характеризующая остроту резонанса, называется добротностью Q и определяется отношением резонансной частоты ν_p к ширине $\Delta\nu$ того интервала частот, в котором удается наблюдать резонансное явление (рисунок 1):

$$Q = \frac{\nu_p}{\Delta\nu}. \qquad (1)$$

В современных радиотехнических контурах добротность составляет примерно $200 \div 300$.

Резонанс в атоме

Типичными резонансными системами являются также атомы, молекулы и атомные ядра.

Наука о законах движения микрочастиц — квантовая механика — смогла объяснить многие явления, происходящие в атоме, и, в частности, способность атомов поглощать и испускать фотоны лишь с определенной энергией.

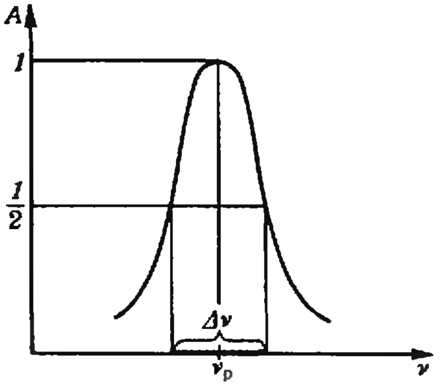


Рис. 1. Типичный вид резонансной кривой. В нашем случае она изображает зависимость амплитуды колебаний A приемного контура от частоты ν передающей станции. Наиболее интенсивные колебания в контуре будут наблюдаться при частоте $\nu = \nu_p$. Величина $\Delta\nu$, взятая на половине высоты кривой, называется шириной резонансной кривой.

Процесс излучения фотона одиночным свободным атомом впервые был рассмотрен Нильсом Бором.

Бор пришел к выводу, что электрон в атоме может обладать только дискретными значениями энергии E_1, E_2, ..., E_k, ..., E_n,... Каждому такому значению энергии соответствует устойчивое (стационарное) состояние атома, в котором атом не излучает и не поглощает.

Атом может переходить из одного энергетического состояния в другое, или, как говорят, с одного энергетического уровня на другой. Излучение фотона происходит при переходе атома с уровня с большей энергией на уровень с меньшей энергией. Самый низкий энергетический уровень атома называют основным, а остальные — возбужденными. При поглощении фотона атом переходит в возбужденное состояние, занимая уровень с большей энергией. Время жизни τ атома в возбужденном состоянии обычно составляет 10^{-8}—10^{-7} с, после чего он самопроизвольно (спонтанно) переходит на более низкие энергетические уровни, испуская фотоны. Энергия испускаемого (поглощаемого) фотона связана с энергией уровней, между которыми совершается переход, условием Бора:

$$E_n - E_k = h\nu_{nk}, \qquad (2)$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, а ν_{nk} — частота излучения (мы пометили ее двумя индексами — n и k, чтобы подчеркнуть, что процесс излучения связан с двумя значениями энергии атома).

Графически процесс излучения (поглощения) изображают стрелками, соединяющими те два энергетических уровня, при переходе между которыми происходит испускание (поглощение) фотона (рисунок 2; E_1 — основной уровень, остальные — возбужденные). Частоты соответствующих переходов обычно называют спектральными линиями.

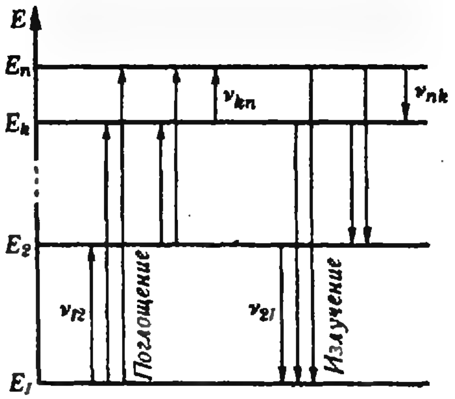


Рис. 2.

Согласно уравнению (2), частота излучения ν_{nk} должна быть строго фиксирована, если энергии E_n и E_k строго определены. Другими словами, при переходе $E_n \rightarrow E_k$ должна возникать идеальная монохроматическая, то есть бесконечно узкая, спектральная линия. На самом деле все спектральные линии имеют конечную ширину. При точном квантовомеханическом рассмотрении оказывается, что каждый возбужденный энергетический уровень не бесконечно узок, а «размыт», он имеет так называемую естественную ширину ΔE, которую обозначают Г. Естественная ширина уровня Г и время жизни τ атома в данном возбужденном состоянии связаны соотношением

$$\Gamma\tau = \frac{h}{2\pi}. \qquad (3)$$

Чем больше время жизни уровня, тем точнее фиксирована его энергия, чем меньше время жизни — тем более он «размыт». Соотношение (3) носит название принципа неопределенности Гейзенберга для энергии.

На рисунке 3, *а* изображены основной и первый возбужденный энергетические уровни свободного атома (для простоты энергию основного уровня условно принимают за нуль).

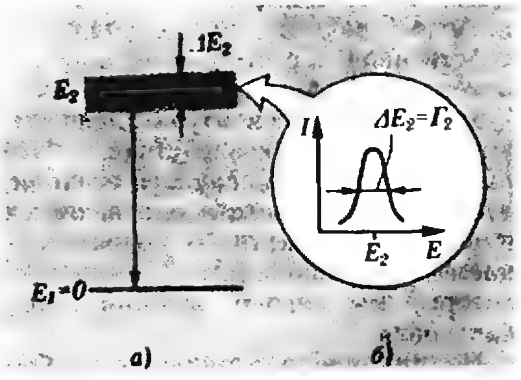


Рис. 3.

Если отложить по оси абсцисс энергию атома, а по оси ординат — вероятность найти атом в состоянии с данной энергией, то получится характерная резонансная кривая (рис. 3,*б*). Ширина этой кривой на половине высоты и называется естественной шириной линии Г.

Наличие естественной ширины приводит к тому, что при переходе атома с одного возбужденного уровня на более низкий, в том числе и на основной уровень, существует разброс по энергии и, следовательно, по частоте излучаемых фотонов, который принципиально нельзя уменьшить. Так, для перехода, изображенного на рисунке 3, «размытие» энергии фотонов равно Γ_2, что соответствует разбросу по частоте

$$\Delta\nu_{21} = \Gamma_2/h = 1/2\pi\tau_2,$$

где τ_2 — время жизни атома в состоянии E_2. Иными словами, для данного перехода спектральная линия $\nu_{21} = E_{21}/h$ имеет ширину $\Delta\nu_{21} = 1/2\pi\tau_2$.

В основном состоянии атом может находиться бесконечно долго ($\tau \to \infty$), поэтому (см. (3)) естественная ширина основного уровня $\Gamma_1 = 0$.

Для уровней с временем жизни $\tau \approx 10^{-8}$ с естественная ширина составляет

$$\Gamma = \frac{h}{2\pi\tau} = \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}}{6{,}28\cdot10^{-8}\ \text{с}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{Дж}\cdot\text{эВ}^{-1}} \approx$$
$$\approx 6{,}6\cdot10^{-8}\ \text{эВ} \approx 10^{-7}\ \text{эВ}.^{*)}$$

Она оказывается существенно меньше энергии перехода (то есть разности энергий между самими уровнями), которая для видимого света — порядка электронвольта.

Итак, если попадающий в атом фотон имеет энергию, равную разности энергий между основным и каким-либо возбужденным уровнем, то атом может поглотить фотон и перейти на данный возбужденный уровень. Через время $\tau \approx 10^{-8}$ с атом вновь вернется в основное состояние, как правило, испустив такой же фотон. Этот процесс возможен для фотонов только определенной энергии и носит, таким образом, резонансный характер.

Впервые был обнаружен и стал широко известен оптический резонанс, связанный с излучением и поглощением атомами натрия «желтой линии» с длиной волны $\lambda = 5890$ Å $= 5890\cdot10^{-10}$ м, то есть с частотой $\nu = c/\lambda = 5{,}1\cdot10^{14}$ с$^{-1}$ ($c = 3\cdot10^8$ м/с — скорость света). Энергия фотонов, соответствующих этому излучению, — $E = h\nu = 2{,}1$ эВ. Резонанс был открыт Робертом Вудом в 1904 году.

Интересно, какова добротность этого резонанса? Атомы натрия излучают желтый свет (желтую линию) при переходе с возбужденного уровня, время жизни которого $\tau \approx 1{,}5\cdot10^{-8}$ с. Отсюда естественная ширина уровня —

$$\Gamma = \frac{h}{2\pi\tau} \approx 4{,}4\cdot10^{-8}\ \text{эВ},$$

а ширина резонансной линии —

$$\Delta\nu = \frac{\Gamma}{h} = \frac{1}{2\pi\tau} \approx 1{,}06\cdot10^7\ \text{с}^{-1}.$$

Тогда, согласно (1), добротность резонанса равна

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{E}{\Gamma} \approx 4{,}8\cdot10^7.$$

Мы видим, что оптический резонанс в сотни тысяч раз острее привычного резонанса в радиотехнике. Следует отметить, что добротность такого порядка типична для атомных и молекулярных систем.

А теперь обратимся к ядерному γ-резонансу.

Резонанс γ-квантов

Атомные ядра, как и электроны в атоме, могут находиться в различных дискретных энергетических состояниях, то есть на различных энергетических уровнях. Как и у атома, самый низкий из уровней называется основным, остальные уровни носят название возбужденных. Возбужденные, то есть радиоактивные ядра могут быть получены разными путями: в результате бомбардировки их заряженными или нейтральными частицами, в результате поглощения ядрами фотонов и т. д. Ядра, находящиеся в возбужденных состояниях, могут переходить на более низкие энергетические уровни, в том числе и на основной. Такие переходы происходят самопроизвольно. Освобождающаяся энергия уносится фотонами. Эта энергия обычно заключена между несколькими сотнями и несколькими миллионами электронвольт, то есть на много порядков больше энергии видимого света. Так возникает γ-излучение. Наблюдаемый спектр γ-лучей всегда дискретный, что и позволяет говорить о дискретности ядерных уровней. Схема энергетических уровней для ядерных переходов изображается совершенно аналогично схеме переходов в атоме. Как и в атоме, из-за конечного времени жизни возбужденные уровни ядра имеют естественную ширину Γ (см. рисунок 3). Размытость возбужденных уровней ядра приводит к появлению ширины у спектральных линий γ-излучения.

---

*) В физике микромира энергию принято выражать в электронвольтах: 1 эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж.

Ядра атомов могут не только испускать, но и поглощать фотоны. Этот процесс возможен лишь для γ-квантов определенных энергий и, следовательно, тоже носит резонансный характер.

Казалось бы, резонансное поглощение γ-лучей должно легко наблюдаться. Для этого достаточно пропустить поток γ-квантов, испущенных радиоактивным источником, через вещество-поглотитель, содержащий те же ядра в невозбужденном (основном) состоянии. Однако это не так. Дело в том, что энергия E_γ, уносимая γ-квантом, оказывается меньше энергии перехода между уровнями, и ее недостаточно для возбуждения ядра-поглотителя. Хотя и небольшая, но заметная доля энергии уносится ядром-источником, которое, согласно закону сохранения импульса, начинает двигаться в сторону, противоположную направлению вылета γ-кванта (как орудие после выстрела).

Проведем некоторые простые оценки для свободного ядра (атома).

Пусть излучающее ядро свободно и первоначально покоится, а испускаемый γ-квант соответствует ядерному переходу с первого возбужденного уровня на основной (рисунок 3). Согласно закону сохранения импульса, после испускания γ-кванта ядро получит импульс отдачи, равный по абсолютной величине импульсу γ-кванта: $p_я = p_\gamma = E_\gamma/c$. В результате ядро начнет двигаться со скоростью $v_я = p_я/m_я$, унося энергию отдачи R, равную

$$R = \frac{m_я v_я^2}{2} = \frac{p_я^2}{2m_я} = \frac{E_\gamma^2}{2m_я c^2}. \qquad (4)$$

По закону сохранения энергии, $E_\gamma + R = E_{21}$, где E_{21} — расстояние (разность энергий) между основным и первым возбужденным уровнями ядра. Поскольку всегда $R \ll E_\gamma$, в формуле (4) E_γ можно заменить на энергию перехода E_{21}:

$$R \approx \frac{E_{21}^2}{2m_я c^2}. \qquad (5)$$

Оценим величину R. Рассмотрим в качестве примера ядро изотопа ^{119}Sn, у которого $E_{21} = 2{,}38 \cdot 10^4$ эВ, время жизни возбужденного уровня $\tau = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ с, а естественная ширина этого уровня — $\Gamma_2 = h/2\pi\tau = 3 \cdot 10^{-8}$ эВ. Энергия отдачи в этом случае составляет

$$R \approx \frac{E_{21}^2}{2m_я c^2} \approx \frac{(2{,}38 \cdot 10^4)^2\ (\text{эВ})^2}{2 \cdot 119 \cdot 10^9\ \text{эВ}} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{эВ.}^{*)}$$

Энергия, которая расходуется на отдачу ядра, поглощающего γ-квант, оказывается точно такой же. Эта картина показана на рисунке 4: линия испускания смещена на величину R влево от E_2, а линия поглощения — на столько же вправо от E_2 (расстояния по оси E даны условно).

Какое же влияние оказывает сдвиг R на резонансное поглощение γ-квантов? Сама по себе величина R не представляет существенного интереса, важно соотношение между R и шириной Γ резонансной линии. Легко видеть, что резонансное поглощение возможно только в случае, если спектры испускания и поглощения перекрываются, то есть при условии

$$2R < \Gamma. \qquad (6)$$

А это условие почти никогда не выполняется для γ-переходов в свобод-

---

*) Напомним, что число, стоящее слева от символа изотопа, представляет собой массу ядра (атома) изотопа, выраженную в атомных единицах массы (а. е. м.). По определению 1 а. е. м. $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг. Обозначим ее через m_0. Тогда энергия, соответствующая 1 а. е. м., равна $m_0 c^2 = 931{,}5$ МэВ $\approx 10^9$ эВ. Следовательно, для ядра олова ^{119}Sn энергия, соответствующая $m_я c^2$, численно равна $119 \cdot 10^9$ эВ.

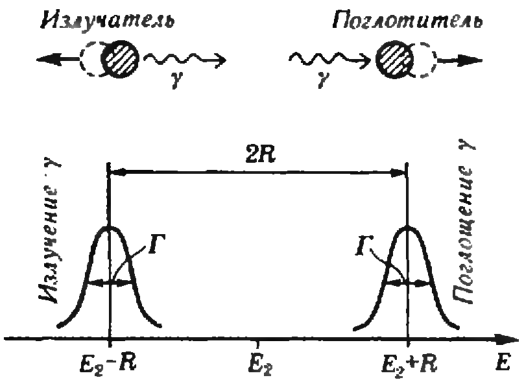


Рис. 4.

ных ядрах, то есть в случаях, когда можно пренебречь энергией связи ядер в веществе. Так, для рассмотренного свободного ядра ^{119}Sn ширина Γ на пять порядков, то есть в сотню тысяч раз, меньше R. Понятно, что в этом случае наблюдать резонансное поглощение γ-квантов невозможно.

Почему же тогда энергия отдачи не помешала наблюдению оптического резонанса для желтой линии натрия? Или там отдачи вовсе нет? Отдача, конечно, существует и там, но посмотрим, какова ее величина. Масса атома натрия равна 22 а. е. м., и энергия отдачи равна

$$R=\frac{(h\nu)^2}{2M_{\mathrm{Na}}c^2}=\frac{(2{,}1)^2\ (\text{эВ})^2}{2\cdot 22\cdot 10^9\ \text{эВ}}\approx 10^{-10}\ \text{эВ!}$$

Она оказывается ничтожно малой по сравнению с естественной шириной уровня $\Gamma \approx 4{,}4\cdot 10^{-8}$ эВ.

Как же все-таки наблюдать γ-резонанс? В принципе, можно компенсировать энергетический сдвиг $2R$ с помощью эффекта Доплера, который состоит в изменении частоты излучения, а значит, энергии фотонов, при движении источника (или поглотителя)*). Действительно, если движение отдачи разрушает резонанс, то противоположное, компенсирующее отдачу движение должно восстановить его. Но какова при этом должна быть скорость движения?

Рассмотрим случай, когда поглощающее ядро покоится, а излучающее ядро движется к нему навстречу. Пусть частота излучения неподвижного ядра-источника равна ν_γ. Тогда при движении этого ядра со скоростью v частота его излучения изменится, и по отношению к неподвижному ядру-поглотителю будет равна $\nu=(1+v/c)\,\nu_\gamma$. Соответственно, энергия испускаемых фотонов будет $E=h\nu=(1+v/c)\,h\nu_\gamma=(1+v/c)\,E_\gamma$, где $E_\gamma=h\nu_\gamma$ — энергия фотонов, которые испускало бы неподвижное ядро-источник.

Итак, при движении ядра-источника «навстречу» энергия испускаемых им фотонов, попадающих на неподвижное ядро-поглотитель, увеличивается на величину

$$\delta E=E-E_\gamma=E_\gamma\frac{v}{c}. \qquad (7)$$

Если окажется, что $\delta E=2R$, то должен наблюдаться γ-резонанс. Пользуясь формулой (7), легко рассчитать, при какой скорости v выполняется это условие:

$$v=c\,\frac{2R}{E_\gamma}. \qquad (8)$$

Так, для ядер ^{119}Sn эта скорость равна примерно 60 м/с.

Основанные на этой идее опыты на ядрах ртути были проведены в 1953 году П. Муном и А. Сторустом. Они смонтировали источник с возбужденными ядрами ртути на плече центрифуги. Плечо приводилось во вращение, и тогда наблюдался резонанс в покоящемся ртутном поглотителе. Скорость движения, необходимая для компенсации ядерной отдачи в ртути, была порядка скорости звука! Подобные опыты по γ-резонансу имели ограниченное применение, были технически сложны и потому проводились крайне редко.

Так продолжалось до 1958 года, когда положение радикально изменилось благодаря открытию молодого немецкого физика Рудольфа Мёссбауэра. Открытие состояло в том, что Мёссбауэр нашел, как избежать затраты части энергии на отдачу ядер и наблюдать γ-резонанс без отдачи. Если опыты Муна и Сторуста показали, как компенсировать отдачу, то опыты Мёссбауэра показали, как ее уничтожить.

---

*) См. статью Я. Смородинского, А. Урнова «Эффект Доплера» («Квант», 1980, № 8).

Чтобы избавить ружье при выстреле от движения отдачи и тем самым всю энергию заряда передать пуле, надо, очевидно, опереть ружье, связать его с каким-нибудь массивным телом. Но обо что «опереть» ядро, испускающее или поглощающее γ-квант, как сделать его неподвижным? Оказалось, что при определенных условиях ядра можно «закрепить» в решетке кристалла. Именно кристаллическая решетка, в которой ядра прочно «скованы» друг с другом цепями химических связей, и сыграла роль массивного тела, предотвращающего отдачу.

Как же происходит процесс поглощения и испускания γ-квантов ядрами, входящими в состав кристаллической решетки?

Наиболее прост случай, когда энергия отдачи превышает энергию связи ядра в решетке, которая довольно велика — она составляет 10÷30 эВ. Формула (4) показывает, что такой случай реализуется лишь при больших энергиях γ-квантов ($E_\gamma > 1$ МэВ). При этом связь ядра становится несущественной, и мы, по существу, имеем дело со свободным ядром.

При испускании γ-квантов с $E_\gamma < 1$ МэВ энергия отдачи недостаточна для вырывания ядра из кристаллической решетки, а импульс ядра в той или иной форме передается всему кристаллу. Чаще всего энергия отдачи переходит в звуковые колебания решетки. Такой процесс очевиден. В результате отдачи ядро сдвигается со своего места, но не теряет связи с решеткой. Оно отдает свой импульс соседним ядрам, те передают его своим соседям — и в кристаллической решетке возбуждается механическая волна.

Известно, что кристаллическая решетка это квантовая система, которая, подобно атому, не может возбуждаться произвольным образом. «Вследствие квантования собственной энергии кристалла он может поглощать энергию отдачи лишь дискретными порциями. При понижении температуры вероятность возбуждения собственных уровней кристалла уменьшается, поэтому при испускании γ-квантов малой энергии ($E_\gamma \lesssim 100$ кэВ) некоторая часть переходов происходит так, что импульс отдачи воспринимает весь кристалл в целом» — писал Р. Мёссбауэр в своей статье. Таким образом, в кристалле возможен случай, когда никакого возбуждения колебаний вообще не происходит! Тогда отдачу испытывает вся решетка как целое. В формулу (5), определяющую энергию отдачи, вместо ядра следует теперь подставлять массу всего кристалла. В результате энергия отдачи понижается на 20 порядков и оказывается много меньше ширины линии Γ. В этом случае γ-резонанс сравнительно легко наблюдается.

Такое упругое, то есть без отдачи, испускание и поглощение γ-квантов в кристаллах и носит название эффекта Мёссбауэра.

Конечно, мы не можем проследить за каждым отдельно взятым атомом или γ-квантом. Все рассмотренные процессы носят случайный характер. Поэтому ясно, что даже при низкой температуре отнюдь не все ядра в кристалле испускают γ-кванты без отдачи, а только некоторая их часть. Чем ниже температура, тем большая доля ядер излучает «резонансные» γ-кванты. В первых опытах Мёссбауэра, где в качестве источника γ-лучей использовался радиоактивный иридий ^{191}Ir, при температуре жидкого азота $T \approx 80$ К доля резонансных квантов не превышала нескольких процентов. В настоящее время известны радиоактивные соединения, в излучении которых даже при комнатной температуре доля резонансных квантов составляет почти половину всего излучения. Для проведения γ-резонансных опытов с такими источниками совсем не требуется их охлаждения.

Замечательной особенностью γ-резонанса является его необычайно высокая добротность. Так, для изотопа олова ^{119}Sn с энергией γ-квантов $E = 2{,}38 \cdot 10^4$ эВ и шириной резонансного уровня $\Gamma = 3 \cdot 10^{-8}$ эВ добротность равна

$$Q = \frac{E}{\Gamma} \approx 0{,}8 \cdot 10^{12}.$$

Это почти в 20 тысяч раз лучше, чем для оптического резонанса зна-

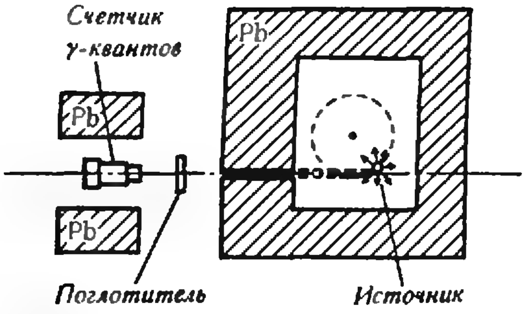


Рис. 5.

менитой желтой линии натрия. Для ядер железа ^{57}Fe добротность γ-резонанса выше еще в три раза, а для цинка ^{67}Zn она равна $2\cdot10^{15}$!

Высокая добротность γ-резонанса превратила его в инструмент измерений исключительной точности. Например, для олова достаточно с помощью эффекта Доплера изменить энергию γ-квантов на одну триллионную часть, чтобы уйти за пределы естественной ширины возбужденного уровня и разрушить резонанс. На этом условии «расстройки» основан метод наблюдения резонансного поглощения γ-квантов, предложенный Мёссбауэром. Рассмотрим его.

Пусть ядра источника и поглотителя находятся в идентичных кристаллах и при одинаковой температуре. Тогда линия испускания полностью перекрывается с линией поглощения, и число γ-квантов, резонансно поглощенных поглотителем, будет максимальным при неподвижных источнике и поглотителе ($v=0$). Если теперь поглотителю (или источнику) сообщить небольшую скорость, то произойдет сдвиг линий испускания и поглощения (его называют доплеровским сдвигом), и резонанс будет нарушаться. Такое разрушение резонанса происходит уже при ничтожных скоростях.

Оценим величину скорости для ^{119}Sn. Подставляя в формулу (8) вместо R естественную ширину линии $\Gamma=3\cdot10^{-8}$ эВ, мы найдем, что для нарушения резонанса достаточно перемещать поглотитель или источник со скоростью порядка миллиметра в секунду! (Вместо 60 м/с для получения резонанса на свободных ядрах.) Таким образом, изменяя энергию γ-квантов с помощью эффекта Доплера можно уходить от резонанса или восстанавливать его.

На рисунке 5 показана схема одной из первых экспериментальных установок Мёссбауэра для наблюдения γ-резонансного поглощения на ядрах иридия ^{191}Ir с энергией γ-квантов $E_\gamma=129$ кэВ.

Радиоактивный источник, расположенный за свинцовой защитой, мог равномерно вращаться по окружности в ту или другую сторону*). γ-кванты, испускаемые источником при его движении на участке траектории, отмеченном на рисунке 5 жирной линией, попадали на неподвижный поглотитель (иридиевую фольгу). За поглотителем устанавливался счетчик γ-квантов. Благодаря специальному устройству счетчик регистрировал γ-кванты, прошедшие через поглотитель, только в то время, когда источник находился на «рабочем» участке траектории. При изменении угловой скорости вращения источник двигался навстречу поглотителю либо от него с различными строго контролируемыми скоростями.

В эксперименте исследовалась зависимость числа γ-квантов, попадающих в счетчик в единицу времени, от скорости движения источника. Для построения графика использовалась не сама скорость счета, а величина «амплитуды» эффекта, выраженная в процентах:

$$\varepsilon(v)=\frac{I(v)-I(\infty)}{I(\infty)}\cdot100\%,$$

где $I(v)$ — скорость счета квантов, прошедших через поглотитель при некоторой скорости v, $I(\infty)$ — скорость счета квантов при достаточно большой скорости, когда резонансное поглощение отсутствует. Величина $\varepsilon(v)$ является отношением, и, следовательно, не зависит от активности источника.

Движение источника навстречу поглотителю или от него приводило благодаря эффекту Доплера к смещению линии испускания в сторону большей или меньшей энергии. Ре-

---

*) Интересно отметить, что в начале исследований по эффекту Мёссбауэра для перемещения источника или поглотителя с малой скоростью физики использовали диск проигрывателя, суппорт станка, диффузор репродуктора и т. п.

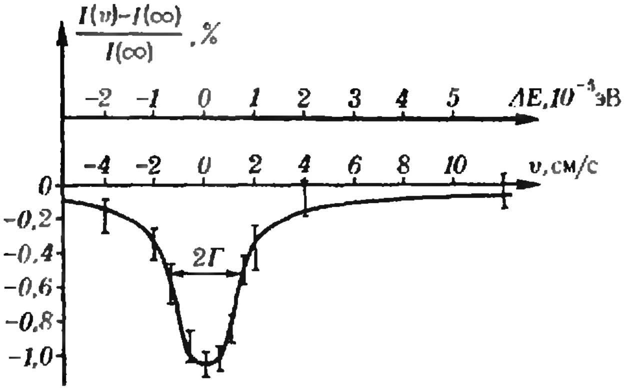


Рис. 6. Минимум скорости счета γ-квантов отвечает, очевидно, максимуму поглощения. В данном опыте источник и поглотитель находились в идентичных кристаллических решетках и потому минимум поглощения приходится на нулевую скорость.

зультаты измерений представлены на рисунке 6.

Такая кривая называется мёссбауэровским или γ-резонансным спектром. Измеряемая на опыте ширина резонансной линии представляет собой результат наложения линий источника и поглотителя. При тонком поглотителе и источнике и при отсутствии вибраций ширина линии равна удвоенной естественной ширине 2Г. Измерив эту ширину, можно определить время жизни возбужденного состояния.

Дальнейшие работы показали, что любое внешнее воздействие, изменяющее первоначальную энергию ядер, может быть скомпенсировано при помощи относительного движения. Тогда величина изменения может быть определена по значению относительной скорости, необходимой для восстановления резонанса.

Таким образом, открытие Мёссбауэра дало способ точнейшей регистрации изменений энергии (именно изменений, а не абсолютной величины этой энергии) γ-квантов и легло в основу целой новой области — мёссбауэровской спектроскопии, в развитие которой заметный вклад внесли советские ученые.

В настоящее время эффект Мёссбауэра обнаружен более чем на 40 элементах таблицы Менделеева.

Применения эффекта Мёссбауэра многочисленны и основаны, главным образом, на использовании мёссбауэровских спектров как источников ценной информации об исследуемом объекте. Остановимся кратко на некоторых приложениях.

Еще совсем недавно трудно было представить, что можно заметить изменения энергии ядерного перехода в зависимости от характера химического окружения ядра. Однако оказалось, что при испускании и поглощении γ-квантов ядрами, входящими в состав химических соединений, максимум линии поглощения может наблюдаться при скорости, отличной от нуля. Это объясняется следующим. Энергия ядерного перехода зависит от электростатических сил взаимодействия ядра с окружающими его электронами. Но вклад этого взаимодействия настолько мал, что непосредственно наблюдаться не может. Однако в опытах по изучению эффекта Мёссбауэра положение меняется. В этом случае влияние электростатических сил на энергетические уровни ядра нужно сравнивать не с энергией γ-перехода, а с шириной линии резонансного поглощения. Смещение максимума мёссбауэровского спектра при этом легко замечается. Такие измерения, следовательно, дают информацию о характере химических связей.

Важным и плодотворным оказалось применение эффекта Мёссбауэра в физике твердого тела. Атомные ядра представляют собой маленькие магнитики, которые взаимодействуют с магнитными и электрическими полями окружающих электронов. Такие взаимодействия существенно влияют на мёссбауэровские спектры и потому могут детально изучаться. Именно с помощью эффекта Мёссбауэра впервые удалось измерить внутренние

(Окончание см. на с. 30)

Загадочный Плутон

Кандидат физико-математических наук
В. А. БРОНШТЭН

В 1930 году, то есть чуть более пятидесяти лет назад, была открыта девятая, самая удаленная от Солнца планета Солнечной системы — Плутон. Сравнительно быстро астрономы определили элементы орбиты новой планеты — среднее расстояние до Солнца, степень вытянутости (эксцентриситет) орбиты и наклонение к плоскости земной орбиты.

Гораздо труднее оказалось определить физические характеристики Плутона — его размеры, массу, плотность. Длительное время почему-то считалось, что по размерам и массе Плутон практически не отличается от Земли. Такие оценки вошли даже в астрономические справочники. Однако в 1950 году астрономы измерили диаметр диска Плутона и нашли его равным примерно 5000 км (напомним, что диаметр Земли ≈ 12 750 км). Спустя пятнадцать лет, наблюдения закрытия Плутоном слабой звезды показали, что диаметр планеты еще меньше, во всяком случае не превышает 4400 км.

В начале 70-х годов ученые попытались уточнить массу Плутона по возмущениям, создаваемым им в движении соседней планеты — Нептуна. Они получили оценку массы в 0,11 массы Земли. Но сразу стало ясно, что эта оценка завышена, так как при диаметре даже 4400 км она приводила к нереально большому значению средней плотности Плутона — около 15 г/см^3*) (из планет Солнечной системы самую большую плотность имеет Земля — 5,5 г/см^3).

Открытие в 1978 году спутника Плутона, названного Хароном, позволило определить массу планеты по периоду обращения и радиусу орбиты ее спутника. Она оказалась равной всего лишь 0,002 массы Земли (то есть в шесть раз меньше массы Луны). Вот почему все попытки определить массу Плутона по возмущениям в движении Нептуна были заранее обречены на неудачу — при такой ничтожной массе Плутон никак не мог влиять на движение своего в 7500 раз более массивного собрата.

Недавно был изобретен новый способ измерения диаметров небесных тел. Это дало возможность определить размеры Плутона с большей точностью, чем прежде. Оказалось, что его диаметр заключен в пределах от 3000 до 3600 км (это примерно в полтора раза меньше диаметра Меркурия, считавшегося самой маленькой планетой Солнечной системы).

Из оценок массы и диаметра следует, что плотность Плутона — от 0,5 до 0,8 г/см^3. До сих пор планетой с наименьшей плотностью считался Сатурн: его средняя плотность равна 0,7 г/см^3. Уточнение размеров Плутона покажет, не отберет ли он у Сатурна первенства по самой низкой плотности.

И еще один своеобразный рекорд «установлен» Плутоном. Его спутник Харон лишь в двенадцать раз уступает своей планете по массе. Раньше считалось, что наименьшее отношение массы планеты к массе спутника у системы Земля — Луна, где оно равно 81.

Совсем недавно обнаружилось, что блеск Плутона испытывает колебания и кроме того интенсивно ослабевает, несмотря на приближение планеты к Солнцу (перигелий она пройдет в 1990 году). Пока объяснений этому нет. Возможно, будущие исследования прольют свет и на эту загадку.

---

*) В астрономии принято плотности небесных тел выражать в г/см^3, а не в единицах СИ. (*Прим. ред.*)

Метод итераций

Член-корреспондент АПН СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

I

Несколько тысячелетий назад в Древнем Вавилоне был изобретен простой способ приближенного вычисления квадратных корней.

Пусть мы хотим вычислить $\sqrt{a}$ (где $a>0$), то есть найти положительный корень уравнения $x^2=a$. Это уравнение равносильно следующему:

$$x=\frac{a}{x}. \qquad (1)$$

Предположим теперь, что мы имеем некоторое приближенное значение x_0 числа $\sqrt{a}$. Согласно (1), x_0 надо сравнить с числом $\frac{a}{x_0}$: ведь если x_0 и $\frac{a}{x_0}$ совпадают, то x_0 — точное значение $\sqrt{a}$. Если, однако, $x_0\neq\sqrt{a}$, то одно из чисел x_0, $\frac{a}{x_0}$ меньше, а другое больше, чем $\sqrt{a}$ (поскольку произведение этих чисел равно a), то есть $\sqrt{a}$ лежит между x_0 и $\frac{a}{x_0}$. Можно предположить, что среднее арифметическое этих чисел

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{x_0}\right)$$

является лучшим приближением числа $\sqrt{a}$, чем исходное приближение x_0.

Это приближение x_1 можно улучшить таким же способом, то есть взять среднее арифметическое чисел x_1 и $\frac{a}{x_1}$

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right),$$

затем можно взять следующее приближение

$$x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)$$

и так далее.

Какова точность вавилонского способа? Для ответа на этот вопрос проведем следующие вычисления:

$$x_n-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)-\sqrt{a}=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{\frac{a}{x_{n-1}}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1} - a)^2. \qquad (2)$$

Равенство (2) дает возможность выразить ошибку приближения x_n (то есть число $|x_n - \sqrt{a}\,|$) через ошибку предыдущего приближения x_{n-1}.

Задачи

1. Докажите, что все приближения числа $\sqrt{a}$, найденные по вавилонскому способу, кроме, быть может, начального приближения $x_0 > 0$, являются приближениями с избытком.

2. Докажите, что при любом $x_0 > 0$ последовательность (x_n) приближений, найденных по вавилонскому способу, стремится к $\sqrt{a}$.

3. К какому пределу будет стремиться эта последовательность, если в качестве x_0 взять некоторое отрицательное число?

Чтобы оценить, насколько быстро числа $x_0, x_1, x_2, \ldots$ приближаются к $\sqrt{a}$, вычислим $\sqrt{19}$, взяв начальное приближение $x_0 = 4$. Вооружившись микрокалькулятором*), находим

$$x_0 = 4{,}0000000;$$
$$x_1 = 4{,}3750000;$$
$$x_2 = 4{,}3589285;$$
$$x_3 = 4{,}3588989;$$
$$x_4 = 4{,}3588989.$$

Как видим, уже четвертое приближение не отличается (при вычислениях с семью знаками после запятой) от третьего. Естественно принять, что $\sqrt{19} \approx 4{,}3588989$.

Читатель может возразить, что незачем было «огород городить»: имея в руках микрокалькулятор, можно было набрать число 19 и затем, нажав всего одну кнопку $\boxed{\sqrt{\ }}$, сразу получить тот же результат $\sqrt{19} \approx 4{,}3588989$. Однако согласитесь, что нас интересовало не столько значение $\sqrt{19}$, сколько достоинства вавилонского способа. Они оказались весьма значительными: уже после третьего повторения однотипной операции (или, как говорят, после третьей *итерации*) мы получили значение $\sqrt{19}$ с семью верными знаками (см. задачу 4).

Задачи

4. Пусть, применяя вавилонский способ, мы вычисляем последовательные приближения $x_0 > 0$, x_1, x_2, ... числа $\sqrt{a}$ с k знаками после запятой, то есть округляем каждый раз $(k+1)$-ю цифру. Докажите, что если приближения стабилизируются в точке x_n (то есть $x_{n+1} = x_n$ с точностью до 10^{-k}, но $x_n > x_{n-1} + 10^{-k}$), то ошибка приближения $\sqrt{a} \approx x_n$ меньше $0{,}75 \cdot 10^{-k}$.

5. Сколько итераций нужно сделать, чтобы, проводя вычисления по вавилонскому способу с k знаками после запятой, получить число $\sqrt{a}$ с k верными знаками после запятой?

Чтобы показать читателю превосходство человеческого интеллекта над любой машиной (в частности, над микрокалькулятором, который лишь выполняет волю человека, является его помощником), мы проведем вычисления с пятнадцатью знаками после запятой. С этой целью примем найденное приближение числа $\sqrt{19}$ за новое исходное приближение x_0 (то есть положим $x_0 = 4{,}3588989$) и вычислим по вавилонскому способу следующее приближение $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{19}{x_0}\right)$. Положим $\frac{19}{x_0} = x_0 + h$, то есть

$$19 = (x_0)^2 + x_0 h. \qquad (3)$$

Мы имеем

$$(x_0)^2 = (4{,}3588989)^2 =$$
$$= (4{,}358 + 8{,}989 \cdot 10^{-4})^2 =$$
$$= 4{,}358^2 + 2 \cdot 4{,}358 \cdot 8{,}989 \cdot 10^{-4} + $$
$$+ 8{,}989^2 \cdot 10^{-8}.$$

Так как наш микрокалькулятор точно вычисляет произведение двух четырехзначных чисел, мы сможем слагаемые в правой части посчитать точно. Теперь, подписав одну под другой три получившиеся десятичные дроби

$$\begin{array}{l} 18{,}992164 \\ \ \ 0{,}0078348124 \\ \ \ 0{,}00000080802121 \end{array}$$

мы можем (вручную, что совсем несложно) найти их сумму. Получаем

$$(x_0)^2 = 19 - 37{,}957879 \cdot 10^{-8}$$

и потому, подставляя в (3), имеем

$$4{,}3588989h = 37{,}957879 \cdot 10^{-8},$$

откуда (с помощью микрокалькулятора) находим

---

*) Тем, у кого микрокалькулятора под рукой нет, придется либо считать вручную, либо поверить написанному.

$$h=8{,}7081347\cdot 10^{-8}=0{,}000000087081347.$$

Наконец (опять вручную), получаем окончательно

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{19}{x_0}\right)=\frac{1}{2}\left(x_0+(x_0+h)\right)=x_0+\frac{1}{2}h=4{,}358898943540673.$$

Интересно, сколько же верных знаков в полученном приближении числа $\sqrt{19}$? Так как приближение $x_0=4{,}3588989$ числа $\sqrt{19}$ имеет ошибку, меньшую $0{,}75\cdot 10^{-7}$ (см. задачу 4), согласно формуле (2) ошибка следующего приближения меньше $\frac{1}{2x_0}(0{,}75\cdot 10^{-7})^2\approx 0{,}6\times 10^{-15}$. Таким образом, все выписанные 15 знаков числа $\sqrt{19}$ — верные:

$$\sqrt{19}=4{,}358898943540673\ldots$$

Вычислите теперь с пятнадцатью знаками после запятой $\sqrt{2}$.

II

Формула, с помощью которой вычислялись последовательные приближения числа $\sqrt{a}$ по вавилонскому способу, может быть записана следующим образом:

$$x_n=f(x_{n-1}),\qquad (4)$$

где

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right).\qquad (5)$$

Легко видеть также, что уравнение (1), которое приближенно решалось этим способом, переписывается с помощью функции (5) в виде

$$f(x)=x.\qquad (6)$$

На рисунке 1 (соответствующем случаю $a=2$, $x_0=0{,}4$) дана геометрическая интерпретация *итерационной последовательности* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Кроме биссектрисы первого координатного угла (она обозначена через Δ) и графика Γ функции (5) на рисунке показана *итерационная ломаная*, которая строится следующим образом. На графике Γ берется точка A_0 с абсциссой x_0 и из точки A_0 проводится горизонтальный отрезок A_0B_1, второй конец которого лежит на биссектрисе Δ. Из точки B_1 проводится вертикальный отрезок B_1A_1, второй конец которого лежит на графике Γ. Затем снова проводится горизонтальный отрезок A_1B_2, оканчивающийся на биссектрисе, вертикальный отрезок B_2A_2, оканчивающийся на графике Γ, и т. д. Легко видеть, что абсциссы точек A_0, A_1, A_2, ... как раз образуют итерационную последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Рисунок наглядно показывает, что последовательность точек A_0, A_1, A_2, ... сходится к точке A^*, в которой график Γ пересекает биссектрису Δ, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^*$, где x^* — абсцисса точки A^*. Так как $A\in\Gamma\cap\Delta$, $f(x^*)=x^*$, то есть x^* — корень уравнения (6).

А что если попробовать применить все это не к конкретной функции (5), связанной с вавилонским способом вычисления корней, а к произвольной функции f? Иначе говоря, рассмотрим уравнение вида (6), выберем «начальное приближение» x_0 и построим итерационную последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ по формуле (4).

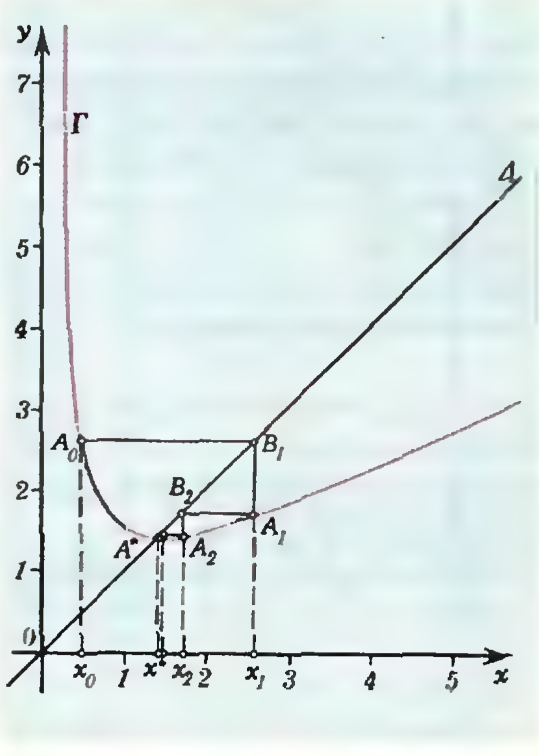


Рис. 1.

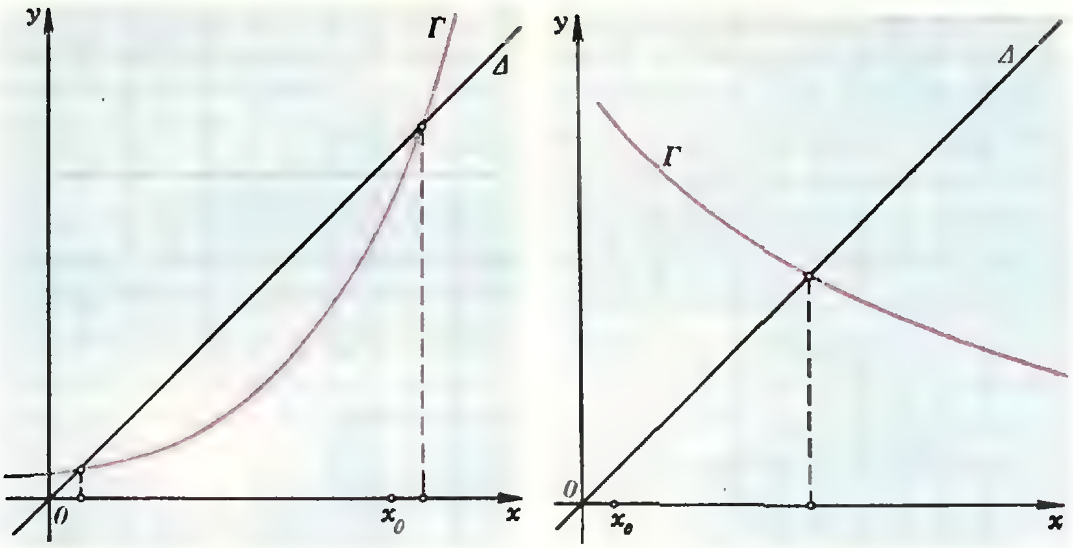


Рис. 2.

Не окажется ли, что и в общем случае эта последовательность имеет предел x^*, являющийся корнем уравнения (6)? *Если бы это было так,* то число x_n (то есть *n-ю итерацию*) мы могли бы считать приближенным значением искомого корня x^*. Такой способ приближенного решения уравнения (6) называется *методом итераций.*

Задачи

6. Постройте итерационную ломаную для функции (5), приняв за начальное приближение x_0 отрицательное число.

7. Постройте итерационные ломаные для функций, графики которых показаны на рисунке 2.

8. Пусть функция f возрастает и непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем $f(a)>a$, $f(b)<b$. Постройте итерационную ломаную, взяв за начальное приближение $x_0=a$. Докажите, что точки x_0, x_1, x_2, ... образуют возрастающую последовательность, расположенную на отрезке $[a; b]$; поэтому (по теореме Вейерштрасса) последовательность (x_n) имеет предел x^*. Докажите, что x^* является корнем уравнения (6). (Таким образом, в этом случае метод итераций является обоснованным.) Докажите также, что $f(x)>x$ при $a \leqslant x<x^*$ (и потому x^* — наименьший корень уравнения (6) на отрезке $[a, b]$).

9. При условиях задачи 8 постройте итерационную ломаную, приняв за начальное приближение $x_0=b$. Обязательно ли корень x^{**} *уравнения (6), найденный в этом случае,* совпадает с корнем x^*, о котором говорится в задаче 8?

10. Пусть функция f дифференцируема на $]0; +\infty[$, существует такое $c>0$, что $f'(x)<0$ при $0<x<c$ и $0<f'(x)<1$ при $x>c$, причем $f(c) \geqslant c$ и существует такое число $b>c$, что $f(b)<b$. (Проверьте, что функция (5) удовлетворяет этим условиям.) Докажите, что уравнение (6) имеет единственный положительный корень x^* и что, приняв за x_0 произвольное положительное число, мы получим итерационную последовательность x_0, x_1, x_2, ..., сходящуюся к этому корню. Докажите также, что последовательность x_1, x_2, ... *монотонна.*

11. Постройте итерационную последовательность (и изобразите соответствующую итерационную ломаную) а) для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x_0=2$; б) для функции $f(x)=$ $=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{25}{6}x+3$ при $x_0=3$.

12. Для функции $f(x)=x^2+3x-3$ постройте итерационные ломаные, взяв а) $x_0=1$; б) $x_0=0{,}99$; в) $x_0=1{,}01$.

13. Постройте итерационные ломаные а) для функции $f(x)=2x-1$ при $x_0=1{,}125$; б) для функции $f(x)=-1{,}5x+6$ при $x_0=2{,}5$.

III

Задачи 11—13 показывают, что метод итераций применим не для всякого уравнения вида (6). Однако имеется достаточно широкий класс функций, для которых этот метод является обоснованным (см. задачи 8, 10).

Практически процесс решения уравнения (6) по методу итераций (если он применим) оканчивается тогда, когда следующее приближение $x_{n+1}=f(x_n)$ не отличается (с требуемой степенью точности) от предыдущего *приближения x_n. Например,* если мы ведем вычисления с тремя знаками после запятой, то итерационный процесс считается завершенным, если числа x_n и x_{n+1} (у каждого из которых выписываются только по три знака после запятой) совпадают. Полученное значение $x_n=x_{n+1}$ и считается приближением искомого корня x^*. Обратите внимание: мы заканчиваем вычисления не потому, что уверены в хорошей точности найденного приближения x_n, а лишь в связи с тем, что (в рамках нашей точности вычислений) итерационный процесс больше ничего уже не может дать: $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{0{,}175x^2 - 0{,}00875x + 0{,}00011} + 0{,}58166x + 0{,}0105 = x. \qquad (7)$$

Легко проверить, что функция f, стоящая в левой части этого уравнения, возрастает и непрерывна на отрезке $[0; 10^5]$, причем $f(0) > 0$, $f(10^5) \approx \approx 99\,999 < 10^5$. Следовательно, в силу результата задачи 8, метод итераций применить можно.

Будем проводить вычисления с точностью до 0,001, то есть будем сохранять у каждого значения x_1, x_2, ... три цифры после запятой (округляя четвертую цифру). С помощью микрокалькулятора легко находим (при $x_0 = 0$):

$$\begin{aligned} x_0 &= 0{,}000;\\ x_1 &= 0{,}021;\\ x_2 &= 0{,}025;\\ x_3 &= 0{,}026;\\ x_4 &= 0{,}027;\\ x_5 &= 0{,}027. \end{aligned}$$

Итерационный процесс завершился: в пределах принятой точности вычислений мы получили $x^* \approx 0{,}027$.

Чтобы выяснить, насколько хорошим является найденное приближение, посмотрим, что дает итерационный процесс при вычислениях с точностью до 0,0001; при этом в качестве x_0 примем уже найденное в предыдущей серии вычислений значение 0,027. Мы находим (каждый раз округляя пятую цифру после запятой):

$$\begin{aligned} x_0 &= 0{,}0270;\\ x_1 &= 0{,}0274;\\ x_2 &= 0{,}0277;\\ x_3 &= 0{,}0280;\\ &\ldots\\ x_8 &= 0{,}0292. \end{aligned}$$

Последовательные приближения медленно, но неуклонно возрастают. Если у читателя хватит терпения сделать еще несколько десятков (!) итераций, он, наконец, найдет установившееся значение (то есть доберется до приближения, на котором итерационный процесс останавливается): $x^* \approx 0{,}1053$. Ничего похожего на предыдущее приближение!

Если бы мы вздумали проводить вычисления с семью знаками после запятой (с помощью микрокалькулятора), то в результате проведения нескольких тысяч итераций мы бы остановились на значении $x^* \approx 4{,}1890502$. А «истину» (то есть значение корня x^* уравнения (7)) читатель легко найдет, если перенесет второе и третье слагаемое из левой части в правую, возведет в квадрат и решит получившееся квадратное уравнение: $x^* = 4{,}1984362\ldots$ (второй корень квадратного уравнения является посторонним для уравнения (7)). Как видите, даже микрокалькулятор при применении метода итераций к уравнению (7) дает только одну верную цифру после запятой!

Этот пример (конечно, специально подобранный) показывает, что при применении метода итераций нужно не «вслепую» останавливаться на том или ином приближении, а иметь точные средства оценки той ошибки, которую мы при этом допускаем. Увы, современная вычислительная математика далеко не всегда прибегает к оценке точности установившихся значений (особенно, при решении практических задач). Происходит это, прежде всего, потому, что «как правило» такие оценки не нужны, поскольку (при применении итерационных процессов к решению алгебраических, дифференциальных, операторных и других уравнений) установившиеся значения обычно бывают хорошими приближениями. Но где гарантия, что в данной конкретной задаче не встретятся «неприятности», подобные тем, о которых шла речь в рассмотренном выше примере? Такие гарантии может дать только математически обоснованная оценка совершаемой ошибки. Однако во многих задачах оценка ошибки затруднительна и требует порой более сложных вычислений (и даже теоретических исследований), чем само нахождение последовательных приближений — в этом состоит другая причина того, что при решении практических задач вычислители ограничиваются нахождением установившихся значений с помощью ЭВМ, производящих вычисления с достаточно большим числом знаков. Трудно сказать, что лучше: тратить дорогое машинное время на проверку точности решения каждой задачи или решать большее количество практических задач, получая «как правило» хорошую точность решения...

Задачи

14. Примените метод итераций к уравнению (6), где $f(x)=0{,}9999x+0{,}0004$. Докажите, что если итерационный процесс решения, проводимый с четырьмя знаками после запятой, останавливается в точке x_n, то ошибка приближения $x^* \approx x_n$ примерно равна единице, то есть сомнительны не только знаки после запятой, но и целая часть приближения x_n. (Эти соображения и использованы при построении примера 1; в этом примере $0{,}9999<f'(x)<1$ при $x>0{,}12$.)

15. Пусть функция f удовлетворяет условиям $f(a)>a$, $f(b)<b$ и $|f'(x)|<q<1$ при $x \in [a;b]$. Тогда уравнение (6) имеет на отрезке $[a;b]$ единственный корень x^*. Докажите, что при решении уравнения (6) методом итераций

$$|x_{n+1}-x_n| \leqslant |x_1-x_0| \cdot q^n$$

$$|x^*-x_n| \leqslant |x_1-x_0| \cdot \frac{q^n}{1-q}.$$

16. Примените эти оценки к функции (5).

17. Решите методом итераций уравнение $0{,}6095+0{,}274\sin x=x$ (пользуясь микрокалькулятором). После скольких итераций процесс останавливается? Сколько верных знаков имеет полученное приближение?

18. Решите методом итераций уравнение $\sqrt{1+x}=x$, взяв $x_0=0$. Сравните полученный результат с корнем, получаемым при «обычном» решении этого иррационального уравнения. Докажите, что n-е приближение имеет вид

$$x_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}} \text{ (n единиц).}$$

IV

В задачах 8, 10 и 15 указаны условия, при выполнении которых метод итераций заведомо приводит к цели. А как быть, если эти условия не выполнены?

Пусть рассматривается уравнение $g(x)=0$, где $g(a)<0$, $g(b)>0$, функция g имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывную производную и $g'(x)>0$ при $x \in [a;b]$. Таким образом, функция g возрастает на отрезке $[a;b]$, и уравнение $g(x)=0$ имеет на этом отрезке единственный корень x^*. Чтобы сделать применимым метод итераций, обозначим через p_1 и p_2 такие положительные числа, что $p_1 \leqslant g'(x) \leqslant p_2$ на отрезке $[a;b]$. Заменим теперь уравнение $g(x)=0$ равносильным ему уравнением $x+\alpha \cdot g(x)=x$, где α подберем так, чтобы функция

$$f(x)=x+\alpha \cdot g(x)$$

удовлетворяла условиям задачи 15. (Проверьте, что это будет, например, при $\alpha=-\frac{2}{p_1+p_2}$, $q=\frac{p_2-p_1}{p_2+p_1}$.) Таким образом, мы заменили уравнение $g(x)=0$ на равносильное уравнение $f(x)=x$, к которому метод итераций уже применим.

Если $g'(x)<0$ при $x \in [a;b]$ применим тот же прием. (В этом случае p_1 и p_2 отрицательны и $\alpha=-\frac{2}{p_1+p_2}>$ >0.)

Пример 2. Решим методом итераций уравнение

$$x^2-x=\cos x.$$

При $0 \leqslant x \leqslant 1$ левая часть неположительна, а правая положительна; поэтому на отрезке $[0;1]$ корней нет. Переписав уравнение в виде

$$x^2-x-\cos x=0,$$

замечаем, что функция g, стоящая в левой части, имеет производную $g'(x)=2x-1+\sin x$, которая при $x \geqslant 1$ положительна, то есть g возрастает на $[1;+\infty[$. Поскольку $g(1)<0$ и $g(2)>0$, на луче $[1;+\infty[$ имеется ровно один корень рассматриваемого уравнения, причем он расположен на отрезке $[1,2]$. С помощью микрокалькулятора находим $g(1)=-0{,}54\ldots$; $g(1{,}1)=-0{,}34\ldots$; $g(1{,}2)=-0{,}12\ldots$; $g(1{,}3)=0{,}12\ldots$. Таким образом, искомый корень x^* расположен на отрезке $[1{,}2;1{,}3]$. Функция g' возрастает на $[1;+\infty[$ (поскольку ее производная $g''(x)=$ $=2+\cos x$ положительна). Следовательно, $p_1 \leqslant g'(x) \leqslant p_2$ на отрезке $[1{,}2;1{,}3]$, где $p_1=g'(1{,}2)\approx 2{,}332$, $p_2=g'(1{,}3)\approx 2{,}564$. Таким образом, $\alpha=-\frac{2}{p_1+p_2}\approx -0{,}401$. Взяв для простоты $\alpha=-0{,}4$, получаем уравнение

(Окончание см. на с. 37)

Первоапрельский калейдоскоп

А. А. БОРОВОЙ

Приближается первое апреля — день веселых розыгрышей, мистификаций и маленьких обманов. Лаборатории «Кванта» тоже захотелось приобщиться к этому празднику. Довольно долго мы раздумывали над тем, как деликатнее обмануть читателя, и, наконец, решили действовать по рецепту: чтобы тебе не поверили, надо говорить чистую правду. Поэтому, если наш рассказ покажется вам по меньшей мере странным, не поленитесь и проверьте сказанное на опыте, прежде чем кричать: «С первым апреля! Никому не верю!».

Знакомый всем сифон

Это незатейливое приспособление для перекачивания жидкости из одного сосуда в другой известно с незапамятных времен. Различные конструкции сифонов изобретал еще Герон Александрийский, живший две тысячи лет тому назад.

Как же устроен простейший сифон? Представьте, что вам надо перелить жидкость из одного сосуда в другой, расположенный ниже первого (рис. 1). По каким-то причинам наклонять сосуд и лить жидкость через край неудобно. В таком случае берется гибкая трубка и опускается одним концом в верхний сосуд, другим — в нижний. Это и есть сифон (не случайно слово «сифон» в переводе с греческого означает «трубка», «насос»). Чтобы он начал действовать, его необходимо предварительно заполнить жидкостью. Для этого чаще всего используют простой (но не всегда приятный) способ: опустив в жидкость один конец трубки, ртом отсасывают из нее воздух, зажимают другой конец и быстро погружают его во второй сосуд.

Таким образом, для работы сифона надо:

— хотя бы один сосуд;

— предварительно наполненную жидкостью трубку, у которой «выливное» колено опущено ниже уровня жидкости в сосуде;

— атмосферное давление.

Хотите верьте, хотите нет, но почти все, что перечислено, на самом деле вовсе не обязательно.

Начнем с атмосферного давления. Действительно ли оно нужно для работы сифона? «Совершенно необходимо,— утверждают многие,— ведь оно подпирает жидкость, не дает ей разорваться внутри трубки на перегибе». В своем роде это утверждение — первоапрельская шутка. Если поместить сифон под колокол воздушного насоса, он будет работать и без атмосферного давления, лишь бы только жидкость не вскипела и пузырьки не перекрыли сечение трубки. Столб жидкости не разрывается из-за сил молекулярного сцепления.

Теперь о предварительном наполнении трубки жидкостью. Некоторые трубки заполнять не приходится — они это делают сами.

Изготовьте трубку, изображенную на рисунке 2. Лучше всего из стекла

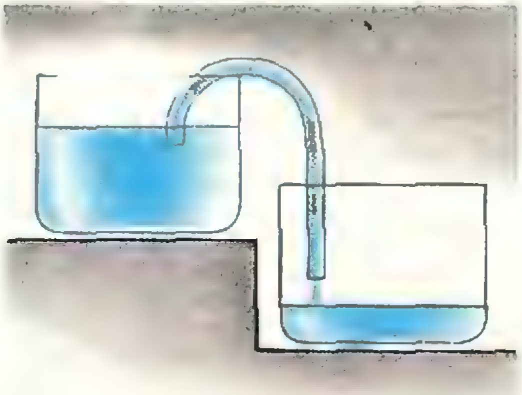


Рис. 1.

(правда это трудно), но можно и из жести. Закройте узкий конец пальцем, а широкий опустите в верхний сосуд и резко отпустите палец. Сифон начнет переливать воду. Почему так получилось, понять совсем нетрудно. Попробуйте это сделать сами.

Существует и другой тип «самонаполняющихся» трубок — фитили. Если сосуды соединить вместо трубки фитилем, жидкость, хотя и медленно, будет перетекать по нему. Здесь вступают «в игру» капиллярные явления.

Остается сказать, что и сама трубка требуется не всегда. Так, в книге Дж. Уокера «Физический фейерверк» можно прочитать про «самоперетекающие» жидкости: «Некоторые жидкости, например жидкий полиэтилен, могут сами вытекать из сосуда, если только дать толчок действию такого «сифона», вылив часть жидкости...». Поскольку нет никакой уверенности в том, что у вас дома хранится жидкий полиэтилен, советуем испытать другие жидкости. Возможно, вам удастся добиться нужного эффекта.

Заметим еще, что существует одна поистине замечательная жидкость, которая может вытекать из сосуда, сама поднимаясь по его стенкам. Это жидкий гелий, точнее — гелий II. Так называют эту жидкость при температуре ниже 2,17 К, когда у нее появляются совершенно удивительные свойства. И прежде всего — сверхтекучесть, то есть полное отсутствие вязкости*). Вот что пишут об этом явлении Л. Д. Ландау и А. И. Китайгородский в книге «Физика для всех»:

«... Гелий II способен сам «вылезать» из стакана или пробирки, куда от налит.

На рисунке 3 показана схема проведения этого опыта. Пробирку с гелием II помещают в дьюаре над гелиевой ванной. «Ни с того ни с сего» гелий поднимается по стенке пробирки в виде тончайшей совершенно незаметной пленки и перетекает через край; с донышка пробирки капают капли.

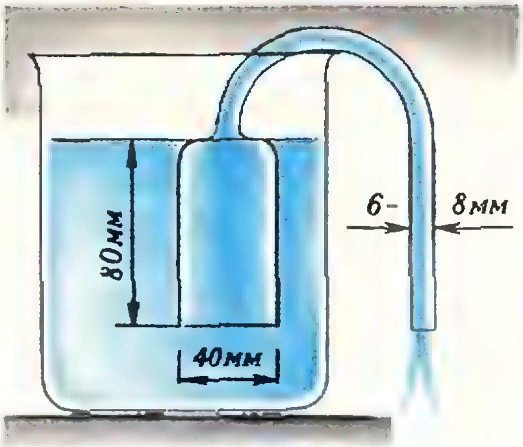


Рис. 2.

Надо вспомнить, что благодаря капиллярным силам ... молекулы всякой жидкости, смачивающей стенку сосуда, взбираются вверх по этой стенке и образуют на ней тончайшую пленку, ширина которой по порядку величины равна одной миллионной доле сантиметра. Эта пленочка незаметна для глаза, да и вообще ничем себя не проявляет для обычной вязкой жидкости.

Картина совершенно меняется, если мы имеем дело с лишенным вязкости гелием... Через борт стакана или пробирки поверхностная пленка образует сифон, по которому гелий переливается через край сосуда.»

Понять поведение жидкого гелия можно только с точки зрения квантовой механики.

Вот видите, сколько неожиданностей таит в себе обычный сифон.

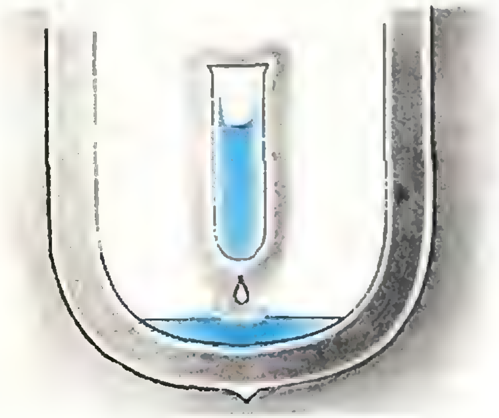


Рис. 3.

---

*) Вязкость жидкости обусловлена трением, возникающим между соседними слоями жидкости при их относительном движении.

Оптические иллюзии

«Если на клетке слона прочтешь надпись «буйвол», не верь глазам своим», — так советовал действительный статский советник, директор Пробирной Палатки Козьма Петрович Прутков.

Мудрый человек был не совсем прав. В основном, глазам своим можно и должно верить, поскольку наибольшее количество информации об окружающем мире человек получает именно с помощью зрения. Правда, иногда эта информация представляется совершенно неправдоподобной, а иногда и вовсе оказывается неверной.

Сделаем совсем простой опыт. Сдвинем большой и указательный пальцы так, чтобы между ними образовалась щель, и посмотрим сквозь нее на свет лампы. Когда щель станет совсем узкой, в центре появится черная полоска. Что это — обман зрения?

Чуть-чуть усложним опыт. Для этого разгладим кусочек алюминиевой фольги (например, обертку от шоколадной конфеты) и сделаем в ней бритвой разрез длиной 4—5 см. Если теперь посмотреть одним глазом через этот разрез на свет матовой лампочки, в центре тоже можно увидеть черную полоску. Кроме нее будут видны и более слабые боковые темные полосы.

Опыты действительно очень простые, а объяснить их далеко не просто. Принято считать, что происхождение темных полос связано с дифракцией света — огибанием волнами препятствий. (Возможно, однако, что немалую роль играет здесь и физиологический эффект.)

Но когда же глаза действительно обманывают нас? Почему это происходит? Какие цели при этом преследует природа?*)

Сразу скажем, что обманы следует отнести не за счет оптической системы глаза, а за счет того, что нервная система, мозг человека «подправляют», «домысливают» многие образы. Так из плоского рисунка возникает объемный конус (рис. 4) или на границе черного и белого появляются контрастные полосы, которые как бы пытаются сделать более резкими переходы освещенности.

Чтобы наблюдать эти полосы (называемые полосами Маха), сделаем следующий опыт. Диск из белого картона с нанесенным на нем черной тушью рисунком (рис. 5) приведем в быстрое вращение. Естественно ожидать увидеть в центре белый круг, затем серый и, наконец, черный с относительно плавными переходами освещенности. Однако в действительности картина представляется несколько иной: центральный белый круг опоясывает узкое яркое светлое кольцо, а на границе темного кольца видна черная полоса максимальной густоты. Это и есть полосы Маха.

В некоторых случаях их появление очень полезно. Например, они дают нам возможность читать, четко воспринимая отдельные буквы. Белизна бумаги рядом с буквами кажется ярче, а границы букв — чернее, чем это есть в действительности.

Раз уж речь зашла о вращающихся дисках и связанных с ними оптических обманах, нельзя не вспомнить еще один диск — так называемый диск Бенхэма. С его помощью можно получать красный, голубой и зеленый цвета при смешивании только белого и черного цветов. Про этот эффект часто пишут в различных популярных изданиях (см., например, журнал «Наука и жизнь»: 1970, № 11 или 1971, № 10), поскольку его очень легко наблюдать.

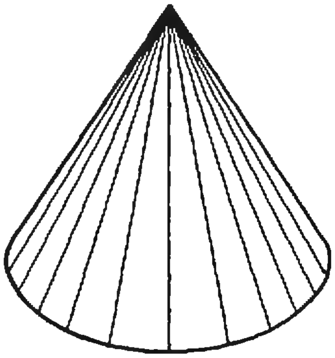


Рис. 4.

---

*) Тем, кто всерьез заинтересуется этими и аналогичными вопросами, связанными с физикой зрения, советуем прочитать книгу С. И. Вавилова «Глаз и Солнце». Совсем недавно появилось последнее издание этой замечательной книги.

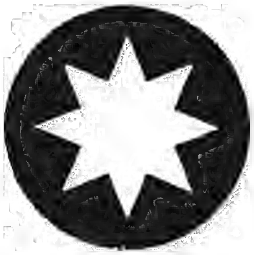


Рис. 5.

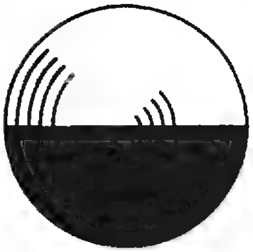


Рис. 6.

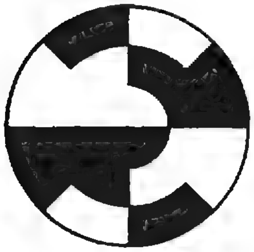


Рис. 7.

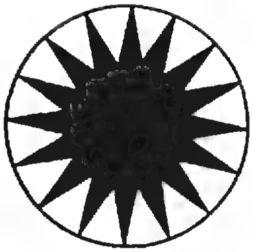


Рис. 8.

Из белого картона или плотной белой бумаги вырежем диск радиусом 3—4 см, раскрасим его черной тушью так, как показано на рисунке 6 и приведем во вращение со скоростью от 50 до 200 оборотов в минуту. Можно вращать его вручную, проткнув в центре спицей, или используя какие-либо домашние приспособления, например дрель. Однако лучше всего закрепить диск на оси микромотора для электрических моделей и изменять скорость вращения с помощью реостата.

Теперь ярко осветим диск лампой и некоторое время будем внимательно вглядываться в него. Тогда вдоль обода диска можно увидеть красные линии, а около его центра — синие. Изменим направление вращения и увидим, что изменился и порядок цветов: снаружи будут синие круги, у центра — красные.

Варианты окраски диска возможны самые разные, например, такие, как показано на рисунках 7 и 8. Скорость вращения диска тоже можно менять по своему усмотрению.

В некоторых экспериментах диск освещался светом определенной длины волны (например, натриевой лампой) — красные, синие и зеленые цветовые круги не пропадали.

Как же объяснить этот опыт? Предлагались различные гипотезы, многие из них оказались несостоятельными. Сейчас можно прочесть следующее объяснение: чередование белого и черного цветов перед глазами рождает нервные импульсы, которые поступают в мозг; определенная частота этих импульсов и вызывает ощущение определенного цвета.

Наша обложка

Электрический разряд в лаборатории

Фотография, воспроизведенная на первой странице обложки, сделана в учебной лаборатории кафедры техники высоких напряжений Московского ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции энергетического института, одного из ведущих технических вузов страны.

На фотографии изображена часть лабораторной установки, с помощью которой отрабатываются методы защиты высоковольтного оборудования. В частности, на ней исследуется зависимость напряжения, вызывающего ту или иную форму газового разряда, от емкости разрядного промежутка.

На переднем плане виден электрод в форме полушария. За ним находится стеклянная пластина, еще дальше — металлическая заземленная плоскость. Между электродом и плоскостью создают высокое напряжение. Возникающий электрический разряд развивается по поверхности стекла, проходя последовательно разные стадии (сначала коронный, затем искровой и, наконец, дуговой разряд). На фотографии запечатлен процесс перехода коронного разряда в искровой.

Равномерное движение

М. И. БАШМАКОВ

Мы здесь рассматриваем *прямолинейное равномерное движение*, то есть движение по фиксированной прямой с постоянной скоростью. Выбрав направление на этой прямой, можно записать уравнение движения в виде

$$s=vt, \tag{1}$$

где t — время движения, s и v — проекции векторов перемещения и скорости на выбранную ось. Тогда s и v могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Средняя скорость

Формулу (1) часто записывают в виде $v=s/t$. Соотношение $v=s/t$ имеет смысл и для неравномерного движения (движения с переменной скоростью), но в этом случае v является по определению *средней скоростью* движения.

В качестве разминки, постарайтесь, не составляя уравнений, ответить на следующие вопросы:

1. *Одна машина шла первую половину пути со скоростью 30 км/час, а вторую — со скоростью 50 км/ч. Вторая машина шла весь путь со скоростью 40 км/ч. Какая из машин затратила на всю дорогу меньше времени?*

2. *Одна машина первую половину времени движения шла со скоростью 30 км/ч, а вторую — со скоростью 50 км/ч. Вторая машина двигалась столько же времени, сколько и первая, причем ее скорость была все время 40 км/ч. Какая из машин прошла большее расстояние?*

(Ответы указаны в подписи к рисунку 1).

Возможные ошибки при ответах на вопросы о равномерном движении связаны с тем, что мы иногда путаем характер зависимости между двумя из величин s, v и t при фиксированной третьей.

При фиксированном перемещении зависимость между временем и скоростью — обратно пропорциональная. При этом, если перемещение $2s>0$ состоит из двух одинаковых участков s, которые проходятся с постоянными (но разными) скоростями, первый за время t_1, второй за время t_2, то средняя скорость $v=2s/(t_1+t_2)$ меньше среднего арифметического скоростей на каждом из участков, равного

$$\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{s}{t_1}+\frac{s}{t_2}\right)=\frac{s(t_1+t_2)}{2t_1t_2}.$$

(Действительно, разность

$$\frac{s(t_1+t_2)}{2t_1t_2}-\frac{2s}{t_1+t_2}=\frac{s(t_1-t_2)^2}{2t_1t_2(t_1+t_2)}$$

очевидно, положительна, то есть $v<\frac{v_1+v_2}{2}$).

Так, в задаче 1 средняя скорость первой машины меньше, чем $(30+50)/2$ км/час $=40$ км/ч, значит вторая машина (шедшая со скоростью 40 км/ч) приедет быстрее.

При фиксированном времени движения зависимость между перемещением и скоростью — прямо пропорциональная. Поэтому если в течение двух одинаковых отрезков времени t происходит равномерное движение с разными скоростями v_1 и v_2, то средняя скорость v на всем пути будет равна среднему арифметическому скоростей на отдельных участках. (Действительно,

$$v=\frac{s_1+s_2}{2t}=\frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{t}+\frac{s_2}{t}\right)=\frac{v_1+v_2}{2}).$$

Так, в задаче 2 средняя скорость первой машины равна скорости второй ($(50+30)/2=40$) и поэтому они за одинаковое время совершают одинаковое перемещение.

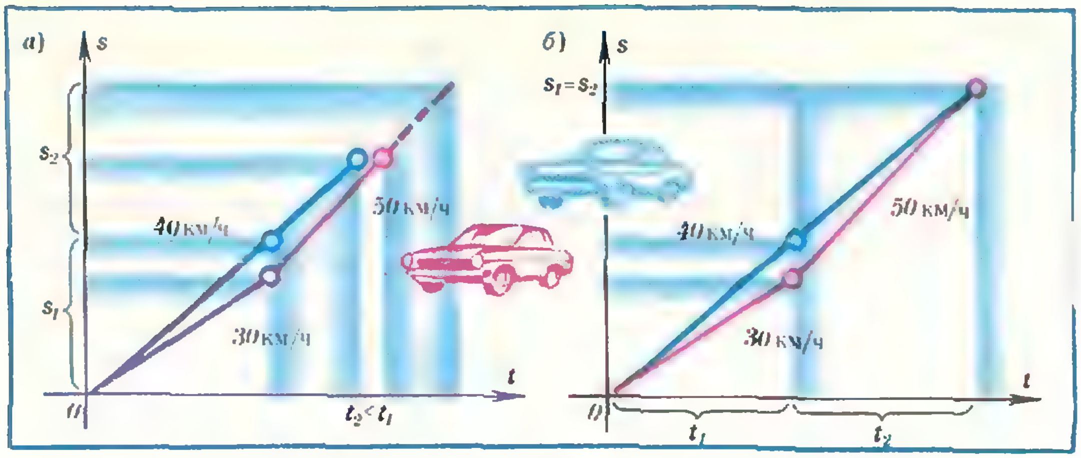


Рис. 1. а) При $s_1=s_2$ вторая машина затратила меньше времени. б) При $t_1=t_2$ обе машины прошли одинаковое расстояние.

Полезно изображать движение графически, рассматривая перемещение как функцию от времени: $s=s(t)$. Для первых двух задач это сделано на рисунке 1, *а*, *б*.

В заключении этого раздела самостоятельно решите следующую задачу:

3. *Пусть* s_i, t_i *— положительные числа* ($i=1, 2, ..., n$). *Докажите, что дробь*

$$\frac{s_1+s_2+...+s_n}{t_1+t_2+...+t_n}$$

лежит между наименьшей и наибольшей из дробей

$$\frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2}, ..., \frac{s_n}{t_n}.$$

Сформулируйте результат в терминах средних скоростей.

Относительное движение

К совсем простым задачам, часто неверно решаемым, относится задача

4. *Когда катер затрачивает на движение туда и обратно на данное расстояние меньше времени — при движении по реке (с постоянной скоростью течения) или в стоячей воде?*

Кажется очевидным, что время будет одинаковым — ведь при движении по реке туда и обратно скорость течения в одну сторону прибавляется к скорости катера, а в другую — вычитается, так что изменения в скорости компенсируют друг друга. Однако это не так. На самом деле катер обернется быстрее в стоячей воде!

Графики движения катера показаны на рисунке 2.

Даже если вы правильно угадали ответ, очень советую аккуратно обо-

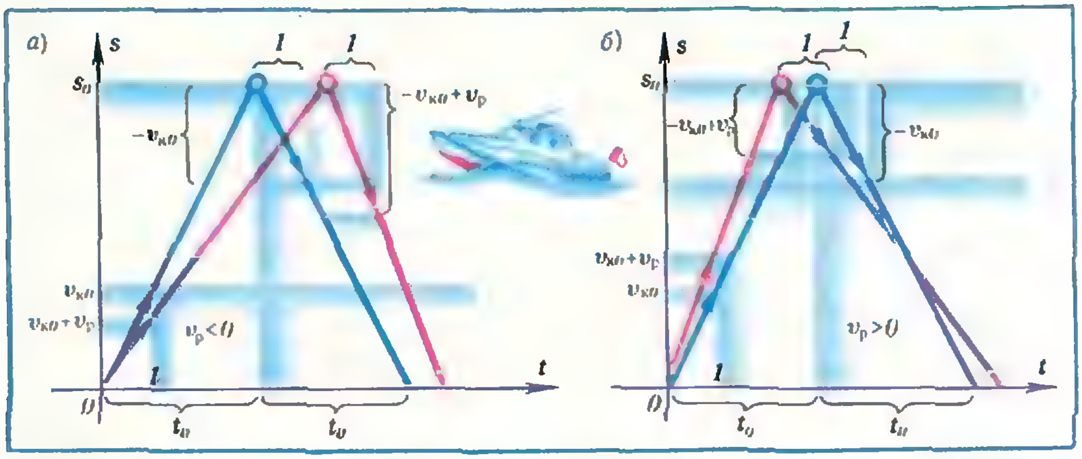
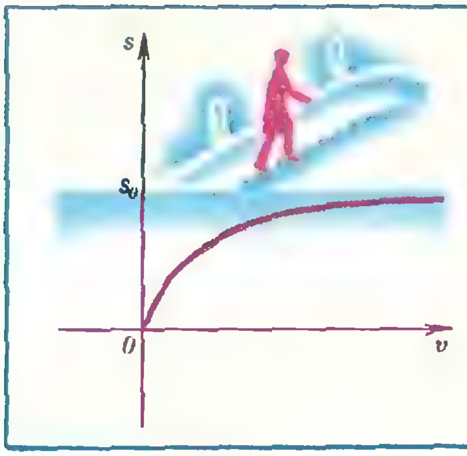


Рис. 2. а) Катер сначала идет против течения. б) Катер сначала идет по течению.



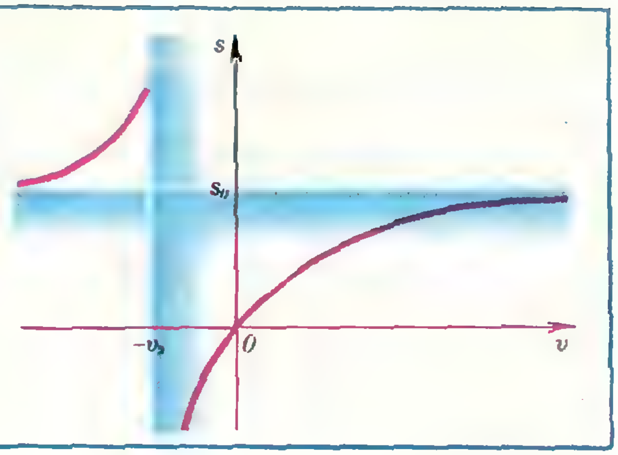


Рис. 3.

Рис. 4.

сновать его; кроме формулы (1), вам потребуется обычная формула сложения скоростей:

$$v_к = v_{ко} + v_р,$$

утверждающая, что скорость $v_к$ катера в реке равна сумме его скорости в стоячей воде $v_{ко}$ и скорости реки $v_р$.

В задаче с катером мы столкнулись с наложением двух равномерных движений — движения катера и движения воды в реке. С такой ситуацией связано много интересных и неожиданных задач. Попробуйте без вычислений решить такую задачу:

5. *По движущемуся вверх эскалатору в направлении движения идет человек и считает пройденные ступени. Скорость человека относительно неподвижного эскалатора равна v. Как выглядит график зависимости числа s пройденных им ступеней от скорости v?*

Прежде чем рисовать график, ответьте для себя на вопрос: возрастает или убывает функция с ростом скорости v? Грубый эскиз графика изображен на рисунке 3.

Давайте изучим ситуацию более подробно. Обозначим общее число ступеней (неподвижного) эскалатора через s_0, скорость движения эскалатора через $v_э$, скорость подъема человека через v, число ступеней, пройденных человеком, через s. Эти величины связаны соотношением

$$\frac{s}{v} = \frac{s_0 - s}{v_э}$$

(мы приравняли время подъема человека и время подъема эскалатора).

Отсюда находим

$$s = \frac{s_0 v}{v+v_э} = \frac{s_0 v + s_0 v_э - s_0 v_э}{v+v_э} = s_0 - \frac{s_0 v_э}{v+v_э}.$$

Начертим график функции

$$s = s_0 - \frac{s_0 v_э}{v+v_э}, \qquad (2)$$

считая, что v может принимать любые (в том числе и отрицательные) значения. График изображен на рисунке 4.

Глядя на график (и вспоминая условия задачи), ответьте на следующие вопросы:

а) Что происходит с s при неограниченно возрастающем v?

б) Какой смысл имеют отрицательные значения v?

в) Как можно объяснить, что s неограниченно возрастает, если v приближается к $(-v_э)$? Представьте себе, что вы встали на первую ступеньку движущегося вверх эскалатора и начали спускаться вниз с той же скоростью, что и сам эскалатор. Далеко ли вы уйдете? А сколько ступеней вы можете пройти?

г) Как изменится график функции (2), если одновременно заменить v на kv и $v_э$ на $kv_э$?

Ответ на последний вопрос — график не изменяется — означает, что число пройденных ступенек зависит только от отношения скоростей человека и эскалатора.

В заключении этого раздела предлагаем еще две задачи.

6. *Человек, поднимаясь по эскалатору, насчитал 100 ступеней, и двигаясь с вдвое большей скоростью,* *насчитал 120 ступеней. Сколько ступеней на неподвижном эскалаторе?*

7. *Человека, идущего вдоль трамвайных путей, каждые 7 минут обгоняет трамвай, а каждые 5 минут трамвай проходит навстречу. Как часто ходят трамваи?*

Кусочно-линейное движение

Простота формулы $s=vt$ обусловлена тем, что за начало отсчета выбрана точка на прямой, в которой находится движущееся тело в момент времени $t=0$. Если сдвинуть начало отсчета на s_0 (влево или вправо, в зависимости от знака), уравнение *равномерного движения примет вид*

$$s=s_0+vt. \tag{3}$$

На графике (рис. 5) движение изображается прямой (пересекающей ось s в точке s_0) наклон которой зависит от скорости v. Положительный наклон (острый угол) соответствует положительным скоростям (то есть движению в положительном направлении оси s), отрицательный — движению в обратном направлении.

Формула (3) полезна в тех случаях, когда мы на едином графике изображаем *кусочно-линейное* движение, то есть движение, которое является равномерным (но с разными скоростями) на соседних отрезках времени. На графике такое движение изображается в виде ломанной линии, каждое звено которой задается функцией вида (3) на соответствующем отрезке времени (рис. 6, *а*). Если же изобразить скорость такого движения как функцию времени $v=v(t)$, то получим *кусочно-постоянную* (ступенчатую) функцию (рис. 6, *б*). Связь между графиками кусочно-постоянной функции скорости и кусочно-линейной функции пути хорошо видна на рисунке 6.

Мы теперь воспользуемся этими соображениями, чтобы решить более трудную (олимпиадную) задачу, на первый взгляд не имеющую отношения к равномерному движению.

8. *По кругу выписано 10 чисел, сумма которых равна нулю. Мы начинаем с одного из них, например, a_1, и последовательно складываем их по кругу (скажем, по часовой стрелке).*

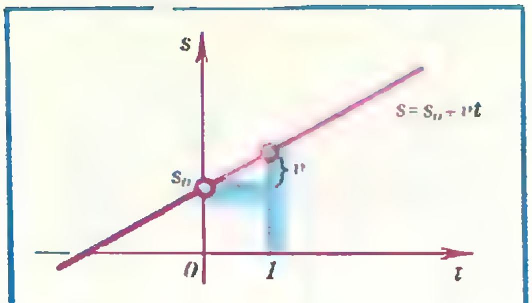


Рис. 5.

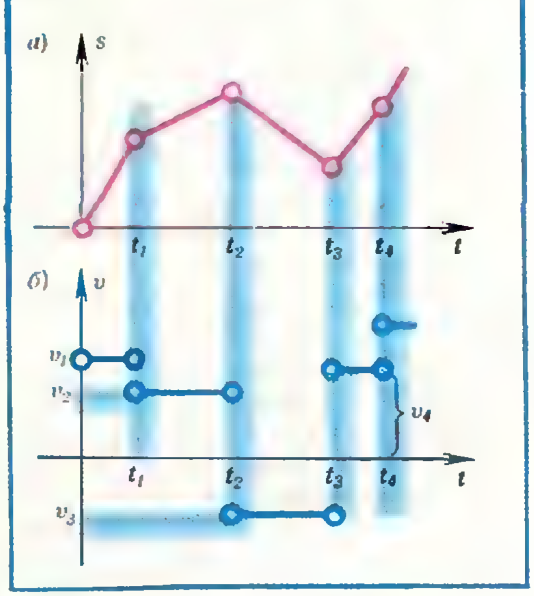


Рис. 6.

Получим суммы a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+ $+a_3$, ..., $a_1+a_2+\ldots+a_{10}=0$. Докажите, что можно так выбрать начальное число, что все эти суммы будут неотрицательны.

Для решения представим себе, что $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — скорости движения на десяти равных отрезках времени, которые примем за единицу.

Считая, что в начальный момент путь равен нулю, получим, что путь s через единицу времени будет равен a_1, через две единицы — a_1+a_2, и т. д. График такой функции изобразится ломаной, начинающейся и кончающейся на оси t, так как по условию $a_1+a_2+\ldots+a_{10}=0$ (рис. 7, *а*). Можно считать, что движение повторяется периодически — через десять единиц времени скорость снова равна a_1 и т. д. График движения представится в виде периодически повторяющейся 10-звенной ломаной (рис. 7, *а*). Начало отсчета в другой точке означает

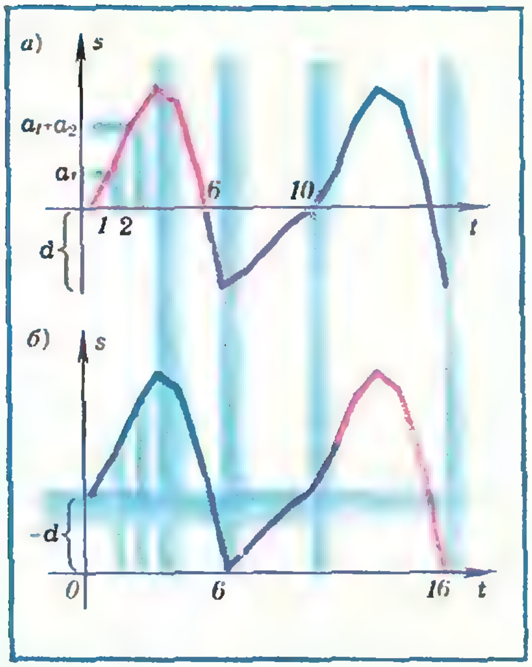


Рис. 7.

перенос начала координат в одну из вершин ломаной. Что означает неотрицательность сумм? Она означает, что все вершины ломаной лежат выше оси времени (или на ней). Сначала мы выбрали начальную точку произвольно (рис. 7, *а*). Теперь ясно, что если перенести начало координат в вершину ломаной, для которой значение наименьшее, и начать отсчет от этой точки, то последовательные суммы будут неотрицательны (рис. 7, *б*).

9. *На кольцевой дороге расположено 10 пунктов, в каждом из которых шофер может получить 20 литров бензина. На все кольцо ему нужно все 200 литров. Доказать, что он может так выбрать начальный пункт движения, что забирая по пути бензин, он сможет проехать все кольцо. Ограничений на объем бензобака нет.*

10*. *Несколько человек наблюдало за неравномерно ползущей улиткой. Каждый наблюдатель следил за улиткой одну минуту и отметил, что средняя скорость улитки на наблюдаемом участке равна 1 см/мин. Улитка ползла 6 минут и при этом в каждый момент времени за ней кто-нибудь наблюдал. Какое наименьшее и какое наибольшее расстояние могла проползти улитка?*

Указание. Легко сообразить, что если улитка ползет равномерно, то за 6 минут она проползет 6 см. Попробуйте сначала заставить двигаться улитку и так организовать наблюдение за ней, чтобы она проползла при соблюдении условий задачи больше 6 см и меньше 6 см. «Сдвинувшись» с 6 см, вам проще будет получить правильный ответ.

Эффект Мёссбауэра

(Начало см. на с. 7)

магнитные и электрические поля во многих соединениях. Это позволило глубже понять механизм таких взаимодействий и сделать еще один шаг в познании внутренней структуры твердого тела.

В заключение рассмотрим еще одно интересное применение эффекта Мёссбауэра. Оказывается, при движении фотонов против сил тяготения происходит уменьшение их энергии и, следовательно, частоты света (увеличение длины волны), то есть наблюдается так называемое «красное» смещение спектра. При движении фотонов «по полю» должно наблюдаться «фиолетовое» смещение. Использование эффекта Мёссбауэра позволило осуществить чрезвычайно тонкий красивый опыт по определению изменения энергии γ-фотонов при их движении в гравитационном поле.

В опыте Р. Паунда и Г. Ребки источник и поглотитель — железо ^{57}Fe — располагались в башне на высоте $H=22{,}6$ м друг от друга: источник наверху, а поглотитель с детектором у основания башни. Затем их меняли местами. Как показывает расчет, который мы здесь опускаем, в этом случае относительное изменение частоты квантов $\approx 2{,}5 \times 10^{-15}$. Эффект Мёссбауэра позволил заметить даже такое небольшое изменение частоты.

Можно с уверенностью сказать, что среди последних научных открытий эффект Мёссбауэра — одно из наиболее плодотворных.

Проводящая сфера в задачах по электростатике

С. А. ЮРСКИЙ

Сферическая поверхность — одна из самых простых в геометрии. Близкую к ней поверхность в природе имеют многие тела: Солнце и Земля, капли дождя и ягоды рябины, и даже электроны в нашем воображении рисуются маленькими шариками.

Тела сферической формы — частые гости и в задачах по электростатике. Нередко это связано с тем, что сферическая симметрия позволяет значительно упростить многие математические вычисления без ущерба для физического содержания.

Прежде чем приступить к разбору конкретных задач, обсудим некоторые общие вопросы электростатики.

В изолированной системе тел, какие бы изменения в ней не происходили, алгебраическая сумма положительных и отрицательных зарядов остается постоянной.

Электрические взаимодействия можно описать количественно. В простейшем случае двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся в вакууме на расстоянии r друг от друга, сила взаимодействия между ними определяется законом Кулона

$$F=k\frac{q_1q_2}{r^2},$$

где k — численный коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. В СИ его записывают в виде $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$ (здесь ε_0 — электрическая постоянная). Неточечные заряды, конечно, тоже действуют друг на друга, но их сила взаимодействия уже не определяется приведенной формулой. В таком случае заряженные тела следует мысленно разбить на точечные заряды, найти силу взаимодействия для каждой пары зарядов, а затем все полученные значения сложить.

Как известно, электрические заряды взаимодействуют через электрическое поле, которое они создают. Для количественного описания этого поля служат силовая и энергетическая характеристики: напряженность поля и его потенциал. Напряженность $\vec{E}$ поля в данной точке равна силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку, а потенциал φ данной точки равен работе, совершаемой полем по перемещению единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность, или, что то же самое — работе внешних сил по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку. Под «бесконечностью» понимают область пространства, настолько удаленную от всех электрических зарядов, что поле в ней отсутствует.

Из приведенного определения потенциала ясно, что практическое значение имеет только разность потенциалов между рассматриваемыми точками, а не абсолютное значение потенциалов точек. Поэтому начало отсчета потенциала можно выбирать произвольно. Как правило, за нуль принимают потенциал точки на бесконечности или потенциал любой точки, соединенной проводником с Землей (то есть заземленной точки). В связи с этим поговорим немного о заземлении тел.

Земля представляет собой проводящее тело огромных размеров. Она обладает значительным отрицательным электрическим зарядом. Равный ему положительный объемный заряд содержится в атмосфере, в слое высотой порядка десятков километров. У поверхности Земли напряженность поля ≈130 В/м. Считая Землю проводящим шаром и зная напряженность поля у поверхности, можно оценить величину заряда Земли:

$Q_з \approx 6 \cdot 10^5$ Кл и ее потенциал: $\varphi_з \approx \approx 8 \cdot 10^8$ В. Термин «тело заземлено» означает, что оно соединено проводником с Землей. При таком соединении заряд и потенциал Земли практически не меняются, хотя какой-то заряд может перейти с тела на Землю или наоборот. Поскольку Земля по сравнению с любым земным телом простирается до бесконечности и потенциал ее постоянен, условились этот потенциал принимать за нуль. Таким образом, заземлить проводник означает сообщить ему нулевой потенциал.

Для поля точечного заряда модуль напряженности

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

и потенциал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Все опытные факты говорят о том, что электрические поля обладают замечательным свойством: электрическое поле системы источников является суммой полей отдельных источников. Другими словами, поле каждого фиксированного заряда не зависит от присутствия других зарядов. Чтобы найти результирующую напряженность в некоторой точке, достаточно векторно сложить напряженности полей, созданных в этой точке отдельными зарядами. Для нахождения суммарного потенциала достаточно в данной точке взять алгебраическую сумму потенциалов полей, созданных каждым зарядом в отдельности, при этом точка нулевого потенциала должна быть, конечно, общей для всех зарядов. Такой принцип нахождения результирующего поля называется принципом суперпозиции.

Электрическое поле часто изображают графически либо с помощью линий напряженности (силовых линий), либо с помощью эквипотенциальных поверхностей. Силовые линии всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям, поэтому, зная одну картину, можно легко получить другую.

Под словом «проводник» обычно понимают проводящее, то есть содержащее свободные заряды, тело любых размеров и формы, чаще всего металлическое. Внутри проводника, помещенного в электрическое поле, напряженность поля всегда равна нулю, а все точки проводника имеют один и тот же потенциал. Отсутствие поля в проводнике вовсе не означает, что внешнее поле в него не проникает. Совсем наоборот, благодаря проникновению поля в проводник, на его поверхности появляются заряды, поле которых внутри проводника компенсирует внешнее поле. Таким образом, свободные заряды в проводнике могут располагаться только на его поверхности.

Для характеристики способности проводников накапливать электрические заряды вводится специальная физическая величина — электроемкость. Большой электроемкостью обладает конденсатор — система двух проводников (разделенных тонким слоем диэлектрика), заряженных равными по модулю, но разноименными зарядами. Емкостью конденсатора C называют отношение заряда q одного из проводников к разности потенциалов $\Delta\varphi$ между ними: $C = q/(\Delta\varphi)$. Она зависит от размеров, формы и взаимного расположения проводников, а также от электрических свойств диэлектрика.

А теперь обратимся к решению конкретных задач.

Задача 1. *Металлическая тонкостенная сфера радиуса R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ. Покажите, что напряженность поля в любой точке внутри сферы равна нулю. Найдите зависимость напряженности и потенциала от расстояния r (от центра сферы) внутри и вне сферы. Постройте соответствующие графики.*

Вначале покажем, что напряженность поля внутри сферы равна нулю. Для этого возьмем произвольную точку A и построим два симметричных конуса с одинаковыми малыми углами при вершине, как показано на рисунке 1. На поверхности сферы конусы вырезают малые сферические участки S_1 и S_2, которые можно считать плоскими. Конусы подобны друг другу, так как углы при вершине равны. Из подобия следует, что пло-

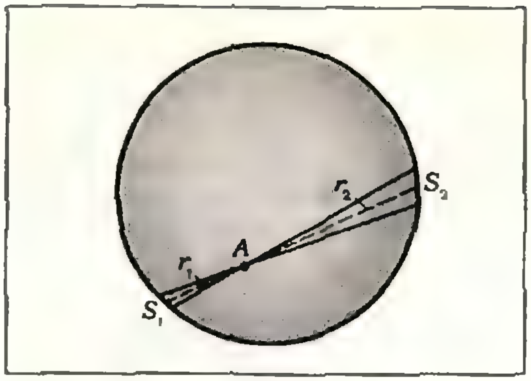


Рис. 1.

щади оснований относятся как квадраты высот. Эти высоты будем считать равными расстояниям r_1 и r_2 от точки A до площадок S_1 и S_2 соответственно. Таким образом,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \text{ или } \frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2}.$$

Заряды площадок S_1 и S_2 равны $q_1 = \sigma S_1$ и $q_2 = \sigma S_2$. Считая эти заряды точечными, найдем напряженность E, создаваемую ими в точке A:

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{S_1}{r_1^2} - \frac{S_2}{r_2^2}\right) = 0.$$

Очевидно, что на такие пары участков можно разбить всю сферическую поверхность. Следовательно, напряженность поля в точке A, создаваемая всей сферой, равна нулю. Это справедливо и для любой другой точки внутри сферы.

Обратимся теперь ко второй части задачи. Выделим на поверхности сферы малый участок LM такой, что его можно считать плоским (рис. 2). Напряженность поля вблизи него можно представить как суперпозицию двух полей: поля E_1, создаваемого самим участком по обе стороны от заряженной поверхности, и поля E_2, создаваемого зарядами всей остальной части сферы. Так как участок плоский, для него справедлива формула для напряженности поля равномерно заряженной плоскости: $E_1 = \sigma/(2\varepsilon_0)$. Выше мы показали, что напряженность поля внутри сферы равна нулю. Это означает, что *напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ внутри сферы* противоположны по направлению и равны по модулю: $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$, $E_1 = E_2$. Вне сферы у ее поверхности поля $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ одинаковы по направлению, так что суммарное поле

$$E = E_1 + E_2 = 2E_1 = \sigma/\varepsilon_0.$$

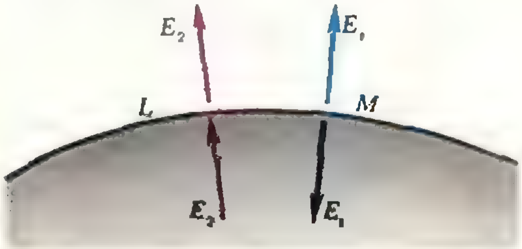


Рис. 2.

Если заряд сферы равен q, то $\sigma = q/(4\pi R^2)$. Тогда формула для напряженности поля у поверхности сферы имеет вид

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

то есть совпадает с формулой напряженности поля точечного заряда q, помещенного в центр сферы. Везде далее вне сферы поле равномерно заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда, расположенного в центре сферы.

Итак: внутри сферы поля нет, то есть при $r < R$ $E = 0$; вне сферы, то есть при $r > R$, напряженность изменяется по закону $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; на поверхности сферы, когда $r = R$, электрическое поле испытывает скачок $\Delta E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Зависимость $E = E(r)$ показана на рисунке 3, *а*.

Рассмотрим изменение потенциала φ в зависимости от расстояния r. Вне сферы (при $r > R$) потенциал такой же, как у точечного заряда, помещенного в центре сферы: $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. При $r = R$ потенциал достигает значения $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ и затем остается постоянным при всех $r < R$.

Кое-кто удивится: «Как же так? Поле внутри сферы равно нулю, а потенциал нулю не равен?». Это можно легко понять, если вспомнить определение потенциала. Перемещая единичный положительный заряд из бесконечности до поверхности сферы, мы совершаем определенную работу, при перемещении же заряда внутри

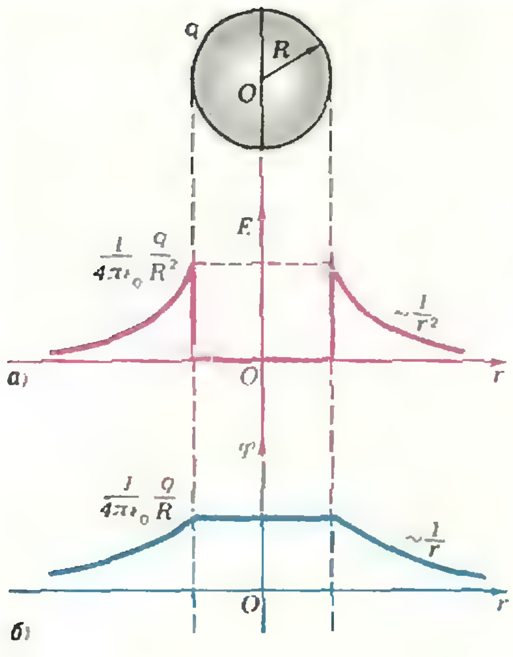


Рис. 3.

сферы, где поля нет, работа не совершается, то есть к уже совершенной работе ничего не добавляется. Это и означает, что для любой точки внутри сферы потенциал такой же, как на ее поверхности. Зависимость $\varphi=\varphi(r)$ показана на рисунке 3, б.

Задача 2. *Точечный заряд $+q$ помещен в центр незаряженной проводящей сферы, внутренний радиус которой a, а внешний b. Где и какие заряды при этом возникают? Изобразите картину линий напряженности и потенциала электрического поля от расстояния r до центра сферы.*

Изобразите также картину линий напряженности внутри и вне сферы при смещении заряда $+q$ в произвольную точку внутри сферы.

При внесении заряда $+q$ на внутренней и внешней поверхностях сферы индуцируются заряды. Пусть они равны q_1 и q_2 соответственно. Известно, что силовые линии электростатического поля (линии напряженности) всегда начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. Поскольку поля в проводящей толще стенок сферы нет, то нет там и силовых линий. Внутри сферы силовые линии начинаются на точечном заряде q и оканчиваются на наведенных зарядах q_1 внутренней поверхности. Отсюда следует, что полный заряд внутри сферы равен нулю:

$$q+q_1=0, \text{ и } q_1=-q.$$

В свою очередь, из электронейтральности проводящей сферы для заряда на ее внешней поверхности имеем

$$q_2=-q_1=q.$$

В силу симметрии индуцированные заряды распределены по обеим поверхностям сферы равномерно. Картина силовых линий имеет вид, приведенный на рисунке 4.

Для нахождения напряженности *и потенциала поля, создаваемого* всей системой зарядов, применим принцип суперпозиции. Поле вне сферы совпадает с суммарным полем точечных зарядов q, q_1 и q_2, помещенных в центр сферы. Так как наведенные заряды равны по величине и противоположны по знаку: $q_1=-q_2$, суммарное поле создается только точечным зарядом q:

$$\text{при } r>b \quad E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad \varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

В толще сферы поле отсутствует, напряженность равна нулю, а потенциал одинаков во всех точках и равен потенциалу на внешней поверхности сферы:

$$\text{при } a<r<b \quad E=0, \quad \varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}.$$

Внутри сферы поле также совпадает с полем только точечного заряда q (поскольку заряды q_1 и q_2 внутри

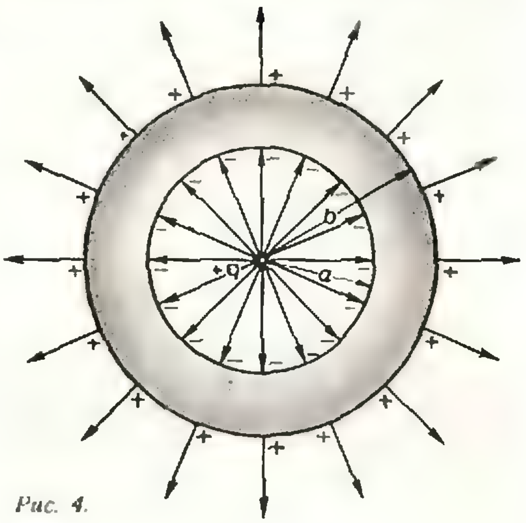


Рис. 4.

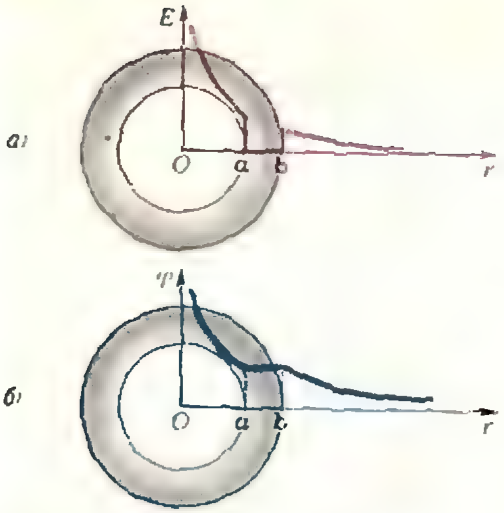


Рис. 5.

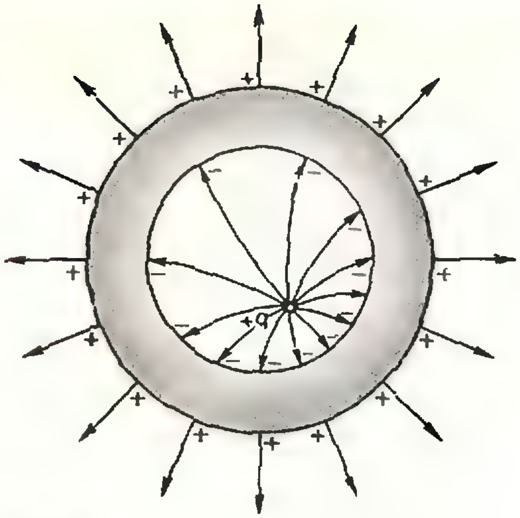


Рис. 6.

сферы поля не создают; см.задачу 1):

$$\text{при } r<a \quad E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad \varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Графики зависимостей $E=E(r)$ и $\varphi=\varphi(r)$ показаны на рисунках 5, *а* и *б*.

Рассмотрим теперь последний вопрос задачи. При смещении заряда $+q$ из центра сферы в какую-то другую точку величина индуцированных зарядов, очевидно, останется прежней, но изменится плотность распределения зарядов на внутренней поверхности. Отрицательные заряды перераспределятся так, чтобы поле в толще стенок оставалось равным нулю. Плотность этих зарядов будет больше в том месте внутренней поверхности, которое расположено ближе к заряду $+q$. В этой же области внутри сферы будет больше и густота силовых линий. Поскольку сфера представляет собой поверхность равного потенциала, силовые линии искривляются так, чтобы подойти к эквипотенциальной поверхности под прямым углом. Заряды на внешней поверхности никакого отношения к полю внутри сферы не имеют: там их суммарный вклад равен нулю. «Внешние» заряды по-прежнему распределены равномерно. Таким образом, поле вне сферы остается без изменений; оно не зависит от расположения заряда $+q$ внутри сферы. Картина силовых линий в этом случае изображена на рисунке 6.

Задача 3. *Две концентрические металлические сферы радиусов R_1 и R_2 имеют заряды q_1 и q_2. Нарисуйте графики зависимости напряженности и потенциала от расстояния r до центра системы.*

Рассмотрите случай сферического конденсатора ($q_1=-q_2$) и найдите его емкость.

Пусть $q_1>q_2$. Тогда

$$\text{при } 0<r<R_1 \begin{cases} E=0, \\ \varphi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{R_1}+\dfrac{q_2}{R_2}\right); \end{cases}$$

$$\text{при } R_1<r<R_2 \begin{cases} E=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \\ \varphi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{r}+\dfrac{q_2}{R_2}\right); \end{cases}$$

$$\text{при } r>R_2 \begin{cases} E=\dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \\ \varphi=\dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \end{cases}$$

Соответствующие графики показаны на рисунках 7, *а* и *б*.

Сферический конденсатор имеет заряды обкладок, равные по величине и противоположные по знаку: $q_1=-q_2$. Поэтому напряженность и потенциал во внешней области обращаются в нуль, а между обкладками (при $R_1<r<R_2$) имеют вид

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad \varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Зависимости $E=E(r)$ и $\varphi=\varphi(r)$ для этого случая представлены на рисунках 8, *а* и *б*. Для определения емкости сферического конденсатора найдем разность потенциалов на его об-

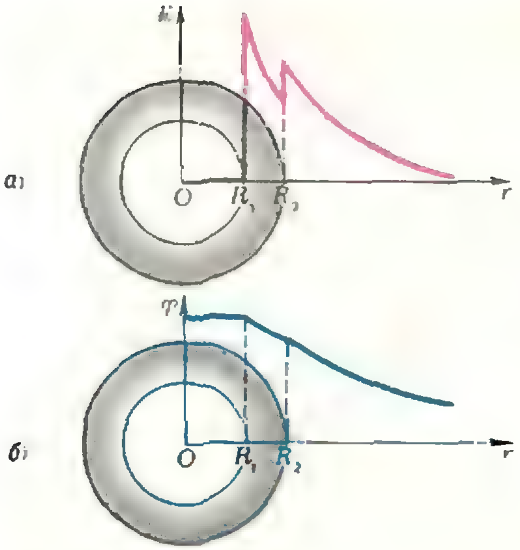


Рис. 7.

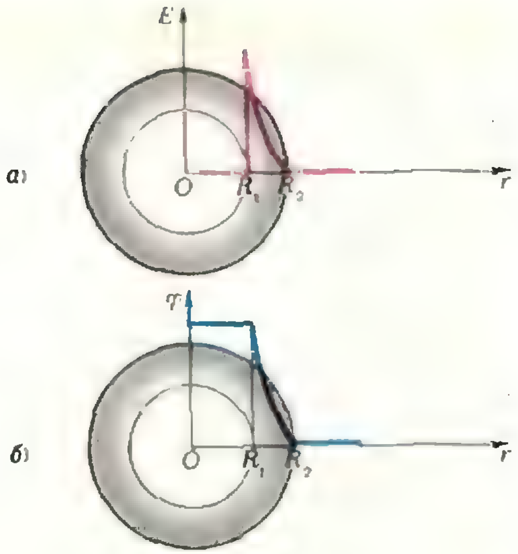


Рис. 8.

кладках. Так как потенциал внешней сферы равен нулю, разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Отсюда емкость конденсатора

$$C=\frac{q}{\Delta\varphi}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}.$$

Задача 4. *Незаряженный металлический шар радиуса r окружают концентрической сферической проводящей оболочкой радиуса R с потенциалом φ. Чему станет равен потенциал оболочки, если шар заземлить (рис. 9)?*

До заземления потенциал оболочки φ создается некоторым зарядом q: $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Поскольку шар не заряжен, он имеет тот же самый потенциал. После заземления потенциал шара обратился в нуль. Это означает, что на нем появился какой-то заряд. Его величину q' найдем из условия, что суммарный потенциал, создаваемый зарядами q и q', на поверхности шара равен нулю:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r}=0, \text{ и } q'=-\frac{r}{R}q.$$

Теперь легко найти новый потенциал оболочки, который создается теми же зарядами q и q':

$$\varphi'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q(R-r)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{R-r}{R}\varphi.$$

Задача 5. *Пробой в воздухе наступает в электрическом поле с напряженностью $E_м=3\cdot10^4$ В/см. Имеется сферический конденсатор с воздушным зазором, наружная обкладка которого имеет радиус R=4 см, а радиус внутренней обкладки подбирается таким, чтобы конденсатор не пробивался при возможно большем значении разности потенциалов. Определите эту максимальную разность потенциалов.*

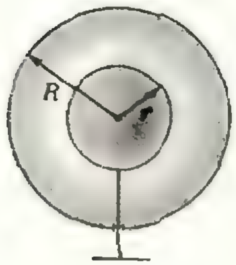


Рис. 9.

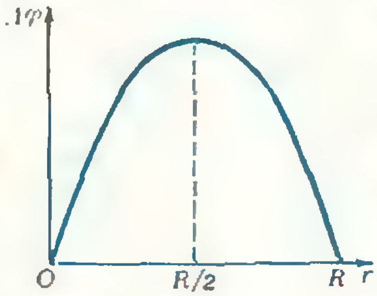


Рис. 10.

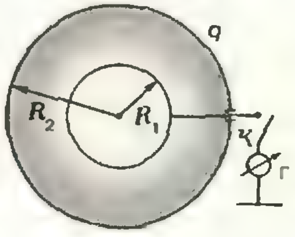


Рис. 11.

Для сферического конденсатора разность потенциалов между его обкладками равна

$$\Delta\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right).$$

Если радиус R внешней обкладки фиксирован, то $\Delta\varphi$ зависит как от радиуса r внутренней обкладки, так и от заряда q конденсатора. В свою очередь, заряд, который еще можно поместить на конденсатор, не допуская его пробоя, определяется как напряженностью $E_м$ поля пробоя, так и радиусом r : $E_м=q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Отсюда заряд $q=4\pi\varepsilon_0 E_м r^2$ и разность потенциалов между обкладками

$$\Delta\varphi=E_м r-\frac{E_м}{R}r^2.$$

Соответствующий график приведен на рисунке 10. Из графика видно, что максимальное значение разности потенциалов достигается при $r=R/2$:

$$\Delta\varphi_м=\frac{E_м R}{4}=3\cdot 10^4\ \text{В}.$$

Упражнения

1. Заряд q находится на расстоянии r от центра заземленной проводящей сферы радиуса R ($r>R$). Определите величину индуцированного на сфере заряда.

2. На расстоянии d от поверхности медного незаряженного шарика радиуса R поместили заряд q. Чему равен потенциал шарика?

3. Две концентрические тонкостенные стальные сферы имеют радиусы R_1 и R_2 (рис. 11). Внешняя сфера несет заряд q. Внутренняя сфера не заряжена. Какой заряд протечет через гальванометр Г, если замкнуть ключ K?

4. В центре металлической тонкостенной сферы радиуса R, несущей заряд $-2q$, помещают заряд $+q$. Найдите напряженность поля и потенциал на произвольном расстоянии r от центра сферы. Нарисуйте графики зависимости $E=E(r)$ и $\varphi=\varphi(r)$.

5. Металлический шар заряжается от электростатической машины при помощи пластины, которая после каждого соприкосновения с шаром снова заряжается от машины до заряда Q. Определите максимальный заряд шара, если q — его заряд после первого касания.

6. Два небольших проводящих шара радиуса r расположены на расстоянии R друг от друга ($R\gg r$). Шары поочередно на некоторое время заземляют. Определите заряд, оставшийся на шаре, который был заземлен вторым, если первоначально потенциалы шаров равны φ.

Метод итераций

(Начало см. на с. 16)

$x-0{,}4g(x)=x$, то есть

$$-0{,}4x^2+1{,}4x+0{,}4\cos x=x.$$

Обозначая левую часть через $f(x)$ и принимая $x_0=1{,}2$, находим по формуле (4) последовательные приближения:

$$\begin{aligned}x_0&=1{,}2000000;\\ x_1&=1{,}2489431;\\ x_2&=1{,}2511068;\\ x_3&=1{,}2511509;\\ x_4&=1{,}2511518;\\ x_5&=1{,}2511518.\end{aligned}$$

Итак, $x^*\approx 1{,}2511518$. Чтобы оценить точность приближения, заметим, что, согласно задаче 15, мы имеем (считая x_4 начальным приближением и полагая $n=1$)

$$|x^*-x_5|\leqslant|x_5-x_4|\cdot\frac{q}{1-q}.$$

Так как $q=\frac{p_2-p_1}{p_2+p_1}\approx 0{,}0407$, $\frac{q}{1-q}\approx 0{,}05$; кроме того, $|x_5-x_4|<10^{-7}$, поскольку у x_4 и x_5 совпадают 7 знаков после запятой. Таким образом, $|x^*-x_5|<$ $<0{,}05\cdot 10^{-7}=0{,}5\cdot 10^{-8}$, и поэтому все найденные знаки корня x^* — верные.

Проверьте самостоятельно, что на промежутке $]-\infty;0]$ рассматриваемое уравнение тоже имеет один корень $x^{**}\approx -0{,}5500093$.

Задачи

19. Докажите, что если числа $g(a)$ и $g(b)$ имеют разные знаки и производная g' сохраняет один и тот же знак на отрезке $[a;b]$, причем $p_1<|g'(x)|<p_2<2p_1$, то при решении уравнения $g(x)=0$ указанным методом с помощью микрокалькулятора ошибка установившегося приближения меньше $0{,}5\cdot 10^{-7}$.

20. Докажите, что квадратное уравнение $x^2-px-q=0$ можно при $p>0$, $q>0$ решать методом итераций, записав это уравнение в равносильном виде (6), где $f(x)=\pm\sqrt{px+q}$ (знак «плюс» соответствует одному корню, знак «минус» — другому). Решите этим способом уравнение $x^2-5x-7=0$.

21. Решите кубические уравнения а) $2x^3-3x^2-12x+5=0$, б) $2x^3-3x^2-12x-$ $-11=0$. Указание. Найдите точки, определяющие промежутки возрастания и убывания, и значение левой части в этих точках.

Квант для младших школьников

Задачи

1. Лёня и Коля пошли в гости к Боре, но забыли номер его квартиры. Коля помнил, что если прибавить к этому номеру 10, то получится точный куб, а Леня помнил, что если вычесть из номера квартиры число 10, то получится точный квадрат. В какой квартире живет Боря?

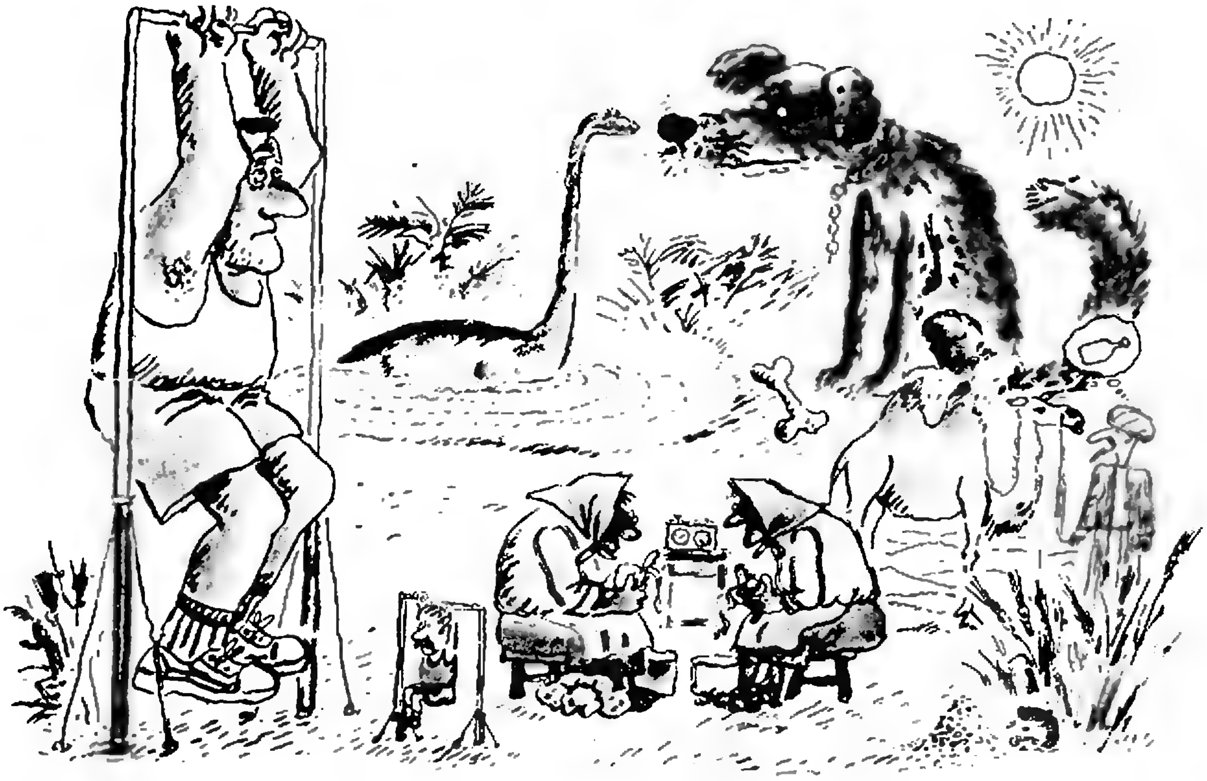
2. Маше нужны были для шитья нитки № 20. У нее не было таких ниток, но были нитки № 40 и № 10. Что ей делать? (Номер нитки определяется как отношение длины нитки в метрах к ее массе в граммах, то есть он численно равен длине в метрах 1 грамма ниток.)

3. Надутый воздухом воздушный шарик взвесили на весах. Потом надули его еще сильнее и вновь взвесили. Одинаковы ли будут показания весов?

4. Какое число нужно поставить вместо знака «?» в последовательность 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 24, 31, 100, ?, 10 000?

5. Вершина *A* треугольника *ABC* соединена отрезком с точкой *M* на противоположной стороне треугольника. Вершина *B* соединена с точкой *K* на противоположной вершине *B* стороне треугольника. Могут ли отрезки *AM* и *BK* пересекаясь делиться пополам?

Эти задачи нам предложили
И. Б. Васильев, А. Н. Виленкин,
С. В. Казаков, Л. З. Карелин, А. П. Савин



У нас в гостях — математический радиокружок

С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Сегодня в гостях у «Кванта» профессор Сигма и его постоянные помощники: мальчик Альфа и девочка Бета. Они участники радиопередачи «Математический радиокружок Сигма». Занятия этого необычного радиокружка происходят раз в месяц в одну из сред в 16—00 по первой всесоюзной радиопрограмме. А сейчас профессор Сигма, Альфа и Бета познакомят читателей «Кванта» с темой одного из занятий своего математического радиокружка.

Сигма. Мы начнем с задачи из «Кванта для младших школьников» (№ 1 за 1981 г.): В Советском Союзе население составляет 260 млн. человек. Казалось бы, на карте СССР с масштабом 1:1 000 000 (в одном сантиметре 10 километров) может поместиться в миллион раз меньше людей, чем на всей территории страны, то есть может поместиться 260 человек. Однако, из опыта известно, что и пяти десяткам человек это будет нелегко сделать. Почему?

Альфа. Да я эту задачу сразу решил! Ведь люди живут в многоэтажных домах, значит на единицу земной поверхности приходится не один, а несколько человек.

Бета. А по-моему, Альфа, ты не прав. Возьмем, например, такое густо населенное здание, как здание школы. Первого сентября все, кто находятся в этом здании, выходят во двор на линейку, посвященную началу учебного года. Также и жители других домов могут разместиться во дворах и на улицах — им даже не будет тесно. А еще остаются степи, пустыни, тундра!

Сигма. Бета права. Тебе, Альфа, придется поискать другое объяснение. А пока попробуй сравнить площади квадратов со сторонами 2 и 1.

Альфа. Ну как же — площадь первого будет в четыре раза больше, чем площадь второго. И вообще, при уменьшении размеров любой фигуры в N раз, ее площадь уменьшается в N^2 раз. Не зря площадь измеряется в квадратных единицах!

Бета. Теперь все ясно! Человек занимает на Земле определенную часть площади. При изображении на карте с масштабом 1:1 000 000 площади всех фигур уменьшаются в $(1\,000\,000)^2$ раз, то есть, в 10^{12} раз. Именно на это число, а не на миллион и нужно разделить население страны. При этом получится около одной четырехтысячной части человека и никакой парадокс не возникает.

Сигма. Очень хорошо, ребята, вы во всем разобрались. Мне остается лишь добавить, что при решении задачи вы воспользовались так называемыми *соображениями подобия*. Тема нашего занятия как раз — соображения подобия.

А теперь решим еще одну задачу. В два одинаковых заполненных водой ведра засыпают дробь: в первое ведро крупную, а во второе мелкую. В каждое ведро насыпают столько дроби, сколько помещается. Из какого ведра выльется больше воды?

Альфа. Ну конечно, из второго, в него насыпают мелкую дробь!

Бета. Ну и что?

Альфа. Раз дробь мелкая, то и промежутки между отдельными дробинками будут маленькими. Поэтому мелкая дробь уляжется плотнее.

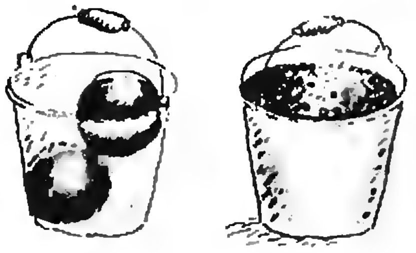
Бета. Хотя промежутки между крупными дробинками и большие, зато самих промежутков будет меньше. Так что еще не известно, какая дробь уляжется плотнее: мелкая или крупная.

Сигма. Действительно, надо выяснить, какая дробь уляжется плотнее: мелкая или крупная. Давайте для простоты предположим, что отношение диаметров дробинок равно двум. Теперь посмотрим на ведро с мелкой дробью в бинокль с двухкратным увеличением. Что мы увидим?

Альфа. Мы увидим ведро, заполненное крупной дробью. При двукратном увеличении и объем ведра, и объем каждой дробинки увеличится в 8 раз ($8=2^3$), а их отношение останется неизменным. Значит плотность мелкой и крупной дроби будет одинаковой.

Бета. Получается, что из ведер вытечет одинаковое количество воды. Вот никогда бы не подумала!

Сигма. Тем не менее, это правильный ответ. И получить его нам помогли соображения подобия. Хочу только внести небольшое уточнение: наш ответ верен, если размеры дробинок намного меньше размеров ведра. Если же дробинки крупные (или ведро совсем маленькое), то наши рассуждения теряют силу.



Причина в том, что мы пренебрегли нарушением правильного расположения дробинок вблизи стенок ведра. А если дробинки большие, то влиянием стенок ведра пренебречь уже нельзя.

Бета. Профессор Сигма, а какие еще задачи можно решать с помощью соображений подобия?

Сигма. Соображения подобия оказались очень полезными в биологии. А впервые их применил к изучению строения животных великий итальянский ученый XVI века Галилео Галилей. Галилея занимал вопрос, как могло бы выглядеть очень крупное сухопутное животное, например гигантская собака. В одной из книг Галилея можно даже найти рисунки костей такой воображаемой собаки.

Альфа. А о чем здесь думать? Увеличить скелет обычной собаки раз в 10 и все!

Сигма. Нет, все не так просто. Прочность костей пропорциональна площади их поперечного сечения. При увеличении размеров в 10 раз эта площадь увеличится в 100 ($=10^2$) раз. Значит, кости гигантской собаки смогут выдержать стократную нагрузку. Но в том то и дело, что нагрузка возрастет не в 100, а в 1000 раз. Ведь нагрузка пропорциональна массе животного, то есть его объему. Объем же увеличится в 1000 ($=10^3$) раза. Вот и получается, что гигантская собака не сможет выдержать собственный вес.

Бета. Но ведь живут же на Земле очень крупные животные: слоны, носороги...

Сигма. Да, но ноги у них относительно толще, чем у мелких животных. А вот киты и вовсе не смогли бы жить на суше *).

Альфа. Я читаю сейчас «Путешествие Гулливера». Гулливер попадает в страну лилипутов, которые в 12 раз меньше него, и в страну великанов, которые больше него тоже в 12 раз. Что же, Дж. Свифт не учел того, что было известно уже Галилею?

Сигма. Автор «Путешествия Гулливера» старался пользоваться соображениями подобия. Например, описывая обед Гулливера или пошив его костюма. В других местах, однако, Свифт не обошелся без ошибок — как в истории с яблоком, попавшем в Гулливера в стране великанов.

Бета. А я это все знаю — прочитала в «Кванте» в статье «Из книг Я. И. Перельмана»**).

Альфа. Профессор Сигма, а почему муравьи могут переносить тяжести, во много раз больше собственного веса, а человек не может?

Сигма. Известно, что сила мышц определяется только площадью их поперечного сечения и не зависит от их длины. Площадь же пропорциональна квадрату линейных размеров, а вес — кубу. Значит, на единицу веса у муравья приходится большая сила, чем у человека, и, тем более, чем у слона. Этим же соотношением между площадью и объемом объясняется то, что муравьи не могли бы быть теплокровными.

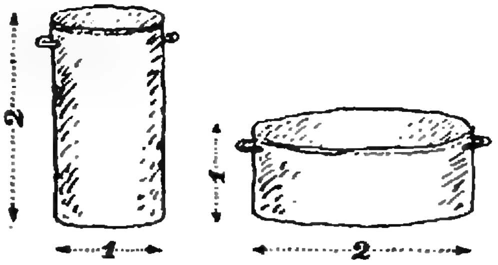
Бета. Почему?

Сигма. Количество тепла, вырабатываемого в организме, пропорционально объему тела. А вот количество тепла, излучаемого в окружающее пространство, пропорционально площади поверхности — ведь теплообмен происходит через кожу. Как мы видели, на единицу объема у маленьких животных приходится бо́льшая площадь поверхности, чем у крупных. Поэтому маленьким животным труднее бороться с холодом*).

Бета. Теперь понятно, почему у маленьких синиц перья длиннее ширины тела, а у больших ворон — короче. Синицам нужна шуба теплее — ведь они намного меньше.

Сигма. А теперь задачи для самостоятельного решения.

1. В какую кастрюлю можно налить больше воды?



2. После семи стирок кусок мыла уменьшился вдвое, то есть вдвое уменьшились его длина, ширина и высота. На сколько еще стирок его хватит?

3. Килограмм какой картошки быстрее чистить и почему: мелкой или крупной?

4. Великан и лилипут устроили соревнование: кто больше подтянется на перекладине. Кто выиграет и почему?

5. Гигантские динозавры предпочитали проводить время, стоя в неглубоких водоемах. Почему?

6. Животным пустыни приходится иногда долго не пить. Какое животное может не пить дольше — крупное или мелкое?

7. Почему человек ест 3 раза в день, а, например, хомячки жуют почти постоянно?

И, наконец, два вопроса посложнее:

8. Как зависит от размеров животного высота его прыжка?

(Ответ: практически, не зависит.)

9. Объясните подробно, почему для мелких дробинок нарушение их правильного расположения вдоль стенок мало влияет на отношение объемов дробинок и ведра.

---

*) См. статью Н. Родиной «Архимедова сила и киты», «Квант», 1982, № 8.

**) «Квант», 1982, № 11.

*) Соответствующий расчет можно посмотреть в «Кванте», 1981, № 4, с. 11.

Победители конкурса «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников победители этого конкурса получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады.

Ниже публикуется список победителей конкурса «Кванта» 1982 года, получивших право участвовать в республиканских олимпиадах 1983 года. Все они награждаются также книгами серии «Библиотечка «Квант» с автографами авторов.

Математика

В. АЛИВЕРДИЕВ — Баку, шк.-инт. № 1, 10 кл.
В. АРАБИДЗЕ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
А. БЕРЕНШТЕЙН — Москва, с. ш. № 1140, 10 кл.
А. БИРГЕР — Иваново, с. ш. № 6, 8 кл.
В. БУЛАВАС — Паневежис, с. ш. им. Ю. Бальчикониса, 11 кл.
Г. ВИННЕР — Свердловск, с. ш. № 9, 10 кл.
А. ВИНОГРАДОВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
М. ГАРАЕВ — Физули, с. ш. № 2, 9 кл.
М. ГОРБУНОВ — Минск, с. ш. № 19, 10 кл.
А. ДЕЙНЕКА — Винница, с. ш. № 32, 10 кл.
А. ДОБРИН — Киев, с. ш. № 45, 10 кл.
О. ЕРОШКИН — Днепропетровск, с. ш. № 15, 10 кл.
М. ЗАПЛЕТИН — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
К. ЗЫКОВ — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
А. ИВЧЕНКО — Могилев-Подольский, с. ш. № 1, 9 кл.
Ю. КАКУЛОВ — Цалка, с. ш. № 3, 10 кл.
А. КАРПОВИЧ — Киев, с. ш. № 39, 10 кл.
Д. КОРШУНОВ — Новосибирск, с. ш. № 25, 10 кл.
К. КОХАСЬ — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
Р. МИСЯВИЧЮС — дер. Повилаускай Лит. ССР, Науяместская с. ш., 10 кл.
Ф. НАЗАРОВ — Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.
Л. ОРИДОРОГА — Донецк, с. ш. № 64, 9 кл.
А. РОДИОНОВ — Москва, с. ш. № 444, 10 кл.
Л. РУДЫЙ — Кировск, с. ш. № 6, 10 кл.
В. САДОВСКИЙ — Ташкент, с. ш. № 71, 10 кл.
А. СВИРИДОВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
С. СТРУКОВ — Воронеж, с. ш. № 85, 9 кл.
С. ТИПЦОВ — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
В. ХРЫЧИКОВ — Севастополь, с. ш. № 24, 9 кл.
У. ЭММУС — п. Ныцни ЭССР, Ныосская с. ш., 11 кл.
С. ЮРОВСКИЙ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.

Физика

Э. БАГДАСАРЯН — Баку, с. ш. № 46, 9 кл.
Г. БАРАНОВ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
А. ДУНАЕВСКИЙ — Киев, с. ш. № 39, 10 кл.
М. ДЬЯЧКОВ — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
С. ЕФИМОВ — Баку, с. ш. № 91, 10 кл.
Р. ЖЯМАЙТИС — Вильнюс, с. ш. № 9, 11 кл.
Ю. ЗВЕГИНЦЕВ — Харьков, с. ш. № 116, 10 кл.
М. ЗИМАНОВ — Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.
И. КАЛИНОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 8 кл.
Е. КАНЦЫПЕР — Таллин, с. ш. № 15, 10 кл.
С. КАСТЕЛЛИ — Болград, с. ш. № 1, 10 кл.
А. КОРЧАГИН — Красноармейск, с. ш. № 2, 10 кл.
Г. ЛАНДСБЕРГ — п. Протвино Московской обл., с. ш. № 1, 10 кл.
О. ЛОПИН — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Д. МАКАРОВ — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 9 кл.
К. МАКАРЧУК — Киев, с. ш. № 145, 8 кл.
А. МАЛАЙ — Каушаны, с. ш. № 4, 10 кл.
В. МОРОЗ — Минск, с. ш. № 16, 10 кл.
С. МУСАЕВ — Баку, с. ш. № 91, 10 кл.
М. ПУСТИЛЬНИК — Свердловск, с. ш. № 9, 10 кл.
М. РОЗЕНБЕРГ — Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.
В. РОМАШИН — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
А. РЫЛЯКОВ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Ф. СЕРЖЕНКО — Запорожье, с. ш. № 28, 10 кл.
М. СКОРИК — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
В. ФЕЛЬДМАН — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
И. ШОЙХЕТ — Ташкент, с. ш. № 71, 10 кл.

задачник Кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 мая 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М791, М792» или «Ф803». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М791—М795; Ф803—Ф807

М791. Пете подарили микрокалькулятор, на котором можно выполнять следующие операции: по любым данным числам x и y вычислить $x+y$, $x-y$, $x+1$ и $1/x$ (при $x \neq 0$). Петя утверждает, что с помощью своего микрокалькулятора он может:

а) возвести любое число в квадрат, проделав не более шести операций;

б)* перемножить любые два числа, проделав не более двадцати операций.

Как он это делает?

С. Б. Гашков

М792. Решите в натуральных числах уравнения

а) $3^x+1=2^y$; б) $3^x-1=2^y$

в)* Найдите все натуральные n, при которых оба числа $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ выражаются конечными десятичными дробями.

г)* Докажите, что при любом простом $p>3$ и натуральном $m>1$ ни одно из чисел p^m+1 и p^m-1 не может быть степенью двойки.

С. Н. Бычков, В. В. Прасолов, Л. Д. Курляндчик

М793.* Из вершины P тетраэдра $PABC$ проводятся три отрезка PA', PB', PC', перпендикулярные граням PBC, PCA, PAB и равные по длине площадям этих граней соответственно (направления отрезков выбираются так, что точки A' и A, B' и B, C' и C лежат по разные стороны от плоскостей соответствующих граней PBC, PCA, PAB (рис. 1)). Докажите, что

а) Повторив это же построение для тетраэдра $PA'B'C'$ (и его вершины P), мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному тетраэдру $PABC$ с коэффициентом $3V/4$, где V равно объему тетраэдра $PABC$.

б) Вектор $\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}$ перпендикулярен плоскости ABC.

в) Из точки O, взятой внутри тетраэдра $ABCD$, опускаются перпендикуляры на плоскости его граней. На этих перпендикулярах от точки O *откладываются отрезки, равные по длине* площадям соответствующих граней, и концы этих отрезков принимаются за вершины нового тетраэдра $A'B'C'D'$. (Разумеется, с точностью до параллельного переноса, этот тетраэдр не зависит от выбора точки O.) Докажите, что повторив это построение для тетраэдра $A'B'C'D'$, мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному с коэффициентом $3V$, где V — объем исходного тетраэдра $ABCD$. (Если $3V=1$, то последний тетраэдр получается из исходного параллельным переносом.)

В. Н. Дубровский

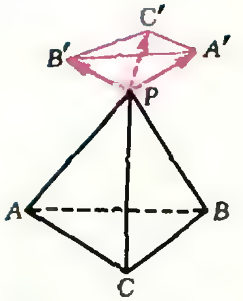


Рис. 1.

М794. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку K первой окружности проводятся прямые KA и KB, пересекающие вторую окружность в точках P и Q (рис. 2). Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.

Алла Ивченко, ученица 9 класса школы № 1
г. Могилева-Подольского

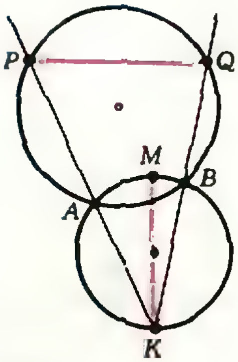


Рис. 2.

М795. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех делителей натурального числа n (рис. 3). Докажите, что существует бесконечно много n таких, что а) $\sigma(n)>2n$; б) $\sigma(n)>3n$. Докажите, что для любого n в)* $\sigma(n)<n(\log_2 n+2)$; г) $\sigma(n)<n(\ln n-1)$.

В. Ф. Лев

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18

Рис. 3.

Ф803. Человек поднимается в гору с углом подъема α с постоянной скоростью v_0 и тянет за собой на легкой веревке длины l сани массы m, находящиеся на горизонтальном участке (рис. 4). Найти натяжение веревки в тот момент, *когда она составляет угол α с горизонтальной* поверхностью. Силой трения саней о поверхность дороги пренебречь.

В. И. Чивилёв

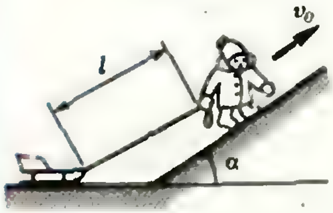


Рис. 4.

Ф804. Две одинаковые звезды A и B вращаются под действием взаимного притяжения на неизменном расстоянии R друг от друга. На некотором неизвестном расстоянии x от звезд в плоскости их орбит движется легкая планета C, причем $|AC|=|BC|=x$, а треугольник ABC сохраняет свои размеры. Найти расстояние x.

Г. Л. Коткин

Ф805. Через плоский конденсатор, заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ, течет переменный ток $i(t)=I_0\cos\omega t$. Определить амплитуду напряжения на конденсаторе. Расстояние между пластинами d, площадь каждой пластины S.

В. В. Можаев

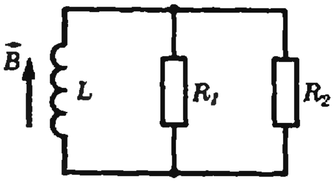


Рис. 5.

Ф806. В схеме, показанной на рисунке 5, сразу после выключения внешнего магнитного поля, в котором находилась катушка с индуктивностью L, через резистор с сопротивлением R_1 течет ток I. Пренебрегая омическим сопротивлением катушки, определить, какое количество тепла выделяется на резисторе с сопротивлением R_1 и на резисторе с сопротивлением R_2. Магнитное поле было направлено перпендикулярно плоскости витков катушки индуктивности.

В. В. Можаев

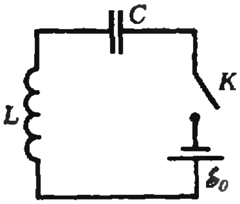


Рис. 6.

Ф807. Последовательно с катушкой индуктивности L и конденсатором емкости C через ключ K подключили батарею с постоянной ЭДС $\mathscr{E}_0$ (рис. 6). В начальный момент времени ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен. Определить максимальную величину тока в цепи после замыкания ключа. Омическим сопротивлением в цепи пренебречь.

Problems

M791—M795; P803—P807

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that May 31st 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well assolutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: „KVANT'S PROBLEMS" and

M791. On his birthday Pete was given a microcalculator which carries out the following operations: for any numbers x and y it computes $x+y$, $x-y$, $x+1$ and $1/x$ (when $x\neq0$). Pete says he uses his calculator to:

a) compute the square of any number in 6 operations or less;

b) multiply any two numbers in 20 operations or less. How does he do it?

S. B. Gashkov

M792. Find the positive integer solutions of the equations a) $3^x+1=2^y$; b) $3^x-1=2^y$; c)* Find all positive integers n for which both fractions $1/n$ and $1/(n+1)$ have finite decimal expansions. d)* Prove that for any prime $p>3$ and any integer $m>1$ neither of the numbers p^m+1 and p^m-1 is a power of 2.

S. N. Bychkov, V. V. Prasolov,
L. D. Kurlyandchik

M793.* Three line segments PA', PB', PC' are constructed perpendicularly to the faces PBC, PCA, PAC of the tetrahedron $PABC$; the lengths of the segments are numerically equal to the areas of these faces and the points A' and A, B' and B, C' and C lie on opposite sides of the planes containing these faces (see figure Рис. 1). Prove that

a) Repeating this construction for the tetrahedron $PA'B'C'$ (from vertex P), we obtain a tetrahedron homothetic to $PABC$ with coefficient $3V/4$, where V is the volume of $PABC$.

the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEMS IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

b) The vector $\vec{PA'}+\vec{PB'}+\vec{PC'}$ is perpendicular to the plane ABC

c) Perpendiculars to the faces of the tetrahedron $ABCD$ are constructed from a point O inside it. Segments of length numerically equal to the area of the corresponding face are measured off from O on these perpendiculars. The extremities of these segments form a new tetrahedron $A'B'C'D'$. (Of course, up to parallel translation, this tetrahedron does not depend on the choice of O). Prove that a repetition of this construction for $A'B'C'D'$ yields a tetrahedron homothetic to the given one with coefficient $3V$, where V is the volume of $ABCD$. (If $3V=1$, the last tetrahedron can be obtained from the first by parallel translation.)

V. N. Dubrovski

M794. Two circles intersect at the points A and B. The lines KA and KB, passing through the point K of the first circle intersect the second at the point P and Q (see figure Рис. 2). Prove that PQ is perpendicular to the diameter KM of the first circle.

Alla Ivchenko
(9th form, School № 1, Mogilev-Podolski)

M795. Denote by $\sigma(n)$ the sum of all divisors of the natural number n (figure Рис. 3). Prove that there exist infinitely many n such that
a) $\sigma(n)>2n$; b) $\sigma(n)>3n$. Prove that for any n;
c)* $\sigma(n)<n(\log_2 n+2)$; d) $\sigma(n)<n(\ln n+1)$.*)

V. F. Lev

P803. A man moves up an incline of angle α with constant velocity v_0, pulling a sled of mass m by means of a light rope of length l, the sled still being on a horizontal stretch of the road (see figure Рис. 4). Find the tension in the rope when its angle with the horizon becomes equal to α. The friction of the sled on the road is negligible.

V. I. Chiviliev

P804. Two identical stars A and B rotate at a constant distance R from each other as the result of gravitational interaction. A light planet C moves in the plane of their orbits so that $|AC|=|BC|=x$ and the size and shape of triangle ABC remains unchanged. Find the distance x.

G. L. Kotkin

P805. An alternating current $I(t)=I_0\cos\omega t$ flows through a flat capacitor filled by a dielectric of dielectric permeability ε and specific resistance ϱ. Determine the voltage amplitude on the capacitor. The distance between the plates is d, the area of each plate is S.

V. V. Mojaev.

P806. A current I flows through the resistor R_1 in the circuit shown on figure Рис. 5 immediately after the external magnetic field acting on the inductive coil of inductivity L is turned off. Neglecting the ohmic resistance of the coil, determine the quantity of heat emitted by the resistor R_1 and by the resistor R_2. The magnetic field was directed perpendicularly to the planes of the loops of the coil.

V. V. Mojaev

P807. A capacitor of capacity C and an induction coil of inductivity L are connected in series through a switch K to a battery of constant electromotive force $\mathcal{E}$, (see figure Рис. 6). At the initial moment the switch is turned off and the capacitor is uncharged. Determine the maximal value of the current in the circuit after the switch is turned on. The ohmic resistance of the circuit is negligible.

---

*) Here ln denotes natural logarithms.

Решения задач

M770, M775—M779; Ф788—Ф792

M770*. *В основании треугольной пирамиды ABCP лежит правильный треугольник ABC. Докажите, что если углы PAB, PBC, PCA конгруэнтны, то пирамида ПАВС — правильная.*

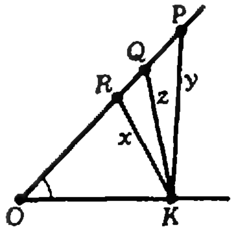


Рис. 1.

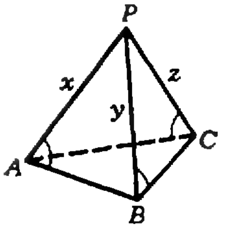


Рис. 2.

Первое решение. Можно считать, что длина стороны основания равна 1. Пусть $x > y > z$ — длины ребер PA, PB и PC. Ясно, что $x+y > x+Z > y+z > 1$.

По теореме косинусов (см. рис. 1)

$$x^2+1=y^2+ax,$$
$$y^2+1=z^2+ay,$$
$$z^2+1=x^2+az,$$

где $a=2\cos\alpha\,(0<a<2)$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} x^2-y^2=y^2-z^2+a(x-y), \\ y^2-z^2=z^2-x^2+a(y-z), \\ z^2-x^2=x^2-y^2+a(z-x), \end{cases}$$

$$(x+y-a)(x-y)=(y-z)(y+z),$$
$$(y+z-a)(y-z)=(z-x)(z+x),$$
$$(z+x-a)(z-x)=(x-y)(x+y).$$

Легко видеть, что если какие-либо два из чисел x, y, z равны, то равны и все три числа.

Предположим, что $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$. Перемножив уравнения последней системы, получим после сокращений

$$(x+y-a)(y+z-a)(z+x-a)=(y+z)(z+x)(x+y).$$

Поскольку правая часть (*) положительна, должна быть положительна и левая часть. При этом, если все три сомножителя положительны, то равенство (*) невозможно.

Следовательно, $y+z-a<0$; $y+z-a<0$, а $x+y-a>0$. Кроме того, $(x+z)+(y+z)>2>2a$. Поэтому $(y+z-a)\times \times(x+z-a)=(y+z)(x+z)-(x+z+y+z)a+a^2=(x+z)\times \times(y+z)+a(a-(h+z+y+z))<(x+z)(y+z)+a(a-2)< <(x+z)(y+z)$.

Поэтому левая часть произведения (*) меньше правой. Противоречие.

Второе решение. Построим на плоскости угол α. На одной из его сторон отложим отрезок $|OK|=1$, а на другой — отложим отрезки $OP=x$, $|OQ|=y$, $|OR|=z$. Получившиеся треугольники конгруэнтны граням пирамиды, причем $|PK|=y$, $|QK|=z$, $|RK|=x$.

Из треугольника RQK получаем $x=|RK|<|QR|+|QK|= =y-z+z=y$, то есть $x<y$ — противоречие!

С. А. Валерианов

M775. *При каких натуральных $n>3$ существуют различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $1 \leqslant a_k \leqslant n+1$ для любого $k=1, 2, \ldots, n$ и все n чисел $|a_1-a_2|$, $|a_2-a_3|$, …, $|a_{n-1}-a_n|$, $|a_n-a_1|$ различны?*

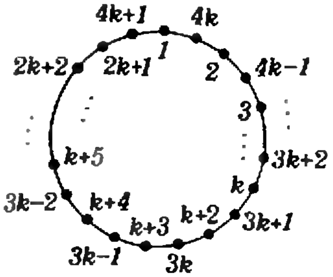


Рис. 1.

Ответ: при $n=4k$ или $n=4k-1$, $k \in N$. Рассмотрим сумму $S=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_n-a_1|$. По условию все n составляющих ее слагаемых различны и заключены между числами 1 и n, следовательно $S=1+2+\ldots+n= =n(n+1)/2$. С другой стороны, если заменить модули разностей чисел a_i в этой сумме на сами разности с соответствующими знаками и привести подобные, каждое из чисел $a_1, \ldots, a_n$ будет входить в сумму с коэффициентом 2, −2 или 0 (так как любое из них содержится ровно в двух модулях). Следовательно, S — четное число. Но, поскольку n и $n+1$ — числа разной четности, число $n(n+1)/2$ будет четным тогда и только тогда, когда n или $n+1$ делится на 4, то есть $n=4k$ или $n=4k-1$, $k \in N$.

В обоих случаях нужный набор чисел может быть указан: см. рис. 1 для $n=4k$ и рис. 2 для $n=4k-1$. Для удобства на обоих рисунках числа a_i расположены по окружности; на рисунке 1 $a_1=4k+1$, $a_2=1$, $a_3=4k$, …, $a_n= =2k+1$ (не используется $k+1$), на рисунке 2 $a_1=4k$, $a_2=1$, $a_3=4k-1$, …, $a_n=2k$ (не используется $3k$). Заметим, что на обоих рисунках при движении по часовой стрелке начиная от a_1, числа, записанные внутри окружностей,

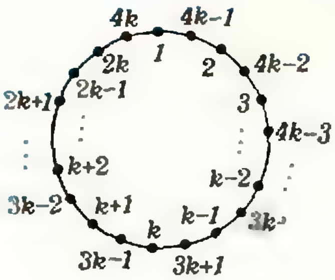


Рис. 2.

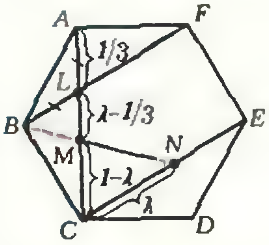
возрастают, а записанные снаружи — убывают, причем «внутренние» числа меньше «внешних». Отсюда легко вывести, что указанные наборы удовлетворяют условиям задачи.

А. В. Анджан

М776. *На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно, такие, что*

$$\frac{|AM|}{|AC|}=\frac{|CN|}{|CE|}=\lambda.$$

Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ.



◆

Ответ: $\lambda=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Пусть L — точка пересечения диагоналей AC и BF (см. рисунок). Диагонали BF и CE параллельны, поэтому треугольники BLM и NCM подобны; следовательно,

$$\frac{|BL|}{|NC|}=\frac{|LM|}{|CM|}.$$

Выразим длины отрезков в этом равенстве через λ, считая длину диагонали AC равной 1.

Из подобия треугольников ABL и CFL следует, что $|BL|:|LF|=|AB|:|CF|=1:2$. Следовательно, $|BL|=1/3$, так как $|BF|=|AC|=1$. Аналогично, $|AL|=1/3$. Ясно, что $|CN|=|AM|=\lambda$, $|CM|=1-\lambda$, а $|LM|=|AM|-|AL|=\lambda-\frac{1}{3}$. Таким образом,

$$\frac{1/3}{\lambda}=\frac{\lambda-1/3}{1-\lambda},$$

то есть $\lambda^2=1/3$ и $\lambda=1/\sqrt{3}$.

А. П. Савин

М777. *Дано уравнение $x^3-3xy^2+y^3=n$. Докажите, что*

а) если натуральное n таково, что данное уравнение имеет целочисленное решение, то оно имеет по меньшей мере три целочисленных решения;

б) при $n=2891$ это уравнение не имеет целочисленных решений.

◆

а) Обозначим левую часть уравнения через $P(x, y)$. Ее можно переписать так:

$$P(x,y)=x^3-3xy^2+y^3=(y-x)^3+3(y-x)x^2-x^3=$$
$$=-y^3+3y(x-y)^2+(x-y)^3.$$

Следовательно, $P(x,y)=P(y-x,-x)=P(-y,x-y)$. Поэтому, если пара целых чисел (x, y) является решением нашего уравнения, то ему удовлетворяют также еще две пары — $(y-x, -x)$ и $(-y, x-y)$. Все эти три пары различны, ибо в противном случае $x=y=0$, что невозможно при $n\neq 0$.

б) Чтобы убедиться, что уравнение $x^3-3xy^2+y^3=2891$ не имеет целочисленных решений, достаточно доказать, что левая часть ни при каких целых x и y не дает при делении на 9 в остатке 2, поскольку $2891=9\cdot 321+2$. Для доказательства воспользуемся таблицей, в которой для всевозможных остатков от деления числа a на 9 приведены остатки для чисел $3a$ и a^3.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$3a$	0	3	6	0	3	6	0	3	6
a^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8

Из второй и третьей строк таблицы видно, что остаток 2 в левой части может получиться тогда, и только тогда, когда остатки от деления x^3, $3xy^2$ и y^3 на 9 соответственно равны 1, 0, 1; 0, 6, 8 или 8, 6, 0. В первом случае $3xy^2$ делится на 9, поэтому x или y делится на 3 и не может давать при делении на 9 остаток 1. Во втором и третьем, соответственно, x или y делится на 3, поэтому $3xy^2$ делится на 9 без остатка, а не дает остаток 6, как нам требуется.

А. П. Савин

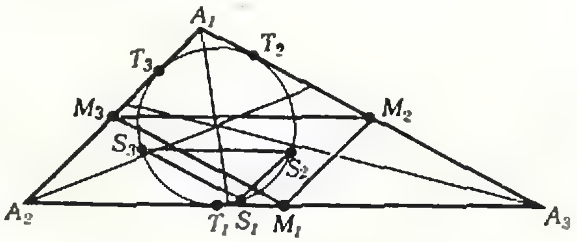
◆

М778*. *Дан неравнобедренный треугольник $A_1A_2A_3$. Пусть a_i — его сторона, лежащая против вершины A_i ($i=1, 2, 3$), M_i — середина стороны a_i, T_i — точка касания стороны с окружностью, вписанной в данный треугольник, и S_i — точка, симметричная T_i относительно биссектрисы угла A_i треугольника.*

Докажите, что прямые M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 имеют общую точку.

Стороны треугольника $M_1M_2M_3$ соответственно параллельны сторонам треугольника $A_1A_2A_3$. Мы докажем, что и стороны треугольника $S_1S_2S_3$ параллельны сторонам $A_1A_2A_3$. Отсюда вытекает, что $\triangle S_1S_2S_3$ гомотетичен $\triangle M_1M_2M_3$ или переводится в него параллельным переносом. Второй случай отпадает, ибо окружность, описанная около треугольника $M_1M_2M_3$, больше описанной окружности треугольника $S_1S_2S_3$. Следовательно, прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников $S_1S_2S_3$ и $M_1M_2M_3$, должны пересечься в одной точке — центре гомотетии.

Покажем, например, что прямые S_1S_2 и A_1A_2 параллельны (*см. рисунок*). *При симметрии относительно биссектрисы угла* A_1 точка S_1 перейдет в T_1, а T_3 — в T_2, поэтому дуги S_1T_3 и T_1T_2 вписанной окружности треугольника $A_1A_2A_3$ равны. Аналогично, при симметрии относительно биссектрисы угла A_2 дуга T_1T_2 перейдет в дугу T_3S_2. Следовательно, дуги S_1T_3 и T_3S_2 равны, и поэтому точки S_1 и S_2 находятся на одинаковом расстоянии от прямой A_1A_2, то есть $S_1S_2 \parallel A_1A_2$. Аналогично доказывается, что и две другие стороны треугольника $S_1S_2S_3$ параллельны соответствующим сторонам треугольника $A_1A_2A_3$.



А. П. Савин

◆

М779*. *Рассматриваются последовательности $\{x_n\}$ положительных чисел, удовлетворяющие условию*

$$1=x_0>x_1>x_2>\ldots>x_n>\ldots$$

а) Докажите, что для любой такой последовательности $\{x_n\}$ существует n, при котором

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}>3{,}999.$$

б) Найдите такую последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую указанному условию, для которой при любом n

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4.$$

а) Легко видеть, что справедливо следующее неравенство: $\frac{x_{k-1}^2}{x_k}>4(x_{k-1}-x_k)$. Действительно, умножив обе его части на (положительное) число x_k и перенеся все члены влево, получаем очевидное соотношение: $x_{k-1}^2-4x_{k-1}x_k+4x_k^2=(x_{k-1}-2x_k)^2>0$.

Сложив доказанные неравенства для всех k от 1 до n, мы получим, что

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}>4(x_0-x_n)=4(1-x_n) \qquad (*)$$

Если последовательность $\{x_n\}$ стремится к нулю при $n\to\infty$, то, как следует из $(*)$, доказываемое неравенство выполняется при всех достаточно больших n.

Если же последовательность не стремится к нулю, то по теореме Вейерштрасса о существовании предела у ограниченной снизу монотонно убывающей последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a>0$. Но тогда предел последовательности x_{n-1}^2/x_n также равен a, так как предел отношения равен отношению пределов числителя и знаменателя, если эти пределы существуют и предел знаменателя не равен нулю. Начиная с некоторого номера N отношение x_{n-1}^2/x_n будет отличаться от a меньше, чем на $a/2$, и следовательно, само будет больше, чем $a/2$. Поэтому в левой части доказываемого неравенства можно набрать столько слагаемых, что сумма станет больше 4 (и вообще, любого заданного числа).

б) Ответ: искомая последовательность $\{x_n\}$ — это геометрическая прогрессия со знаменателем 1/2: $x_n = 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Для этой последовательности сумма в левой части равна

$$2+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}=4-\frac{1}{2^{n-2}}<4.$$

Замечание. Последовательность из пункта б) единственна. Действительно, как мы видели в решении пункта а), она должна обязательно стремиться к 0. Если она не совпадает с геометрической прогрессией $\{1/2^n\}$, то $x_{k-1} \neq 2x_k$ хотя бы при одном k, поэтому величина $\delta = \frac{x_{k-1}^2}{x_k} - 4(x_{k-1} - x_k) = \frac{(x_{k-1}-2x_k)^2}{x_k}$ положительна. Но разность между левой и правой частями неравенства (*) при $n > k$ не меньше δ. Следовательно, при достаточно большом n его левая часть будет больше 4.

А. П. Савин

◆

Ф788. *Длинная гладкая труба радиуса R наклонена под углом α к горизонту (рис. 1). Из точки A по внутренней поверхности трубы пускают вверх небольшое тело. Вектор начальной скорости тела составляет угол φ с прямой AB (см. рис. 1). При какой минимальной начальной скорости тело будет двигаться не отрываясь от поверхности трубы?*

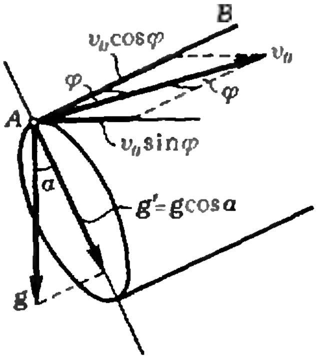


Рис. 1.

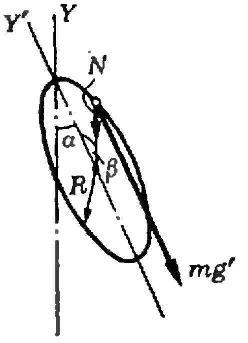


Рис. 2.

Сложное движение тела внутри трубы в любой момент времени можно представить как суперпозицию двух независимых движений — движения вдоль оси трубы и движения по окружности в плоскости, перпендикулярной оси трубы (см. рис. 1). Отрыв тела от поверхности трубы скажется только на втором движении — тело не будет двигаться по окружности. Поэтому мы рассмотрим только это движение.

На тело, движущееся по окружности, действует сила N нормальной реакции со стороны стенок трубы (вектор $\vec{N}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси трубы) и «сила тяжести» $mg' = mg\cos\alpha$. Запишем условие движения тела по окружности:

$$mg'\cos\beta + N = \frac{mv^2}{R}, \qquad (1)$$

где β — угол, который составляет радиус-вектор той точки окружности, в которой в данный момент находится тело, с вертикалью» Y' (рис. 2). Чтобы тело не отрывалось от трубы, должно выполняться условие

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg'\cos\beta > 0 \ \Rightarrow\ v^2 > mg'R\cos\beta. \qquad (*)$$

Связь между скоростью v, с которой в данный момент движется тело по окружности, и начальной скоростью v_0 найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии: при любом значении угла β должно выполняться соотношение

$$m\frac{v^2}{2} + mg'R\cos\beta = m\frac{(v_0\sin\varphi)^2}{2} + mg'R.$$

Отсюда

$$v^2 = v_0^2\sin^2\varphi + 2g'R - 2g'R\cos\beta.$$

Подставив это выражение в (*), найдем, при каких значениях v_0 тело не оторвется от трубы:

$$v_0^2 > 3\frac{g'R}{\sin^2\varphi}\cos\beta - 2\frac{g'R}{\sin\varphi}.$$

Поскольку это условие должно выполняться при любом значении $\beta \in [0, 2\pi]$, окончательно имеем:

$$v_0^2 > \frac{Rg'}{\sin^2\varphi} = \frac{Rg\cos\alpha}{\sin^2\varphi}.$$

С. С. Кротов

Ф789. *Выточенную на токарном станке фигуру с плоским основанием поставили на дно сосуда и начали наливать в сосуд воду. На рисунке 1 приведен график зависимости силы F, с которой фигура давит на дно, от высоты H уровня воды в сосуде (вода под фигуру не подтекает). Определите по графику площадь основания фигуры, ее объем и плотность материала, из которого она сделана. Нарисуйте (приближенно) эту фигуру. На какой высоте площадь горизонтального сечения фигуры равна площади ее основания?*

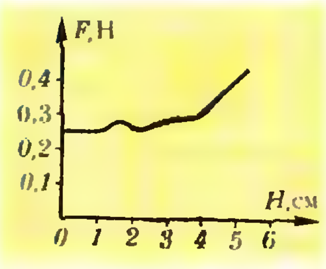


Рис. 1.

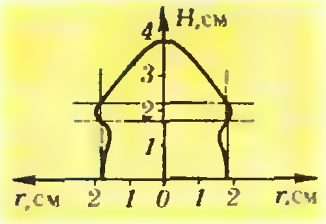


Рис. 2.

Ф790. *Брусок массы m прикреплен с помощью пружины жесткости k к стене. На расстоянии d от бруска лежит второй брусок такой же массы. Какую минимальную скорость нужно сообщить правому бруску (см. рисунок), чтобы после соударения брусков левый брусок вернулся в исходное положение? Коэффициент трения брусков о поверхность не зависит от ско-*

Пусть при высоте H уровня воды в сосуде объем погруженной в воду части фигуры равен V. Сила, действующая на фигуру со стороны воды, равна

$$f=\varrho_в gH-\varrho_в gHS_0,$$

где S_0 — площадь основания фигуры. Запишем условие равновесия фигуры:

$$F'(H)-Mg+\varrho_в gV-\varrho_в gHS_0=0,$$

где M — масса фигуры, $F'(H)$ — абсолютное значение силы нормальной реакции со стороны дна сосуда при данном уровне воды в сосуде. Согласно III закону Ньютона, $F'(H)=F(H)$; следовательно,

$$F(H)=Mg-\varrho_в gV+\varrho_в gHS_0.$$

Ясно, что после того как фигура будет полностью покрыта водой, график станет линейным. По этому участку графика определим S_0 (выберем точки $H_1=4$ см и $H_2=5$ см):

$$S_0=\frac{1}{\varrho_в g}\cdot\frac{\Delta F}{\Delta H}=\frac{1}{10^3\cdot 9{,}8}\cdot\frac{0{,}1}{0{,}01}\text{ м}^2\approx 10^{-3}\text{м}^2.$$

Теперь можно определить объем фигуры:

$$V_0=\frac{Mg-F(H)+\varrho_в gHS_0}{\varrho_в g}=\frac{F(0)-F(H)+\varrho_в gHS_0}{\varrho_в g}$$

(мы учли, что при $H=0$ $F(0)=Mg$). Взяв точку, лежащую на линейном участке графика,— например, точку, соответствующую $H_2=5$ см,— найдем:

$$V_0\approx\frac{0{,}25-0{,}4+10^3\cdot 9{,}8\cdot 0{,}05\cdot 10^{-3}}{10^3\cdot 9{,}8}\text{ м}^3\approx 3{,}5\cdot 10^{-5}\text{ м}^3.$$

Плотность материала, из которого сделана фигура, равна

$$\varrho=\frac{M}{V_0}=\frac{F(0)}{gV_0}\approx 7\cdot 10^2\text{ кг/м}^3.$$

Для исследования формы фигуры найдем малое приращение силы ΔF, обусловленное малым приращением высоты ΔH уровня воды:

$$\Delta F=-\varrho_в g\cdot\Delta V+\varrho_в gS_0\cdot\Delta H=\varrho_в g(S_0-S(H))\Delta H$$

(мы учли, что малое приращение объема равно $\Delta V=S(H)\cdot\Delta H$). Отсюда видно, что там, где F растет с ростом H ($\Delta F>0$), $S(H)<S_0$; и наоборот, при $\Delta F<0$ $S(H)>S_0$. В точках кривой, которые соответствуют площадям сечения, равным S_0, $\Delta F=0$, то есть в этих точках касательная к кривой горизонтальна. Это условие выполняется в точках $H_3\approx 1{,}7$ см и $H_4\approx 2{,}2$ см и около основания фигуры. (Читатели, знакомые с дифференцированием, могут произвести более подробный анализ формы фигуры, взяв первую и вторую производные функции $F(H)$.)

На рисунке 2 изображена (приближенно) эта фигура.

Д. В. Белов

◆

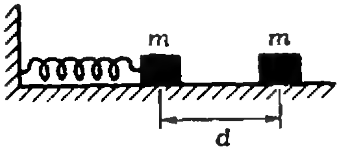
Пусть искомая минимальная скорость равна v. Тогда, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2}=\mu mgd+2\mu mgx,\qquad(1)$$

то есть вся начальная энергия системы, равная кинетической энергии правого кубика, переходит в конечном итоге в тепло — она расходуется на преодоление силы трения на пути $(d+2x)$, где x — максимальное сжатие пружины. В тот момент, когда оба кубика неподвижны, а пружина максимально сжата,

$$\frac{mv^2}{2}=\mu mgd+\frac{kx^2}{2}+\mu mgx.\qquad(2)$$

рости и равен μ; соударение брусков считать абсолютно упругим.



Ф791. *В цилиндрическом сосуде под поршнем находится 1 моль идеального одноатомного газа. Масса поршня равна M, площадь — S. Какое количество теплоты надо подводить к газу в единицу времени, чтобы поршень двигался равномерно вверх со скоростью v? Атмосферное давление равно p_0. Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует.*

Ф792*. *Между Москвой и Ленинградом протянута двухпроводная телефонная линия. Сопротивление одного метра проволоки равно r = 0,05 Ом. Из-за несовершенства изоляции сопротивление между проводами составляет R = = 10⁷ Ом на каждый метр линии. К концам линии в Москве подключают источник с напряжением U = 100 В. Что покажет вольтметр, если его подключить а) к концам линии в Ленинграде? б) в середине линии?*

Из уравнений (1) и (2) находим максимальное сжатие пружины:

$$x=2\mu g\frac{m}{k}.$$

Подставив найденное значение x в (1), находим минимальную скорость v:

$$v=\mu g\sqrt{2}\sqrt{\frac{d}{\mu g}+\frac{4m}{k}}.$$

В. К. Петерсон

◆

На поршень в любой момент времени действуют сила тяжести Mg, сила p_0S атмосферного давления и сила pS давления газа. Согласно II закону Ньютона при равномерном движении поршня

$$pS=Mg+p_0S.$$

Следовательно, давление газа в цилиндре постоянно.

Пусть в единицу времени к газу подводит количество теплоты q. Тогда, согласно закону сохранения энергии,

$$q\cdot\Delta t=\frac{3}{2}R\frac{m}{\mu}\Delta T+p\cdot\Delta V.$$

Здесь $\frac{3}{2}R\frac{m}{\mu}\Delta T$ — изменение внутренней энергии газа, $p\cdot\Delta V$ — работа, совершаемая газом ($\Delta V=Sv\cdot\Delta t$ — изменение объема ΔV газа за время Δt). Из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что

$$p\cdot\Delta V=\frac{m}{\mu}R\cdot\Delta T.$$

Таким образом

$$q\cdot\Delta t=\frac{3}{2}p\cdot\Delta V+p\cdot\Delta V=\frac{5}{2}p\cdot\Delta V=\frac{5}{2}pSv\cdot\Delta t.$$

Отсюда

$$q=\frac{5}{2}pSv=\frac{5}{2}(Mg+p_0S)v.$$

Д. В. Подлесный

◆

Примем расстояние между Москвой и Ленинградом равным $6\cdot10^5$ м. Разобьем линию на множество звеньев: каждое звено представим в виде эквивалентной схемы из трех резисторов (рис. 1). Если одно звено соответствует 1 м длины линии, то последовательные резисторы имеют сопротивление $r=0{,}05$ Ом, а параллельный — $R=10^7$ Ом. Ясно, что два резистора, подключенные последовательно, можно заменить одним, сопротивление которого равно $2r=0{,}1$ Ом.

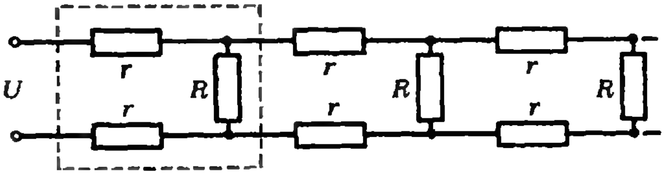


Рис. 1.

Число звеньев такой цепочки очень велико. Будем считать эту цепочку бесконечной, а потом — получив решение — обсудим правомерность этого приближения.

Найдем вначале сопротивление $R_{\text{общ}}$ такой цепи. Для этого добавим еще одно звено впереди цепочки и потре-

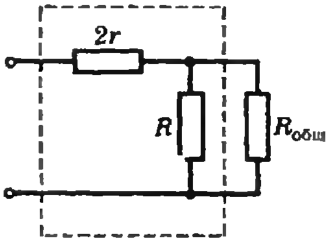


Рис. 2.

буем, чтобы полное сопротивление такой удлиненной цепи (рис. 2) опять составило $R_{общ}$:

$$\frac{R\cdot R_{общ}}{R+R_{общ}}+2r=R_{общ}.$$

Отсюда находим $R_{общ}$:

$$R_{общ}=r+\sqrt{r^2+2rR}=0{,}05+\sqrt{(0{,}05)^2+10^6}\approx10^3\ Ом.$$

Если ко входным зажимам схемы на рисунке 2 подключить напряжение U, то после этого добавочного звена напряжение уменьшится на величину

$$\Delta U=2rI=2r\frac{U}{R_{общ}}.$$

Это означает, что после одной ячейки напряжение станет меньше в $k=\dfrac{U}{U-\Delta U}=\dfrac{1}{1-2r/R_{общ}}\approx1{,}0001$ раз, и каждая следующая ячейка уменьшает напряжение во столько же раз. Значит, после n ячеек напряжение на оставшейся части цепи будет равным

$$U_n=\frac{U}{k^n}.$$

При нашем разбиении число ячеек равно $N=\dfrac{6\cdot10^5\ м}{1\ м}=6\cdot10^5$; значит напряжение на конце линии составит

$$U_N=\frac{U}{k^N}=\frac{100}{(1+0{,}0001)^{6\cdot10^5}}\ В.$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе:

$$(1+0{,}0001)^{6\cdot10^5}=[(1+0{,}0001)^{10000}]^{60}\approx e^{60}\approx1{,}14\cdot10^{26}$$

(выражение в квадратных скобках — это приближенное значение числа $e\approx2{,}718$ — основания натуральных логарифмов).

Итак, напряжение на конце линии составляет

$$U_N\approx\frac{100}{1{,}14\cdot10^{26}}\ В\approx10^{-24}\ В.$$

Такую величину просто невозможно измерить, вольтметр покажет 0.

Напряжение посредине линии —

$$U_{N/2}=\frac{100}{e^{30}}\ В\approx10^{-11}\ В.$$

Что изменится, если взять ячейку «длиной» не 1 м, а 1 см или 1 км (или 100 км)? В нашем случае «умельчение» ячеек, конечно, допустимо, но явно не имеет смысла; а вот увеличивать их размеры нужно осторожно — на длине линии 10 км (10 000 ячеек по 1 м) напряжение падает в e раз, и ясно, что «длина» ячейки должна быть, во всяком случае, во много раз меньше, чем 10 км.

Считая цепь бесконечной, мы как бы добавили к концу ее еще очень много ячеек. Ясно, что расчет $R_{общ}$ был вполне корректным (напряжение на конце цепи во много раз меньше входного, и при подключении дополнительных резисторов $R_{общ}$ практически не меняется). А вот величину напряжения на выходе мы оценили не очень точно. Подумайте сами, каким должно быть сопротивление вольтметра, чтобы наш способ решения давал точный результат.

З. А. Рафаилов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М736—М750, М756, М757 и Ф763—Ф767, справились с задачами М736, М737, М740, М741, М750, М757. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач. (Сведения о решивших задачи М751—М755, М758—М760, предлагавшиеся на XVI Всесоюзной олимпиаде школьников, публиковаться не будут.)

Математика

Л. Байрак (Белгород) **39**; *В. Барабанов* (Киев) **56**; *А. Белоус* (Винница) **39, 42, 56**; *А. Беренштейн* (Москва) **43, 45**; *А. Биргер* (Иваново) **43, 44, 48, 49, 56**; *И. Богуславский* (Москва) **45, 49, 56**; *В. Булавас* (Паневежис) **42, 45, 56**; *М. Верховодов* (Киев) **42**; *Г. Виннер* (Свердловск) **42, 45, 56**; *А. Виноградов* (Москва) **44, 56**; *М. Гаджибабаев* (Махачкала) **44**; *М. Гараев* (Физули) **56**; *М. Горбунов* (Минск) **39**; *М. Гохман* (Киев) **56**; *А. Дейнека* (Винница) **38, 39, 42, 43, 45, 56**; *В. Долотин* (Курск) **48**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **38, 42, 43**; *К. Зыков* (Москва) **38, 43, 48, 49, 56**; *А. Ивченко* (Могилев-Подольский) **42**; *М. Йотов* (София, НРБ) **39**; *С. Каганович* (Киев) **56**; *Ю. Какулов* (п. Цалка ГССР) **44**; *Д. Каледин* (Москва) **48, 56**; *А. Карпович* (Киев) **42—44, 56**; *Н. Кащенко* (Киев) **39, 45**; *Л. Клименок* (Москва) **56**; *Е. Ковильчук* (Киев) **56**; *М. Коган* (Донецк) **45, 56**; *Л. Корогодский* (Черкассы) **56**; *Д. Коршунов* (Новосибирск) **43, 56**; *К. Кохась* (Ленинград) **42, 43, 45, 56**; *Ю. Кочетков* (с. Поповцы Винницкой обл.) **42, 56**; *М. Лев* (Свердловск) **42**; *А. Маркович* (Белград, СФРЮ) **38, 42**; *Р. Мисявичюс* (д. Повилаускай Лит. ССР) **56**; *А. Молотков* (Ленинград) **56**; *Ф. Низаров* (Ленинград) **56**; *А. Никольцев* (Севастополь) **42, 45**; *В. Новиков* (Коммунарск) **56**; *А. Поляк* (Киев) **56**; *К. Порайко* (Винница) **42, 56**; *С. Портнов* (Ленинград) **42**; *А. Родионов* (Москва) **42**; *Л. Рудый* (Кировск Мурманской обл.) **42**; *В. Сабадат* (Киев) **56**; *В. Садовский* (Ташкент) **56**; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) **56**; *А. Свиридов* (Москва) **42, 56**; *Е. Слободянюк* (Киев) **56**; *С. Степанов* (с. Перемышль Калужской обл.) **56**; *С. Струков* (Воронеж) **39, 42**; *М. Титаренко* (Винница) **42**; *Н. Титаренко* (Винница) **39, 56**; *Н. Федин* (Омск) **44**; *Б. Фридман* (Москва) **43**; *В. Хрычиков* (Севастополь) **42, 45**; *С. Цонев* (София, НРБ) **56**; *С. Чернышев* (Александров) **43**; *Р. Шпильский* (Киев) **56**; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) **42, 45, 56**; *П. Этингоф* (Киев) **43, 49, 56**; *С. Юровский* (Мытищи) **42, 44, 56**.

Физика

А. Абанов (Красноярск) **63—65**; *А. Бабаян* (Москва) **64**; *Э. Багдасарян* (Баку) **63, 65**; *В. Барабанов* (Киев) **63—65**; *Г. Баранов* (Донецк) **63—67**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **63—65, 67**; *В. Булавас* (Паневежис) **63, 65, 67**; *В. Васильев* (Таганрог) **64, 67**; *Д. Владимиров* (Новолукомль) **64**; *И. Гайович* (Киев) **63, 64, 67**; *О. Голинский* (Тамбов) **63**; *Ю. Гордиенко* (Винница) **63**; *М. Гостев* (Липецк) **64, 65**; *Г. Данелиа* (Тбилиси) **64**; *Л. Доросинский* (п. Черноголовка Московской обл.) **64—67**; *А. Дунаевский* (Киев) **63—67**; *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) **63—66**; *Е. Ефимов* (Баку) **64—67**; *В. Житомирский* (Харьков) **63—65, 67**; *Н. Жонов* (Москва) **63, 64**; *Р. Жямайтис* (Вильнюс) **63—67**; *Д. Зайцев* (Горький) **63—65, 67**; *В. Зарецкий* (Брест) **63, 64**; *Ю. Звегинцев* (Харьков) **64, 65, 67**; *Д. Каледин* (Москва) **63, 66, 67**; *И. Калиновский* (Киев) **63, 64, 66**; *А. Карнаухов* (Ижевск) **64, 65, 67**; *С. Кастелли* (Болград) **63—67**; *Ю. Кившарь* (Харьков) **63, 64**; *В. Кидысюк* (Рязань) **63—65, 67**; *В. Комов* (Александров) **63—66**; *К. Кондратец* (Киев) **65, 67**; *А. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) **63—67**; *А. Кривцов* (Москва) **63, 64**; *А. Крапивин* (Киев) **63**; *В. Криман* (Винница) **63—67**; *В. Кузьмин* (Брест) **63—65, 67**; *Д. Купцов* (Москва) **63, 64, 66**; *Н. Кухаркин* (Москва) **64, 65**; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) **63, 64, 67**; *И. Линшиц* (Винница) **64, 65, 67**; *С. Лиханский* (Херсон) **64**; *О. Лопин* (Фрунзе) **65, 66**; *С. Люлькович* (Брест) **64, 67**; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) **63, 64**; *К. Макарчук* (Киев) **63—67**; *А. Максимов* (Новосибирск) **63—65**; *А. Малий* (Каушаны) **63, 67**; *Л. Маркович* (Брест) **63—65**; *С. Марук* (Фрунзе) **64—66**; *И. Медков* (Москва) **63, 64, 67**; *С. Мусиев* (Баку) **63**; *Л. Набишев* (Фергана) **63**; *Д. Набутовский* (Новосибирск) **63, 64, 67**; *А. Носков* (Москва) **63, 64**; *А. Огнев* (Новосибирск) **63, 65, 66**; *С. Орлов* (Зеленоград) **63—65**; *А. Охапкин* (Чита) **65**; *С. Панасевич* (Брест) **63, 64**; *В. Пекар* (Киев) **63**; *И. Пильников* (Тамбов) **63, 64**; *О. Пузырко* (Пярну) **63, 64**; *Ю. Родионов* (Новосибирск) **64**; *Н. Розенвайн* (Киев) **65**; *С. Розыскнов* (Керчь) **65, 67**; *В. Ромашин* (Донецк) **63—66**; *В. Рыбенков* (Махачкала) **63, 64, 66**; *А. Рылянков* (Саратов) **63—65, 67**; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) **63, 64**; *Ф. Серженко* (Запорожье) **64, 65, 67**; *С. Симанов* (Долгопрудный) **63, 65**; *М. Скорик* (Киев) **63, 65, 66**; *А. Сурков* (Ленинград) **67**; *И. Тихоненко* (совх. Новоомский Омской обл.) **64, 65, 67**; *О. Фатьянов* (Курск) **63—67**; *Н. Федин* (Омск) **64—67**; *В. Фельдман* (Саратов) **63—66**; *Л. Фельдман* (Саратов) **64**; *С. Цонев* (София, НРБ) **64, 67**; *Ю. Чаплыгин* (Валуйки) **63—67**; *С. Чеканов* (Саратов) **63—67**; *О. Чернышев* (Тольятти) **64**; *В. Щедров* (Великие Луки) **63, 67**; *М. Шнайдер* (Винница) **64, 67**; *И. Шойхет* (Ташкент) **64**; *А. Шугай* (Запорожье) **63—65, 67**; *Ю. Щербаков* (Запорожье) **64, 67**; *И. Эрхарт* (Биловец, ЧССР) **63, 64**.

Стандартные приемы программирования

Урок 6. Настройка программы по параметрам

Рассмотрите следующую программу:

```
program primer (input, output);
  var a: array [1..100] of real;
      i: integer; s: real;
  begin for i: =1 to 100 read(a[i]);
        s:=0;
        for i:=1 to 100 do s:=s+u[i];
        s:=s/100; writeln(s);
```

Продолжение программы

1. Что делает эта часть программы?
2. Правильна ли она? Изящна ли она?
3. Не видите ли вы каких-нибудь дефектов в этой программе?
4. Как надо изменить программу, чтобы она обрабатывала массив в 115 элементов?

* * *

Представьте себе такой диалог между пассажирами самолета и стюардессой:

— Стюардесса! Почему не летим? Чего ждем?

— Видите ли, наш самолет рассчитан на 100 мест, а пришло только 98 пассажиров. Конструкция самолета такова, что он не может взлететь с пустыми креслами, так что придется подождать пока не придут опоздавшие или кто-нибудь не захочет полететь нашим рейсом.

— А что, если посадить в кресла манекены? Тогда взлетим?

— Да, конечно.

— Скажите,— вмешивается второй пассажир,— а если просто отвинтить пустые кресла?

— Можно и так,— отвечает стюардесса и пассажиры бросаются отвинчивать кресла или искать манекены.

Разумеется, такой диалог нелеп, и встречаться с такой ситуацией в Аэрофлоте не приходится. Но взгляните на приведенную программу: может она «взлететь» с 98 элементами массива «на борту»? Нет!! Но почему? Ведь в алгоритме нет ничего, что требовало бы именно 100 элементов (как, скажем, операция деления требует именно двух чисел: делимого и делителя). По поводу подобных программ часто приходится иметь с начинающими программистами беседы типа:

— А что Вы будете делать, если понадобится обработать не 100, а 98 элементов?

— Сменю «100» на «98» здесь, здесь и здесь. (То есть демонтирую кресла).

— Что ж, Вы будете изменять половину операторов программы? А кроме того Вы забыли изменить ее еще и вот здесь. И где гарантия, что больше нигде не надо менять?

— Ну... тогда добавлю к исходным данным пустую перфокарту: с нее введутся нули и все будет в порядке. (Посажу в кресла манекены).

— А если элементы надо не складывать, а множить?

— Тогда введу единицы.

— А если надо и складывать, и множить?

— ??!

Итак, мы частично ответили на вопросы 2 и 3. Программа, конечно, правильна с формальной точки зрения, но изящной ее вряд ли можно назвать, так как она имеет крупный дефект: без видимой причины *программа жестко привязана к размеру обрабатываемого массива.*

На оставшиеся вопросы однозначно ответить трудно. Можно сказать, что программа считает среднее арифметическое, тогда для обработки массива в 115 элементов надо заменить «100» на «115» в *четырех* местах; но можно сказать, что она вычисляет сумму и делит ее на 100 (переводя, например, результат из процентов в обычные дроби), тогда замены надо производить только в *трех* местах. Здесь видны сразу три дефекта: во-первых, нет комментариев, поясняющих работу программы, во-вторых, «безмолвные» числовые константы разбросаны по всей программе и неясно, случайно ли совпадают некоторые из них, и в-третьих, привязка программы к размеру массива выполнена во многих местах и для изменения размеров необходимо вносить множество поправок.

Введем в нашу программу незначительные изменения:

```
program primer(input, output);
   const n=100; m=100; {n — размер массива}
   var a:array[1..n] of real
      i:integer; s:real;
   begin for i:=1 to n do read(a[i]);
     s:=0;
     for i:=1 to n do s:=s+a[i];
     s:=s/m; writeln(s);
```

Продолжение программы

Теперь и без комментария стало ясно, что программа вычисляет не среднее арифметическое.

Для изменения размеров массива надо изменить одну строчку (независимо от размеров программы), причем искать ее долго не надо: она находится в начале программы.

Таким образом наша программа стала легко настраиваемой: надо сменить блок настройки, вынесенный в начало программы и имеющий небольшие размеры, не зависящие от величины программы. Блок настройки содержит значения всех параметров программы. Такой прием настройки программы называется статической настройкой: программа настраивается в процессе ввода в ЭВМ (точнее, при трансляции), однако «взлететь» с неполным набором «пассажиров» еще не может.

В некоторых языках программирования (алгол, ПЛ/1, например) есть возможность отводить нужное количество памяти динамически: сначала вычисляем N, затем выполняем инструкцию «отвести N элементов памяти». Но в любом языке, по-видимому, самым быстрым способом динамической настройки программы (то есть настройки в процессе выполнения) на необходимые размеры массивов является прием, который можно назвать работа с неполным массивом.

При работе с неполным массивом все массивы описываются **с запасом, и используется только необходимая часть** массива.

Описание и ввод в этом случае выглядят следующим образом (остальная часть программы опущена):

```
const k:=100; m:=100 {k — макс. число элем.}
var a: array [1..k] of real;
    i, n: integer; s: real;
begin readln(n);
      for i:=1 to n do read(a[i]);
. . . . . . . . . . . . . . . . . .

или
begin n:=0; while NOT (eof(input)) do
                begin n:=n+1; read (a[n]) end;
```

В первом варианте программист перед началом массива исходных данных подкладывает перфокарту с количеством нужных ему в этот раз элементов, во втором — после массива подкладывает перфокарту «конец файла». Оставшаяся часть программы не изменяется: все циклы выполняются с изменением параметра от 1 до n.

Какой брать запас? В каждой конкретной задаче это обычно известно: пассажиров в ТУ-134 не более 72, студентов в группе — не более 30 и т. д. Если нужны многомерные массивы, то поступаем аналогично: описываем, скажем, двумерную матрицу с запасом по каждому измерению и используем ее «северо-западный» угол.

Наконец, если запаса не хватает, то применяем статическую настройку. Это напоминает обычный радиоприемник: в пределах диапазона подстраиваем поворотом ручки, для смены диапазонов используем переключатель.

Контрольное задание*)

6.1. Ввести и распечатать значения элементов «неполной» матрицы A размера $n \times m$, считая, что ее элементы занимают левый верхний угол данной матрицы A' размера $n' \times m'$, где $n' > n$, $m' > m$. Размеры n и m вводятся перед вводом матрицы A. Значения каждой строки матрицы должны, во-первых, вводиться с новой строчки и, во-вторых, печататься с новой строчки.

Л. Ф. Штернберг

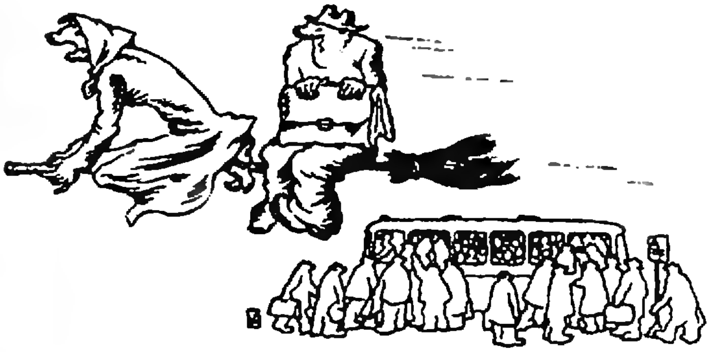
---

*) Это последнее задание цикла «Стандартные приемы программирования».

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

«Летать быстрее и дальше»

«Извлечение корня»



Рисунки А. А. Орехова

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1982 году.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{4^{\frac{x}{2}}+5}<\frac{1}{2^{x+1}-1}.$$

2. Города A и B расположены на прямолинейном шоссе. Из города A в город B одновременно вышли два пешехода, а из города B в город A в тот же момент времени выехал велосипедист. Проехав k-ю часть пути от B до A, велосипедист встретил первого пешехода. Затем, проехав $\frac{2}{3}$ всего пути, велосипедист встретил второго пешехода. На каком расстоянии от них в момент их встречи находился первый пешеход? Скорости пешеходов и велосипедиста постоянны, $|AB|=S$.

3. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, длина диагонали AC которого равна d, и $\widehat{CAD}=\varphi$. Плоскости противоположных боковых граней ASB и CSD составляют с плоскостью основания пирамиды углы величиной α и 2α соответственно. Определите объем пирамиды, если известно, что $|AS|=|BS|$.

4. Найдите критические точки функции $f(x)=3\sin x+4\cos x+4+(1-a)x+\sqrt{a^2-7a+6}$.

Вариант 2

1. Найдите $f'(x)$ и критические точки функции

$$f(x)=\cos\sqrt{x}+\sqrt{3}\,(\sin\sqrt{x}+\sqrt{2}).$$

2. Сумма цифр двузначного натурального числа A равна 14. Если к этому числу прибавить 46, получится число, произведение цифр которого равно 6. Найдите число A.

3. Решите неравенство

$$2\log_4(x-a+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-3-2a)>2.$$

4. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1)\parallel(BB_1)\parallel(CC_1)$, $|AB_1|=d$ и $\widehat{AB_1B}=\alpha$. На прямой, являющейся пересечением плоскости ABC и плоскости симметрии призмы, содержащей прямую BB_1, взята точка O, которая удалена на одинаковое расстояние от точек A, B и C. Через точку O параллельно прямой A_1C_1 проведена плоскость, пересекающая отрезок BB_1 в точке D, причем $|B_1D|:|DB|=1:2$. Определите площадь сечения призмы этой плоскостью, если известно, что $\widehat{ABC}=\beta$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. На концах невесомого стержня длиной $2l$, который может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину, укреплены два груза с массами $m_1=0{,}6$ кг и $m_2=2m_1$. В первоначальном положении стержень располагался горизонтально, а затем был отпущен без начальной скорости. Найдите силу, с которой первый груз действует на стержень в тот момент, когда стержень оказывается в вертикальном положении.

2. Гладкая горка массы M находится на гладком горизонтальном полу. На горку положили и отпустили без толчка шайбу массой m. Отношение масс $n=m/M=0{,}6$. Указанные на рисунке 1 размеры: $H=1{,}3$ м и $h=0{,}5$ м. Каким будет расстояние от шайбы до горки в момент падения шайбы на пол?

3. Два тела прикреплены к концам нерастяжимой нити, перекинутой через легкий блок (рис. 2). Первое лежит на шероховатой поверхности, второе висит на нити. Если телам сообщить некоторую скорость, толкнув второе

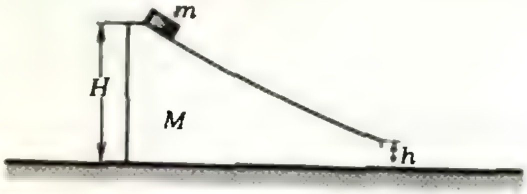


Рис. 1.

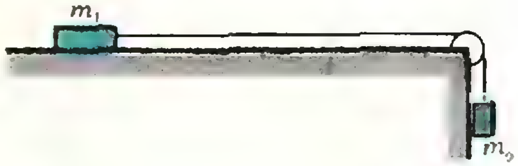


Рис. 2.

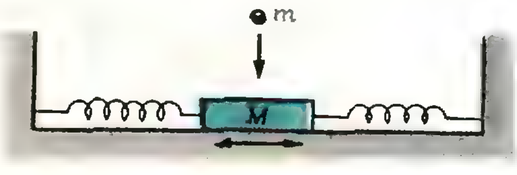


Рис. 3.

тело вниз, то оно опустится на расстояние $h_1=20$ см. Если же сообщить телам ту же скорость, толкнув первое тело влево, то второе тело поднимется на высоту $h_2=10$ см. Определите коэффициент трения между первым телом и поверхностью, если отношение масс тел $m_1/m_2=5$.

4. Брусок массой $M=1$ кг совершает гармонические колебания на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 3). В момент прохождения бруском положения равновесия на него вертикально падает кусок пластилина массы $m=0{,}21$ кг и прилипает к нему. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний бруска?

5. В цилиндре под поршнем массы $M=20$ кг находится $m=1$ г гелия при температуре $T=400$ К (рис. 4). Удлинение пружины A составляет $x=20$ см, а энергия ее деформации $E=60$ Дж. Определите высоту поршня над дном цилиндра. Давлением газа вне цилиндра пренебречь.

6. Два одинаковых заряженных шарика, масса и заряд каждого из которых равны $m=10$ г и $q=5\cdot10^{-7}$ Кл, соединены двумя изолирующими нитями длины $l=10$ см и $2l$ (рис. 5). Систему удерживают за середину длинной нити, а затем точку подвеса O начинают поднимать вверх с ускорением $\vec{a}$, равным по модулю ускорению свободного падения g. Определите натяжение короткой нити, соединяющей шарики, во время их подъема.

7. В однородном электрическом поле, вектор напряженности которого направлен вертикально вниз и по модулю равен $E=10$ кВ/м, находится заряженный шарик A, подвешенный на тонкой изолирующей нити длиной $l=1$ м к точке O (рис. 6). Заряд шарика $q=10^{-6}$ Кл, масса $m=10$ г. Шарику сообщили начальную скорость $\vec{v}_0$ ($v_0=1$ м/с) в направлении, перпендикулярном вектору $\vec{E}$. Найдите натяжение нити в момент достижения шариком крайнего положения.

8. Альфа-частица влетает по нормали в область поперечного однородного магнитного поля с индукцией $B=0{,}1$ Тл (рис. 7). Размер области $h=0{,}1$ м. Найдите скорость частицы, если после прохождения магнитного поля она отклонилась на угол $\varphi=30^\circ$ от первоначального направления. Отношение заряда к массе α-частицы $q/m=0{,}5\cdot10^8$ Кл/кг.

9. На горизонтальных проводящих стержнях лежит металлическая перемычка массы $m=50$ г (рис. 8). Коэффициент трения между стержнями и перемычкой $\mu=0{,}15$. Стержни замкнуты на резистор с сопротивлением $R=5$ Ом. Система находится в магнитном поле, индукция которого направлена вверх, и ее модуль меняется по закону $B=At$, где $A=5$ Тл/с. Определите момент времени, в который перемычка начнет двигаться по стержню. Геометрические размеры: $l=1$ м, $h=0{,}3$ м. Сопротивлением перемычки и подводящих стержней пренебречь.

10. Система состоит из трубы длиной b, тонкой линзы $Л$ и небольшой муфты A массой $m=2$ кг, соединенной с линзой пружинкой жесткости $k=500$ Н/м (рис. 9). Отношение фокусного расстояния линзы к длине трубки $F/b=0{,}4$, длина недеформированной пружинки $b/2$. Систему вращают в горизонтальной плоскости вокруг точки O с угловой скоростью ω, при которой изображение муфты оказывается в точке O. Найдите ω.

Публикацию подготовили
Д. Ф. Калиниченко, А. И. Руденко,
Н. В. Шолохов

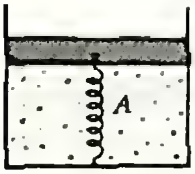


Рис. 4.

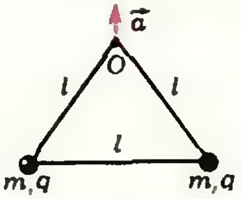


Рис. 5.

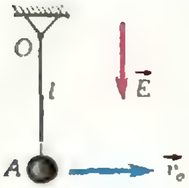


Рис. 6.

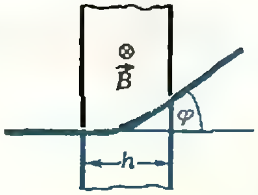


Рис. 7.

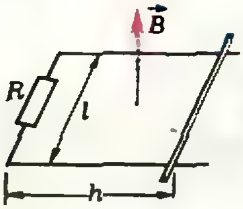


Рис. 8.

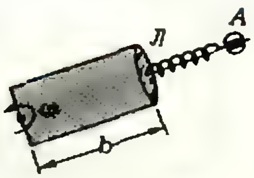


Рис. 9.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

На выполнение работы было предоставлено 3 часа.

Вариант 1

1. Пусть $0<a<b<1$. Упростите выражение $1-(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\cdot\log_b a$ и определите его знак.

2. Решите уравнение

$$\cos 2x+2\sin x\cdot\sin 2x=2\cos x.$$

3. Для функции $f(x)=\lg\left(\frac{2-x^2}{\sqrt{4x+5}}-1\right)$ найдите область определения и точки экстремума.

4. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной 1. Основание K высоты пирамиды лежит на расстоянии $\sqrt{\frac{4}{3}}$ от центра O этого треугольника, причем луч OK проходит через середину одной из его сторон. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, если ее высота равна $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_3(x^2-1)=1+\log_3(x+1).$$

2. Решите уравнение

$$4-3x=\sqrt{(x-1)(2-x)}.$$

3. Для всякого $x\in R$ значение функции $f(x)$ определяется как наибольшее значение функции $g(y)=1-x^2+4xy^3-y^4$ на промежутке $[-1;0]$, то есть

$$f(x)=\max_{y\in[-1;0]}(1-x^2+4xy^3-y^4).$$

Покажите, что на промежутке [3; 8] функция f является многочленом. Найдите этот многочлен. Найдите также $f'(-1)$.

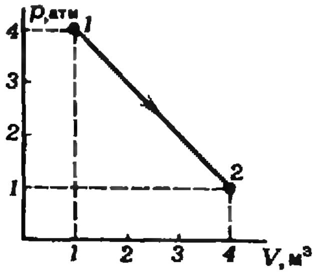
4. Квадрат $ABCD$, сторона которого равна 1, служит основанием пирамиды с вершиной в точке S. Двугранные углы, образуемые гранями ASB, BSC, CSD и DSA с основанием, относятся как числа 1, 2, 7, 2. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

Физико-механический и радиофизический факультеты

1. Для процесса с идеальным одноатомным газом, изображенного на рисунке и представляющего линейную зависимость давления от объема, найдите: а) работу, совершенную газом при расширении от состояния *1* до состояния *2*; б) изменение внутренней энергии; в) количество теплоты, полученное газом.



2. Внутри шара, равномерно заряженного по объему с постоянной плотностью $\rho=9\times10^{-6}$ Кл/м³ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=1$, имеется сферическая полость, в которой заряды отсутствуют. Центр полости смещен относительно центра шара на расстояние $a=25$ мм. Найдите модуль и направление напряженности поля внутри полости, если известно, что напряженность равномерно заряженного шара (при $r<R$) описывается формулой $\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon}\vec{r}$, где $\vec{r}$ — вектор, направленный по радиусу от центра и равный по модулю расстоянию от центра шара, R — радиус шара. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}$ Ф/м.

3. Частица с удельным зарядом $q/m=10^{-5}$ Кл/кг движется прямолинейно под действием электрического поля напряженности $E=200(1-2x)$ В/м, где x — расстояние от точки, в которой частица первоначально покоилась. Найдите: а) расстояние, пройденное частицей до точки, где она остановилась; б) ускорение частицы в этой точке.

4. По медному проводу течет ток плотности $j=1{,}0$ А/мм². Считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, оцените, какой путь пройдет электрон, переместившись на расстояние $d=10$ мм. Плотность меди $\rho=8{,}9\cdot10^3$ кг/м³, молярная масса $\mu=64$ кг/кмоль.

5. Из точки A, лежащей на оси прямого соленоида, вылетает электрон со скоростью $v=5\cdot10^7$ м/с под углом $\alpha=30°$ к оси. Индукция магнитного поля $B=31{,}4$ мТл. Найдите расстояние от оси до точки попадания электрона на экран, расположенный перпендикулярно к оси на расстоянии $l=10$ см от точки A.

Общетехнические факультеты

1. Частица движется в плоскости XOY с постоянным ускорением $\vec{a}$ ($a=10$ м/с²), направление которого противоположно положительному направлению оси OY. Уравнение траектории частицы имеет вид $y=kx-bx^2$, где $k=3$ и $b=2$ м⁻¹. Найдите скорость частицы в начале координат.

2. Некоторая масса молекулярного водорода занимает объем $V_1=1$ м³ при температуре $T_1=250$ К и давлении $p_1=2$ атм. Какое давление будет иметь та же масса водорода при температуре $T_2=5000$ К в объеме $V_2=10$ м³, если при столь высокой температуре молекулы водорода полностью диссоциируют на атомы?

3. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Его энергия равна $W=2\cdot10^{-5}$ Дж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик из конденсатора вынули. Работа, которую при этом надо было совершить против сил электрического поля, равна $A=7\cdot10^{-5}$ Дж. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

4. Через сколько времени от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний $T=24$ с, начальная фаза равна нулю.

5. Точечный источник света и его изображения, полученные путем однократного отражения света от двух плоских зеркал, образуют треугольник с углом α у источника. Определите угол между зеркалами.

Публикацию подготовили
Б. П. Попов, С. П. Преображенский,
В. Н. Романов

Проводящая сфера в задачах по электростатике

1. $Q=-qR/r$. Указание. Поскольку сфера заземлена, потенциал сферы и всех точек внутри нее равен нулю. Этот потенциал создается зарядом q и наведенным на сфере зарядом Q, который распределен по ее поверхности неравномерно. Рассмотрим центр сферы, поскольку для него не важно, как конкретно распределен наведенный заряд. Его потенциал равен

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=0.$$

Отсюда и найдем заряд Q.

2. $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(R+d)}$. Указание. Шарик не заряжен, поэтому потенциал всех его точек один и тот же. Он складывается из потенциала поля заряда q и потенциала поля наведенных на шаре зарядов $+Q$ и $-Q$. Очевидно, что в центре шарика поле наведенных зарядов равно нулю, так что искомый потенциал равен потенциалу поля точечного заряда q.

3. Через гальванометр протечет заряд

$$Q=-qR_1/R_2.$$

4. При $R>r>0$

$$\begin{cases} E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \\ \varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{2}{R}\right). \end{cases}$$

При $r\geqslant R$

$$\begin{cases} E=-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \\ \varphi=-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \end{cases}$$

Соответствующие графики приведены на рисунке 1.

5. $q_{\text{ш}}=q\dfrac{Q}{Q-q}$.

6. $q_2=4\pi\varepsilon_0 q r^3/R^2$.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $]-1;\ \log_2 6]$.

2. $\dfrac{2k-3}{3}S$ при $\dfrac{3}{2}<k\leqslant\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{2}{3}S$ при $k>\dfrac{5}{2}$.

Указание. По условию задачи скорость первого пешехода больше скорости второго пешехода; отсюда следует $k>\dfrac{3}{2}$. Первый пешеход может достигнуть города B позже (или в момент) встречи велосипедиста со вторым пешеходом, а может — и раньше.

3. $\dfrac{1}{3}d^3\dfrac{\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$, если проекция вершины S на плоскость основания принадлежит ему; $\dfrac{1}{3}d^3\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin 2\alpha$ в противном случае. Замечание. Решение не изменится, если $|AS|\neq|BS|$.

4. $x=-\arccos\dfrac{4}{5}+(-1)^k\arcsin\dfrac{1-a}{5}+\pi k\,(k\in Z)$, при $a\in[-4;\ 1]\cup\{6\}$, для остальных a функция f не имеет критических точек (в частности, если $a\in]1;6[$, функция не определена ни при каком $x\in\mathbf{R}$).

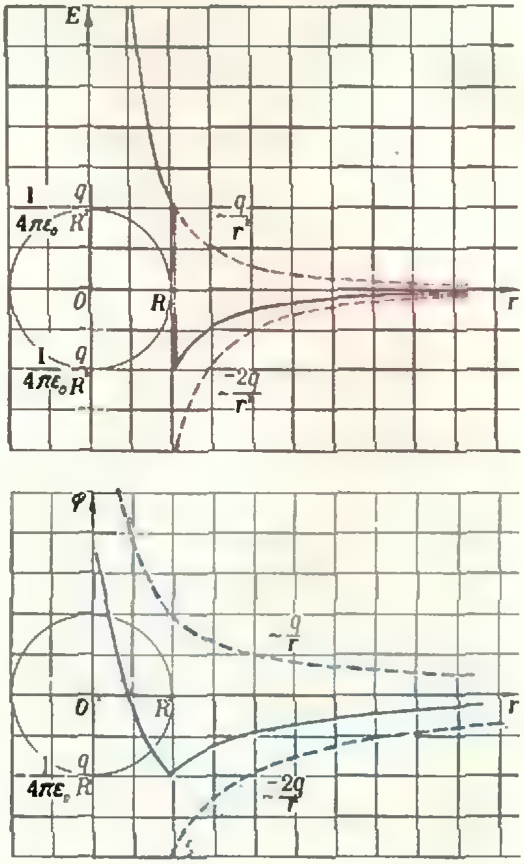


Рис. 1.

Вариант 2

1. $x=\pi^2\left(k+\frac{1}{3}\right)^2$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

2. 77 и 86. **Указание.** Если $A=10a+b$, то $5<b<9$.

3. $]2a+3;\ \frac{1}{3}(7a+13)]$ при $a>-4$. $\varnothing$ при $a<-4$. **Указание.** Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x-a+1}{x-3-2a}>2 \\ x-3-2a>0. \end{cases}$$

4. $\dfrac{d^2\sin^2\alpha\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}}{12\cos^3\dfrac{\beta}{2}}\sqrt{9+16\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$ при $\beta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{6}\,d^2\sin^2\alpha\cdot\sin\beta\sqrt{9+16\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$ при $\beta>\frac{\pi}{2}$. **Указание.** Поскольку у призмы есть плоскость симметрии, содержащая (BB_1), $|BA|=|BC|$.

Физика

1. Запишем второй закон Ньютона для первого груза в момент прохождения стержнем вертикального положения:

$$m_1(v^2/l)=m_1g-N.$$

Здесь v — скорость груза, m_1g — сила тяжести, N — сила, с которой стержень действует на груз (по модулю она равна силе F действия груза на стержень). Для нахождения скорости v используем закон сохранения энергии для системы из двух грузов, соединенных невесомым стержнем:

$$(m_2-m_1)gl=(m_1+m_2)(v^2/2).$$

Из полученных уравнений находим искомую силу F:

$$F=N=m_1g(3m_1-m_2)/(m_1+m_2)=$$
$$=(1/3)m_1g\approx 2\text{ Н}.$$

2. Запишем законы сохранения энергии и импульса для системы горка — шайба:

$$mg(H-h)=\frac{mv^2}{2}+\frac{MV^2}{2},$$
$$mv-MV=0.$$

Отсюда найдем относительную скорость движения шайбы и горки:

$$v_{\text{отн}}=v-V=\sqrt{2g(H-h)(1+n)}\,.$$

Время падения шайбы с высоты h равно $t=\sqrt{2h/g}$, а расстояние между шайбой и горкой —

$$l=v_{\text{отн}}t=2\sqrt{(H-h)h(1+n)}=1{,}6\text{ м}.$$

3. В случае, когда второе тело толкают вниз, начальная энергия системы складывается из кинетической энергии двух тел $(m_1+m_2)(v^2/2)$ и потенциальной энергии второго тела m_2gh_1, а конечная энергия системы равна нулю. Когда же первое тело толкают влево и в результате второе тело поднимается, начальная энергия системы равна только кинетической энергии $(m_1+m_2)(v^2/2)$, а конечная — потенциальной энергии второго тела m_2gh_2. Изменение энергии в обоих случаях равно работе силы трения μm_1g:

$$0-((m_1+m_2)(v^2/2)+m_2gh_1)=-\mu m_1gh_1,$$
$$m_2gh_2-(m_1+m_2)(v^2/2)=-\mu m_1gh_2.$$

Откуда находим коэффициент трения

$$\mu=(m_2/m_1)(h_1+h_2)/(h_1-h_2)=0{,}6.$$

4. $x_{\text{м}2}/x_{\text{м}1}=(M/(M+m))^{1/2}\approx 0{,}9$.

5. Условие равновесия поршня

$$Mg+kx=pS$$

и уравнение газового состояния для гелия

$$p(hS)=(m/\mu)RT,$$

с учетом того, что энергия деформации пружины равна $E=kx^2/2$, позволяют найти высоту поршня над дном цилиндра:

$$h=\frac{m}{\mu}\,\frac{RT}{Mg+2E/x}\approx 1{,}04\text{ м}.$$

6. На каждый шарик действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, электростатическая сила $\vec{F}$ отталкивания со стороны другого шарика, равная по модулю $F=q^2/(4\pi\varepsilon_0l^2)$, а также силы натяжения $\vec{F}_{\text{н}}$ короткой нити и $\vec{F}'_{\text{н}}$ длинной нити, направленные вдоль нитей от шарика. Согласно второму закону Ньютона,

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{F}+\vec{F}_{\text{н}}+\vec{F}'_{\text{н}},$$

или, в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси,

$$ma=F'_{\text{н}}\sin 60^\circ-mg$$

и

$$0=F_{\text{н}}+F'_{\text{н}}\cos 60^\circ-q^2/(4\pi\varepsilon_0l^2).$$

Отсюда, учитывая, что $a=g$, находим силу натяжения короткой нити

$$F_{\text{н}}=q^2/(4\pi\varepsilon_0l^2)-2mg\,\mathrm{ctg}\,60^\circ\approx 0{,}1\text{ Н}.$$

7. В крайнем положении скорость шарика, а значит, и центростремительное ускорение равны нулю. Следовательно, проекции всех сил, действующих на шарик, на направление нити должны быть уравновешены:

$$F_{\text{н}}-(mg+qE)\cos\alpha=0.$$

Для нахождения угла α наибольшего отклонения нити от вертикали воспользуемся законом сохранения энергии

$$mv_0^2/2=(mg+qE)l(1-\cos\alpha),$$

откуда

$$\cos\alpha=1-mv_0^2/(2(mg+qE)l).$$

Тогда для натяжения нити получаем

$$F_{\text{н}}=mg+qE-mv_0^2/(2l)=0{,}105\text{ Н}.$$

8. На альфа-частицу со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $F=qvB$, которая сообщает частице центростремительное ускорение v^2/R:

$$m(v^2/R)=qvB.$$

Радиус R окружности, по которой движется частица, связан с размером области поля h соотношением $R=h/\sin\varphi$. Таким образом, скорость частицы

$$v=(q/m)(Bh/\sin\varphi)=10^6\text{ м/с}.$$

9. Перемычка начнет двигаться по стержню в тот момент времени t, когда магнитная сила станет равной по модулю силе трения:

$$IlB=\mu mg.$$

Ток, текущий по перемычке, связан с возникающей электродвижущей силой индукции законом Ома:

$$I=\mathcal{E}_и/R=lhA/R.$$

Отсюда найдем

$$t=\mu m g R/(hl^2A^2)=0.05\ \text{с}.$$

10. Согласно формуле линзы,

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$

Длину пружины l найдем из второго закона Ньютона для муфты:

$$m\omega^2(l+b)=k(l-l_0).$$

Из этих двух уравнений получаем

$$\omega=((3F/b-1)k/(2m))^{1/2}=5\ \text{с}^{-1}.$$

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $-\log_a b<0$.

2. $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}l\ (k,l\in Z)$.

3. $]-\frac{5}{4};\,-1[\,\cup\,]-1;\,1-\sqrt{2}\,[$, $x=-\frac{2}{3}$ — точка минимума. **Указание.** $x^4-4x^2-4x-1=(x+1)^2(x^2-2x-1)$.

4. $\frac{\sqrt{3}}{9}$. **Указание.** $V=\frac{1}{3}Sr$, где V — объем пирамиды, S — площадь ее полной поверхности, r — искомый радиус.

Вариант 2

1. $\{4\}$.

2. $\left\{\frac{6}{5}\right\}$.

3. $f(x)=1-x^2$ на $]0;+\infty[$, $f'(-1)=-2$. **Указание.** Рассмотрите три случая в зависимости от того, лежит ли единственная точка экстремума (точка максимума) $y_0=3x$ функции $g(y)$ на $[-1;0]$, на $]-\infty;-1[$ или на $]0;+\infty[$.

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$. **Указание.** Обозначим через K и L середины, соответственно, сторон AB и CD, через O — основание высоты пирамиды, через M — основание высоты треугольника ASD, проведенной из S. Тогда (KSL) — плоскость симметрии пирамиды и $O\in(KL)$, $\widehat{SKL}=\alpha$, $\widehat{SLK}=7\alpha$, $\widehat{SMO}=2\alpha$. Выразите $|SO|$ двумя способами — из $\triangle SMO$ и из $\triangle SOL$; из полученного уравнения найдите α. Обратите внимание на то, что заранее неизвестно, находится ли O внутри пирамиды.

Физика

Физико-механический и радиофизический факультеты

1. а) $A=(p_1-p_2)(V_2-V_1)/2=450$ кДж; б) $\Delta U=3(p_2V_2-p_1V_1)=0$; в) $Q=A+\Delta U=A=450$ кДж.

2. $\vec{E}=\frac{\varrho}{3\varepsilon_0\varepsilon}\vec{a}$ (рис. 2); $E=\frac{\varrho a}{3\varepsilon_0\varepsilon}\approx85$ В/м.

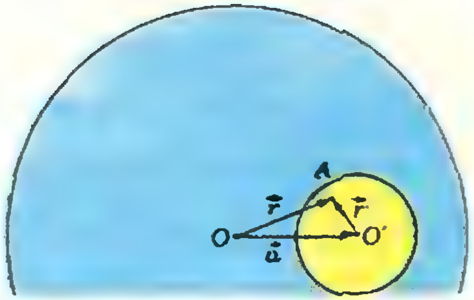


Рис. 2.

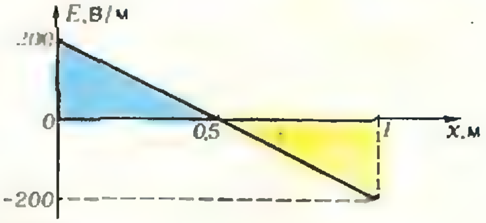


Рис. 3.

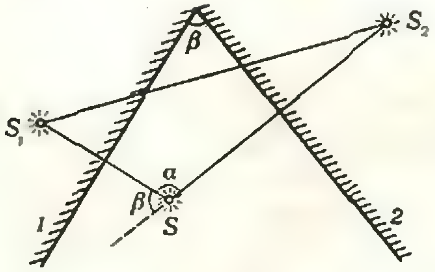


Рис. 4.

Указание. В произвольной точке A внутри полости электрическое поле является суперпозицией двух полей: поля $\vec{E}=\frac{\varrho}{3\varepsilon_0\varepsilon}\vec{r}$, распределенного с плотностью ϱ по всему шару, и поля $\vec{E}'=\frac{-\varrho}{3\varepsilon_0\varepsilon}\vec{r}'$, распределенного с плотностью $-\varrho$ по сферической полости.

3. $x=1$ м; $a_x=E_xq/m=-2\cdot10^{-3}$ м/с^2. **Указание.** До расстояния 0,5 м от начала координат частица двигалась в ускоряющем поле, а затем, до расстояния 1 м, — в тормозящем поле (рис. 3).

4. $l=\sqrt{\frac{3kT}{m}}\,\frac{deN_A\varrho}{j\mu}\approx1{,}5\cdot10^7$ м, где $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, $T=300$ К — комнатная температура, $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг — масса электрона, $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — его заряд, $N_A=6{,}02\times10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. **Указание.** Для оценки можно считать, что средняя скорость теплового движения электронов (которая на несколько порядков больше средней скорости направленного движения электронов в электрическом поле) равна средней квадратической скорости теплового движения молекул идеального газа, то есть $\sqrt{\frac{3kT}{m}}$.

5. Двигаясь по винтовой линии, электрон сделает два полных витка и попадет как раз в центр экрана.

Общетехнические факультеты

1. $v_0=\sqrt{(1+k^2)a/(2b)}=5$ м/с.

2. $p_2=2p_1\frac{V_1}{V_2}\frac{T_2}{T_1}=8$ атм.

3. $\varepsilon=1+A/W=4{,}5$.

4. $t=T/12=2$с. Указание. Точка колеблется по закону $x=x_м \sin\frac{2\pi}{T}t$.

5. $\beta=\pi-\alpha$ (рис. 4).

Задачи с устного экзамена МФТИ

(*см. «Квант» № 2*)

1. Нет, оно делится на 9.

2. Предположим, что (x, y) — целочисленное решение уравнения. Заметим, что число 1982 четное, но на 4 не делится. Для того чтобы x^2-y^2 делилось на 2, числа x и y должны иметь одинаковую четность. Но тогда $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ делится на 4.

3. Полусумма $\frac{p_1+p_2}{2}=n$ — целое число, лежащее между числами p_1 и p_2, которые по условию являются последовательными нечетными простыми. Поэтому число n должно быть четным.

4. Если бы число $n+1$ было составным, то оно делилось бы на некоторое число $k\neq 1$, меньшее n. Но тогда и число $m=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n+1$ должно делиться на k, что невозможно, так как на k делится $m-1=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, а значит, m при делении на k дает остаток 1.

5. Из условия следует, что оба числа 2^n-1 и 2^n+1 больше трех. Покажем, что одно из них обязательно делится на 3, поэтому является составным. Действительно, одно из трех последовательных чисел 2^n-1, 2^n, 2^n+1 делится на 3, причем 2^n этим свойством не обладает.

6. Не может, так как при делении k^2, где $k\in N$, на 3, в остатке получится либо 0, либо 1. Действительно, число k может быть записано в следующем виде: $k=3m+r$, где r — остаток при делении k на 3. Если $r=0$, то k^2 делится на 3. Если $r=1$, то $k^2=9m^2+6m+1=3l+1$, $l\in N$. Аналогично проверяется, что если $r=2$, то $k^2=3q+1$, $q\in N$.

7. Разобьем указанную сумму на два слагаемых: $6n^2-3n+3$ и n^3-n. Первое слагаемое делится на 3, а второе $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ также делится на 3 (как произведение трех последовательных целых чисел).

8. Запишем число p в виде $p=12q+r$, где r — остаток от деления p на 12. Если p — простое число, большее 3, то r не может быть четным и не может делиться на 3 (в противном случае само число p было бы четным или делилось бы на 3). Таким образом, остаток r может принимать только значения 1, 5, 7, 11. Следовательно, любое простое число, большее 3, может быть отнесено к одному из двух множеств: множеству A чисел, дающих при делении на 12 остаток 1 или 11, или множеству B — с остатком 5 или 7. Из трех простых чисел, больших 3, по крайней мере два принадлежат к одному из множеств A или B. Если остатки при делении на 12 этих двух чисел одинаковы, то их разность делится на 12. Если их остатки различны, то сумма этих остатков равна $1+11$ или $5+7$, то есть равна 12, поэтому сумма чисел делится на 12.

9. Это число делится на $111=3\cdot 37$.

10. Возводя члены исходного неравенства в квадрат, получаем $1982^2<n<1983^2$. Искомое количество натуральных чисел n равно

$$1983^2-1982^2-1=(1983+1982)-1=3964.$$

11. Представим исходное выражение в виде $\frac{2m+3m^2+m^3}{6}$ и покажем, что числитель этой дроби делится на 6 при любом целом m. Сначала докажем, что он делится на 2, для чего достаточно рассмотреть сумму $3m^2+m^3=m^2(3+m)$ и заметить, что если m четное, то на 2 делится m^2, если m — нечетное, то четным является $3+m$. Покажем теперь, что сумма $2m+3m^2+m^3$ всегда делится на 3. Для этого достаточно показать, что на 3 делится сумма $m^3+2m=m(m^2+2)$. Это утверждение верно, если m делится на 3. Если m на 3 не делится, то число m^2 при делении на 3 дает остаток 1 (действительно, если $m=3k$, то m делится на 3, если $m=3k+1$, то $m^2=9m^2+6m+1=3l+1$, $l\in N$, если же $m=3k+2$, то аналогично $m^2=3q+1$, $q\in N$). Поскольку m^2 дает остаток 1 при делении на 3, m^2+2 кратно 3.

12. Пусть A и B — соответственно, искомое число и число, получаемое при умножении A на 9. Первая цифра числа A, очевидно, равна 1, и поэтому 9 — последняя цифра этого числа. Обозначим буквами x, y, z, соответственно, вторую, третью и четвертую цифры числа A и запишем результат умножения:

$$\begin{array}{r} 1xyz9 \\ \times\quad 9 \\ \hline 9zyx1 \end{array}$$

Цифра x не может быть больше единицы, так как в противном случае число B было бы шестизначным. Если $x=1$, то в записи числа B вторая цифра $z=9$. Заменяя z на 9 в записи числа A, в результате умножения получаем $x=9$. Итак, цифра x может быть только нулем, то есть

$$\begin{array}{r} 10yz9 \\ \times\quad 9 \\ \hline 9zy01 \end{array}$$

Так как четвертая цифра числа B равна нулю, то число $9z$ должно оканчиваться двойкой, и поэтому $z=8$. Отсюда следует, что $y\neq 0$ и поскольку число B делится на 9, сумма его цифр делится на 9, и, значит, $y=9$. $A=10\,989$.

13. Найдем такое целое неотрицательное n_1, что $2^{n_1}\leqslant A<2^{n_1+1}$; пусть $A_1=A-2^{n_1}$. Если $A_1\neq 0$, найдем целое неотрицательное n_2 такое, что $2^{n_2}\leqslant A_1<2^{n_2+1}$. Обозначим $A_2=A_1-2^{n_2}$. Заметим, что $A_1<2^{n_1}$ и поэтому $n_2<n_1$. Рассуждая аналогично, за конечное число k шагов (не более чем за n_1+1) получим $A_{n_k}=0$. Отсюда

$$A=2^{n_1}+2^{n_2}+\ldots+2^{n_k}.$$

14. Может. Например, положим $a=\sqrt{2}$, $b=\log_2 9$; тогда $a^b=3$. Докажем, что $\log_2 9$ — иррациональное число. Пусть это не так, тогда существуют такие натуральные m и n, что

$\log_2 9=\frac{m}{n}$, откуда $9^n=2^m$. Последнее равенство невозможно, так как его части разной четности. Следовательно, $\log_2 9$ — иррациональное.

Второе решение. Рассмотрим число $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Если оно рационально, то искомый пример построен. Если оно иррационально, то положим $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}$ и тогда $a^b=2$. (На самом же деле $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ — иррационально, но доказательство этого факта очень сложно, и для решения задачи не требуется).

Квант для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. После разрезания каждой фигурки по оси симметрии мы получаем последовательность чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 в записи, рекомендуемой Министерством связи СССР для написания индексов адресатов.
2. Искомые цифры — 5 и 2.
3. Вертушка начнет вращаться, поскольку скорости различных слоев воды меняются, увеличиваясь от 0 (на дне, из-за трения воды о дно) до максимума на поверхности.
4. Зашифрован следующий вопрос: «Сколько граней у шестигранного карандаша?» Ответ — 8 граней, поскольку он является шестигранной призмой (верхняя и нижняя грань тоже учитываются!)

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1982, № 12)

Задание 23 (М. Бент). Последним ходом черные могли сыграть только d7 — d5 или f7 — f5. Если предположить, что ход сделан пешкой d, то это означало бы, что белопольный слон черных на c8 взят какой-нибудь белой фигурой. Но нетрудно выяснить, что белые пешки могли расположиться данным образом лишь в том случае, если они съели шесть черных фигур. Противоречие. Итак, черные только что сыграли **f7 — f5**, и решает **1. gf** (на проходе) и **2. f7×**.

Задание 24 (А. Хильдебранд). **1.d4 Kp:e3 2.d5 Kpe4 3.d6 Kpd5 4.d7 Kpc5 5.d8K! Kpd6 6.K:b7+** и **7.K:a5** с выигрышем. Не проходит 1.e4? Kp:d2 2.e5 Kpd3 3.e6 Kpe4 4.e7 Kpf5! 5.e8K (5.e8Ф,Л — пат, превращение в слона тоже ничего не дает) 5...Kpe6! 6.Kc7+ Kpd6 7.Ke8+ Kpe6 8.K:g7+ Kpf7 или 7.Ka6 ba 8.ba Kpc7 с ничьей.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант
Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
М. К. Гуров, М. Б. Дубах, А. И. Клименов, Э. В. Назаров, М. П. Сидоров, И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурина; фото — А. Н. Виленкин, В. И. Родионов (АПН), В. П. Шевченко

Главный художник Э. А. Смирнов

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Художественные редакторы Т. М. Макарова, Е. В. Морозова
Корректор Е. В. Сидоркина

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 17.01.85. Подписано в печать 14.02.85.
Печать офсетная.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,65. Т-05956
Цена 40 коп. Заказ 47. Тираж 171596 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ФИГУРЫ В БЕЗОПАСНОСТИ

Одна из самых популярных комбинаторных задач на шахматной доске заключается в расстановке на ней наибольшего числа тех или иных фигур, не угрожающих друг другу, а также подсчете числа указанных расстановок. Обе эти задачи ставятся не только для обычной доски 8×8, но и для любой квадратной доски размером $n \times n$. Решения некоторых из этих задач хорошо известны, другие очень сложны и до сих пор не решены.

Ферзи. На обычной доске можно расставить 8 ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу. Число расстановок — 92, из них 12 — основных (об этом рассказывалось в «Кванте», 1983, № 1).

Очевидно, на доске $n \times n$ больше n ферзей, не угрожающих друг другу, расставить невозможно. Оказывается, что для всех n, кроме $n=2$ и $n=3$, максимальное число ферзей, находящихся в безопасности, равно n (на доске 2×2 — один ферзь, на доске 3×3 — два ферзя). Доказательство этого факта не очень простое, его можно найти в различных книгах по занимательной математике. Числа соответствующих решений известны только для $n < 14$, причем при их нахождении использовалась ЭВМ.

Ладьи. Максимальное число не угрожающих друг другу ладей также равно n, а число расстановок равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Слоны. Максимальное число слонов, не угрожающих друг другу на доске $n \times n$, равно $2n-2$ ($n > 1$). Слонов можно расположить вдоль всей первой горизонтали и на последней, исключая углы. Всего существует 2^n расстановок.

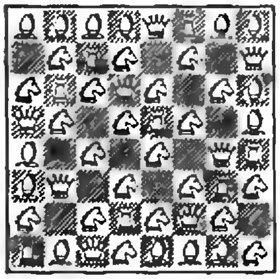
Кони. Очевидно, расставляя на обычной доске 32 коня на одних белых или одних черных полях, мы получим две расстановки не угрожающих друг другу коней. Убедимся, что большего числа коней, обладающих этим свойством, расставить невозможно, и что имеется всего два варианта. Пусть кони требуемым образом расставлены на доске. Воспользуемся тем, что на доске 8×8 существует замкнутый маршрут коня по всей доске. Поскольку в этом маршруте после каждого поля с конем из нашей расстановки обязательно должно следовать свободное поле, конями не может быть занято более половины доски! Если же ровно половина доски заполнена конями, то эти 32 коня должны следовать в выбранном маршруте через одного, т. е. располагаются на полях одного цвета.

Аналогично доказывается, что при четных n на доске можно р[illegible]жить максимум $n^2/2$ коней, не угрожающих друг другу, а при нечетных n — $(n^2+1)/2$ коней. В первом случае возможны две одноцветные расстановки, а во втором — только одна (кони стоят на полях того цвета, которого на доске больше).

Короли. Представим число n в виде $n=2k$ или, соответственно, $n=2k-1$. Можно доказать, что на доске $n \times n$ умещается k^2 королей, не угрожающих друг другу, т. е. не стоящих рядом. На обычной доске 16 королей ($k=4$) расставляются требуемым образом 287571 способом. Королей можно поставить, например, на все одноцветные поля четных или нечетных горизонталей. Общая формула для числа расстановок на доске $n \times n$ неизвестна.

Пешки. Опять представим число n в виде $n=2k$ или $n=2k-1$. Тогда на доске $n \times n$ можно расставить nk пешек, ни одна из которых не нападает на другую. Пешками можно заполнить горизонтали (через одну) или вертикали (через одну), но могут быть и другие расстановки. Число допустимых расстановок попробуйте найти сами (хотя бы на доске 8×8).

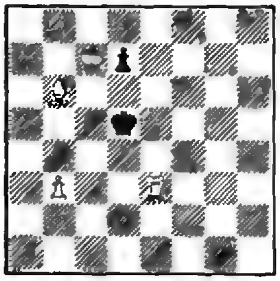
Уникальной является следующая расстановка фигур, созданная Г. Дьюдени.



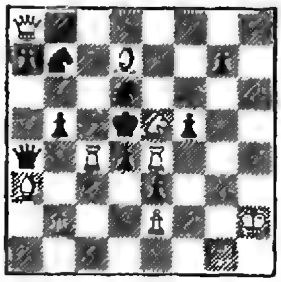
На доске одновременно умещается максимальное число не угрожающих друг другу ферзей, ладей и слонов. Еще на доске поместился 21 конь (они не нападают друг на друга), а на свободных черных полях доски можно поставить также 8 королей, которые не будут нападать друг на друга.

Конкурсные задания

В мартовском номере журнала по традиции предлагаем две задачи, составленные женщинами — шахматными композиторами. Любопытно, что авторы обеих позиций придумали их, когда учились в школе.

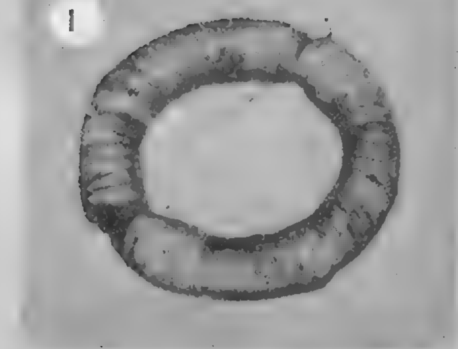


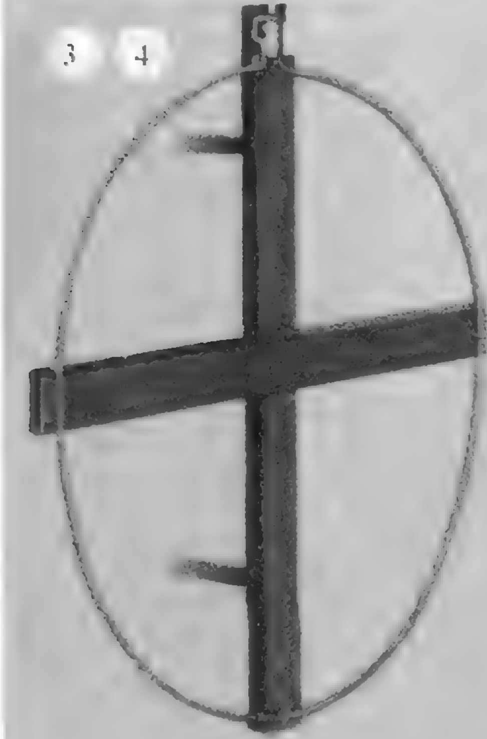
5. (К. Сагателян, 1957 г.). Мат в 3 хода.

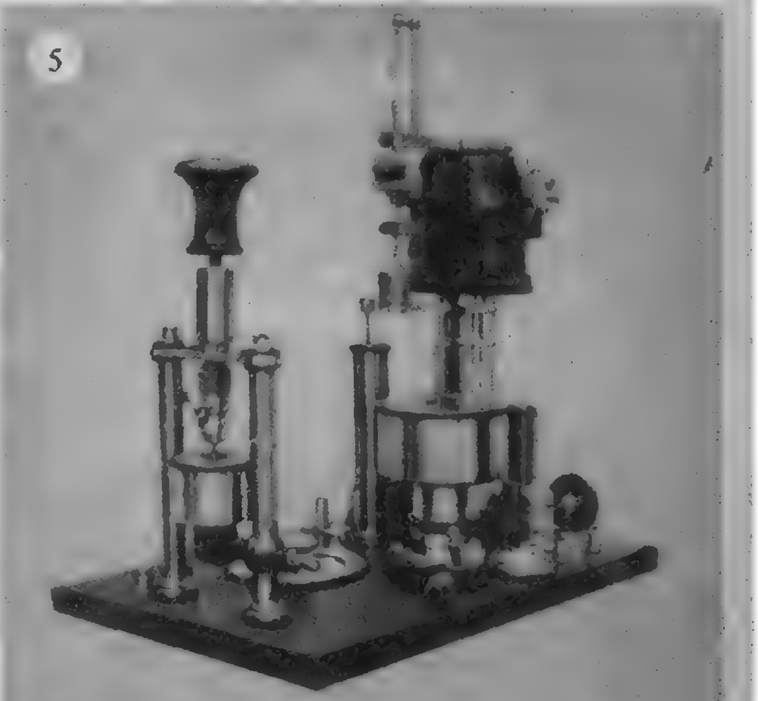


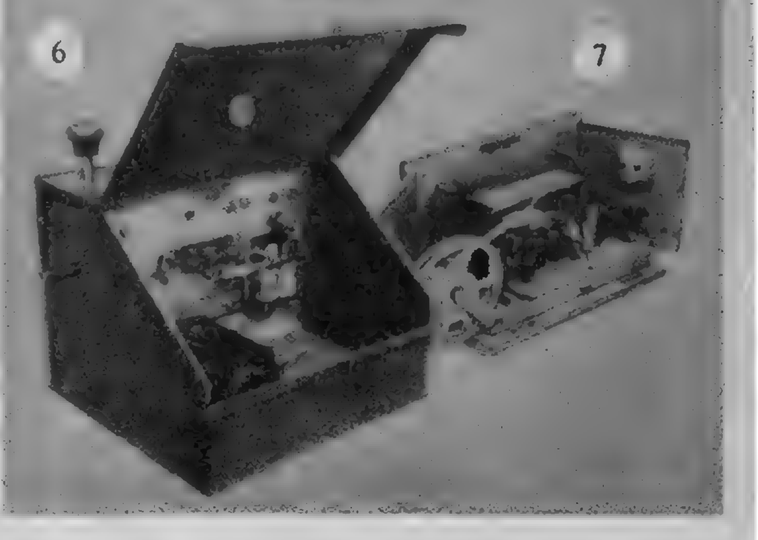
6. (Л. Вышинская, 1964 г.). Мат в 2 хода.

Срок отправки решений — 25 мая 1983 года (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5, 6»)









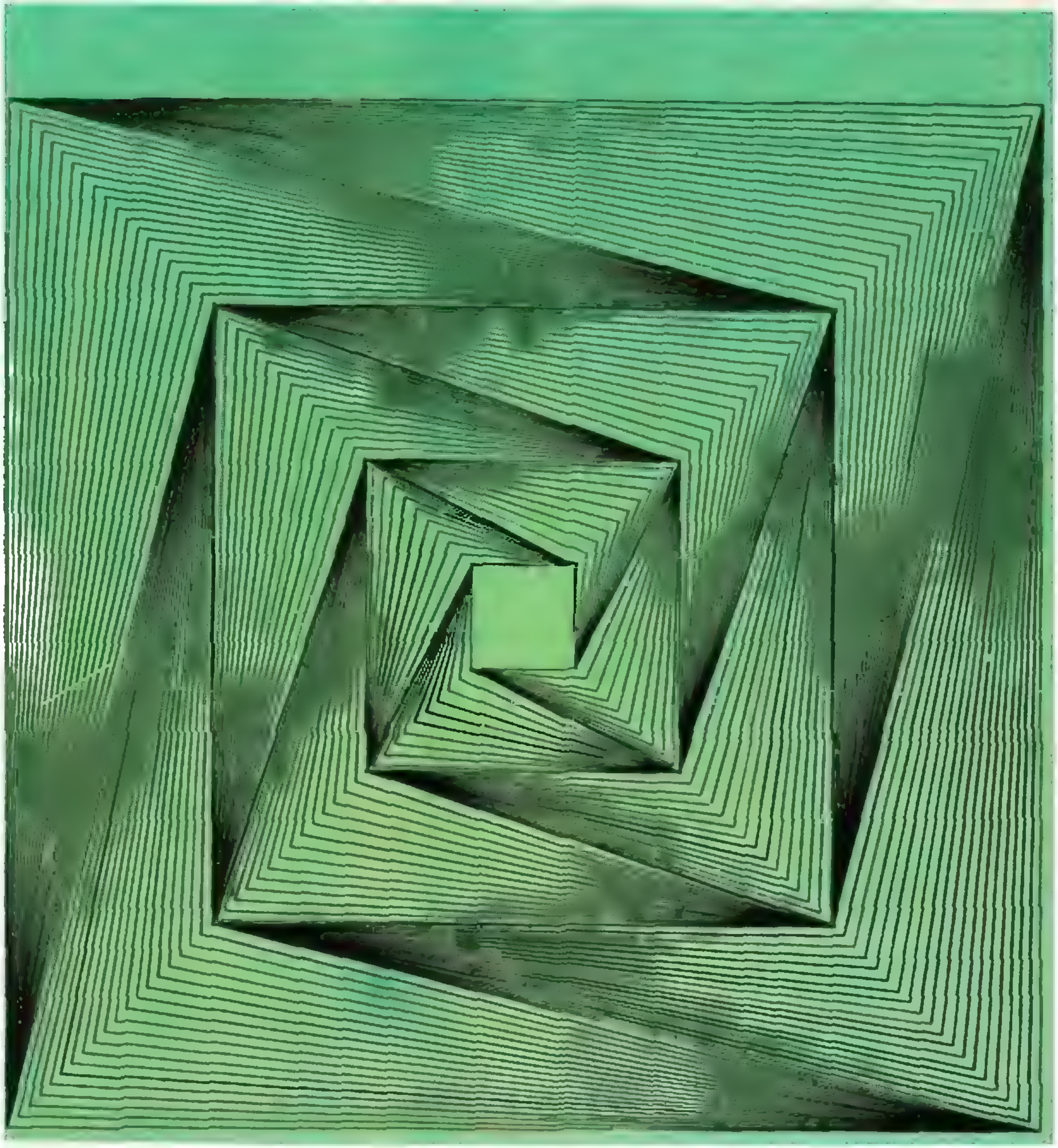
1 — катушка Фарадея;
2 — элекромотор Якоби;
3, 4 — вибратор и резонатор Герца;
5, 6—7 — передатчик и приемник Попова.

Эти физические приборы можно считать прообразами современных мощных электродвигателей и радиостанций.
Прогресс в технике неразрывно связан с достижениями и открытиями физики.
Об этом читайте в статье И. К. Кикоина.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Этот сложный узор был нарисован графопостроителем ЭВМ БЭСМ-6 в августе 1982 г. во время VII Всесоюзной летней школы юных программистов в Новосибирском Академгородке. Правда, графопостроитель рисовал черными чернилами на белой бумаге, а мы воспроизводим узор на зеленом фоне. Любопытно, что не только программа для выполнения этого рисунка, но и вся система предписаний (Графическая система «Шпага-5»), позволяющая «рисовать на ЭВМ», созданы школьниками в Новосибирске.



НОМЕР
4

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

4 1983

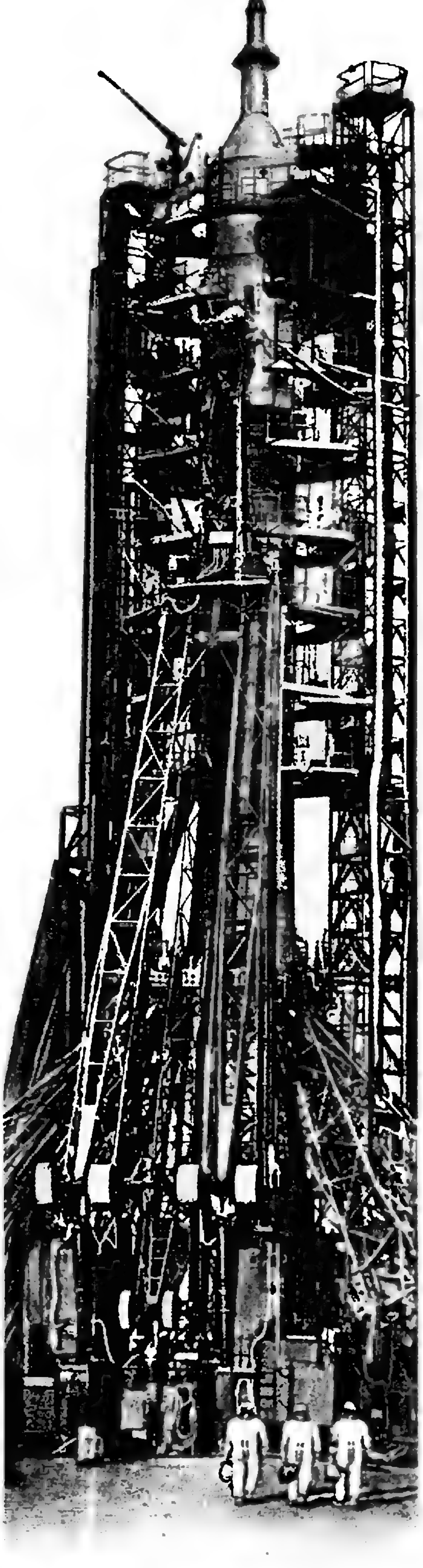
Основан в 1970 году

Издательство „Наука“ Главная редакция физико-математической литературы

Московское математическое общество
Оргкомитет московской математической олимпиады

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*В. А. Винокуров, Б. С. Митин.* Математика и технология в космосе	*V. A. Vinokurov, B. S. Mitin.* Mathematics and technology in outer space
7	*Уникальная лаборатория* (интервью с летчиком-космонавтом СССР А. А. Серебровым)	*A unique laboratory* (interview with USSR cosmonaut A. A. Serebrov)
12	Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым	A talk with Andrei Nikolaevich Kolmogorov
16	*В. А. Фабрикант.* Рождение кванта	*V. A. Fabrikant.* The birth of the quantum
22	*С. В. Матвеев.* Расплавление контуров на плоскости	*S. V. Matveev.* Unraveling closed curves on the plane
	Новости науки	**Science news**
11	*А. А. Боровой.* Первая в мире нейтринная лаборатория на атомной электростанции	*A. A. Borovoy.* The world's first neutrino laboratory on a nuclear power station
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
29	*И. Д. Жижилкин.* Сирена Зеебека	*I. D. Jijilkin.* Seebeck's siren
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
30	*К. Л. Самаров, М. И. Шабунин.* Обратные тригонометрические функции	*K. L. Samarov, M. I. Shabunin.* Inverse trigonometric functions
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
35	Задачи	Problems
36	*В. Л. Гутенмахер.* Магистр Игры в гостях у «Кванта»	*V. L. Gutenmakher.* The Magister of Games visits Kvant
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
39	Задачи М796—М800; Ф808—Ф812	Problems M796—M800; P808—P812
42	Решения задач М780—М785; Ф793—Ф797	Solutions M780—M785; P793—P797
	Рецензии, библиография	**Book reviews**
50	Нужная книга	A useful book
	Информация	**Information**
51	Путь в науку начинается с задачи	The road into science begins with problems
53	Заочная физическая школа	Physics correspondence school
54	**Практикум абитуриента**	**College applicant's section**
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка *(21)*	**Our cover** *(21)*
	Смесь *(21, 50, 52)*	**Miscellaneous** *(21, 50, 52)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Доска под охраной *(3-я с. обложки)*	The board is guarded *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1983



Математика и технология в космосе

Доктор физико-математических наук
В. А. ВИНОКУРОВ,
доктор технических наук
Б. С. МИТИН

Возникновение авиации и космонавтики неразрывно связано с применением математики для анализа основных проблем полета, конструирования и расчета самолетов и ракет. Первый вопрос, остро обсуждавшийся на заре авиации в конце XIX-го и начале XX-го века — вопрос о том, могут ли летать аппараты тяжелее воздуха — был принципиально решен великим русским ученым, теоретиком авиации Н. Е. Жуковским. Чисто математическими методами (а именно, при помощи теории функции комплексной переменной) Жуковский вывел формулу для подъемной силы крыла:

$$F = \rho v \Gamma$$

(здесь ρ — плотность воздуха, v — скорость движения крыла, Γ — «циркуляция», некоторая величина, зависящая от формы профиля крыла).

Начиная с Жуковского, в теоретической авиации применяется самый современный математический аппарат, причем задачи, возникшие при анализе практических проблем авиации, послужили основой создания новых направлений математики.

Решение ряда ключевых проблем авиации связано с именами известных математиков и механиков нашей страны. Мы остановимся лишь на проблеме флаттера. Это явление было обнаружено в 30-х годах нашего века, когда стали строиться цельнометаллические самолеты со скоростью полета 200—300 км/ч. Оказалось, что при некотором критическом значении скорости возникала сильная вибрация самолета—*флаттер*, в результате которой самолет часто разрушался в полете. Тайной этого страшного для пилотов явления занимались авиаконструкторы многих стран. Решить проблему флаттера удалось советскому математику (впоследствии президенту Академии наук СССР) М. В. Келдышу. Он показал, что флаттер имеет резонансную природу, и, исходя из этого, предложил определенные изменения в конструкции крыла. Первые же полеты самолетов, усовершенствованных по рекомендациям Келдыша, дали прекрасные результаты.

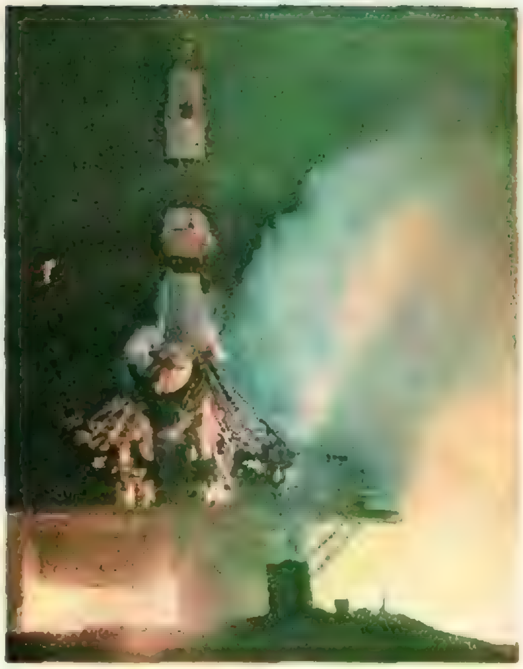
Координаты в космическом полете

Еще более важную роль, чем при рождении авиации, сыграла математика для возникновения космонавтики. Теоретик космонавтики К. Э. Циолковский в своих доказательствах возможности полета к другим планетам и в проектах космических поездов постоянно использовал математику (см. «Квант», 1982, № 9, с. 12).

Кроме теоретического обоснования и расчета конструкции ракеты, математика необходима каждую секунду космического полета. Мы уже привыкли при сообщении о запуске очередного космического корабля слышать стандартную фразу: «Координационно-вычислительный центр ведет обработку поступающей информации». В основе обработки данных о траектории корабля лежит важное математическое понятие — система координат, придуманное в XVII веке великим французским математиком Р. Декартом («Геометрия 9—10», § 59).

Первое практическое применение системы координат, проведенное самим Декартом, носило не совсем мирный характер: на одной из лекций Декарта неизвестный слушатель постоянно стучал ногами; Декарт, не прерывая лекции, попросил ассистента пройти в подвальное помещение под аудиторией и провести измерения координат источника шума; вернувшийся ассистент отложил некоторое расстояние от одной стены аудитории и некоторое расстояние от другой стены — слушателя, сидевшего на пересечении воображаемых перпендикуляров, он попросил удалиться. Демонстрация практического значения прямоугольной системы координат получилась весьма убедительной.

Во многих случаях при движении ракеты, кроме трех координат ее центра масс, нужно знать еще три угла, задающие ее ориентацию относительно Земли. Возможность однозначного определения положения тела в пространстве с помощью конечного набора (шести) чисел позволяет все операции по управлению полетом и предсказанию положения ракеты в пространстве сводить к математическим действиям. Таким образом, математика становится основным инструментом управления движения ракет.



Компьютерная революция и космос

Известно, что в настоящее время летчики-истребители, летающие на наиболее быстрых самолетах, проходят тщательный отбор и медицинский контроль. Они должны иметь безупречное здоровье и идеальные психические реакции. Современный истребитель может развивать скорость, в четыре раза превышающую скорость звука, то есть более 1200 метров в секунду. Так как время реакции человека порядка 0,1 секунды, за время реакции пилота самолет успевает пролететь расстояние в 120 метров. Прежде чем пилот примет решение, ситуация в воздухе может существенно измениться. Скорости космических объектов и ракет превосходят скорость звука более чем в 20 раз, поэтому время реакции человека создает при управлении полетом ракет «мертвую зону» порядка одного километра. Таким образом, человек в ряде ситуаций не в состоянии управлять непосредственно, как говорят «в реальном времени», полетом создаваемых им аппаратов. К счастью, человек столкнулся с этой трудностью тогда, когда уже было создано средство для ее преодоления.

Это средство — *микропроцессорная вычислительная техника*, мощные малогабаритные компьютеры на больших интегральных схемах, «думающие» достаточно быстро, чтобы управлять движением ракеты «в реальном времени». Современные самолеты, ракеты и космические корабли, да и многие другие новейшие технические устройства, оснащаются такими компьютерами. В этой связи стали говорить о «второй промышленной революции», или «компьютерной революции» (см. «Квант», 1983, № 2, с. 2).

Игра «в догонялки» для ракет

С помощью ЭВМ детская игра «в догонялки» поднялась на качественно новый уровень и потеряла свой безобидный характер. Ныне ракеты стали основным боевым средством против воздушных целей. При этом в случае, когда ракета применяется против другой ракеты или самолета, оснащенного компьютером и делающего защитные маневры, мы имеем игру «в догонялки» между двумя летающими компьютерами.

Оказалось, что математические задачи, возникающие при управлении движением одного или нескольких летающих объектов, имеют принципиально новый математический характер. Новая математическая теория решения таких задач была основана в работах советского математика академика Л. С. Понтрягина в 50-х годах и получила название «теория оптимального управления».

Как сделать ракету?

«Аэрокосмическая технология» — при звуке этих слов дрожит рука и учащается пульс даже у самого матерого шпиона.

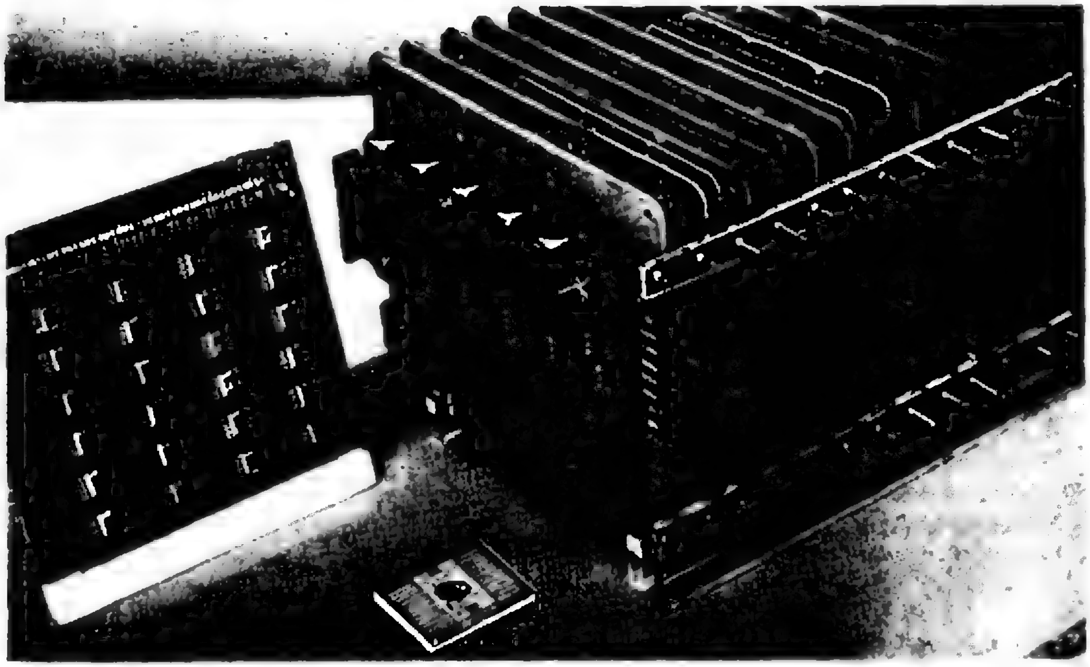
Гигантские потоки информации научного, социального, общественно-политического характера захлестывают земной шар, переполняют кабельные и радиорелейные линии связи и выплескиваются в космос. Всемирные системы спутниковой связи, спутникового теле- и радиовещания, космическая служба изучения и охраны природы — все это необходимо, все это важно для экономики, для науки, для техники, но как, как все это сделать?

«Как сделать авиалайнер?», «Как сделать ракету?», «Как сделать спутник?» — из каких материалов, какими операциями и на каких аппаратах — это и называется *технологией*. Самолет и космический корабль останутся фантазией, пока вы не знаете, из чего и как их можно построить. Уже в древнем Китае запускали небольшие ракеты на фейерверках, но для того, чтобы в космос поднялся Юрий Гагарин, нужен был принципиально более высокий уровень технологии. Поэтому взлет Гагарина — это взлет и триумф советской технологии, доказательство ее самого высокого мирового уровня.

И вновь требуется повторить, что так же, как конструирование и проектирование авиалайнеров и космических кораблей базируется на математическом расчете и законах физики, так и технология их производства базируется на достижениях математики и физики. Производство элементов летательных аппаратов требует такой точности и такой степени организации производства, которые недостижимы без компьютерных систем управления и контроля за станками и технологическими линиями.

Сопло из порошка

Допустим, мы уже спроектировали ракету и уже знаем, какой формы должно быть сопло реактивного двигателя (см. «Квант», 1982, № 9). Но из какого материала его сделать? Требования к этому материалу — прочность и высочайшая температурная стойкость. Ведь струя газов, выходящая из сопла ракеты, имеет температуру 4000°С. При такой температуре железо, алюминий и большинство других маталлов плавятся.



Предпосылка выхода ЭВМ в космос — миниатюризация ее узлов. На фотографии показаны три варианта одного узла (регистра): на полупроводниках (60-е годы), на интегральных схемах (конец 60-х годов) и на одной большой интегральной схеме (70-е годы).

Кроме того, плазменная струя может оказывать и заметное физическое воздействие на стенки сопла, ведь сегодня плазменная горелка используется для резки самых прочных металлов и сплавов. Итак, материал сопла должен выдерживать температуру в 3000—4000°С и при этих температурах быть устойчивым к физическим воздействиям.

В природе практически отсутствуют материалы, которые в чистом виде могли бы удовлетворять этим условиям. Поэтому приходится использовать определенные физические принципы, чтобы охлаждать материал сопла во время горения топлива. Наиболее подходящим материалом является вольфрам, температура плавления которого равна 3400°С. Однако получить из него сопло сложного профиля и с достаточно тонкими (из соображения минимального веса) стенками традиционными методами металлообработки невозможно. Получить изделие путем отливки очень сложно, да и качество металла будет низким. Кроме того, даже если бы это и удалось, то вольфрам не смог бы работать, так как температура отходящих газов при горении некоторых видов современного топлива выше температуры его плавления.

И здесь на помощь приходит *порошковая металлургия* в сочетании с известными физическими принципами. Методом порошковой металлургии, который заключается в том, что в полость инструмента вы закладываете порошок металла, а затем подвергаете его давлению и спеканию, получается пористая структура изделия типа «пемзы». Затем эта «пемза» пропитывается медью (ее температура плавления всего 1083°С) и полученный материал кратковременно может работать, даже если температура отходящих газов будет около 4000°С. Парадокс? Отнюдь. Вспомните, когда вы в жаркий летний день выходите из речки на берег. Вам холодно. Почему? Вода, испаряясь, забирает у вас тепло и охлаждает тело. Так и здесь медь испаряется и охлаждает вольфрамовый каркас, а так как весь он пронизан каналами, наполненными медью, то она все время выступает на поверхность сопла и охлаждает его. А вот скорость охлаждения и время работы зависят от диаметра капилляров, состояния их поверхности, общей пористости и т. д. Расчет зависимости этих параметров от технологии приготовления является сложной математической задачей.

Коконы для горючего

Теперь, когда сопло, через которое истекает реактивная струя, изготовлено, нужно приготовить резервуары для горючего и окислителя. Требования к этим резервуарам — максимальная прочность и минимальная масса. Простейшее технологическое решение, которое приходит на ум, изготовить соответствующие баллоны из легкого и прочного сплава какого-либо из широко используемых в авиации металлов, например титана. Но так ли уж прочен титан? В каком смысле мы сравниваем прочность различных материалов? Разумеется, в относительном. Относительность здесь понимается в прямом смысле — отношение прочности к единице массы изделия. Оказалось, что металлы уступают новым материалам, введенным в обращение благодаря успехам химии и физики, — так называемым *композиционным материалам,* состоящим из объединения различных материалов с разными свойствами (например, металл и пластмассы, стекловолокно и пластмассы и т. д.).

Какое же это имеет отношение к производству ракет? Оказывается, некоторые детали ракеты, например баки для горючего и окислителя, а возможно, и детали корпуса, наматываются из нитей, то есть, грубо говоря, представляют из себя кокон такого же типа, как кокон шелкопряда. При этом, если основа нити делается из высокопрочных волокон, например углерода или стекловолокна, то по прочности соответствующая деталь в 3—5 раз превосходит изделие из титана такой же массы.

Новая технология производства высокопрочных деталей — *намотка* — при своем использовании потребовала решения целого ряда красивейших математических задач. Предположим, что мы должны намоткой создать баллон в форме заданного выпуклого тела вращения. Возникает вопрос — по какой траектории должна наматываться нить для достижения заданной прочности всего изделия при минимальной массе? По любой ли траектории можно наматывать нить по заданной оправке? Оказывается, нет! Если коэффициент трения нити мал, что часто бывает, то, для того чтобы намотанное изделие далее сохраняло свою форму, необходимо, чтобы нить образовывала на поверхности геодезическую. *Геодезической линией* на заданной поверхности называют кривую наименьшей длины, соединяющую две точки поверхности. На выпуклой поверхности, чтобы получить геодезическую линию, соединяющую две заданные точки, нужно просто натянуть нить, соединяющую эти точки — нить пойдет по геодезической. Таким образом, проблема определения траектории наматываемой нити сразу же приводит нас к таким разделам математики, как вариационное исчисление и дифференциальная геометрия, изучающим вопросы нахождения наибольших и наименьших значений функции различной природы и строения поверхностей и кривых.

Технология намотки изделия данной формы представляет собой в конечном итоге программу компьютера, управляющего намоточным станком и преобразующего математически рассчитанную траекторию в реальное изделие.

Мы привели только два примера технологических задач производства ракеты, решение которых опирается на математику и физику сегодняшнего дня. Создание современной технологии производства космических кораблей — итог труда ученых и специалистов всех профилей, но тем не менее здесь основную роль играют именно специалисты по технологии — технологи, превращающие достижения научных и технических дисциплин в реальный космический корабль.

Уникальная лаборатория

Интервью
с летчиком-космонавтом СССР
А.А. Серебровым

19 августа 1982 года в соответствии с программой исследования космического пространства в Советском Союзе был запущен космический корабль «Союз Т-7». 20 августа произошла стыковка корабля «Союз Т-7» с орбитальным комплексом «Салют-7» — «Союз Т-5», в околоземном космическом пространстве начал функционировать пилотируемый научно-исследовательский комплекс «Салют-7» — «Союз Т-5» — «Союз Т-7».
27 августа, после выполнения обширной программы научных исследований, экипаж корабля «Союз Т-7» благополучно возвратился на Землю.
Редакция «Кванта» встретилась с одним из участников этой экспедиции летчиком-космонавтом СССР Героем Советского Союза А. А. Серебровым и попросила его ответить на ряд вопросов, интересующих наших читателей.

Александр Александрович, насколько нам известно, по образованию Вы — инженер-физик, окончили Московский физико-технический институт и долгое время работали в нем. Какая область физики Вам наиболее близка?

Основная моя специальность — термодинамика, исследование тепло- и массопереноса: экспериментальное изучение особенностей движения масс жидкостей и газов в заданных режимах температуры и давления *). Я принимал участие в работах по созданию станций «Салют-6» и «Салют-7». А некоторые результаты моих студенческих исследований «летают», обеспечивая необходимый тепловой режим «Союзов» и «Союзов-Т».

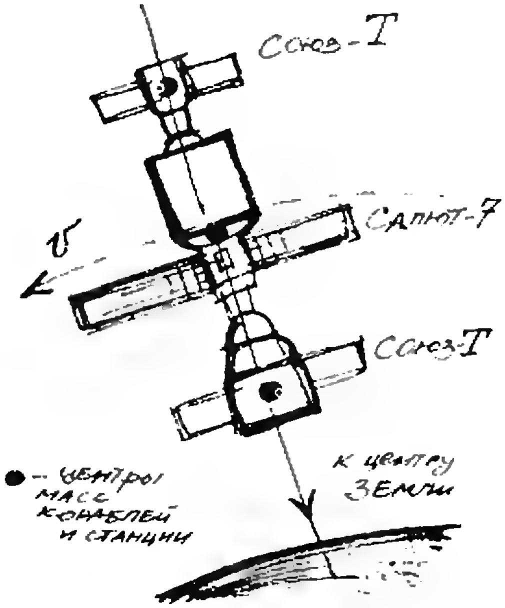
Ваше мнение, как физика, о долгосрочных полетах в космос.

Долговременные космические станции — уникальные физические лаборатории, позволяющие создавать условия, невоспроизводимые на Земле. В то же время, как физик я считаю, что прежде чем серьезно говорить о постановке научных физических экспериментов на станции, нужно изучить специфику корабля как лаборатории.

После выхода на орбиту станция со всем ее содержимым начинает почти свободно, если не считать торможения в атмосфере, «падать» на Землю, и это «падение» происходит на протяжении всего полета, пока не включены двигатели. Так что все на станции находится в состоянии невесомости. Однако, не все так просто, как мы читаем у фантастов. При движении корабля по орбите меняется его удаленность от Земли, что сказывается на величине силы тяготения, действующей на станцию. Разумеется, на величину силы тяготения влияет и неоднородность плотности Земли. Кроме того, корпус станции ощутимо вибрирует из-за непрерывной работы вентиляторов, без которых невозможно обеспечить и тепловой режим работы аппаратуры, и жизнедеятельность человека.

---

*) За работы в этой области авторскому коллективу, в который входил А. А. Серебров, в 1976 году была присуждена премия Ленинского комсомола.



Как во время полета ориентирована станция в пространстве? Сохраняет ли ось станции постоянное направление? Или она все время перпендикулярна направлению на Землю?

Космическая станция вместе с пристыкованным кораблем — это протяженный объект, основная масса которого сосредоточена в рабочем отсеке станции. Поэтому свободное положение станции устойчиво в том случае, когда ее ось направлена к центру Земли, подобно поплавку на воде. Это так называемая «гравитационная стабилизация». Из-за изменения силы тяготения при движении станции, из-за сопротивления атмосферы и несимметричности корпуса по отношению к направлению скорости движения по орбите ось станции не направлена точно к центру Земли, а совершает медленные колебания с амплитудой до ~20°. Колебания силы тяготения приводят также к изгибанию оси станции, которое заметно даже на глаз.

Вы упомянули о вибрации, вызываемой работой вентиляторов. Но ведь вентиляторы, видимо, можно выключать во время проведения тонких экспериментов, чтобы исключить вызываемую ими вибрацию корпуса?

В том-то и специфика станции, что даже нормальное дыхание человека здесь должно обеспечиваться специальной аппаратурой. Действительно, плотность воздуха, который мы выдыхаем, отличается от плотности окружающего воздуха, и на Земле он, в результате конвекции, отходит от нашего лица, уступая место свежему воздуху, который мы и вдыхаем. К этому человек привыкает с детства и никогда над этим не задумывается. Но в условиях невесомости конвекция отсутствует. Нормальные условия дыхания на космическом корабле обеспечиваются постоянной циркуляцией воздуха по станции, которая осуществляется непрерывно работающими вентиляторами.

Какие еще особенности станции как физического тела Вы хотели бы отметить?

Каждый из вас, очевидно, видел фотографии станции. В то же время, не многие смогут правильно ответить на вопрос, какова толщина стенок станции. На самом деле она невелика — около 2,5 мм по обшивке и 3÷4 мм в ребрах жесткости. На станции могут возникнуть эффекты, отдаленно напоминающие те, которые наблюдаются в кнуте при резком встряхивании. Резкое встряхивание рукоятки кнута вызывает распространение по нему волны. По мере движения этой волны к концу кнута скорость нарастает, достигая сверхзвуковой (поэтому мы слышим громкий хлопок). Космическая станция с причаленным к ней кораблем представляет собой вытянутый объект, диаметр сечения которого убывает более чем в два раза от двигательного отсека к противоположному концу. При стыковке транспортных или грузовых кораблей со станцией могут возникать аналогичные эффекты. Поэтому нетрудно понять, насколько важно изучение этого вопроса.

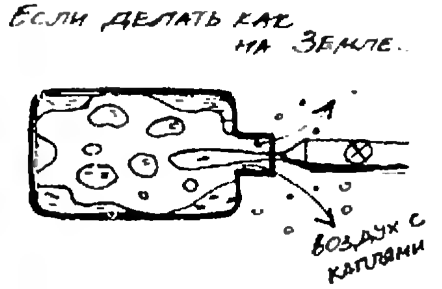
Какие особенности физических явлений, связанные с невесомостью, проявились для Вас наиболее ярко?

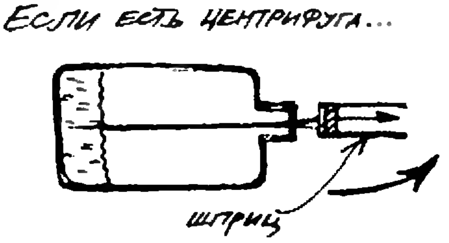
Больше всего запоминается необычность поведения того, к чему привык в повседневной жизни. Вот пример.

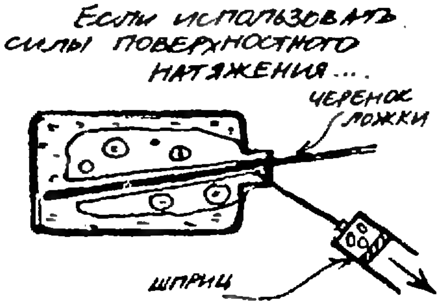
Представьте себе задачу: каким образом можно без потерь налить жидкость в сосуд? В космосе вода подается из крана порциями по 25 см^3. Если действовать как на

Космонавт А. А. Серебров отвечает на вопросы редакции журнала «Квант».

Земле — наливать из крана в горловину, то собрать всю воду в сосуде не удастся. В условиях невесомости жидкость не накапливается на дне сосуда, она «плавает» в сосуде в виде шаровых капель разного размера. Заполнение сосуда водой вызовет вытеснение из него воздуха, и вместе с воздухом будут «выплывать» взвешенные в нем капли воды.


Если делать как на Земле..
А
воздух с каплями


Если есть центрифуга...
шприц


Если использовать силы поверхностного натяжения....
черенок ложки
шприц

Если же струю с малой скоростью направить сразу на стенку сосуда, то вода, смачивая стенку, будет прилипать к ней, и взвешенных капель не будет (по крайней мере, до тех пор, пока сосуд не встряхивают). Таким способом можно без потерь налить жидкость в сосуд, выталкивая из него воздух.

И тут же возникает второй вопрос: а как можно взять из сосуда «плавающую» в нем жидкость?

Конечно, если есть центрифуга, то задача решается просто: при вращении сосуда жидкость будет «прижиматься» к дальней от оси вращения стенке, а оттуда ее можно забирать с помощью шприца. Если нет центрифуги, можно прижать жидкость к стенке, двигая сосуд с небольшим линейным ускорением. Именно так обычно и делают.

Я предложил другой способ: поместить внутрь сосуда длинный и узкий предмет — например, черенок ложки, к которому капли прилипают. За счет сил поверхностного натяжения жидкость «расползается» по черенку и подходит к краю горловины сосуда. Слегка «помешивая» черенком, легко добиться того, чтобы жидкость постоянно находилась на черенке вблизи выходного отверстия сосуда, откуда не трудно производить отбор жидкости.

Есть ли еще, кроме невесомости, какие-нибудь существенные отличия космической станции от земной лаборатории?

В земных лабораториях, в которых мне приходилось до этого работать, вопрос о размещении оборудования всегда был второстепенным, там главенствовали соображения удобства. На космической станции любое перемещение оборудования вызывает смещение центра масс станции, что сразу же сказывается на характере ее поступательного и вращательного движения и, как следствие, на работе самого оборудования. Эти обстоятельства учитываются при выборе оптимального режима коррекции положения станции.

Расскажите поподробнее об эксперименте «Таврия», проведенном вашим экипажем во время полета.

«Таврия» относится к разряду биотехнических экспериментов (этот термин был предложен вице-президентом АН СССР академиком Ю. А. Овчинниковым). Это эксперимент по разделению биологического вещества на фракции — группы клеток, сходных по своим физическим свойствам. В частности, удается разделить однотипные клетки даже по возрасту.

Трубку из прозрачного материала, в которой находится исследуемое вещество, помещают в электрическое поле напряженности порядка 10 В/см, направленное вдоль трубки. Под действием этого поля и происходит разделение вещества на однородные фракции по длине трубки. В земных условиях из-за конвекционного перемешивания подобное разделение во многих случаях невозможно. В состоянии невесомости удавалось выделить десятки фракций там, где в земных условиях рекордное разделение содержало лишь три фракции, да и то с размытыми границами.

Какова практическая ценность подобного эксперимента?

Дело в том, что различные фракции одного и того же вещества при их введении в организм живого существа воздействуют на разные органы — одни на печень, другие на сердце и т. п. При лечении одного органа важно не допустить отрицательного воздействия на другой. В частности, ограниченное применение такого вещества, как интерферон, приготовленного в земных условиях, связано с возможными нежелательными побочными эффектами.

В чем состояло Ваше участие в эксперименте?

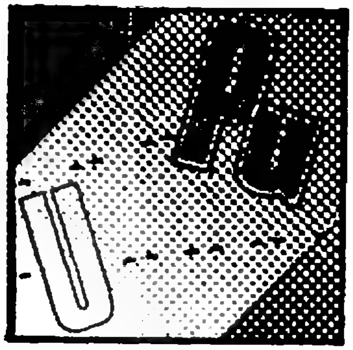
Помимо выполнения операторской работы — монтажа и отлаживания приборов, съемок лазерным голографом на борту станции, — я еще на Земле внес некоторые усовершенствования в методику эксперимента. Так, вместо предусмотренной ранее круглой трубки, фотографирование процессов в которой затруднено преломлением света в цилиндрическом стекле, по моему предложению была использована камера с плоскопараллельными стенками. Поскольку такой эксперимент на борту станции ставился впервые, необходимо было выбрать и обеспечить оптимальный режим работы установки с учетом реальных воздействий на нее. Это тоже было моей задачей.

Каковы Ваши дальнейшие планы?

Моя специальность — инженер-испытатель космической техники, этим много сказано. Хочу продолжать свою испытательскую работу, связанную с усовершенствованием существующей и созданием новой эффективной космической техники. Хотел бы серьезнее заняться вопросами физики борта космического корабля.

Что пожелали бы Вы читателям нашего журнала?

Читатели «Кванта» — люди молодые, любознательные, творческие. Я им желаю открывать для себя новые горизонты в познании окружающего мира и, конечно, желаю подлинных научных открытий. А главное — желаю стремления и умения реализовать на практике то, что удалось создать пером и мыслью.



Первая в мире нейтринная лаборатория на атомной электростанции

Кандидат физико-математических наук А. А. БОРОВОЙ

Мы давно привыкли к тому, что одни элементарные частицы уже «освоили», другие «осваивают» самые разные практические специальности. Но не нейтрино. Природа создала на этом пути естественный барьер — ничтожную вероятность его взаимодействия с веществом. Именно поэтому экспериментальное открытие нейтрино произошло только через 25 лет после того, как его существование было предсказано теоретически. И в дальнейшем многие нейтринные эксперименты носили лишь качественный характер.

Некоторое время тому назад физики Института атомной энергии им. И. В. Курчатова предложили способ, как недостаток нейтрино — огромную проникающую способность — превратить в его достоинство. Дело в том, что мощным источником нейтрино является ядерный реактор, излучающий в каждую единицу времени огромное количество этих частиц. Свободно проходя сквозь защиту реактора, они несут информацию о процессах, идущих внутри его активной зоны. Информация эта двоякого рода. Во-первых, есть прямая связь между количеством излучаемых нейтрино и мощностью реактора, а, во-вторых, по энергии нейтрино можно судить о том, с какой интенсивностью внутри реактора «выгорают» одни элементы (уран) и накапливаются другие (плутоний). Таким образом, по мнению ученых, нейтрино из объекта исследования должно превратиться в точный инструмент, с помощью которого приборы, находящиеся за пределами реактора, «видели» бы его внутренность в особом, «нейтринном свете».

Так родился замысел создать на Ровенской атомной электростанции специальную нейтринную лабораторию. Он был поддержан крупнейшими учеными — академиками А. П. Александровым, М. А. Марковым, Б. М. Понтекорво. В создании лаборатории приняли участие проектировщики Урала, строители и энергетики Украины. Задача лаборатории — осуществить большую программу научных исследований и, одновременно, начать изучение возможности практического использования этой неуловимой частицы.

И вот, на глубине 13 метров под атомным реактором, за слоем железа и бетона в зале, облицованном сталью, собрано «сердце» установки — первый нейтринный детектор. Это прямоугольный бак из очень прозрачного пластика, наполненный 250 литрами жидкого сцинтиллятора, вещества, светящегося под действием попадающих в него частиц. Нейтрино вызывает в нем ядерную реакцию (с частотой несколько сотен в сутки), которая сопровождается двумя последовательными вспышками света. Специальные электронные «глаза» — фотоумножители — регистрируют эти вспышки, превращают световые сигналы в электрические и отправляют их в электронно-вычислительную машину. Последняя анализирует яркость вспышек и время между вспышками. Так удается установить, что реакцию вызвали именно нейтрино, а не многочисленные посторонние частицы, все-таки проникающие в детектор, несмотря на защиту из бетона, железа и воды.

Сейчас уже зарегистрированы многие тысячи нейтринных событий. Это первые нейтрино от реактора, которые «своими глазами» увидели физики в Советском Союзе. Впереди трудные дальнейшие исследования.

25 апреля исполняется 80 лет академику Андрею Николаевичу Колмогорову, одному из основателей журнала «Квант» и бессменному первому заместителю главного редактора.

Жизнь А. Н. Колмогорова неразрывно связана с Московским университетом, студентом которого он стал в 1920 году и где затем был профессором и деканом; ныне Андрей Николаевич возглавляет кафедру математической логики и отделение математики механико-математического факультета.

По всеобщему признанию А. Н. Колмогоров — один из ведущих математиков современности. Работы Андрея Николаевича относятся к самым различным отраслям математики и ее приложений, начиная от абстрактнейших разделов и кончая такими прикладными областями, как гидродинамика и теория управления. Во время Великой Отечественной войны А. Н. Колмогоров внес большой вклад в теорию расчета артиллерийских стрельб. Однако наибольшую известность ему принесли работы по теории вероятностей — Андрей Николаевич поставил эту науку на прочный аксиоматический фундамент и значительно обогатил многие из ее разделов (предельные теоремы, марковские процессы, сложности числовых последовательностей).

А. Н. Колмогоров — не только выдающийся математик, но и прекрасный педагог, воспитавший многих талантливых ученых. Среди его учеников — академики А. И. Мальцев, С. М. Никольский и Ю. В. Прохоров, член-корреспондент АН СССР И. М. Гельфанд, а из математиков более молодого поколения — доктора физико-математических наук В. И. Арнольд, Я. Г. Синай и безвременно умерший В. М. Алексеев.

Педагогический талант А. Н. Колмогорова проявился не только в воспитании математиков-исследователей: Андрей Николаевич много преподавал в обычной средней школе, основал школу-интернат при МГУ и 15 лет преподавал в ней; в шестидесятых годах Андрей Николаевич возглавил Комиссию по реформе математического образования и написал ряд школьных учебников.

Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» поздравляют Андрея Николаевича с днем рождения и желают ему доброго здоровья и новых успехов в педагогической деятельности и в науке.

Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым

Мы находимся в старом деревянном доме в деревне Комаровка под Москвой, где Андрей Николаевич обычно проводит конец недели. Светлая, скромно обставленная комната. В одном из углов старый, но качественный проигрыватель со специальными полками для пластинок. Стены заставлены стеллажами с книгами. В середине комнаты большой стол с множеством книг, оттисков статей, рукописей, художественных альбомов. Андрей Николаевич сидит у окна за небольшим письменным столом. Рядом с пишущей машинкой и аккуратно сложенными исписанными листами бумаги стоит магнитофон, на который записывается наша беседа. Стенограмму этой беседы мы и предлагаем вашему вниманию.

— Андрей Николаевич, часто приходится слышать о возрастающей специализации науки. В то же время известно, что Вы занимались такими далекими друг от друга областями математики, как теория вероятностей и алгебраическая топология, математическая логика и теория динамических систем. В чем, по-Вашему, будущее науки — в универсальности или специализации?

— Математика велика. Один человек не в состоянии изучить все ее разветвления. В этом смысле специализация неизбежна. Но в то же время математика — единая наука. Все новые и новые связи возникают между ее разделами, иногда самым непредвиденным образом. Одни разделы служат инструментами для других разделов. Поэтому замыкание математиков в слишком узких пределах, должно быть, гибельно для нашей науки. Положение облегчается тем, что работа в области математики, в принципе, коллективна. Должно быть некоторое количество математиков, которые понимают взаимные связи между самыми различными областями математики. С другой стороны, можно работать с большим успехом и в какой-нибудь совсем узкой ветви математики. Но в этом случае надо еще, хотя бы в общих чертах, понимать связи между своей специальной областью исследования с областями смежными, понимать, что, по существу, научная работа в математике — коллективная работа.

— Что Вы можете сказать о соотношении и связях прикладной и чистой математики?

— Прежде всего, нужно заметить, что само различие между прикладной и чистой математикой чрезвычайно условно. Вопросы, которые, казалось бы, принадлежат к чистой математике и не имеют применений, очень часто совершенно неожиданно оказываются важными для разных приложений. С другой стороны, занимаясь прикладной математикой, ученый почти неизбежно наталкивается на смежные вопросы, решающиеся теми же методами, привлекающие его своей логической красотой, но, собственно говоря, непосредственных приложений уже не получающие. Вероятно, в практической работе математика нужно проявлять должную широту. Несомненно, что математики должны, это их долг, заниматься всеми теми вопросами, которые настоятельно навязываются вопросами практики. Если смежные вопросы, пусть сразу применений не имеющие, являются привлекательными хотя бы в силу красоты и естественности возникающих задач, ими, конечно, тоже нужно заниматься.

— Норберт Винер пишет в своей автобиографической книге, что перестал заниматься функциональным анализом, когда почувствовал, что «Колмогоров наступает мне на пятки». А как Вы относитесь к конкуренции в математике?

— Заявление Винера мне не совсем понятно. В функциональном анализе я сделал немного. Самая интересная моя работа по функциональному анализу называется «Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве».

Что касается конкуренции, то конкуренция может быть дружеской, тогда она мало отличается от сотрудничества. Тесное содружество, когда два математика одновременно и параллельно думают над одной и той же проблемой, порой бывает очень продуктивным. Но при этом иногда бывает и так, что участие одного из сотрудников практически оказывается излишним и тогда ему разумно без обиды отойти в сторону.

— Всегда ли математика была Вашим основным увлечением? Когда Вы окончательно выбрали математику как профессию?

— Нет, как это часто бывает, пути моего развития были более извилистыми. С раннего детства было известно, что я умею хорошо считать и что меня интересуют математические задачи арифметического характера; я сравнительно рано познакомился и с началами алгебры. Но все это относится к очень раннему возрасту. Несколько позднее, в средних классах школы, победили уже совсем другие увлечения — в частности, историей. Возврат к математике произошел в самых последних классах средней школы. Когда я кончил среднюю школу, то долго колебался в выборе дальнейшего пути. В первые студенческие годы, кроме математики, я занимался самым серьезным образом в семинаре по древнерусской истории профессора С. В. Бахрушина. Не бросал мысль о технической карьере, почему-то меня увлекала металлургия, и, параллельно с университетом, я поступил на металлургическое отделение Химико-технологического института им. Менделеева и некоторое время там проучился. Окончательный выбор математики как профессии, собственно говоря, произошел, когда я начал получать первые самостоятельные научные результаты, то есть лет с восемнадцати-девятнадцати.

— Когда обычно проявляются способности к математике? Всегда ли, как у Вас, в раннем возрасте?

— Я довольно много преподавал в средней школе. У меня сложилось такое впечатление, что интерес к математике в средних классах, в возрасте двенадцати-тринадцати лет, часто оказывается временным и совсем проходит к старшим классам. Особенно часто это бывает у девочек. С теми школьниками, которые увлечены математикой в возрасте 13—14—15 лет, по-моему, стоит работать. При умелом культивировании их способности постепенно развиваются и, как правило, уже не теряются. Бывает, конечно, и очень много исключений. Разумеется, серьезный интерес к математике может проявиться и позже.

— Какие математики старшего поколения оказали на Вас наибольшее влияние?

— В студенческие годы я был учеником Николая Николаевича Лузина. Кроме него большое влияние оказали на меня Вячеслав Васильевич Степанов, Александр Яковлевич Хинчин, Павел Сергеевич Александров и другие математики их поколения.

— Что Вам хотелось бы сказать о своих учениках и кого из них Вы хотели бы упомянуть?

— Мне повезло на талантливых учеников. Многие из них, начав работу вместе со мной в какой-нибудь области, потом переходили на новую тематику и уже совершенно независимо от меня получали замечательные результаты. Выделить из них наиболее заслуживающих упоминания было бы трудно. Скажу только в виде шутки, что в настоящее время один из моих учеников управляет земной атмосферой, а другой — океанами[*].

— Андрей Николаевич, каков Ваш режим дня?

— Естественно, в течение моей достаточно длинной жизни режим дня в разные ее периоды был различным. Опишу, пожалуй, только тот режим дня, который мы с Павлом Сергеевичем Александровым установили для себя на те 3—4 дня в неделю, которые мы проводили за городом, под Москвой, в деревне Комаровка.

День начинался в 7 часов утра. Первый час был посвящен гимнастике, пробежке. В 8 часов мы завтракали и принимались за работу за столом — с пишущей машинкой или без нее. В час или два часа дня был полдник, состоящий из молока или кефира с хлебом. После полдника мы еще немного работали, но обычно отправлялись на большую прогулку пешком или — зимой — на лыжах, до 4 часов дня. Потом на полчаса мы укладывались спать. В 5 часов был обед. После обеда мы иногда еще занимались работой, обычно — второстепенной: переписывание или тому подобное. Вечер посвящался чтению, музыке, приему гостей. Перед сном мы любили еще делать небольшую прогулку. Укладывались спать около 10 часов.

Но, конечно, когда работаешь и начинает получаться решение какой-либо важной проблемы, все отступает на задний план, никакого распорядка дня уже не бывает.

— Вы, как и многие математики, любите серьезную музыку. Расскажите, почему.

— Ваше замечание о многих математиках, увлекающихся серьезной музыкой, мне кажется правильным. Если прийти в концертный зал, особенно в Малый зал Московской консерватории, то вы там увидите непропорционально много математиков. По-видимому, между математическим творчеством и настоящим

---

[*] Речь идет об академике А. М. Обухове, директоре Института физики атмосферы АН СССР, и об академике А. С. Монине, директоре Института океанологии АН СССР. (*Прим. редакции.*)

А. Н. Колмогоров и П. С. Александров в Комаровке (семидесятые годы).

интересом к музыке имеются какие-то глубокие связи. Но выяснить и объяснить эти связи мне представляется довольно трудным. Замечу, впрочем, что мой друг Павел Сергеевич Александров рассказывал, что у него каждое направление математической мысли, тема для творческих размышлений, связывались с тем или иным конкретным музыкальным произведением.

Среди любимых композиторов назову, в первую очередь, Моцарта, Шумана, ну и, конечно, величайших музыкантов — Баха, Бетховена.

— Лингвисты и литературоведы обратили внимание на Ваши публикации по стиховедению. Что Вы можете сказать об этом — менее обычном — сочетании: математика и поэзия?

— Мне хотелось бы разделить этот вопрос на два, так как мое увлечение поэзией имеет такой же непроизвольный, стихийный характер, как и у людей, не занимающихся теоретическим исследованием стиха. Любимые мои поэты — это Тютчев, Пушкин, Блок. Что же касается моих научных работ по метрике и ритмике русского стиха, то они действительно обратили на себя внимание специалистов-литературоведов, но все-таки это довольно специальная область исследования, интересоваться которой совершенно не обязательно всякому.

— Занимаетесь ли Вы спортом? Каким?

— Состязательным спортом я никогда не занимался. Если не ошибаюсь, я только три раза в жизни участвовал в гонке на 10 км на лыжах.

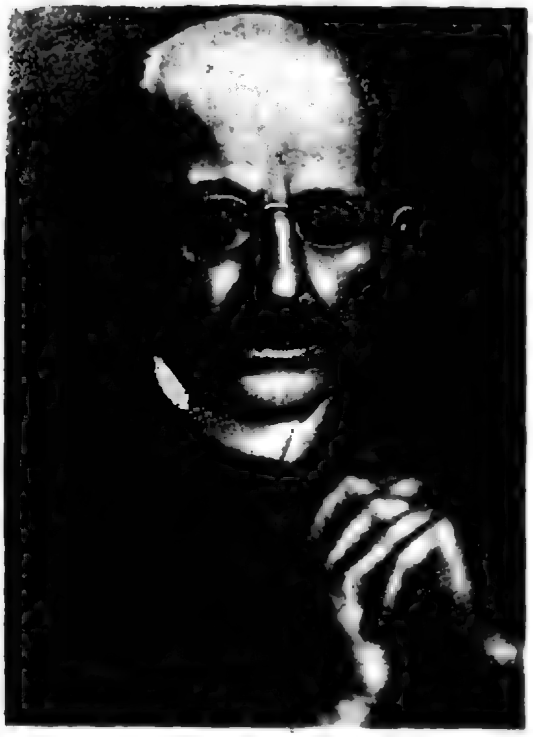
Но я всегда очень любил большие прогулки пешком и на лыжах, совершал длинные путешествия на байдарке или на лодке. Очень люблю плавание, походы в горах. Во всех этих занятиях я ценю не только их пользу для здоровья, но ту радость общения с природой, которую они приносят.

Всегда любил купание в морском прибое. В солнечные мартовские дни люблю делать большие лыжные пробеги в одних шортах. Во время таких мартовских лыжных пробегов люблю выкупаться посреди сияющих на солнце сугробов в только что вскрывшейся ото льда речке. Впрочем, я не советую обязательно подражать мне во всем этом — можно просто записаться в какую-нибудь привлекающую Вас спортивную секцию.

— Андрей Николаевич, что бы Вы хотели пожелать нашим читателям?

— Я сам являюсь ученым, и, конечно, в первую очередь, я желаю нашим читателям внести тот или иной вклад в науку, большой или хотя бы маленький. Замечу, впрочем, что в случае если все наши читатели принялись бы писать самостоятельные научные работы, то научные журналы не выдержали бы такого натиска. Поэтому я выскажу и более скромное пожелание — чтобы школьное увлечение математикой пригодилось вам и в дальнейшей жизни. В «Кванте» мы как раз стараемся вам показать (может быть, и недостаточно), как разнообразны приложения математической науки.

Беседу записал А. Б. Сосинский



Рождение кванта

Академик АПН СССР
В. А. ФАБРИКАНТ

> *Преследование определенной цели, далекий свет которой не меркнет от первых неудач, является необходимой предпосылкой, хотя далеко не гарантией успеха.*
>
> *М. ПЛАНК.*
> Нобелевская речь.

В этом году 23 апреля исполнилось 125 лет со дня рождения Макса Планка, сделавшего одно из самых великих открытий за всю историю физики. Он открыл существование квантов. Есть не очень достоверный рассказ о том, что, гуляя со своим семилетним сыном, Планк сказал ему: «Или то, чем я занимаюсь теперь, есть совершенная бессмыслица, или речь идет, быть может, о самом большом открытии в физике со времен Ньютона». Действительно, сделанное Планком открытие поставило его имя в один ряд с именами выдающихся физиков мира. Но путь к открытию был долог и труден. Речь шла о начале всей квантовой физики, а Карл Маркс недаром писал: «Всякое начало трудно — эта истина справедлива для каждой науки».

Интересен вопрос о том, благом ли было бы для человечества отсутствие этих трудностей. У Достоевского в «Дневнике писателя» дан ответ: «Ну, что вышло бы, например, если ... вдруг посыпался бы ряд открытий вроде таких, что солнце стоит, а земля вокруг него обращается (потому что, наверно, есть еще много таких же точно, по размерам, открытий, которые теперь еще не открыты, да и не снятся мудрецам нашим); вдруг все знания так и свалились на человечество, и, главное, совершенно даром, в виде подарка? Я спрашиваю: что бы тогда сталось с людьми? О, конечно, сперва все бы пришли в восторг... Но вряд ли и на одно поколение людей хватило бы этих восторгов! Люди вдруг увидели бы, что жизни уже более нет у них, нет свободы духа, нет воли и личности, что кто-то все украл разом... Поняли бы люди, что нет счастья в бездействии, что погаснет мысль не трудящаяся... Настанет скука и тоска: все сделано и нечего более делать, все известно и нечего более узнавать».

Планк учится

Интерес к изучению физики у Планка пробудился еще в гимназии. В своей автобиографии он с большой теплотой вспоминает преподавателя математики Г. Мюллера — «общительного, проницательного, остроумного человека, умевшего на ярких примерах объяснить смысл тех физических законов, о которых он нам, ученикам, говорил. Так получилось, что в качестве первого закона, не зависящего от человека и имеющего абсолютное значение, я, как откровение, воспринял принцип сохранения энергии. Незабываем для меня рассказ Мюллера о том, как каменщик с трудом втаскивает на крышу дома тяжелую черепицу. Работа, которую он при этом совершает, не теряется, она полностью сохраняется, возможно, на долгие годы, до тех пор, пока в один прекрасный день эта черепица, быть может, сорвется и свалится кому-нибудь на голову».

После окончания гимназии Планк решил поступить в мюнхенский университет и заняться физикой. Его отец, юрист, один из профессоров этого университета, посоветовал ему поговорить предварительно с профессором физики Филиппом фон Жолли. В публичной лекции, прочитанной в 1924 году, Планк вспоминал, как Жолли отговаривал его делать этот, по его мнению, ошибочный шаг. «Он изобразил мне физику как высокоразвитую, едва ли не полностью исчерпанную науку, которая теперь, после того как ее увенчало открытие принципа сохранения энергии, близка, по-видимому, к тому, чтобы принять окончательную стабильную форму. Вероятно, в том или ином углу есть еще пылинка или пузырек, которые можно исследовать и классифицировать, но система как целое построена довольно прочно, и теоретическая физика заметно приближается к той степени законченности, какой, например, обладает геометрия уже в течение столетий». Планк не внял советам Жолли. Проучившись три года в Мюнхене, он для завершения физического образования перебрался в Берлинский университет, где преподавали знаменитые физики — Гельмгольц и Кирхгоф. Однако лекции обоих ученых принесли ему мало пользы. «Гельмгольц, очевидно, никогда как следует не готовился к лекциям.» «В противоположность этому Кирхгоф читал тщательно отработанный курс... Но в целом это действовало как нечто заученное наизусть, сухое и однообразное. Мы восхищались самим лектором, а не тем, о чем он говорил.» Наибольшую пользу принесли Планку самостоятельные занятия и личные контакты с выдающимися учеными.

Проблемы абсолютно черного излучения

К середине XIX века накопилось довольно много экспериментальных данных об излучении нагретых тел. Настала пора их теоретического осмысливания. Здесь два важных шага, в известном смысле противоположных, сделал Кирхгоф. Первый шаг заключался в установлении Кирхгофом, совместно с Бунзеном, того факта, что каждому веществу соответствует вполне определенный спектр — набор длин волн (или частот) света, испускаемого и поглощаемого этим веществом. Это открытие послужило основой для спектрального анализа веществ. Второй шаг состоял в нахождении таких условий, при которых спектр излучения нагретых тел зависит только от их температуры и не зависит от химического состава излучающего вещества. Кирхгоф теоретически рассмотрел излучение внутри замкнутой полости в твердом теле, стенки которой обладают определенной температурой. В такой полости устанавливается равновесие между излучением и стенками — стенки излучают столько же энергии, сколько поглощают. Оказалось, что в этих условиях распределение энергии в спектре излучения не зависит от материала, из которого изготовлены стенки. Такое излучение было названо «абсолютно черным». Сначала черное излучение было как бы «вещью в себе». Но вскоре Луммер предложил для экспериментальной проверки теории Кирхгофа сделать маленькое отверстие в стенке полого шара (диаметр отверстия должен быть мал по сравнению с диаметром шара) и исследовать спектр излучения, выходящего через это отверстие (рисунок 1). Любой световой луч, падающий на отверстие снаружи, испытает внутри полости многократные отражения и практически не сможет выйти через отверстие наружу. (Вспомните, как в яркий солнечный день открытое окно в доме кажется снаружи черным, хотя оно освещается солнцем). Вместе с тем при высокой температуре стенок отверстие будет ярко светиться за

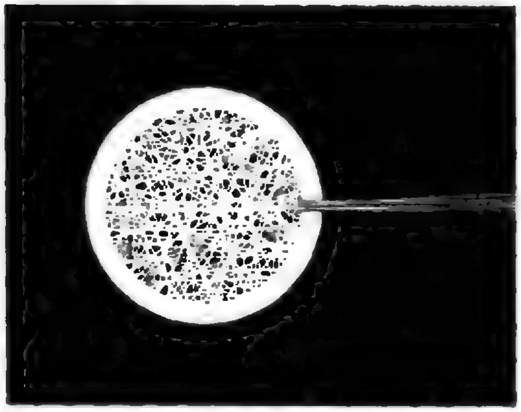


Рис. 1.

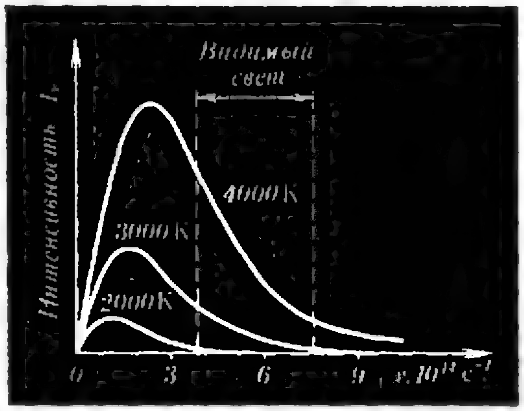


Рис. 2.

счет света, идущего изнутри полости. Так что отверстие ведет себя, как тело, поглощающее все падающие на него лучи, — абсолютно черное тело, и выходящее из него излучение — абсолютно черное.

На рисунке 2 изображено распределение энергии в спектре абсолютно черного излучения. По оси абсцисс отложена частота ν, а по оси ординат — интенсивность излучения I_ν*). Как видно из рисунка, спектр имеет непрерывный характер, и при каждой температуре максимум интенсивности приходится на определенную частоту.

Но вернемся к теории черного излучения. Общие термодинамические соображения позволили Кирхгофу, Больцману и Вину вывести строгим путем ряд важных законов, управляющих излучением нагретых тел. Однако эти общие соображения оказались недостаточными для вывода конкретного вида закона распределения энергии в спектре абсолютно черного излучения. В этом направлении больше всех продвинулся Вин. В 1893 году он доказал, что интенсивность излучения I_ν при данной частоте может зависеть от температуры только как от параметра, входящего в отношение ν/T. Иными словами, I_ν должно зависеть от некоторой функции $f(\nu/T)$. Конкретный вид этой функции оставался неизвестным.

Планк приступает к решению проблемы черного излучения

Планк приступил к исследованию проблемы черного излучения в 1894 году, уже имея большой опыт физика-теоретика. Он много занимался уточнением формулировок основных законов термодинамики, добиваясь большой строгости и тем самым оттачивая строгость своего мышления. Вместе с тем, как мы увидим ниже, совершая свой главный научный подвиг, он вынужден был поступиться этой строгостью, что создало дополнительные трудности.

Планк начал с попытки построить теорию черного излучения на основе электродинамики Максвелла, рассматривая излучающее тело как совокупность осцилляторов, испускающих и поглощающих электромагнитные волны *). Он показал, что интенсивность излучения I_ν пропорциональна энергии E_ν осциллятора, испускающего излучение данной частоты. Этот результат дал возможность перейти от рассмотрения черного излучения к анализу свойств осцилляторов, представлявших более привычные объекты для физиков того времени.

---

*) Интенсивность излучения — это энергия, приходящаяся на единичный интервал частот.

*) Осциллятор — это колебательная система, в которой могут возбуждаться свободные колебания. Например, шарик на пружине, прикрепленной к опоре; электрический колебательный контур — тоже пример осциллятора.

Планк считал, что испускание атомами электромагнитных волн происходит вследствие колебаний внутриатомных электрических токов. При этом атом уподоблялся микроскопическому вибратору Герца.

В 1896 году Вин, используя, по его словам, «счастливую идею» русского физика В. А. Михельсона, полуэмпирическим путем получил формулу, связывающую интенсивность излучения с частотой и температурой излучателя:

$$I_\nu = a\nu^3 e^{-b\nu/T}$$

(a, b — некоторые константы). Эта формула (ее назвали «формулой Вина») оказалась в хорошем согласии с экспериментальными данными в области больших значений отношения ν/T. Однако вскоре были получены экспериментальные данные в области малых значений ν/T (инфракрасная часть спектра, высокие температуры), которые явно противоречили формуле Вина.

Стало ясно, что формула Вина нуждается в существенном улучшении, и Планк взялся за эту задачу. Решить ее ему удалось весьма нестрогим путем. Полученный результат Планк изложил в докладе «Об одном улучшении закона излучения Вина», сделанном на заседании Немецкого физического общества 19 октября 1900 года. Здесь впервые появилась знаменитая формула Планка:

$$I_\nu = \frac{a\nu^3}{e^{b\nu/T}-1}. \qquad (1)$$

В «Научной автобиографии», опубликованной в 1955 году, Планк вспоминает: «На следующий день (после доклада) утром меня разыскал мой коллега Рубенс и рассказал мне, что после закрытия заседания в ту же ночь моя формула была аккуратно сравнена с данными его измерений и повсюду было найдено удовлетворительное совпадение. Было найдено совпадение также и с данными Луммера и Прингсхейма... Более поздние измерения все снова и снова подтверждали формулу для излучения и притом тем точнее, чем к более тонким методам измерений переходили».

Научный подвиг Планка

Планк отнюдь не был удовлетворен одержанной победой. В той же автобиографии он пишет: «Однако, даже если формулу для излучения предполагать справедливой с абсолютной точностью, то все же она имеет только формальный смысл удачно угаданного закона».

Для ума, воспитанного на термодинамических исследованиях, такое положение было нетерпимым. В речи, произнесенной при получении Нобелевской премии в 1920 году, Планк говорит: «Поэтому я со дня ее (формулы) нахождения был занят задачей установления ее истинного физического смысла, и этот вопрос привел меня ... к больцмановскому образу мыслей. После нескольких недель напряженнейшей в моей жизни работы темнота рассеялась и наметились новые, неподозреваемые раньше дали».

Полученные результаты Планк доложил 14 декабря 1900 года. Этот день следует считать днем рождения кванта, хотя в докладе Планка отсутствует соответствующий термин. В докладе Планк ссылался на большой мемуар 1877 года, в котором Больцман для построения кинетической теории газов воспользовался методами теории вероятностей. Планк решил применить теорию вероятностей к вопросу о распределении по энергиям осцилляторов, а потом перейти к распределению интенсивности в спектре абсолютно черного излучения. Все попытки Планка провести этот вывод в рамках классической физики оказались безуспешными. В поисках выхода из создавшегося положения Планк пришел к использованию приема, примененного Больцманом в качестве промежуточного этапа вероятностных вычислений.

Больцман в указанном мемуаре ввел, как он писал, «полезную фикцию», заключавшуюся в предположении, что кинетическая энергия молекул может иметь только дискретный ряд значений, кратных одной и той же величине ε. Он выписал арифметическую прогрессию значений энергии молекул:

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ \ldots,\ n\varepsilon.$$

Проведя соответствующие выкладки, Больцман перешел затем к пределу, устремляя ε к нулю, а n к бесконечности, так как на самом деле кинетическая энергия молекул образует непрерывный ряд значений. Таким образом, дискретность значений кинетических энергий молекул была просто промежуточным вычислительным приемом, лишенным физического смысла. Несмотря на формальный характер примененного Больцманом приема, он, очевидно, сыграл существенную роль в становлении взглядов Планка, предположившего, что энергия осцилляторов также образует дискретный ряд значений, кратных одной и той же величине. Попытки устремить эту величину к нулю не дали желаемого результата, то есть не привели к получению формулы (1). Тогда Планк отказался от этих попыток. В письме к известному американскому физику Вуду Планк писал: «Коротко и сжато я могу все это дело назвать актом отчаяния. Потому что по природе я миролюбив и не расположен к рискованным приключениям. Но я тогда уже 6 лет (с 1894 г.) бился над проблемой равновесия между излучением и материей, не достигнув никакого успеха; я знал, что эта проблема имеет фундаментальное значение для физики, и я знал формулу, которая воспроизводит распределение энергии в нормальном спектре; теоретическое объяснение должно было быть найдено любой ценой, и никакая цена не была бы слишком высока». И Планк заплатил эту цену, введя в физику совершенно новое представление о дискретности возможных значений энергии осцилляторов уже не как промежуточный этап, обусловленный удобствами вычислений, а как существенный элемент всего рассмотрения проблемы. Тем самым нарушался основной принцип классической физики, согласно которому физические величины всегда изменяются непрерывным образом. Все верили в справедливость изречения Аристотеля: «Природа не делает скачков».

Учитывая ограничения, указанные Вином для вида зависимости $I_\nu(T)$, Планк вынужден был предположить, что порции энергии осциллятора должны быть пропорциональными частоте:

$$\varepsilon = h\nu. \qquad (2)$$

Так в физику вошла новая фундаментальная постоянная h — постоянная Планка. Величина ε позднее была названа квантом энергии. Используя условие (2), Планк получил выражение для энергии осциллятора E_ν, а затем перешел к интенсивности излучения:

$$I_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2(e^{h\nu/kT}-1)}, \qquad (1')$$

где c — скорость света, k — постоянная Больцмана.

Планк неоднократно говорил об «извилистости» пути, который ему пришлось пройти. Действительно, ведь речь шла о выводе формулы (1′), представляющей улучшение формулы Вина. Это удалось сделать за счет введения квантования энергии. Но формула Вина расходилась с опытом в области малых частот, где ε мало́ и квантование мало существенно. В области больших частот, где ε велико и дискретность значе́ний энергии осцилляторов существенна, формула Вина давала хорошее совпадение с опытом. В чем же дело? Обычно пишут, что Вин *вывел* свою формулу из классических представлений. Это неточно. Вин, по существу, *угадал* свою формулу.

Появление единицы в знаменателе формулы Планка обеспечивало совпадение результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными и в области малых частот. Вместе с тем, в этой единице был заложен зародыш новой отрасли техники — квантовой электроники, то есть возможность создания мазеров и лазеров. Но это, как говорят, уже другая история.

Как ни важна формула Планка, но идея квантования, использованная в процессе ее вывода, и введение новой фундаментальной константы оказались еще важней. Это была настоящая революция в физике, имевшая такие последствия, как создание квантовой теории вещества и излучения. Наличие в физической формуле величины h означает, что эта формула может быть получена только из квантовых представлений.

Путь, приведший Планка к полной победе, был, по существу, нелогичным: пропорциональность интенсивности излучения I_ν энергии осциллятора E_ν была установлена им на основе представлений чисто классической физики, а выражение для E_ν было получено из квантовых представлений. Но эта «нелогичность» отнюдь не снижает заслуг Планка. Здесь явно сказалась его интуиция великого естествоиспытателя. Такая же ситуация повторилась при создании Бором модели атома. Только значительно позднее трудами ряда ученых была создана логичная квантовая теория, но при этом выявились новые проблемы. Развитие физики — яркое подтверждение справедливости ленинского тезиса о неисчерпаемости свойств материи. Пользуясь терминологией Достоевского — человечеству не угрожает «скука».

* * *

В заключение — несколько слов, характеризующих некоторые черты облика Планка как человека и его взгляды.

Наряду с занятиями физикой Планк всю жизнь увлекался музыкой. Одно время, в юности, он даже колебался в выборе между физикой и музыкой. Планк был незаурядным пианистом, дирижировал академическим хором и играл на органе. Он часто музицировал с Эйнштейном, игравшим на скрипке. До глубокой старости Планк занимался туризмом и альпинизмом. Есть фотография 84-летнего Планка на трехтысячнике в Восточном Тироле. В его натуре было стремление к преодолению препятствий, хотя в обычной жизни он был скромным, приветливым и сдержанным человеком. Планк испытал в своей жизни тяжелые утраты. В войне 1914 года под Верденом был смертельно ранен его старший сын; во времена фашизма его второй сын был казнен за участие в офицерском заговоре против Гитлера.

Планк неоднократно проявлял дружеские чувства к нашей стране. В 1925 году он посетил Советский Союз в связи с 200-летием Академии наук СССР. На вопрос корреспондента «Комсомольской правды» — «Что дала советская наука Западу?» — Планк ответил: «Русская наука внесла за последние годы крупный вклад в мировую науку. Работы русских физиков, особенно Иоффе и Лазарева, хорошо известны мне и моим товарищам. В Германии известны имена многих советских ученых». В газете «Правда» было напечатано следующее заявление Планка: «Я унесу из вашей страны радостную мысль о том, что у вас о науке несут большую заботу не только ученые, но и правительство, и общественность».

Научные идеи Планка получили всеобщее признание и принесли ему мировую славу. Он был избран членом академий наук практически всех стран, в том числе и АН СССР.

Умер Макс Планк в 1947 году в возрасте 89 лет. Имя его навсегда вошло в историю науки.

Из научной переписки

«Ты целину усердно подимал.
А я лишь изредка букет цветов срывал»

— так написал в письме Максу Планку выдающийся немецкий физик Арнольд Зоммерфельд, развивший квантовую теорию атома Бора. Планк, считая, что в этих строках Зоммерфельд явно несправедлив по отношению к собственным заслугам, ответил ему таким четверостишием:

«Цветы, что ты и я срывали,
Друг друга дивно дополняли.
И мы из них с тобой вдвоем
Прекраснейший венок совьем».

Наша обложка

На первой странице обложки воспроизведена фотограмма, полученная Г. М. Гречко и Ю. В. Романенко с борта космической станции «Салют-6». Они сфотографировали так называемый зодиакальный свет — явление рассеяния солнечного света в ближнем космосе. Затем снимок прошел специальную обработку, в ходе которой зоны разной освещенности получили разные цвета. Такой метод позволяет оценивать состояние межпланетной среды, ее прозрачность, степень запыленности и измерять эти величины.

Расправление контуров на плоскости

Кандидат физико-математических наук
С. В. МАТВЕЕВ

Сделаем из тонкой проволоки окружность, плавно изогнем ее в пространстве, придав ей более сложную форму, и бросим на плоскость, плотно прижав к ней (рис. 1). *Можно ли полученный плоский проволочный контур расправить вновь в окружность не отрывая его от плоскости?*

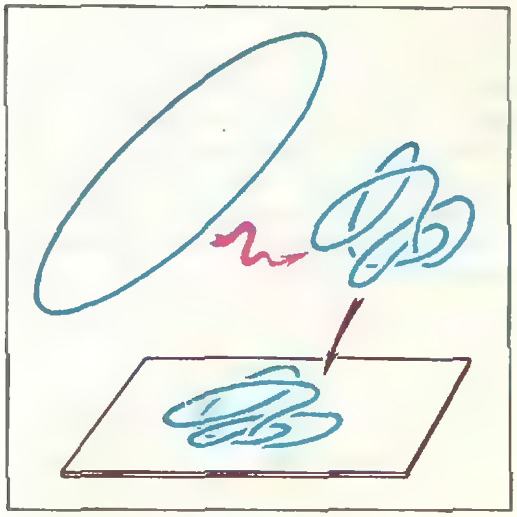


Рис. 1.

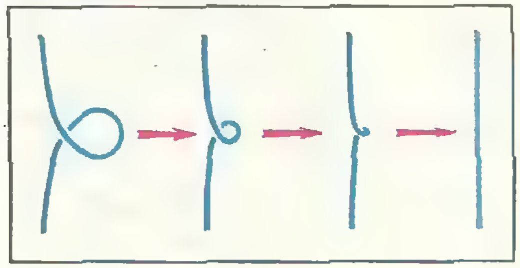


Рис. 2.

Мы считаем, что толщина проволоки нулевая, так что и в тех точках, где один участок кольца проходит над другим (в так называемых *двойных точках*), верхний участок также лежит на плоскости. Проволока очень гибкая, но не бесконечно гибкая — радиус закругления не должен обращаться в ноль, иначе проволока может сломаться. В частности, запрещена операция затягивания петелек, изображенная на рисунке 2.

Разумеется, расправить наш контур в пространстве всегда можно. Ведь мы начинали с проволочной окружности: ее можно восстановить, выполнив проделанные нами изгибания в обратном порядке. Начав с окружности, мы обошли все сложности, связанные с узлами: если бы мы начали с такого заузленного контура, как на рисунке 3, нам заведомо не удалось бы его расправить в окружность не только на плоскости, но даже в пространстве (см. «Квант», 1981, № 3, с. 8). Вернемся к нашему вопросу. Сначала

Немного поэкспериментируем и подумаем

Начнем с проволочного контура на рисунке 1. Повозившись немного с реальной проволочкой (можно и с ниткой), вы легко убедитесь, что этот контур расправить можно (процесс расправления показан на рисунке 4).

А теперь попробуйте расправить контуры *а* — *е*, изображенные на рисунке 5.

Я надеюсь, что читатель сумел расправить контуры *б*, *д*, *е*. Бесплодность попыток расправить контуры *а*, *в*, *г* убеждает в существовании нерасправляемых контуров. Но как дока-

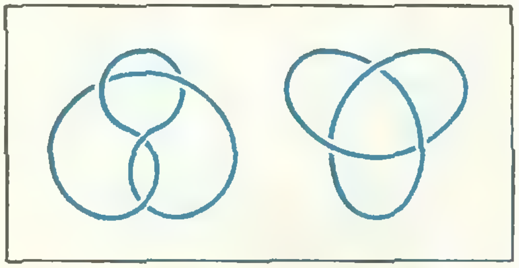


Рис. 3

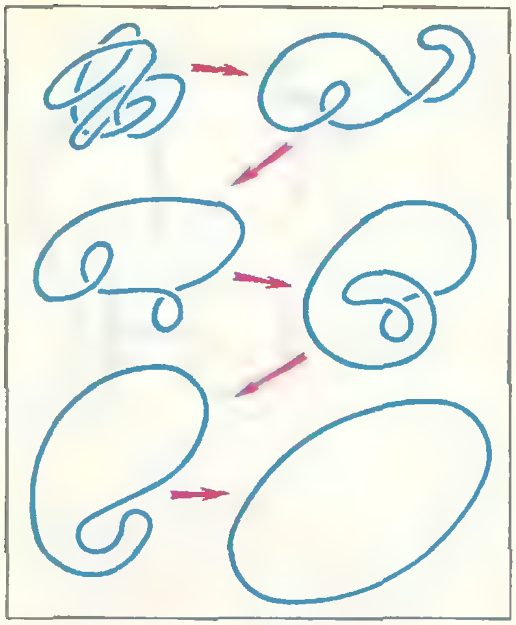


Рис. 4.

зать, что какой-нибудь контур расправить нельзя?

Чтобы доказать невозможность того или иного построения или процесса, математики часто пользуются следующим замечательным приемом. С каждым состоянием рассматриваемого объекта связывается некоторое число, остающееся неизменным в данном процессе (такое число называют *инвариантом* или *препятствием*); затем инвариант подсчитывается для начального и конечного состояния объекта; если получаются разные числа, то процесс перехода от начального состояния к конечному невозможен: ведь инвариант в процессе измениться не может, на то он и инвариант!

Попробуем и мы связать какое-нибудь число с каждым плоским проволочным контуром. Первое, что приходит в голову,— это число двойных точек контура. Увы! Это — не инвариант, как видно, например, из процесса расправления контура на рисунке 4. Однако рассматривая этот рисунок внимательнее, можно заметить, что двойные точки появляются и исчезают парами. Это наводит на мысль, что четность числа двойных точек не меняется, то есть что *остаток от деления числа двойных точек на два — инвариант*.

Так оно и есть (мы к этому еще вернемся). Из этого утверждения следует, например, что контур на рисунке 5, а расправить нельзя (7 двойных точек; нечетность числа 7 препятствует расправлению этого контура в окружность, у которой число двойных точек — нулевое, то есть четное). У контура 5, *г* имеется 4 двойные точки, значит, его инвариант равен 0, также как у окружности. Означает ли это, что его можно расправить в окружность? Нет! Ведь о достаточности условия равенства нулю инварианта мы ничего не знаем. Вопрос о расправляемости контура 5, *г* пока остается открытым.

Наши размышления должны были вас убедить, что для решения поставленной задачи имеет смысл находить инварианты. К этому мы и перейдем.

Инвариант V

Пусть дан контур на плоскости. Выберем на нем какую-нибудь точку *A* и укажем стрелкой одно из двух

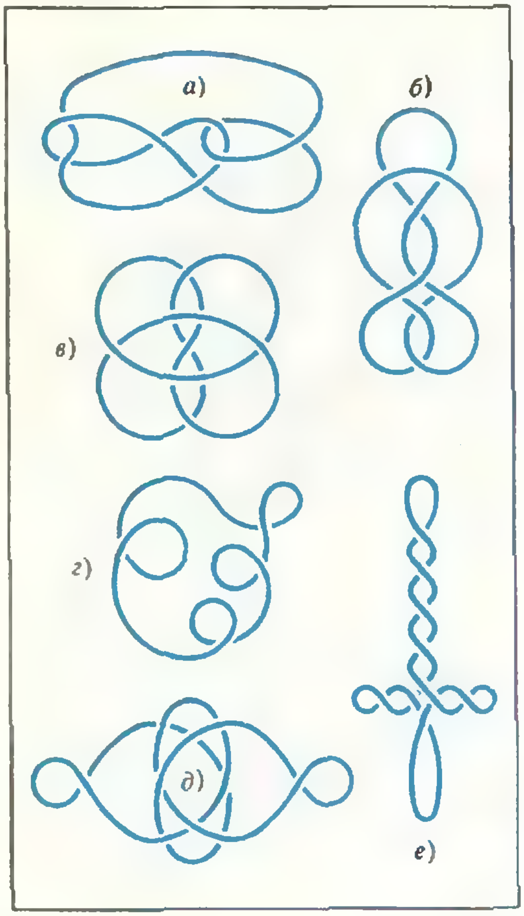


Рис. 5.

возможных направлений обхода. Будем двигаться по контуру из точки A с единичной скоростью в выбранном направлении, а вектор скорости будем откладывать от фиксированной точки A'. Тогда вектор скорости будет поворачиваться вокруг A', причем *его конец будет двигаться по единичной окружности* (с центром в точке A'). Так как в момент завершения обхода контура и возвращения в точку A вектор скорости займет исходное положение, общее число оборотов, которое он совершит вокруг точки A', является целым. При этом обороты в положительном направлении (против часовой стрелки) считаются со знаком «+», в отрицательном (по часовой стрелке) — со знаком «—».

Посмотрите на рисунок 6. На нем путь конца вектора скорости помечен красной линией и для наглядности сдвинут с окружности. На самом деле, красная кривая плотно наматывается на окружность, а точки 1′ — 6′ совпадают. Всего вектор скорости совершает (—1) оборот: от точки 1′ до точки 2′ — один оборот, от точки 2′ до точки 3′ и от точки 5′ до точки 6′ оборота не совершается, а от точки 3′ до точки 4′ и от точки 4′ до точки 5′ совершается по одному обороту в отрицательном направлении.

Обещанный нами *инвариант* (обозначим его V) *равен модулю общего числа оборотов вектора скорости.* Он не зависит, очевидно, от выбора начальной точки A; не зависит он также от выбора направления обхода, так как при изменении направления обхода общее число оборотов меняет только знак. Например, для контура на рисунке 6 инвариант V равен 1.

Покажем (не приводя подробного доказательства), что *V действительно является инвариантом.* В процессе расправления все положения векторов скорости меняются плавно, без скачков, поэтому число V тоже должно меняться непрерывно; однако V — всегда целое число, оно может превратиться в другое целое число только скачком, что противоречит непрерывности. Поэтому V остается неизменным, является инвариантом расправления.

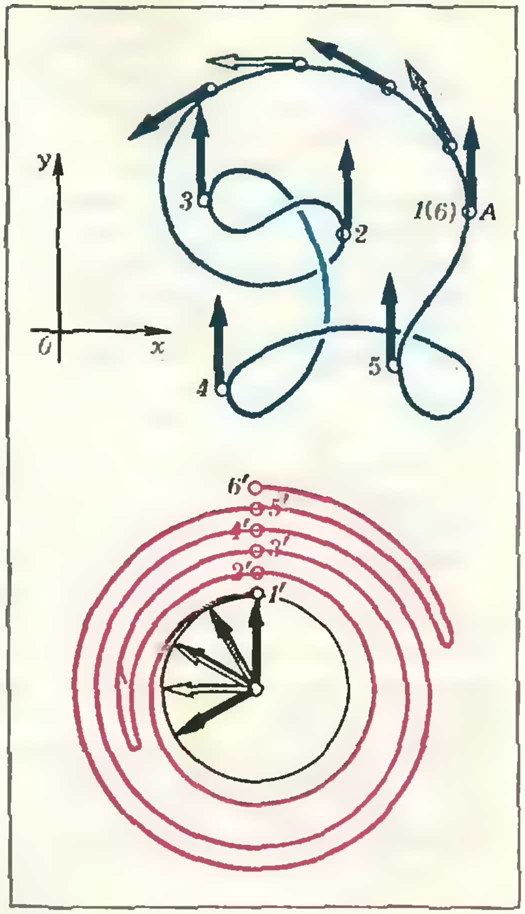


Рис. 6.

Теперь мы можем разобраться с контуром 5, *г*. Для него $V=3$ (проверьте!), поэтому он не расправляется в окружность (для которой $V=1$).

Если вы действительно проверяли, что для контура 5, *г* $V=3$, вы, наверное, заметили, что вычислять число оборотов вектора скорости на практике не очень удобно, легко совершить ошибку. Однако V можно найти проще.

Для этого выберем определенное *направление на плоскости, скажем* — направление оси Oy (см. рис. 6), и отметим точки, в которых вектор скорости направлен так же, как ось Oy. Поставим около каждой отмеченной точки число +1, если маленький содержащий ее участок контура находится слева от нее; и —1, если справа (если же контур в отмеченной точке имеет перегиб — то есть лежит по обе стороны от вектора — мы никакого числа не ставим). Тогда *инвариант V равен модулю суммы поставленных чисел.*

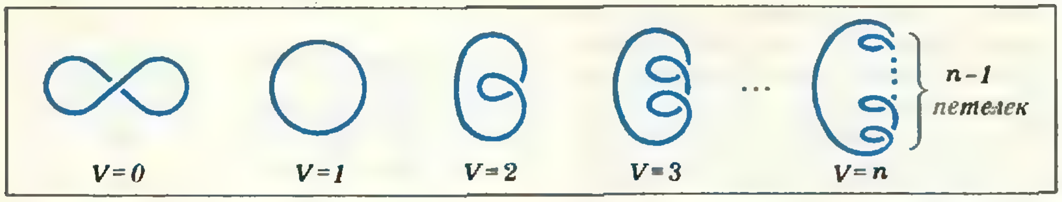


Рис. 7.

Например, около точек 1 и 2 на рисунке 6 следует поставить +1, около точек 3, 4, 5 — поставить (—1). Поэтому для контура на рисунке 6 инвариант *V* равен 1. Докажите самостоятельно, что указанный способ действительно позволяет сосчитать *V* для любого контура.

На рисунке 7 для каждого целого неотрицательного числа *n* изображен контур с инвариантом $V=n$. Напомним, что если контур расправляется в окружность, то его инвариант *V* обязан равняться инварианту окружности, то есть единице.

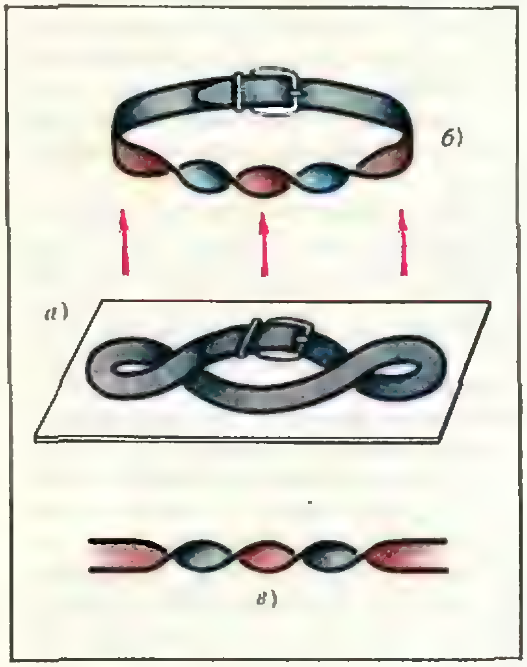


Рис. 8.

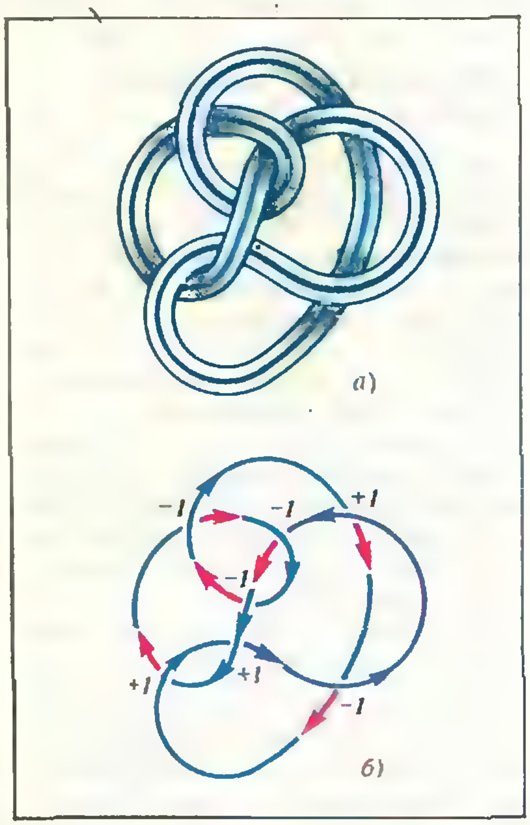


Рис. 9.

Инвариант *R*

Равенство $V=1$ является необходимым условием расправляемости контура в окружность. Является ли это условие достаточным? Я полагал, что ответ на этот вопрос положителен. Однако безуспешные попытки расправить собственный брючный ремень, положенный так, как на рисунке 8, *а*, убедили меня в обратном и одновременно натолкнули на важное наблюдение: поднятый с пола ремень (рис. 8, *б*) оказался дважды перекрученным!

Заменим контур на ленту, лежащую на плоскости так, чтобы контур совпадал с ее средней линией (рис. 9, *а*). Расправив контур в пространстве (например, вернув его в исходное положение до бросания на плоскость), получим перекрученную ленту. Число «перекруток» обозначим через *R*. Это и есть *второй инвариант*, равенство которого 0 необходимо для расправляемости контура в окружность. Следует уточнить, что число перекруток берется со знаком «+», если перекручивание ленты происходит так, как на рисунке 8, *б*, и со знаком «—», если лента перекручена так, как на рисунке 8, в (вспомните различие между правой и левой резьбой).

Докажем, что *число R действительно является инвариантом*, то есть что оно не меняется при расправлении контура на плоскости. Для этого достаточно заметить, что расправление контура определяет расправление ленты на плоскости, а число перекруток ленты не меняется не только при расправлении ленты на плоскости, но и при произвольном перемещении ленты в пространстве.

Можно доказать (мы на этом останавливаться не будем), что инвариант R вычисляется следующим образом. Выберем на контуре направление обхода. Поставим около каждой двойной точки число $+1$, если нижний вектор скорости направлен влево от верхнего, и -1, если вправо (легко увидеть, что при другом направлении обхода получатся те же числа). *Инвариант R равен сумме поставленных чисел.* Например, контур на рисунке 9, *б* имеет 3 положительные и 4 отрицательные двойные точки, поэтому его инвариант R равен -1. Следовательно, этот контур на плоскости расправить нельзя.

Необходимые и достаточные условия

Мы убедились, что условия $V=1$ и $R=0$ необходимы для того, чтобы контур можно было расправить в окружность. Достаточны ли эти условия? Другими словами, можно ли, подсчитав инварианты V и R и убедившись, что $V=1$ и $R=0$, заключить, что контур расправляется в окружность? Оказывается, да.

Основная теорема. *Для того чтобы контур можно было расправить на плоскости в окружность, необходимо и достаточно, чтобы его инвариант V был равен единице, а инвариант R — нулю.*

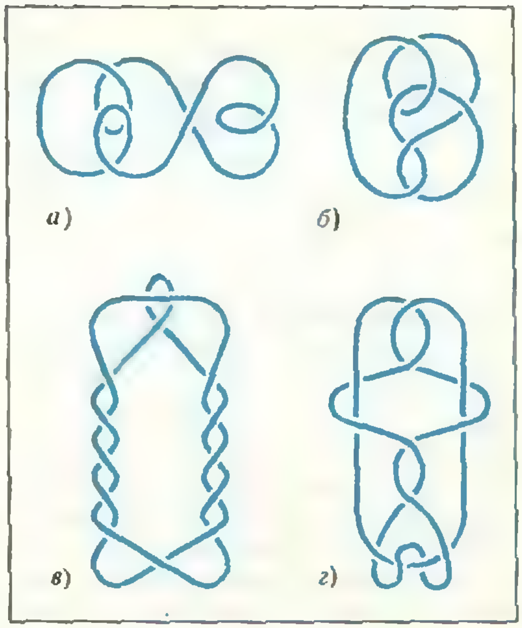


Рис. 10.

Эта теорема дает полный ответ на вопрос, поставленный в начале статьи. Описанные выше простые способы подсчета инвариантов V и R позволяют быстро проверить сформулированное в ней необходимое и достаточное условие. Предлагаю читателю в этом убедиться на примере контуров на рисунках 10, *а—г*.

Доказательство основной теоремы

Мы уже доказали, что V и R являются инвариантами, поэтому необходимость условий $V=1$, $R=0$ уже установлена. Чтобы доказать достаточность, нужно показать, что всякий контур с условиями $V=1$, $R=0$ расправляется на плоскости в окружность.

Возьмем такой контур. Мы знаем, что его можно расправить с выходом в пространство. Положение контура в момент времени t в процессе этого расправления обозначим через K_t. Назовем момент времени t *особым*, если контур K_t хотя бы в одной точке имеет вертикальную касательную. Допустим, что особые моменты времени отсутствуют. Тогда контур можно расправить на плоскости. Действительно, пусть потолок комнаты, в которой происходит расправление, параллелен плоскости. Представим себе, что он начинает опускаться вниз до тех пор, пока плотно не прижмется к ней. Каждый из контуров K_t при этом сомнется в некоторый контур K_t на плоскости. Отсутствие вертикальных касательных гарантирует отсутствие складок (точек с нулевым радиусом закругления) у каждого контура K_t. Се-

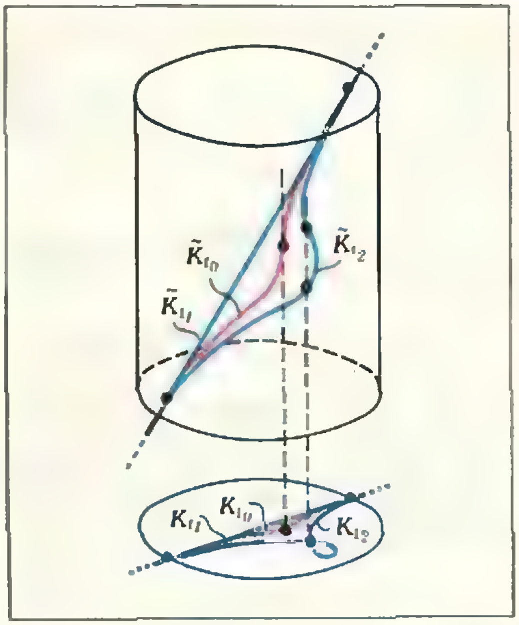


Рис. 11.

мейство контуров K_t и определяет искомое расправление в окружность на плоскости.

Посмотрим теперь, что происходит с контуром K_t, когда момент времени $t=t_0$ является особым, то есть контур проходит через положение K_{t_0} с вертикальной касательной. Типичная картина прохождения через вертикальное положение представлена на рисунке 11; мы видим, что переходу $\tilde K_{t_1} \to \tilde K_{t_0} \to \tilde K_{t_2}$ в пространстве соответствует на плоскости запрещенный переход $K_{t_1} \to K_{t_0} \to K_{t_2}$, при котором появляется излом K_{t_0}, а затем петелька K_{t_2}.

Можно доказать (мы на этом останавливаться не будем), что процесс расправления в пространстве можно вести так, что будет лишь конечное число особых моментов времени и каждый из них будет «типичным» — то есть будет *появляться или исчезать одна петелька*.

Пусть в особый момент времени t_0 исчезла петелька. На плоскости мы не можем ее уничтожить, поэтому затянем ее до очень малых размеров и при дальнейшем расправлении трогать не будем (можно считать, что мы ее «заморозили» — заклеили бумажной пленкой).

Пусть теперь в особый момент времени появилась петелька. Не отрывая контур от плоскости мы не можем создать новую петельку, однако добавить сразу две (взаимно уничтожающиеся) петельки нетрудно (рис. 12). Сделаем это, а лишнюю петельку затянем до ничтожно малых размеров и «заморозим».

Продолжая таким образом процесс расправления в пространстве и одновременно в проекции на плоскость, мы превратим плоский контур в окружность с конечным числом маленьких («замороженных») петелек.

Петельки можно разбить на четыре типа, в зависимости от того, где расположена петелька (внутри или вне окружности) и в каком порядке проходится ее двойная точка (сперва сверху, потом снизу или наоборот), а потом переставить местами, протаскивая друг по другу (рис. 13).

Если k_i обозначает число петелек i-го типа, то $V=1+k_1+k_2-k_3-k_4$ и $R=k_1-k_2+k_3-k_4$. Вспомнив, что $V=1$ и $R=0$, получим систему

$$\begin{cases} k_1+k_2-k_3-k_4=0, \\ k_1-k_2+k_3-k_4=0, \end{cases}$$

из которой легко следует, что $k_1=k_4$ и $k_2=k_3$. Как устранить пару петелек 1 и 4 типов или пару петелек

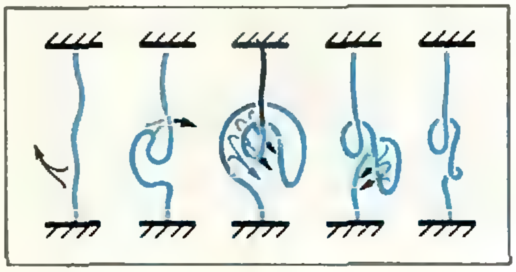


Рис. 12.

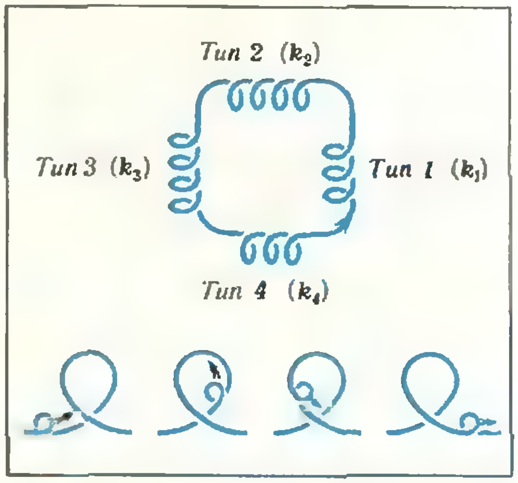


Рис. 13.

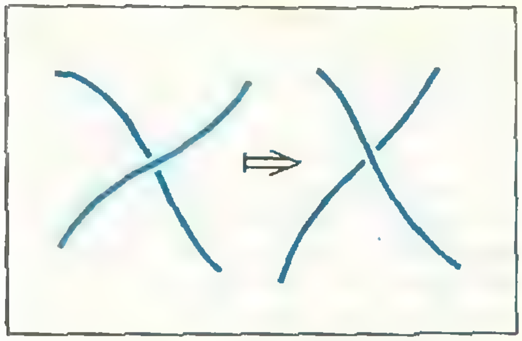


Рис. 14.

2 и 3 типов хорошо видно на рисунках 12 и 3. Остается расправить кольцо в окружность, устраняя петельки попарно. Теорема доказана.

Расправление с самопересечениями

Изменим теперь постановку задачи. Разрешим в процессе расправления контура делать самопересечения — вблизи двойной точки нижний участок кольца протаскивать сквозь верхний в верхнее положение (рис. 14). Такая постановка, конечно, с практической точки зрения довольно противоестественна (чтобы осуществить самопересечение, нужно контур разрезать, а потом опять спаять, что возмутит самого терпеливого экспериментатора). Однако именно к такой постановке сводится формальная математическая задача, изученная американским математиком Х. Уитни в 30-х годах и послужившая отправной точкой настоящей статьи.

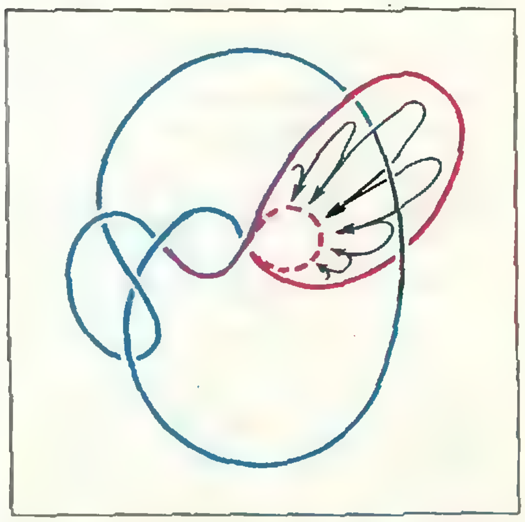


Рис. 15.

Таким образом, нас теперь интересует *расправление контура на плоскости с самопересечениями.* Предлагаем читателю решить следующие задачи:

1. Число k_i является инвариантом расправления с самопересечениями. (Указание. Вспомните способ подсчета V, описанный выше).

2. Число R не является инвариантом для расправления с самопересечениями. (Указание. Проделайте опыт с брючным ремнем, поменяв у одной из двойных точек верхний и нижний участок.)

3. Остаток R' от деления R на 2 является инвариантом расправления с самопересечениями. (Указание. При каждой операции самопересечения число R меняется на два, так как «поставленное число» ± 1 заменяется на ∓ 1.)

4. Число R' является инвариантом расправления (без самопересечений!) контура на плоскости.

Чтобы двигаться дальше, нам потребуется понятие *простой петли:* это участок контура, который начинается в двойной точке, кончается в (той же) двойной точке и сам с собой не пересекается (хотя может пересекать другие участки контура, как на рисунке 15). Теперь предлагаем доказать серию утверждений:

5. У всякого плоского контура есть простая петля.

6. Всякую простую петлю можно (с самопересечениями!) затянуть в маленькую петельку, не трогая остальных участков контура.

7. Всякий контур можно расправить (с самопересечениями) либо в восьмерку, либо в окружность, либо в окружность с конечным числом петелек внутри окружности.

8. Любой контур можно расправить с самопересечениями в любой другой, если к одному из них предварительно добавить несколько (сколько?) петелек.

9. (Теорема Уитни.) Контур с инвариантом V_1 расправляется с самопересечениями в контур с инвариантом V_2 тогда и только тогда, когда $V_1 = V_2$.

В заключение еще три задачи, связанные с первоначальной постановкой (расправлением без самопересечений).

10. Для каждой пары целых чисел m, n ($m > 0$) с нечетной суммой постройте контур с инвариантами $V = m$, $R = n$. Почему не существует контура с инвариантами $V = 1$, $R = 1$?

11. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Уитни для расправления без самопересечений.

12. Докажите, что любой контур на сфере расправляется (без самопересечений) либо в окружность, либо в восьмерку.

Сирена Зеебека

И. Д. ЖИЖИЛКИН

Наверное, вам приходилось когда-нибудь слышать резкий звук сирены машины скорой помощи, спешащей к тяжелобольному, или мощный гул сирены, установленной на маяке и предупреждающей об опасности бороздящие открытое море корабли, или какой-то еще аналогичный сигнальный гудок.

Может быть, не случайно источник этих сильных и потому далеко слышимых звуков назвали сиреной. В древнегреческой мифологии сирены — это полуптицы-полуженщины, своим пением завлекавшие моряков в опасные и гибельные места. Впрочем, это уже выходит за рамки темы данной статьи.

Существует много различных типов сирен. Например — механические сирены, в которых используется прерывание воздушной струи. Одна из наиболее простых была изобретена немецким физиком Томасом Иоганном Зеебеком, жившим с 1770 по 1831 годы. (Обычно имя Зеебека связывают с открытым им явлением термоэлектричества, но любопытно, что Зеебек был первым, кто предложил использовать железные опилки для определения формы магнитных линий и для их непосредственного наблюдения.)

Как устроена такая сирена и можно ли ее сделать самостоятельно — вот о чем пойдет речь в статье, написанной учеником 9 класса 147-ой московской школы Игорем Жижилкиным.

Сирену Зеебека можно сделать, используя... домашний пылесос и соковыжималку.

Из плотного картона надо вырезать диск диаметром 400—600 мм и проделать в нем отверстия диаметром около 10 мм. (Отверстия удобнее всего пробивать с помощью металлической трубки, у которой напильником заостряют края.) Отверстия располагают на равных расстояниях друг от друга по концентрическим окружностям так, чтобы расстояния между отверстиями были больше их диаметра.

С соковыжималки надо снять нож и прочее оборудование и на вал надеть изготовленный круг с отверстиями, закрепив его зажимным винтом.

На шланг пылесоса нужно сделать насадку такую, чтобы ее выходное отверстие имело диаметр также около 10 мм.

Включив соковыжималку в сеть, направим струю воздуха из пылесоса перпендикулярно диску с отверстиями. Раздастся резкий вой. (Вот почему опыты с сиреной надо проводить только с согласия окружающих!) Высоту звука можно изменять, направляя струю воздуха на отверстия различных концентрических окружностей.

Почему же звучит сирена? Ответить на этот вопрос можно так. Если быстро вращать диск с отверстиями и продувать через эти отверстия воздух, то позади отверстий струя будет прерывистой, представляя собой чередующиеся друг с другом сжатия и разрежения. Они и вызывают звук определенной высоты.

Нетрудно сообразить, что высоту тона можно рассчитать заранее, для этого достаточно умножить частоту вращения вашего круга (о чем можно прочитать в инструкции к соковыжималке) на число отверстий.

Советуем вам проделать предлагаемые эксперименты и самостоятельно убедиться во всем, сказанном выше.

Обратные тригонометрические функции

Кандидат физико-математических наук
К. Л. САМАРОВ,
кандидат физико-математических наук
М. И. ШАБУНИН

Напомним*), что если X — область определения, а Y — область значений функции f, то для каждого $x \in X$ существует единственное $y \in Y$ такое, что $f(x)=y$.

Нередко приходится по заданному значению $y \in Y$ искать соответствующее ему значение аргумента x, то есть решать уравнение $f(x)=y$ относительно x. Это уравнение может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много решений.

Например, в случае функции $y=x^2$ соответствующее уравнение для каждого $y>0$ имеет два решения. В случае функции $y=\sin x$ соответствующее уравнение для каждого $y \in [-1;\ 1]$ имеет бесконечно много решений.

Легко также привести примеры функций, для которых уравнение $f(x)=y$ однозначно разрешимо при каждом заданном y из области значений функции f. Например, этим свойством обладают функция $y=2x+3$ и функция $y=x^2$, рассматриваемая на луче $[0;\ +\infty[$.

Функция f (с областью определения X и областью значений Y) называется *обратимой*, если она принимает каждое свое значение только при одном значении аргумента. Для такой функции уравнение $f(x)=y$ при любом $y \in Y$ можно однозначно разрешить относительно x, то есть каждому $y \in Y$ соответствует единственное $x \in X$. Это соответствие определяет функцию g, *обратную* к функции f.

Отметим, что

а) если g — функция, обратная к функции f, то и функция f — обратная к функции g; области определения и области значений взаимно-обратных функций f и g связаны условиями

$$D(g)=E(f),$$
$$E(g)=D(f),$$

то есть область определения функции g совпадает с областью значений функции f и наоборот;

б) для любых $x_0 \in D(f)$, $y_0 \in D(g)$ справедливо утверждение

$$f(x_0)=y_0 \Leftrightarrow g(y_0)=x_0$$

или

$$g(f(x_0))=x_0,$$
$$f(g(y_0))=y_0;$$

в) графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$;

г) функция, обратная к нечетной функции, тоже нечетна;

д) любая монотонная функция обратима, причем функция, обратная к возрастающей (убывающей), — возрастающая (убывающая).

* * *

Функция $\sin x$, как и любая периодическая функция, не обратима. В то же время, если ограничить ее область определения любым промежутком монотонности, полученная функция будет обратимой. В частности, функция $\sin x$ монотонна и обратима на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция, обратная к функции $\sin x$, рассмотренной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, называется *арксинусом*; значение этой функции в точке a обозначается $\arcsin a$ (рис. 1). Из определения арксинуса следует, что арксинус числа a есть число, заключенное между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен a.

---

*) В ныне действующих школьных учебниках соответствующий материал изложен в пп. 21—22 учебника «Алгебра 8» и в п. 51 пособия «Алгебра и начала анализа 10». (*Прим. редакции.*)

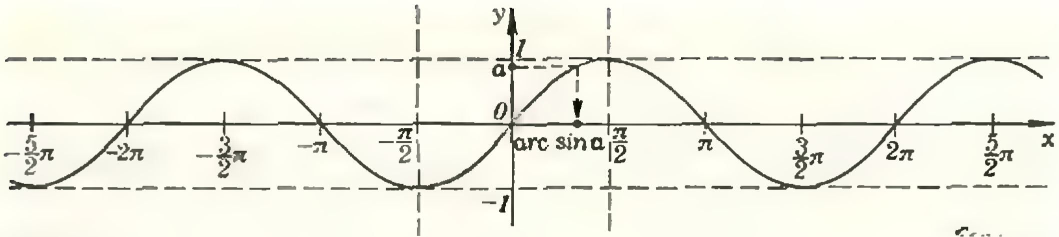


Рис. 1.

Подчеркнем, что функция $\arcsin x$ не является обратной к $\sin x$ — функция $\sin x$, не будучи обратимой, не имеет обратной. Функция $\arcsin x$ является обратной к «функции $\sin x$, рассмотренной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$», или, как еще говорят в математике, к *сужению функции* $\sin x$ *на отрезок* $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

В силу свойств взаимно-обратных функций, перечисленных в начале статьи,

$$D(\arcsin) = [-1;\ 1],$$
$$E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$$

и для любых $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, $y_0 \in [-1;\ 1]$ справедливо утверждение

$$\sin x_0 = y_0 \Leftrightarrow \arcsin y_0 = x_0$$

или

$$\arcsin(\sin x_0) = x_0, \qquad (1)$$
$$\sin(\arcsin y_0) = y_0. \qquad (2)$$

Подчеркнем еще раз, что равенство (2) справедливо «всегда», то есть для любого $y_0 \in [-1;\ 1]$, а равенство (1) выполняется не для всех $x_0 \in \mathbb{R}$, а только при $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

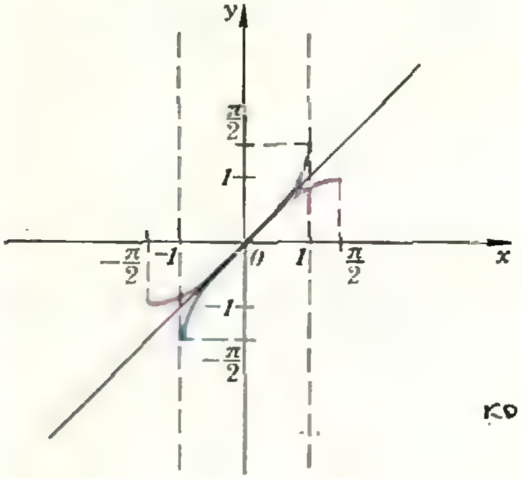


Рис. 2.

Иначе говоря, справедливо утверждение

$$\arcsin a = b \Rightarrow \sin b = a,$$

утверждение же

$$\sin a = b \Rightarrow \arcsin b = a$$

справедливо лишь при $a \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

График арксинуса получается по общему правилу — симметрией соответствующей части графика синуса относительно прямой $y = x$ (рис. 2).

Поскольку синус — нечетная функция, нечетен и арксинус:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \qquad (3)$$

Тождество (3), как и любое равенство, в которое входит арксинус, имеет место только тогда, когда аргумент арксинуса лежит на $[-1;\ 1]$.

Поскольку синус возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, арксинус возрастает на $[-1;\ 1]$. Арксинус — обратимая функция, обратной к ней является «синус, рассмотренный на $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$».

* * *

Перейдем к арккосинусу. Функция $\cos x$ не обратима, но, если ограничить ее область определения любым промежутком монотонности, полученная функция будет обратимой.

Функция, обратная к функции $\cos x$, рассмотренной на отрезке $[0;\ \pi]$, называется ***арккосинусом***; значение этой функции в точке a обозначается $\arccos a$ (рис. 3). Арккосинус числа a есть число, заключенное между 0 и π, косинус которого равен a.

Из свойств взаимно-обратных функций следует, что

$$D(\arccos) = [-1;\ 1],$$
$$E(\arccos) = [0;\ \pi]$$

и для любых $x_0 \in [0;\ \pi]$, $y_0 \in [-1;\ 1]$ справедливо утверждение

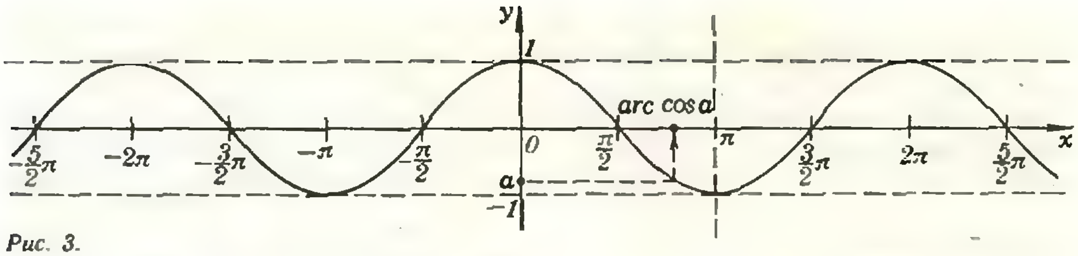


Рис. 3.

$$\cos x_0 = y_0 \Leftrightarrow \arccos y_0 = x_0$$

или

$$\arccos(\cos x_0) = x_0,$$
$$\cos(\arccos y_0) = y_0.$$

Другими словами,

$$\arccos a = b \Rightarrow \cos b = a,$$
$$\cos a = b \text{ и } 0 \leqslant a \leqslant \pi \Rightarrow \arccos b = a.$$

График арккосинуса получается симметрией соответствующей части графика косинуса относительно прямой $y = x$ (рис. 4).

Аналогом равенства (3) является тождество

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad (4)$$

справедливое только при $-1 \leqslant x \leqslant 1$; мы его докажем ниже.

Арккосинус убывает на $[-1, 1]$. Обратной к функции $\arccos x$ является «косинус, рассмотренный на $[0; \pi]$».

Арксинус и арккосинус связаны тождеством

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

которое мы докажем ниже. Впрочем, при $0 < x < 1$ $\arcsin x$ и $\arccos x$ — углы прямоугольного треугольника; равенство (5) в этом случае очевидно.

* * *

Наконец — об арктангенсе.

Функция, обратная к функции $\operatorname{tg} x$, рассмотренной на интервале $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, называется *арктангенсом*; значение этой функции в точке a обозначается $\operatorname{arctg} a$ (рис. 5). Арктангенс числа a есть число, заключенное между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен a.

Из свойств взаимно-обратных функций следует, что

$$D(\operatorname{arctg}) = \mathrm{R},$$
$$E(\operatorname{arctg}) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

и для любых $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $y_0 \in \mathrm{R}$ справедливо утверждение

$$\operatorname{tg} x_0 = y_0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} y_0 = x_0$$

или

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x_0) = x_0,$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y_0) = y_0.$$

Иначе говоря,

$$\operatorname{arctg} a = b \Rightarrow \operatorname{tg} b = a,$$
$$\operatorname{tg} a = b \text{ и } -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arctg} b = a.$$

Арктангенс — нечетная функция ($\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$), возраста-

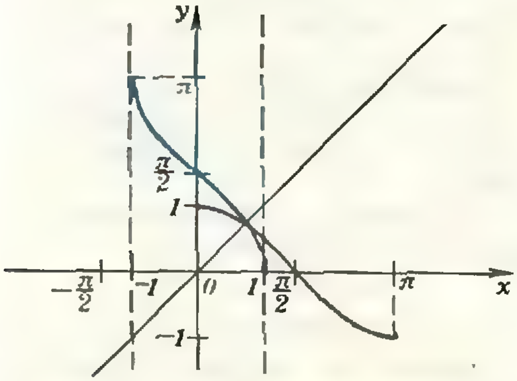


Рис. 4.

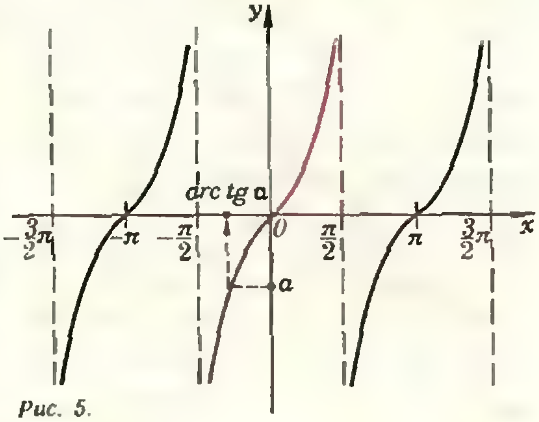


Рис. 5.

ющая на всей числовой прямой. График арктангенса изображен на рисунке 6.

* * *

Тождества с «аркусами» доказываются обычно следующим приемом: во-первых, вычисляется значение какой-нибудь тригонометрической функции φ (φ — это синус, косинус или тангенс) от обеих частей доказываемого тождества

$$A=B$$

и проверяется, что $\varphi(A)=\varphi(B)$, и, во-вторых, устанавливается, что A и B расположены на таком промежутке, где выбранная функция φ монотонна; тогда из равенства $\varphi(A)=\varphi(B)$ вытекает, что $A=B$.

Пример 1. Докажем, что для всех $x\in[-1;1]$ верно (4). Посчитаем косинус от обеих частей равенства (4):

$$\cos(\arccos(-x))=-x,$$

$$\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x.$$

Итак, $\cos(\arccos(-x))=\cos(\pi-\arccos x)$. По определению арккосинуса

$$0\leqslant\arccos(-x)\leqslant\pi.$$

Из неравенства $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$ вытекает, что

$$0\leqslant\pi-\arccos x\leqslant\pi.$$

На $[0;\pi]$ косинус монотонен. Следовательно,

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

Если бы мы в качестве вычисляемой функции выбрали синус, то, конечно, тоже получили бы совпадение значений:

$$\sin(\arccos(-x))=\sqrt{1-\cos^2(\arccos(-x))}=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2},$$

$$\sin(\pi-\arccos x)=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\sqrt{1-x^2}$$

(в обоих случаях перед корнем пишется «плюс», так как $0\leqslant\arccos(-x)\leqslant\pi$ и $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$, а на $[0;\pi]$ синус неотрицателен), но из равенства $\sin(\arccos(-x))=\sin(\pi-\arccos x)$ не следует (4), так как на $[0;\pi]$ синус не монотонен.

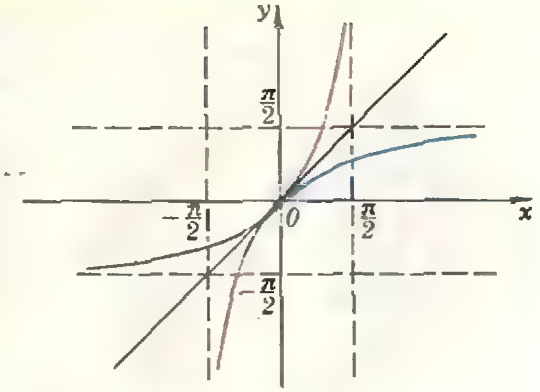


Рис. 6.

Пример 2. Докажем, что для всех $x\in[-1;1]$ верно тождество (5). Докажем мы его в равносильном виде

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

По определению арккосинуса

$$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,$$

откуда вытекает, что

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Значит, левая и правая части доказываемого равенства при всех допустимых значениях x принадлежат $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Вычислив синус от обеих его частей, получим

$$\sin(\arcsin x)=x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$$

На $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ синус монотонен. Следовательно,

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

Пример 3. Докажем, что для $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$

$$\arcsin(\sin x)=\pi-x.$$

С одной стороны,

$$\sin(\arcsin(\sin x))=\sin x,$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x.$$

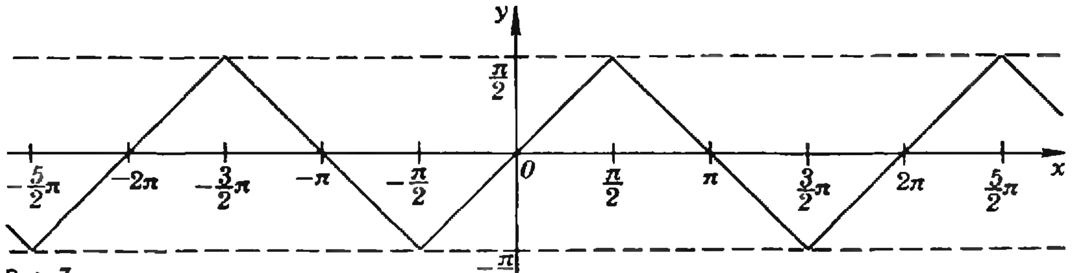


Рис. 7.

С другой стороны,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(\sin x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Из неравенства $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ следует, что

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

На $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ синус монотонен. Значит, $\arcsin(\sin x) = \pi - x$. Итак, $\arcsin(\sin x) =$

$$= \begin{cases} x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{если } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Поскольку $\arcsin(\sin x)$ — периодическая функция с периодом 2π (почему?) и отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ имеет длину 2π, мы можем построить ее график (рис. 7).

* * *

Задачи на вычисления с «аркусами» решаются аналогично.

Пример 4. Вычислим $A = \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} - \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$.

Прежде всего, $A = \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} - \left(\pi - \arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} + \arccos\frac{11}{\sqrt{130}} - \pi$. Оценим теперь число $B = \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} + \arccos\frac{11}{\sqrt{130}}$. Поскольку $\frac{4}{\sqrt{65}} > 0$ и $\frac{11}{\sqrt{130}} > 0$,

$$\begin{array}{c} 0 < \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \arccos\frac{11}{\sqrt{130}} < \frac{\pi}{2} \\ \hline 0 < \quad B \quad < \pi \end{array}$$

Так как на $[0; \pi]$ синус не монотонен, а косинус монотонен, найдем $\cos B$: $\cos B =$

$$= \cos\left(\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}} + \arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right) =$$

$$= \cos\left(\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}\right) \times$$

$$\times \cos\left(\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right) -$$

$$- \sin\left(\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}\right) \times$$

$$\times \sin\left(\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right) =$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)^2} \cdot \frac{11}{\sqrt{130}} -$$

$$- \frac{4}{\sqrt{65}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из соотношений $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 < B < \pi$ следует, что $B = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит, $A = B - \pi = -\frac{3}{4}\pi$.

Пример 5. Сравним числа $\arcsin\frac{2}{5}$ и $\arccos\frac{2}{5}$. Поскольку $\frac{2}{5} > 0$,

$$0 < \arcsin\frac{2}{5} < \frac{\pi}{2}$$

и

$$0 < \arccos\frac{2}{5} < \frac{\pi}{2}.$$

(Окончание см. на с. 49)

Квант для младших школьников

Задачи

1. Мой знакомый Саша однажды мне сказал: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году мне исполнится 13 лет». Может ли такое быть?

◆

2. Две высоты треугольника не меньше сторон, на которые они опущены. Найти углы треугольника.

◆

3. Сломаем пополам спичку. Одну половинку переломим еще раз. Один из получившихся кусочков снова попытаемся переломить пополам. Почему с каждым разом ломать спичку становится все труднее?

◆

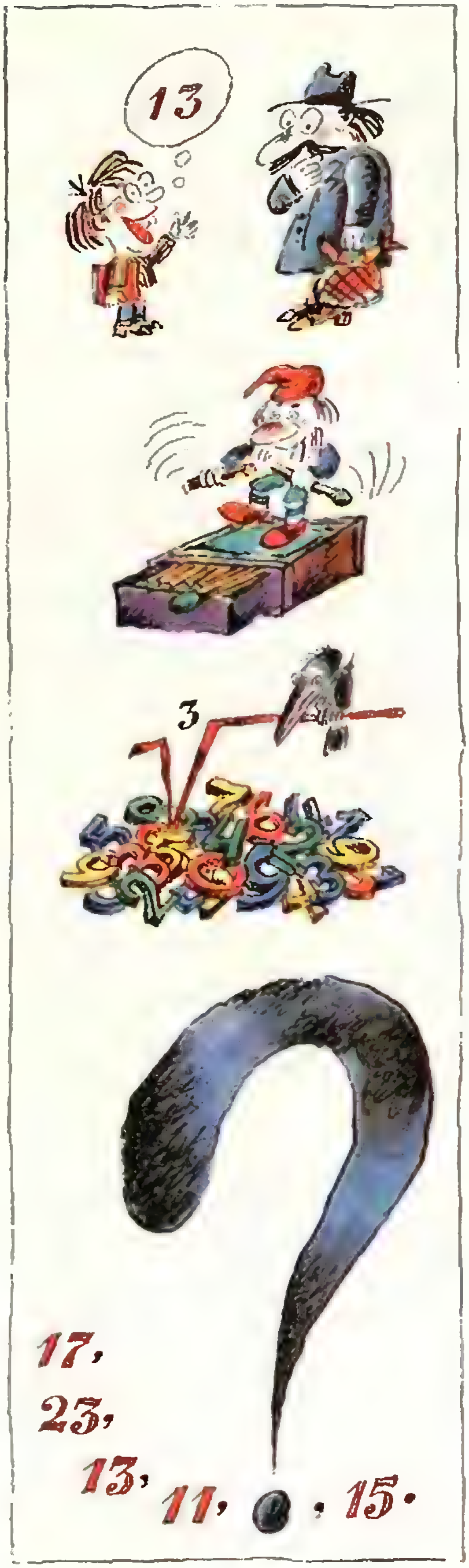
4. Найдите все пятизначные числа, равные кубу числа, образованного двумя их последними цифрами.

◆

5. Какое число нужно поставить вместо знака «?» в последовательности 17, 23, 13, 11, ?, 15?

◆

Эти задачи нам предложили
С. М. Коршунов, А. П. Савин, С. Р. Сефибеков, С. М. Ушницкий.



Магистр Игры в гостях у «Кванта»

Кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Мы пригласили в редакцию Магистра Игры*), известного специалиста по теории игр — он знает много старинных игр и придумывает новые.

— *Уважаемый Магистр, расскажите нам, пожалуйста, об играх.*

Магистр. Начнем с простейшей игры, которую мы будем называть.

Игра для начинающих. На столе лежат 66 бусинок. Первый игрок может взять себе от 1 до 9 бусинок, второй игрок берет от 1 до 9 бусинок из оставшихся и так далее. Выигрывает тот, кто заберет последние бусинки.

Игра названа «Игрой для начинающих» — в этом есть двоякий смысл. Во-первых, игра простая и на ее примере удобно показать способы рассуждений начинающим математикам. Во-вторых, в этой игре, если правильно играть, выигрывает начинающий игрок — тот, кто ходит первым.

— *Как Вы будете играть, если Вы начинаете?*

Магистр. Я возьму 6 бусинок — останется 60. Как бы ни пошел противник, следующим ходом я могу сделать так, что останется 50 бусинок, затем — 40, затем 30 и так далее, пока не останется 0 бусинок. Я выиграл.

Если же начну игру не я, то выиграет противник, знающий описанный способ игры. Поэтому двум магистрам достаточно бросить монетку и

---

*) Магистр Игры — персонаж романа Германа Гессе «Игра в бисер» (М., «Художественная литература», 1969).

выяснить, кто начнет игру. После этого они могут и не играть — и так ясно, кто победит.

— Что делать, если противник начал первым игру, но не знает, как правильно играть?

Магистр. Нам же известны «выигрышные позиции» — когда число бусинок, которое остается после хода, кратно 10. Вот и нужно, как только представится возможность, перейти в такую позицию.

— Как Вы разгадали секрет этой игры?

Магистр. Я начал рассуждать от конца игры, а не от ее начала. Допустим, я выиграл, то есть взял последние бусинки. Я мог это сделать только в том случае, если перед этим противник оставил на столе от 1 до 9 бусинок. Чтобы заставить его это сделать, я должен был оставить на столе после своего предыдущего хода 10 бусинок. Это выигрышная позиция. Точно так же следующая (на самом деле — предыдущая) выигрышная позиция — оставить 20 бусинок. Выигрышные позиции дальше периодически повторяются. Самая последняя, то есть самая первая выигрышная позиция — оставить на столе 60 бусинок. Мы знаем, что попасть в нее можно первым ходом — забрав 6 бусинок.

Как видите, мои секреты очень просты: рассуждать от конца игры и находить выигрышные позиции. Ну и, конечно, подмечать, как они периодически повторяются.

— Спасибо, Магистр. А не предложите ли Вы нам другие игры?

Магистр. Рассмотренную игру очень легко обобщить: давайте, считать, что в начале на столе лежит N бусинок и что каждый игрок может брать от 1 до p бусинок. При конкретных N и p мы получаем различные конкретные игры. В частности, при $p=9$, $N=66$ — это наша игра для начинающих.

— А есть ли правило, которое годилось бы для любой такой игры?

Магистр. Да, есть. Если число N не делится на $p+1$, при правильной игре начинающий выиграет. Он должен сначала взять столько бусинок, чтобы оставшееся число делилось на $p+1$ (то есть взять r бусинок, где r — остаток от деления N на $p+1$), а затем применять эту тактику и дальше.

Если же число N делится на $p+1$ (скажем, $N=k\,(p+1)$), то выигрывает игрок, который ходит вторым. Как бы ни начал его противник, он сможет все время попадать в выигрышные позиции: $(k-1)(p+1)$, $(k-2)(p+1)$ и т. д.

— Можно ли еще как-нибудь изменить «Игру для начинающих»?

Магистр. Да, например, есть игра «Побеждает чет». В этой игре два игрока тоже берут поочередно от 1 до p бусинок из кучки, в которой в начале имеется нечетное число бусинок. Побеждает на этот раз тот, кто в итоге, когда стол опустеет, наберет четное число бусинок. Эта игра гораздо интереснее — выиграть в ней значительно сложнее.

— Правда ли, что тем не менее Вы и в ней всегда выигрываете?

Магистр. Если мне предоставлено право выбирать, начинаю ли я игру или хожу вторым, то я всегда выиграю. Я знаю теорему — в играх такого типа*), как эти, у одного из игроков есть выигрышная стратегия. Этот замечательный факт теории игр придал мне уверенность, и, готовясь к игре, я нашел секрет выигрыша**).

Приведу по этому поводу стих моего приятеля Магистра Игры Иозефа Кнехта:

Ты пишешь на листе, и смысл означен
И закреплен блужданьями пера.
Для следующего до конца прозрачен:
На правилах покоится игра***)

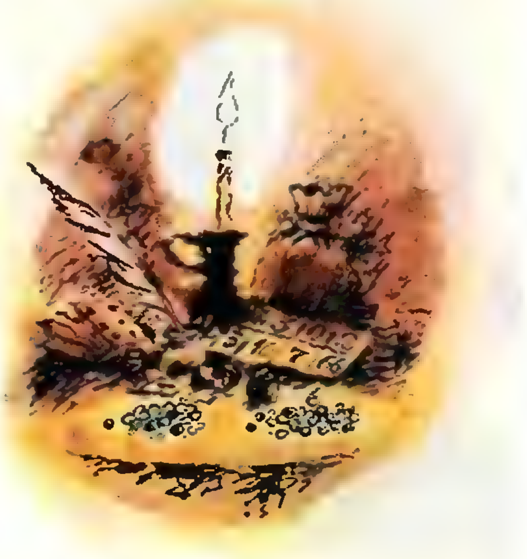
— А есть ли еще какие-нибудь интересные подходы к играм?

Магистр. Давайте подумаем еще над одной игрой, очень похожей на «Игру для начинающих»:

Игра с двумя кучками бусинок. На столе лежат две кучки бусинок, в каждой по 66 бусинок. Каждым ходом можно из какой-нибудь одной кучки взять себе от 1 до 9 бусинок. Выигрывает тот, кто заберет последние бусинки.

— Наверное, тут тоже надо думать от конца игры и в каждой кучке оставлять число, кратное 10.

Магистр. Ничего подобного! Разгадка этой игры в симметрии. Выиграет тот, кто пойдет вторым. Допустим, что начинаете Вы и берете сколько-то бусинок из одной кучки. Тогда я беру столько же бусинок из другой кучки. На каждый Ваш ход у меня есть ответный ход, и поэтому я выиграю.



---

*) Речь идет об играх, которые специалистами называются «конечные игры без ничьих с полной информацией». О них можно прочитать в книге Е. С. Вентцель «Элементы теории игр» (М., «Наука», 1959) или в «Кванте», 1981, № 1, с. 12.

**) Этот секрет разгадали также ребята из Малой Академии наук Крыма. «Квант» надеется вскоре вернуться к этой игре.

***) Из упомянутой книги Германа Гессе «Игра в бисер» (перевод стихов С. Аверинцева).

задачник Кванта

Задачи

М796—М800; Ф808—Ф812

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 июня 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М796, М797» или «Ф808». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М796. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$ так, что $|AP|:|BP|:|CP|=1:2:3$. Найдите $\widehat{APB}$.

Л. Д. Курляндчик

М797*. Известно, что последними цифрами квадратов целых чисел могут быть лишь цифры 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Верно ли, что перед последней цифрой в них может встретиться любая группа цифр, то есть что для любого набора из n цифр a_1, a_2, ..., a_n можно найти целое число, квадрат которого оканчивается цифрами $a_1a_2...a_nb$ (где b — одна из перечисленных выше цифр)?

Д. Б. Фукс

М798*. На окружности отметили $4k$ точек и раскрасили их попеременно в красный и синий цвета; затем $2k$ красных точек произвольным образом соединили попарно k красными отрезками, а $2k$ синих — k синими отрезками (никакие три отрезка не пересекаются в одной точке). Докажите, что найдется по крайней мере k точек пересечения красных отрезков с синими.

С. В. Фомин

М799. а) Найдите одно решение уравнения $3^{x+1}+100=7^{x-1}$ и докажите, что у него нет других решений.
б)* Найдите два решения уравнения

$$3^x+3^{x^2}=2^x+4^{x^2}$$

и докажите, что у него нет других решений.

С. С. Валландер

М800*. а) На плоскости отмечены все точки с целочисленными координатами — узлы квадратной решетки, и среди них выделен один «начальный» узел O. Для каждого из остальных узлов P проведена прямая, относительно которой узлы O и P симметричны, — серединный перпендикуляр к отрезку OP. Проведенные прямые разбивают плоскость на мелкие части (треугольники и выпуклые многоугольники). Припишем каждой из них натуральное число —

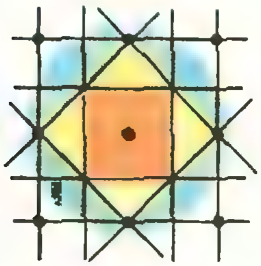


Рис. 1.

ранг — по следующему правилу: часть, содержащая точку O (она имеет форму квадрата), получает ранг 1, части, граничащие с ней по стороне, — ранг 2, части, граничащие с ними по стороне (и отличные от уже рассмотренных) — ранг 3 и т. д. (рис. 1). Докажите, что суммарная площадь всех частей ранга r одна и та же при всех натуральных r.

б) Верно ли аналогичное утверждение для произвольной решетки из параллелограммов (в частности, из ромбов с углом в 60°)? Для решетки из правильных шестиугольников?
в) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для кубической решетки в пространстве.

А. Б. Гончаров

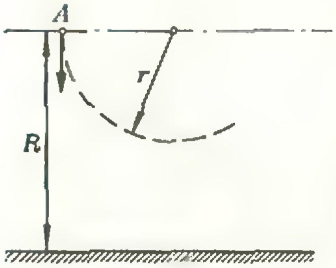


Рис. 2.

Ф808. Моторная лодка, находящаяся в точке A на расстоянии R от берега озера, начинает разворот, двигаясь со скоростью $v=18$ км/ч по окружности радиуса $r=R/2$; в начальный момент скорость лодки направлена к берегу (рис. 2). Волна от лодки дошла до берега через время $t=3$ мин после начала разворота. Скорость распространения волн от лодки по поверхности воды равна $u=9$ км/ч. Найти расстояние R.

А. И. Буздин

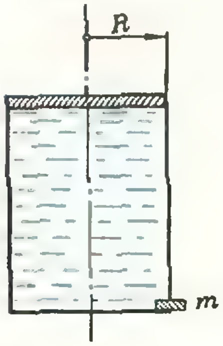


Рис. 3.

Ф809. Цилиндрический бак наполнен доверху жидкостью плотности ρ. Сверху бак плотно закрыт крышкой радиуса R. Снизу в баке имеется отверстие площади s, закрытое пробкой массы m (рис. 3). Чтобы вытащить пробку из бака, нужно приложить силу f. С какой максимальной угловой скоростью можно вращать бак вокруг вертикальной оси так, чтобы пробка не вылетала?

В. И. Комов

Ф810. Имеется нагреватель с рабочей температурой $t_н=700°C$. Температура окружающей среды — $t_0=20°C$. Какое минимальное количество тепла необходимо забрать у нагревателя, чтобы испарить $m=3$ кг воды, нагретой до температуры кипения ($t_1=100°C$)? Удельная теплота парообразования воды $r=2{,}26$ МДж/кг.

О. С. Рабинович

Ф811. В обычной схеме однополупериодного выпрямителя (рис. 4) $C=1000$ мкФ, $R=500$ Ом. Частота сети $f=50$ Гц. Считая диод идеальным, найти:

1) величину коэффициента пульсаций напряжения $k=\frac{\Delta U}{U}$ на резисторе R;

2) * во сколько раз уменьшится коэффициент k, если последовательно с резистором включить катушку индуктивности $L=100$ Гн?

А. Р. Зильберман

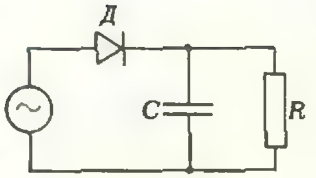


Рис. 4.

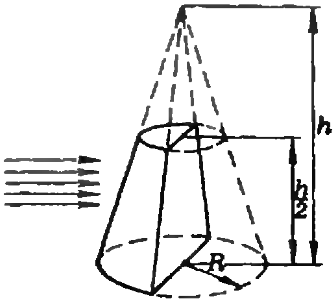


Рис. 5.

Ф812. Коническая линза представляет собой половину усеченного стеклянного конуса. Показатель преломления стекла n; размеры линзы указаны на рисунке 5. На линзу падает пучок параллельных лучей, перпендикулярных плоской части боковой поверхности линзы. Под каким углом к оси пучка надо расположить за линзой экран, чтобы изображение пучка на экране было прямой линией?

А. А. Лапидес

Problems

M796—M800; P808—P812

We have publishing Kvant's contest problems every month from the first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that June 30th 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1 «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write "NEW PROBLEMS IN PHYSICS (or MATHEMATICS")."

M796. For the point P inside the square $ABCD$, $|AP| : |BP| : |CP| = 1:2:3$. Find $\widehat{APB}$.

L. D. Kurliandchik

M797*. It is well known that the last digit of the square of an integer is one of the following: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Is it true that any sequence of digits may appear before the last one, i. e. for any sequence of n digits a_1, a_2, ..., a_n there exists an integer whose square ends with the digits $a_1a_2...a_nb$, where b is one of the digits listed above?

D. B. Fuchs

M798*. $4k$ points on the circle are painted alternatively red and blue; then the $2k$ red points are joined pairwise by k red line segments, the $2k$ blue points — by k blue segments, no three lines intersecting at one point. Prove that there are at least k intersection points of red line segments with blue ones.

S. V. Fomin

M799. a) Find a solution of the equation $3^{x+1}+100=7^{x-1}$ and prove it has no other solutions.
b)* Find two solutions of the equation

$$3^x+3^{x^2}=2^x+4^{x^2}$$

and prove it has no others.

S. S. Vallander

M800*. a) The nodes of a square lattice are all the points of the plane both coordinates of which are integers; one of the nodes is the origin O. For each of the other nodes P construct the line in which O and P are symmetric, i. e. the perpendicular to the midpoint of OP. These lines split the plane into little parts (triangles and convex polygons). To each of them assign an integer (its rank) as follows: the part containing O (which is a square) is of rank 1, the parts which have a common side with it are of rank 2, the remaining parts which have a common side with parts of rank 2 are of rank 3, etc. (see figure Рис. 1). Prove that the total area of all parts of rank r is the same for all positive integers r.
b) Is a similar statement true for an arbitrary lattice consisting of parallelograms (in particular, of rhombuses with 60° angles)? For a lattice consisting of regular hexagons?

c) State and prove a similar statement for cubic lattices in space.

A. B. Goncharov

P808. A motorboat begins to turn from point A, located at the distance R from the shore, moving with velocity $v=18$ km/h along a circle of radius $r=R/2$; at the initial moment the boat is directed toward the shore (see figure Рис. 2). The wave from the boat reaches the shore in time $t=3$ min after the boat began to turn. The velocity of wave propagation on the water surface is $u=9$ km/h. Find the distance R.

A. I. Buzdin

P809. A cylindrical container is filled with liquid of density ρ and tightly closed from above by a cover of radius R. In the bottom of the container there is a hole of area s, closed by a cork of mass m (see figure Рис. 3). In order to pull the cork out, the force f must be applied. With what maximal angular velocity may the container be rotated about its vertical axis before the cork flies out?

V. I. Komov

P810. A heater with working temperature $t_h=700°C$ is placed in an environment where the temperature is $t_0=20°C$. What minimal amount of heat must be taken from the heater in order to evaporate $m=3$kg of water, already heated to the boiling point ($t_1=100°C$)? The specific heat of water vaporization is $r=2.26$ MJ/kg.

O. S. Rabinovich

P811. In the ordinary circuit of a singlehalfperiod rectifier (see figure Рис. 4), we have $C=1000$ мcF, $R=500$ Ohm. The frequency of the power source is $f=50$ Hz. Assuming the diod ideal, determine

1) the magnitude of the tension pulsation coefficient $k=\frac{\Delta U}{U}$ on the resistor R;

2)* how the coefficient k will decrease if an induction coil $L=100$ Hn is connected in series to the resistor?

A. R. Zilberman

P812. A glass lens has the shape of half a truncated cone. The refraction index of glass is n; the measurements of the lens are shown on the figure Рис. 5. A beam of parallel light rays falls on the lens perpendicularly to the flat part of the lateral surface of the lens. What angle between the screen and the beam's axis must be chosen in order to obtain the image of the beam in the form of a straight line?

A. A. Lapides

Решения задач

M780—M785; Ф793—Ф797

M780*. *Дан квадрат K со стороной 100. Пусть L — несамопересекающаяся незамкнутая ломаная, лежащая в K, такая, что для любой точки P границы квадрата K найдется точка ломаной L, расстояние которой от P не больше 1/2. Докажите, что на ломаной найдутся две точки X и Y, расстояние*

Обозначим концы ломаной L через A и B. Двинемся по ломаной из A в B. Пусть C_1 — первая вершина квадрата, к которой мы приблизимся на расстояние, не большее 1/2. Будем двигаться дальше, пока впервые не придем в такую точку M ломаной, которая будет удалено от одной из двух соседних с C_1 вершин на расстояние, не большее 1/2. Назовем эту вершину C_2 ($|MC_2|\leqslant 1/2$), а вторую соседнюю с C_1 вершину — C_3 (рис. 1).

Ломаная L разбивается на два куска — AM и MB. В соответствии с этим представим сторону квадрата C_1C_3

между которыми не более 1, такие, что длина части ломаной, заключенной между ними, не меньше 198.

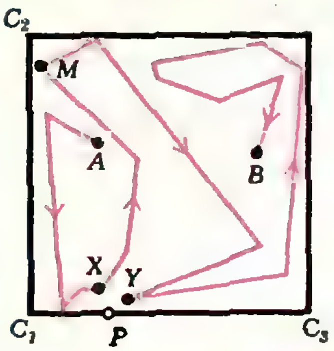


Рис. 1.

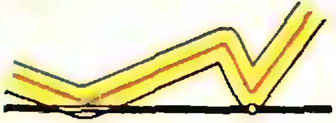


Рис. 2.

М781. *Постройте прямую, параллельную стороне AC данного треугольника ABC и пересекающую его стороны AB и BC в таких точках D и E соответственно, что $|AD|=|BE|$.*

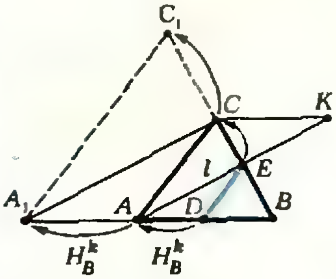


Рис. 1.

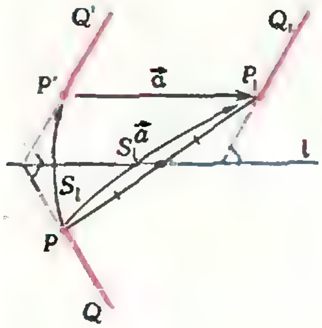


Рис. 2.

как объединение двух множеств: множества U точек, удаленных на расстояние, не большее 1/2, от ломаной AM и множества V точек, удаленных на такое же расстояние от ломаной MB. Эти множества не пусты (U содержит точку C_1, а V — C_3) и каждое из них состоит из отрезков и отдельных точек. (Действительно, множество точек плоскости, удаленных от ломаной на расстояние 1/2, представляет собой «коридор» ширины 1, идущий вдоль ломаной, с закруглениями около ее вершин — см. рис. 2. Ясно, что такой коридор может пересекаться с произвольным отрезком по конечному числу отрезков и отдельных точек.) Легко понять, что множества U и V имеют хотя бы одну общую точку P, ибо в противном случае они не покрывали бы весь отрезок A_1A_3. На ломаной AM найдется точка X, отстоящая от P на расстояние, не большее 1/2; аналогичная точка Y ($|YP|<1/2$) есть и на ломаной MB. Точки X и Y являются искомыми.

В самом деле, расстояние от X до Y не превосходит $|XP|+|YP|<1$. С другой стороны, длина участка ломаной L от X до Y равна сумме длин ломаных XM и MY, то есть не меньше суммы длин отрезков XM и MY. Но $|XM|>|PC_2|-|PX|-|C_2M|>|C_1C_2|-1=99$; аналогично, $|YM|>99$. Следовательно, длина ломаной XY не меньше 198.

А. П. Савин

◆

Из многочисленных решений этой задачи мы выбрали два, показавшиеся нам наиболее поучительными.

Первое решение основано на методе гомотетии. Заметим, что при гомотетии H_B^k с центром B и коэффициентом $k=|AB|:|DB|$ отрезок DE перейдет в AC (рис. 1), так как $(DE)\parallel(AC)$; при этом $\triangle ABC$ перейдет в $\triangle A_1BC_1$. Ясно, что $|A_1A|=|BC|$ и что прямые A_1C и AE параллельны. Поэтому для построения отрезка DE достаточно отложить на луче BA отрезок $|AA_1|$, равный $|BC|$, (см. рис. 1) и провести через точку A прямую l, параллельную A_1C. Точка ее пересечения со стороной BC и есть искомая точка E. (Вершина C_1 фактически нам не понадобилась). Это построение можно слегка упростить: очевидно, что прямая $l=(AE)$ пересекается с прямой, параллельной AB и проходящей через C, в точке K, удаленной от вершины C на расстояние $|CK|=|AA_1|=|CB|$ (см. рис. 1). А построить точку K совсем легко.

Второе решение использует *перемещения*, точнее, перемещение определенного типа — скользящую симметрию. *Скользящей симметрией* $S_l^{\vec{a}}$ с осью l и вектором $\vec{a}$ называется композиция осевой симметрии S_l и параллельного переноса на вектор $\vec{a}$, при этом вектор $\vec{a}$ должен быть параллелен оси (рис. 2); в частности, при $\vec{a}=\vec{0}$ скользящая симметрия превращается в обычную осевую. Очевидно, что середина любого отрезка PP_1, где P_1 — образ точки P при скользящей симметрии, лежит на ее оси (см. рис. 2). Кроме того, легко видеть, что для любых двух лучей PQ и P_1Q_1 можно указать (единственную) скользящую симметрию, переводящую первый луч во второй: ось l этой симметрии проходит через середину отрезка PP_1 и образует равные углы с данными лучами *) (см. рис. 2), а вектор равен $\overrightarrow{P'P_1}$, где $P'=S_l(P)$.

Рассмотрим теперь скользящую симметрию, переводящую луч AB в луч BC. Поскольку $|AD|=|BE|$, она переведет точку D в точку E. Поэтому середина F отрезка DE лежит на оси этой симметрии. С другой стороны, точка F лежит на медиане BM треугольника ABC, так как

---

*) Точнее, ось l параллельна биссектрисе угла, стороны которого сонаправлены с лучами PQ и P_1Q_1.

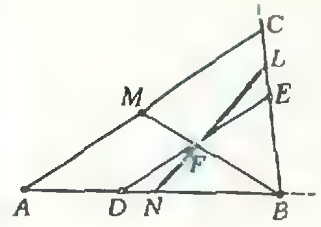


Рис. 3.

$(DE)\parallel(AC)$. Отсюда вытекает следующее построение (рис. 3): находим середину N стороны AB, откладываем на стороне BC отрезок BL, равный BN, и проводим отрезок DE параллельно AC через точку F пересечения отрезка LN и медианы BM (прямая NL служит осью скользящей симметрии, переводящей $[AB)$ в $[BC)$, потому что N — середина отрезка AB и углы BNL и BLN равны по величине, как углы при основании равнобедренного треугольника BLN).

Отметим, что скользящую симметрию в этом решении можно было бы заменить на поворот, переводящий луч AB в луч BC. Подумайте, как найти центр и угол такого поворота и использовать их для построения отрезка DE.

В. Н. Дубровский

М782. *Докажите, что если сумма двух чисел равна 30030, то их произведение не делится на 30030.*

◆

Разложим число $a=30030$ на простые множители:

$$a=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13.$$

Предположим, что произведение двух натуральных чисел x и $a-x$, дающих в сумме a, делится на a:

$$x(a-x)=ak \quad (k \text{ — натуральное}).$$

Тогда $xa-x^2=ak$, то есть $x^2=a(x-k)$ делится на a. Следовательно (по основной теореме арифметики — о единственности разложения числа на простые множители), число x должно делиться на каждый простой множитель числа a, а значит, и на их произведение. Но раз все они входят в a в первой степени, то $x\geqslant a$, то есть $a-x\leqslant0$; это противоречит предположению, что число $a-x$, как и x, — натуральное.

Из нашего решения видно, что утверждение задачи будет выполнено для любого числа a, в разложение которого все простые входят в первой степени (такие числа a называют «свободными от квадратов»). Нетрудно видеть, что оно справедливо только для таких чисел: если a делится на какой-либо квадрат $p^2>1$, то можно взять $x=a/p$ — при этом произведение $x(a-x)=a(a/p-a/p^2)$ будет делиться на a.

Н. Б. Васильев

М783. *а) При каком наибольшем n система неравенств*

$$1<x<2,$$
$$2<x^2<3,$$
$$3<x^3<4,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$n<x^n<n+1$$

имеет решения?

б) Для каких n существуют такие две прогрессии — арифметическая a_1, a_2, a_3, … и геометрическая b_1, b_2, b_3, …, что

$$a_1<b_1<a_2<b_2<a_3<\ldots$$
$$\ldots<a_n<b_n<a_{n+1}?$$

◆

а) Ответ: при $n=4$. Покажем, что $n\leqslant4$. Действительно, если $n\geqslant5$, то для некоторого x должны выполняться неравенства: $x^3>3$ и $x^5<6$. Отсюда следует, что $3^5<x^{15}<6^3$, но $3^5=243$, а $6^3=216$, и мы видим, что это неравенство выполняться не может. Итак, $n\leqslant4$. Осталось заметить, что $1<\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}<2$, и поэтому системе первых четырех неравенств удовлетворяет любое число, лежащее на отрезке между $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{5}$.

Эта задача легко решается, если под рукой есть хороший калькулятор (умеющий вычислять функцию x^y). Заметим, что данная система неравенств может быть переписана в виде

$$1<x<2,$$
$$\sqrt{2}=1{,}4142\ldots<x<1{,}7321\ldots=\sqrt{3},$$
$$\sqrt[3]{3}=1{,}4422\ldots<x<1{,}5874\ldots=\sqrt[3]{4},$$
$$\sqrt[4]{4}=1{,}4142\ldots<x<1{,}4953\ldots=\sqrt[4]{5},$$
$$\sqrt[5]{5}=1{,}3797\ldots<x<1{,}4309\ldots=\sqrt[5]{6},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Теперь воочию видно, что $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{6}$ и, следовательно, $n<5$. Кроме того, видно, что, например, число 1,45 удовлетворяет первым четырем неравенствам.

Если же вместо калькулятора мы станем пользоваться логарифмической линейкой, дающей не более трех верных знаков, то, даже получив в качестве значения для $\sqrt[3]{3}$ число 1,44, а для числа $\sqrt[5]{6}$ значение 1,43, мы не будем уверены в правильности последних цифр и должны будем сравнивать эти корни прямым счетом, как это было сделано выше.

б) Покажем, что для любого натурального n можно подобрать столь малое $\alpha>0$, что арифметическая прогрессия $1+\frac{\alpha}{2}$, $\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+\alpha$, …, $\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+n\alpha$ с разностью α и геометрическая прогрессия $1+\alpha$, $(1+\alpha)^2$, …, $(1+\alpha)^n$ со знаменателем $1+\alpha$ удовлетворяют условию задачи.

Воспользуемся тождеством $q^k-1=(q-1)(q^{k-1}+q^{k-2}+\ldots+1)$. Полагая в нем $q=1+\alpha$, получим, что при всех $k\geq 1$

$$(1+\alpha)^k=1+\alpha((1+\alpha)^{k-1}+(1+\alpha)^{k-2}+\ldots+1). \qquad (*)$$

Подберем столь малое α, что $(1+\alpha)^n<1+\frac{1}{2n}$, тогда при всех $k=1, \ldots, n$

$$(1+\alpha)^{k-1}+(1+\alpha)^{k-2}+\ldots+1<$$
$$<k(1+\alpha)^n<k\left(1+\frac{1}{2n}\right)<k+\frac{1}{2}.$$

При таком α в силу $(*)$ будут выполнены неравенства

$$\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+(k-1)\alpha<1+k\alpha<$$
$$<(1+\alpha)^k<1+\alpha\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+k\alpha$$

при всех $k=1, \ldots, n$, то есть k-й член указанной геометрической прогрессии заключен между k-м и $(k+1)$-м членами арифметической прогрессии, что нам и требовалось.

А. П. Савин

◆

M784. *Шарообразная планета движется по окружности вокруг звезды и вращается вокруг своей оси, причем ось суточного вращения наклонена к плоскости орбиты под углом α (для нашей Земли $\alpha=66,5°$). Найдите зависимость продолжительности T самого короткого дня в году в данном пункте на поверхности планеты от географической широты φ этого пункта. (Движение планеты по орбите считается очень медленным по сравнению с вращением). Напишите формулу для функции $T=T(\varphi)$ и начертите примерный график.*

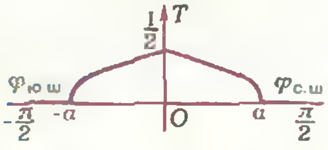


Рис. 1.

Ответ: $T(\varphi)=\frac{1}{\pi}\arccos(\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{ctg}\alpha)$ при $0<\varphi<\alpha$ и $T(\varphi)=0$ при $\varphi>\alpha$ (за единицу времени приняты сутки для данной планеты, то есть время одного ее оборота вокруг своей оси); примерный график функции $T(\varphi)$ показан на рисунке 1.

Пусть плоскость, содержащая точки с широтой φ, пересекает ось вращения планеты в точке M, а перпендикуляр к плоскости ее орбиты, проведенный из центра планеты O, — в точке K (рис. 2). Границами дня и ночи на этой широте служат концы хорды P_1P_2, по которой указанная плоскость пересекает большой круг, отделяющий освещенную половину планеты от неосвещенной. Поэтому продолжительность дня (в сутках) на широте φ равна $T=\gamma/2\pi$, где γ — величина угла P_1MP_2. Очевидно, этот угол (и продолжительность дня) имеет наименьшую величину, когда хорда P_1P_2 перпендикулярна прямой MK. В этом случае $\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{|MK|}{|MP_1|}$. Точка P_1 имеет широту φ, значит $\widehat{P_1OM}=\frac{\pi}{2}-\varphi$ и $|MP_1|=R\cos\varphi$, а $|OM|=R\sin\varphi$, где R — радиус планеты (см. рис. 2). В треугольнике MOK угол при вершине O равен $\frac{\pi}{2}-\alpha$, поэтому $|MK|=|OM|\operatorname{ctg}\alpha=R\sin\varphi\operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом,

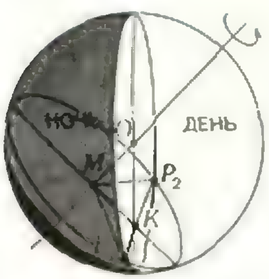


Рис. 2

$$\gamma = 2\arccos\frac{|MK|}{|MP_1|} = 2\arccos\frac{R\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R\cos\varphi} = 2\arccos(\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha).$$

При $\varphi > \alpha$ в момент «зимнего солнцестояния» параллель с широтой φ целиком лежит в неосвещенной половине планеты и $T(\varphi) = 0$; здесь наступает полярная ночь (эта область выделена на рисунке 2 черным цветом). Заметим, что при приближении к точке $\varphi = \alpha$ (из интервала $\varphi < \alpha$) касательная к графику $T(\varphi)$ становится вертикальной.

А. П. Савин

◆

М785. *а) Про возрастающую последовательность положительных чисел $a(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ известно, что для любого натурального числа $k > 1$ существует число b_k такое, что $a(kn) < b_k a(n)$ при всех n. Докажите, что существуют положительные числа c и α, для которых $a(n) < cn^\alpha$ при всех $n > 1$.*

Останется ли верным это утверждение, если в условии б) слово «любого» заменить на «некоторого»?

в) не требовать, чтобы последовательность $a(n)$ была возрастающей?

$a(k) \le ba(1)$

$a(k^2) \le ba(k)$

$a(k^r) \le ba(k^{r-1})$

[illegible]

Докажем сразу, что ответ на вопрос б) утвердительный: если (для некоторого $k > 1$) найдется $b = b_k$ такое, что $a(nk) < b\cdot a(n)$ при всех n, то $a(n) < cn^\alpha$ при некоторых c и α.

Положим $a(1) = a$. Перемножив ряд голубых неравенств на полях, получим, что (для любого натурального r)

$$a(k^r) < a\cdot b^r = a\cdot k^{r\alpha},$$

где $\alpha = \log_k b$. Для любого n выберем r так, что $k^{r-1} < n \le k^r$, то есть $\log_k n < r < \log_k n + 1$. Пользуясь монотонностью $a(n)$ и вторым красным тождеством на полях, получаем:

$$a(n) < a(k^r) < a\cdot b^r < a\cdot b^{\log_k n + 1} = ab\cdot n^{\log_k b} = cn^\alpha,$$

где $c = ab$.

Построим теперь пример, показывающий, что ответ на вопрос в) — отрицательный. Нетрудно построить такую последовательность $a(n)$, которая обладала бы свойством *мультипликативности:* $a(mn) = a(m)a(n)$ для всех m, n, и при этом (для любого натурального r) нашлись бы такие n, что $a(n) > n^r$. Например, можно положить

$$a(n) = p_1^{l_1} p_2^{2l_2} p_3^{3l_3} \ldots p_s^{sl_s}$$

для $n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_s^{l_s}$ (где $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, … — последовательные простые числа); тогда для $m = \prod_{r=1}^{s} p_r^{t_r}$, $n = \prod_{r=1}^{s} p_r^{l_r}$ будет $a(mn) = a(m)\,a(n) = \prod_{r=1}^{s} p_r^{r(t_r+l_r)}$ и для $n = p_r^k$ (при каждом натуральном k) $a(n) = p_r^{rk} = n^r$.

Для этой последовательности условие $a(kn) < b_k a(n)$ будет выполнено, например, при $b_k = a_k$. Но ни для каких c и α оценка $a(n) < cn^\alpha$ не может быть верной для всех n, поскольку при $r > \alpha$ существует бесконечно много n таких, что $a(n) > n^r > cn^\alpha$ (при достаточно большом n).

Н. Б. Васильев

◆

Ф793. *На вогнутую сферическую поверхность радиуса R с высоты $H = R/8$ вблизи оси симметрии падают (с нулевой начальной скоростью) маленькие шарики. Считая удары шариков о поверхность абсолютно упругими, показать, что после первого соударения каждый шарик попадает в низшую точку поверхности. Взаимные соударения шариков не учитывать.*

Рассмотрим движение одного шарика, свободно падающего вблизи оси симметрии. Сразу после соударения с поверхностью шарик имеет скорость $v_0 = \sqrt{2gH}$ (поскольку удар абсолютно упругий); вектор $\vec{v}_0$ составляет угол 2α с вертикалью (см. рисунок).

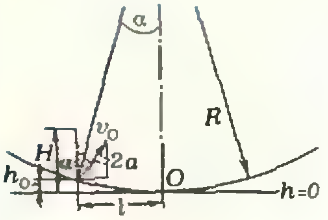
Пусть через время t после соударения с поверхностью смещение шарика вдоль горизонтали равно l (см. рисунок), то есть

$$v_0\sin 2\alpha\cdot t = l \;\Rightarrow\; t = l/v_0\sin 2\alpha = l/(\sqrt{2gH}\,\sin 2\alpha),$$

где $v_0\sin 2\alpha$ — горизонтальная проекция скорости v_0 (за время t шарик не ударяется о поверхность). Высота, на которой будет находиться шарик через время t, равна

$$\Delta h = h_0 + v_0\cos 2\alpha\cdot t - gt^2/2, \qquad (*)$$

где $v_0\cos 2\alpha$ — вертикальная проекция скорости v_0.



Поскольку шарик начал падать с высоты H вблизи оси симметрии (то есть угол α мал), можно считать, что $h_0 \approx 0$, $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$, $\cos 2\alpha \approx 1$, $l = R\alpha$. Учитывая эти соотношения, подставим в уравнение (•) значение $t = l/(\sqrt{2gH}\,\sin 2\alpha) = R/(2\sqrt{2gH})$:

$$\Delta h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{R}{2} - \frac{R^2}{16H}.$$

При $H = R/8$ $\Delta h = 0$, то есть шарик оказывается в точке O.

Итак, при падении с высоты $H = R/8$ вблизи оси симметрии все шарики после первого соударения с поверхностью попадут в низшую точку поверхности — в точку O.

И. В. Кривченков

◆

Ф794. *Два одинаковых теплоизолированных калориметра высоты $h = 75$ см заполнены на одну треть один — льдом, другой — водой при температуре $t = 10$ °C. Воду из второго калориметра переливают в первый, и при этом калориметр оказывается заполненным на две трети. После того как температура в калориметре установилась, уровень заполнения его увеличился на $\Delta h = 0{,}5$ см. Какова была начальная температура льда в калориметре? Плотность льда — $\varrho_л = 9 \times 10^2$ кг/м^3, воды — $\varrho_в = 10^3$ кг/м^3; удельная теплота плавления льда — $\lambda = 3{,}4 \times 10^5$ Дж/кг; удельная теплоемкость льда — $c_л = 2{,}1 \times 10^3$ Дж/(кг · К), воды — $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).*

Тот факт, что после установления температуры в калориметре уровень его заполнения повысился, означает, что часть воды, налитой в калориметр, замерзла — ведь при замерзании воды объем, занимаемый ею, увеличивается. Утверждение о том, что замерзла лишь часть воды, следует из того, что уровень заполнения калориметра увеличился на $\Delta h = 0{,}5$ см — при замерзании всей воды ее объем увеличился бы в $\varrho_в/\varrho_л \approx 1{,}1$ раза, а уровень заполнения калориметра повысился бы на $\frac{h}{3}(1{,}1 - 1) \approx$ $\approx 2{,}5$ см.

Итак, мы приходим к выводу, что установившаяся в калориметре температура равна $t_0 = 0$ °C. Исходя из этого условия запишем уравнение теплового баланса:

$$c_в m_в (t - t_0) + \lambda \cdot \Delta m = c_л m_л (t_0 - t_x), \qquad (1)$$

где Δm — масса замерзшей воды, t_x — начальная температура льда. Найдем Δm.

При повышении уровня заполнения калориметра на Δh объем заполненной части калориметра увеличился на $\Delta h \cdot S$, где S — площадь поперечного сечения калориметра. Очевидно,

$$\Delta h \cdot S = \frac{\Delta m}{\varrho_л} - \frac{\Delta m}{\varrho_в}, \qquad (2)$$

где $\Delta m/\varrho_в$ — объем, который занимала масса Δm воды, $\Delta m/\varrho_л$ — объем, занимаемый той же массой льда. Из (2) находим:

$$\Delta m = \frac{\Delta h \cdot S \varrho_л \varrho_в}{\varrho_в - \varrho_л}.$$

Первоначальные массы воды и льда в калориметрах равны, соответственно, $m_в = \frac{h}{3} S \varrho_в$ и $m_л = \frac{h}{3} S \varrho_л$. Подставляя в (1) выражения для $m_в$, $m_л$ и Δm, получим:

$$c_в S \frac{h}{3} \varrho_в t + \lambda S \cdot \Delta h \frac{\varrho_л \varrho_в}{\varrho_в - \varrho_л} = -c_л S \frac{h}{3} \varrho_л t_x.$$

Отсюда находим начальную температуру льда:

$$t_x = -\frac{c_в h \varrho_в t(\varrho_в - \varrho_л) + 3\lambda \cdot \Delta h \cdot \varrho_л \varrho_в}{c_л h \varrho_л (\varrho_в - \varrho_л)} \approx -54 \text{ °C}.$$

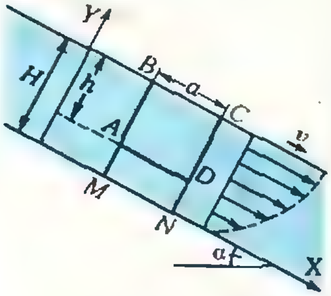
А. И. Буздин

◆

Ф795. *Вода течет по длинному каналу с прямоугольным сечением, наклоненному к горизонту. Можно считать, что сила трения воды о дно и берега канала пропорциональна средней скорости потока и обратно пропорцио-*

При установившемся течении воды глубина H оказывается одной и той же вдоль всего канала. В результате действия сил трения скорости течения на разных глубинах оказываются разными — слои жидкости скользят один по другому и скорость течения возрастает от почти нулевой вблизи дна до наибольшей у поверхности. При этом любой выделенный объем жидкости движется с некоторой постоянной средней скоростью. Это озна-

нальна его глубине. Во время паводка количество воды, протекающей через сечение канала за одну секунду, увеличивается вдвое. Как меняется при этом средняя скорость потока?



чает, что векторная сумма всех сил, действующих на такой объем, равна нулю.

Запишем это условие (II закон Ньютона) для выделенного на рисунке объема $ABCD$. Действующие на него силы — это сила тяжести $F_т = \varrho gabh$ (b — ширина потока), сила давления атмосферного воздуха $F_в = p_0ab$ (p_0 — атмосферное давление), сила давления лежащих ниже слоев воды $F_н = p_hab$ (p_h — давление на «глубине» h), силы давления $F_л$ и $F_п$ со стороны воды слева (выше по течению) и справа (ниже по течению) и сила трения о прилежащий слой воды на глубине h. Запишем II закон Ньютона в проекциях на ось Y (см. рисунок):

$$p_0ab + \varrho gabh\cos\alpha - pab = 0.$$

Из этого уравнения видно, что давление p в потоке определяется только «глубиной» h.

Теперь запишем условие постоянства средней скорости для выделенного на рисунке объема $MBCN$. В проекциях на ось X имеем:

$$\varrho gabH\sin\alpha - k\frac{v}{H} = 0. \qquad (*)$$

Здесь $\varrho gabH$ — сила тяжести, v — средняя скорость течения, kv/H — сила трения ($k = \text{const}$). (Силы давления со стороны воды слева и справа взаимно компенсируются, и поэтому мы не включили их в уравнение). Глубину H выразим через количество Q воды, протекающей через сечение канала за единицу времени: $Q = Hbv \Rightarrow H = \dfrac{Q}{bv}$.

Подставим это выражение в (*) и найдем v:

$$v = \left(\frac{\varrho ga\sin\alpha}{kb}\right)^{1/3}Q^{2/3}.$$

Отсюда видно, что при увеличении Q в 2 раза средняя скорость течения возрастает в $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ раза. Глубина потока возрастает при этом в $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}3$ раза.

Г. Л. Коткин

◆

Ф796. *На главной оптической оси AB собирающей линзы с фокусным расстоянием F находится плоское зеркальце, вращающееся с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной оси AB (рис. 1). На зеркальце падает параллельный пучок лучей, который после отражения фокусируется на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы. Найти скорость светового пятна на экране в момент, когда оно проходит фокус линзы.*

Пусть в начальный момент времени угол между главной оптической осью линзы и перпендикуляром к зеркалу равен α, а световое пятно при этом находится в точке пересечения оси с экраном (точка B на рисунке 1), то есть после отражения от зеркала лучи идут параллельно главной оптической оси. Через малый промежуток времени Δt зеркало повернется на малый угол $\Delta\alpha = \omega\cdot\Delta t$. Отраженные от зеркала лучи «повернутся» на угол $2\Delta\alpha$ относительно оси (рис. 2) и световое пятно будет находиться в точке C на экране. Найдем перемещение $|BC|$ пятна за время Δt:

$$|BC| = |OB|\operatorname{tg}2\Delta\alpha = F\operatorname{tg}2\Delta\alpha \approx 2F\cdot\Delta\alpha$$

(мы воспользовались тем, что $\Delta\alpha$ мало и $\operatorname{tg}\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$). Зная перемещение, находим мгновенную скорость светового пятна в точке B:

$$v = \frac{|BC|}{\Delta t} = \frac{2F\cdot\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2F\omega\cdot\Delta t}{\Delta t} = 2F\omega.$$

Е. И. Пальчиков

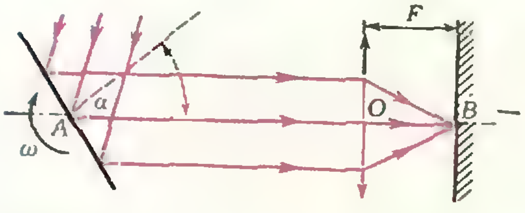


Рис 1.

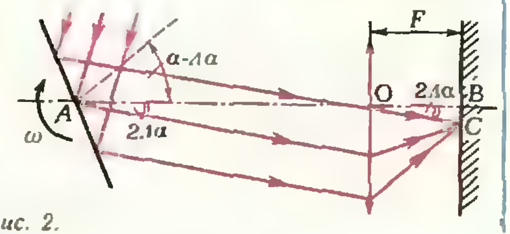


Рис. 2.

Ф797. *Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого зависит от напряжения U на конденсаторе по закону $\varepsilon=\alpha U$, где $\alpha=0{,}1$ В$^{-1}$. Параллельно этому «нелинейному» конденсатору (незаряженному) подключают обычный конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_0=60$ В. Каким будет напряжение на конденсаторах?*

Поскольку отличие «нелинейного» конденсатора от обычного заключается лишь в наличии между его обкладками диэлектрика, емкость «нелинейного» конденсатора при напряжении U на нем равна

$$C=\varepsilon C_0=\alpha U C_0,$$

где C_0 — емкость обычного конденсатора. При этом заряд на «нелинейном» конденсаторе —

$$q_{\text{н}}=CU=\alpha C_0 U^2,$$

а заряд на обычном конденсаторе —

$$q=C_0U$$

(напряжение U на конденсаторах при параллельном соединении одинаковое).

Начальный заряд обычного конденсатора был равен

$$q_0=C_0U_0,$$

и в силу закона сохранения заряда при любом напряжении U на конденсаторах

$$q_{\text{н}}+q=q_0 \quad\Rightarrow\quad \alpha C_0U^2+C_0U=C_0U_0.$$

Отсюда находим напряжение U:

$$U=\frac{\sqrt{4\alpha U_0+1}-1}{2\alpha}=20\text{ В}.$$

А. И. Буздин

Обратные тригонометрические функции

(Начало см. на с. 30)

На отрезке $\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$ и синус, и косинус, и тангенс монотонны. Вычислим, например, косинус от сравниваемых чисел:

$$\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5},$$

$$\cos\left(\arccos\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}.$$

Так как на $\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$ косинус убывает, из неравенства

$$\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)>\cos\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$$

следует, что

$$\arcsin\frac{2}{5}<\arccos\frac{2}{5}.$$

Пример 6. Вычислим $\arcsin(\sin 11)$. Для этого сравним сначала 11 с $\frac{\pi}{2}k$ ($k\in\mathbf{Z}$). Из неравенства $3<\pi<3{,}142$ ($\pi=3{,}14159\ldots$) следует, что $\frac{7}{2}\pi<11<4\pi$. Значит, $-\frac{\pi}{2}<11-4\pi<0<\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\arcsin(\sin 11)=$$
$$=\arcsin(\sin(11-4\pi))=11-4\pi.$$

Упражнения

1. Докажите тождество

а) $\arccos x=$
$$=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0<x<1\\ \pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1<x<0.\end{cases}$$

б) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+x}{1-x}+\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pi$ $(0<x<1)$.

2. Вычислите

а) $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5}+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{7}+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{8}$;

б) $\arccos(\cos 4)$;

в) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

3. Постройте график функции

а) $\arccos(\cos x)$;

б) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)$.

Нужная книга

Я перелистываю страницы небольшой книжечки в зеленом бумажном переплете и вспоминаю Карелию. Вспоминаю не освоенные еще туристами сказочные леса, чистейшие озера, ночные костры, комсомольские песни...

Нет, не подумайте, что в книге речь идет о романтике путешествий или геологических экспедициях. У рецензируемой книги вполне прозаическое название: «Лекции и задача по математике» (М., «Просвещение», 1981), а написана она известными математиками и педагогами из Москвы и Петрозаводска Л. А. Басовой, М. А. Шубиным, Л. А. Эпштейн.

Первое, о чем подумалось, когда я открыл эту книгу, — о судьбе тех ребят, школьников и студентов, кому посчастливилось учиться и работать в Карельской летней физико-математической школе. Конечно, не все ее участники стали профессиональными математиками или физиками, да это и не было целью организаторов школы. Главный итог 11-летней работы ЛФМШ — сотни и сотни выпускников, которым школа помогла найти свой путь в жизни, почувствовать уверенность в себе, проникнуться духом коллективного поиска, узнать радость самостоятельного творчества. А другой важный итог — рецензируемая книга, написанная создателями и бессменными организаторами ЛФШМ.

О чем же эта книга? Прежде всего, конечно, она состоит из необычных по построению лекций, занимательных задач. Лекции разбиты на четыре цикла. Каждый цикл читался в течение месяца школьникам.

Первый цикл — «Целые числа». Авторы сразу же сообщают, что свойства целых чисел изучает часть математика, которая называется теорией чисел или... арифметикой. Таким образом, речь идет о той самой арифметике, которую начинают проходить еще в первом классе. Сначала читателю напоминают хорошо известные факты, но незаметно его подводят к мысли о том, как много интересных и важных утверждений связаны с такими хорошо знакомыми понятиями как наибольший общий делитель, простые числа, разложение числа на простые множители. К концу первой главы читатель уже подготовлен к доказательству таких интересных утверждений, как малая теорема Ферма, теоремы Эйлера и Вильсона. Цикл лекций из второй главы посвящен понятию центра тяжести и его приложениям. Третий цикл «Комплексные числа и их применение» с особенным интересом прочтут все, кто изучил статьи Л. С. Понтрягина («Квант», №№ 3, 4, 1982 г.) В книге обсуждаются некоторые свойства многочленов, основная теорема алгебры, формулы Виета, формула Кардано. Очень интересна и содержательна подборка задач. Третья глава наряду с первой представляется особенной удачей авторов. С булевыми алгебрами и автоматами знакомит четвертая глава книги. Специальный раздел отводится олимпиадным задачам, в книге много задач-шуток и контрольных вопросов для «математического хоккея».

Для кого же эта книга? Она будет полезной для учителей и руководителей кружков, которых привлечет методика изложения материала, позволяющая изучить его в сжатые сроки. Книга может быть использована в работе летних лагерей для старшеклассников, а также при организации летних физико-математических школ. Но, прежде всего, книга будет интересна и полезна школьникам, желающим самостоятельно изучить нужный и доступный материал, выходящий за рамки школьной программы.

В. М. Уроев

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Из предисловия к учебнику по физике

Авторы выражают искреннюю благодарность И. Ньютону и Г. Галилею за нелегкий труд по открытию законов, без которых написание данного учебника было бы затруднительным.

Однажды на экзамене

— Ну, ладно, вот тебе еще один вопрос. Бери ручку и пиши. Синус икс разделить на эн икс...

$$\frac{Si\cancel{n}\,\cancel{x}}{\cancel{n}\,\cancel{x}}=Si$$

Как, уже получилось? Что получилось? Что!? — Кремний!!! Куда же это мой валидол делся?

Е. А. Свистунов

«Черная дыра»?

Рис. А. А. Орехова

Путь в науку начинается с задачи

Пятнадцать лет назад при Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова (ИАЭ) начала работать физико-математическая школа для учащихся старших классов. Когда к предметам, изучаемым в школе, прибавилась биология, было решено назвать ее Школой естественных наук (ШЕН).

Это была первая школа такого типа при крупнейшем научно - исследовательском институте. Инициаторами ее создания выступили комитет ВЛКСМ и партком Института. Работе школы во многом помогли ведущие ученые ИАЭ академики А. П. Александров, Л. А. Арцимович, Б. Б. Кадомцев, И. К. Кикоин, члены-корреспонденты АН СССР И. И. Гуревич, В. М. Галицкий и многие другие.

Какие задачи были поставлены перед ШЕН? Основных — три.

Во-первых, учить школьников физике, математике, биологии, углубляя школьный курс, связывая его с новейшими достижениями науки и техники, используя богатейший научный потенциал Института атомной энергии.

Во-вторых, как можно раньше выявить способных учащихся, помочь им проявить себя и выбрать правильно дальнейший путь.

Наконец, третья задача — развивать в учащихся советскую гражданственность, материалистическое мировоззрение, все то, что входит в понятие коммунистического воспитания молодежи. На это особое внимание обращали члены Ученого Совета института, выступая на заседании, посвященном школе.

И вот уже пятнадцать лет по вечерам загорается свет в двухэтажном здании, расположенном недалеко от Института, и в него приходят (после занятий в общеобразовательной школе) учащиеся 8, 9, 10-х классов из многих районов Москвы. Здесь они два (а некоторые и три) раза в неделю встречаются со своими преподавателями — научными сотрудниками и инженерами ИАЭ, аспирантами и студентами старших курсов Московского физико-технического института.

Как проводится отбор учащихся в школу? Этот вопрос решался в течение нескольких лет. Трудность заключалась в том, что приходящие на приемные экзамены учащиеся обладают самым широким спектром знаний. И не только за счет своих способностей, но и за счет того, что они представляют почти сорок различных школ Москвы. В то же время коэффициент отбора должен составлять 4—5, то есть из четырех-пяти абитуриентов в ШЕН можно принять лишь одного. Поэтому важно оценить не только знания, но и умение абитуриента подойти к незнакомой проблеме, освоиться с новым понятием, продолжить мысль преподавателя, принимающего экзамен. Так встречи преподавателя и учащихся стали представлять собой беседу, когда абитуриент не только отвечает на вопросы, но и задает их, решает задачи совместно с экзаменатором. Такой способ, весьма не экономный по времени и, на первый взгляд, достаточно субъективный, стал основным. Сейчас уже проверено годами, что мнения преподавателей ШЕН относительно того или иного абитуриента практически всегда совпадают.

Как уже говорилось, в школе изучаются три предмета: физика, математика и биология.

Курс физики построен так, что сначала в течение 4—5 недель преподаватель рассказывает о физике, о ее связи с другими науками, об отдельных разделах физики, теоретиках и экспериментаторах, о последних достижениях науки. Делается это в популярной форме для того, чтобы во время дополнительного курса учащиеся «не теряли за деревьями леса».

Лекцию по физике читает старший научный сотрудник А. А. Боровой.

Представление о дальнейших разделах могут дать многочисленные пособия, выпущенные в ШЕН и написанные ее преподавателями. Среди книг, вышедших в «Библиотечке физико-математической школы», можно назвать такие книги, как «Механика», «Законы электромагнетизма». В конце десятого класса возобновляется рассказ об отдельных отраслях физики. Но ведут его уже не только преподаватели, но и ведущие ученые Института, приглашенные в школу. Достаточно вспомнить лекции профессоров Я. А. Смородинского, Л. А. Микаэляна, Ю. С. Лазуркина и многих других, которые собирали учащихся, преподавателей ШЕН и очень многих сотрудников Института. На них можно было получить полное представление о работе инженера и ученого.

Одна из целей курса математики — показать проникновение математических методов в естественные науки, использование аппарата математики в биологии, химии, физике. Конечно, ребятам важно научиться самим пользоваться этим аппаратом. Однако овладение математическими методами анализа позволяет не только глубже изучить, например, физику, но и в более широком, гуманистическом смысле обога-

Инженер В. В. Синев проводит занятие по физике.

Изучение результатов домашней лабораторной работы.

щает духовный мир человека. Пятнадцатилетний опыт ШЕН показал, что способности школьников воспринять красоту и логику математики чрезвычайно высоки, и при интенсивной работе ребят под руководством ученых ИАЭ — специалистов в области прикладной математики, физиков-теоретиков, разработчиков математического обеспечения задач, решаемых в вычислительном центре Института, многие из наших выпускников выбирают математику своей профессией.

Нельзя не сказать о том, что ШЕН находится в постоянном контакте и шефствует над научными обществами и физико-математическими школами Челябинска, Навои и других городов, Малой академией наук Крыма. Идет полезный обмен пособиями, планами. На слетах учащиеся Москвы встречаются со своими «коллегами», а ученые ИАЭ читают курсы лекций для ребят этих городов.

Какие же итоги деятельности школы?

Большинство из ее учеников ныне работают в науке и технике, хотя некоторые стали врачами, экономистами. Многие пришли после окончания вуза в ИАЭ. Среди них есть уже кандидаты наук. А некоторые из наших выпускников сами стали преподавателями ШЕН.

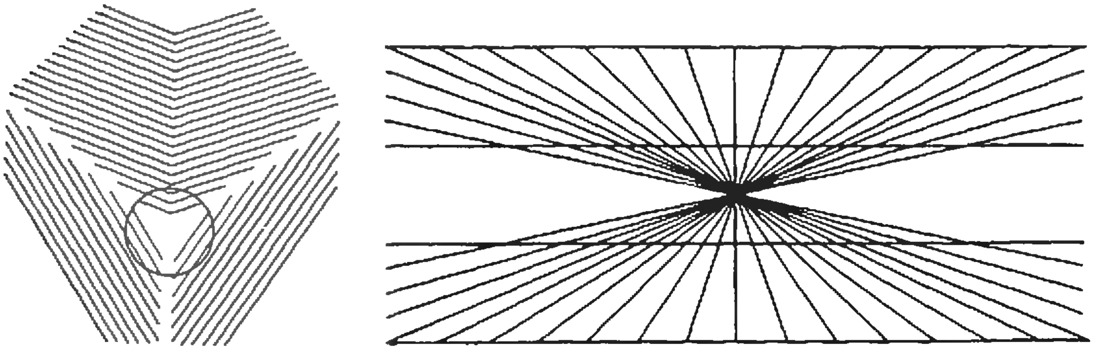
На XIX съезде комсомола первый секретарь ЦК ВЛКСМ Б. Н. Пастухов говорил: «При комитете комсомола Института атомной энергии имени И. В. Курчатова действует Школа естественных наук, в которой с интересом занимаются 300 московских школьников, и в пяти ее филиалах в разных городах страны — более тысячи ребят. С лекциями перед ними выступают известные ученые. Как выиграло бы дело образования, если бы у курчатовцев было побольше последователей».

Читатели «Кванта», наверное, понимают, что путь в науку начинается с умения поставить и решить задачу. Последуйте за ребятами в ШЕН, проверьте свои способности.

В. Д. Кулагин,
К. П. Чечеров

Оптические иллюзии

На рисунках изображены квадрат в квадрате, окружность и две пары горизонтальных параллельных линий. Нанесенная штриховка вызывает ощущение искажения их форм.



Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании решения результатов вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до **15 сентября** по адресу: 117234, Москва, В-234, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, Заочная физическая школа. В письмо вложите конверт с вашим домашним адресом и два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс	*9-й*
Профессия родителей и занимаемая должность	*отец — инженер* *мать — врач*
Подробный домашний адрес	*248016, г. Калуга, ул. Ленина, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 15 октября. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года направляются методические разработки и контрольные задания по различным разделам физики, изучаемым в средней школе. Решенные задания оцениваются, рецензируются и возвращаются учащимся. Окончившие 9 класс ЗФШ переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно прошедшие курс обучения получают справку об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс для решения предлагаются задачи 1—4, поступающим в 10 класс — задачи 3—6.

1. Клин с углом при вершине 90° и углами при основании α и β находится на горизонтальном столе. По его боковым граням начинают одновременно скользить без трения два бруска одной и той же массы. Будет ли при этом клин скользить по столу (трение между клином и столом отсутствует)?

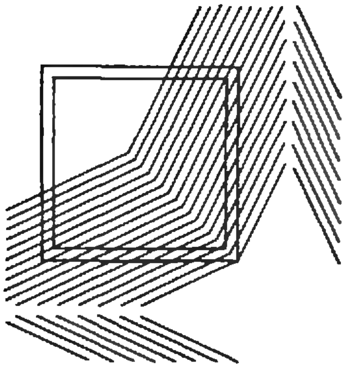
2. В лодке массы M и длины L стоит человек массы m. На какое расстояние переместится лодка, если человек перейдет с одного ее конца на другой?

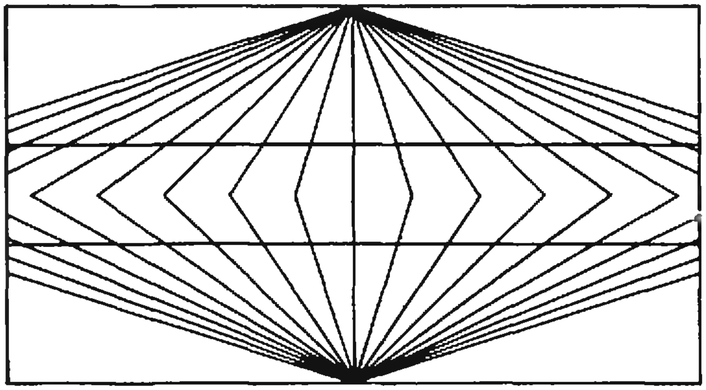
3. На наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30° лежит цилиндр массы M. Цилиндр удерживается в состоянии покоя с помощью огибающей его нити, один конец которой закреплен на наклонной плоскости, а другой натянут вертикально вверх. Чему равна сила натяжения нити?

4. Оцените массу Солнца, зная, что средний радиус орбиты Земли равен $149 \cdot 10^6$ км.

5. При обламывании кончика электрической лампочки, объем которой равен 1 л, на глубине 1 м под поверхностью воды в нее вошло $m = 998{,}7$ г воды. Каким было давление газа в лампочке? Атмосферное давление — нормальное.

6. Положительный электрический заряд Q равномерно распределен по тонкому проволочному кольцу радиуса R. Найдите зависимость модуля напряженности электрического поля на оси кольца от расстояния r до центра кольца.





Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1982 году.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+1=0.$$

2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O, при этом $|AO|=|OC|=1$, $|BO|=|OD|=2$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0.$$

4. Найдите все значения x, для которых выражение

$$\sqrt{3x^4-2-x^8}\cdot\sin\left(\pi(2x+16x^2)\right)$$

имеет смысл и не обращается в нуль.

5. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной D, грани которой ABD и ACD — прямоугольные треугольники, ребро AD перпендикулярно медиане основания AK и $|AD|=|AK|$. Сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через середины ребер AD и BC, является равнобочная трапеция $EFGH$ с основаниями EF и GH, причем точка E делит ребро BD пополам, а точка G лежит на ребре AC и $|AG|=3|GC|$. Найдите отношение площади трапеции $EFGH$ к площади грани BCD.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_x(2x^2-3x-4)=2.$$

2. В трапеции $ABCD$, вписанной в окружность радиуса $r=2$, диагональ AC является биссектрисой угла BAD, а длина основания AD в два раза больше длины основания BC. Найдите площадь этой трапеции.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2\sin x\cdot\sin 2x}=\sqrt{5\cos x+4\sin 2x}.$$

4. Найдите все значения x, для которых выражение

$$\sqrt{4x^4-3-x^6}\cdot\left(1-\cos\left(2\pi(2x+21x^2)\right)\right)$$

ет смысл и не обращается в нуль.

5. В четырехугольной пирамиде $ABCDE$ эвание $ABCD$ — параллелограмм, а грани ADE и BCE — прямоугольные треугольники. Ребро BC перпендикулярно медиане EP грани CDE и $|BC|=|EP|$. Сечением пирамиды плоскостью является равнобочная трапеция $GKHL$, вершины которой G, K, H, L лежат, соответственно, на ребрах AE, BE, CE, DE, причем $|GE|=3|GA|$ и $|CH|=|EH|$. Найдите отношение площади трапеции $GKHL$ к площади грани ABE.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Какое из чисел больше: $\sqrt{8}$ или $2^{\left(2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9\right)}$?

2. Найдите все x, для которых функция $y=6\cos^2 x+6\sin x-2$ принимает наибольшее значение на R.

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}>2.$$

4. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на три. Завод стал выпускать в день 11 200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

5. При всех a решите уравнение

$$|x+3|-a|x-1|=4$$

и определите, при каких a оно имеет ровно два решения.

6. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O. Касательная к окружности в точке C пересекается с прямой, делящей пополам угол B треугольника, в точке K, причем угол BKC равен половине разности утроенного угла A и угла C треугольника. Сумма длин сторон AC и AB равна $2+\sqrt{3}$, а сумма расстояний от точки O до сторон AC и AB равна 2. Найдите радиус окружности.

Вариант 4

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{x}{4}=0.$$

2. Для каких значений a решение уравнения

$$10x-15a=13-5ax+2a$$

больше 2?

3. Известно, что $\log_b a=\sqrt{3}$. Вычислите

$$\log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right).$$

4. Решите неравенство

$$5^x-3^{x+1}>2(5^{x-1}-3^{x-2}).$$

5. На боковом ребре SA правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S взята точка D, через которую проведено сечение пирамиды, пересекающее апофемы граней SAC и SAB в точках M и N. Известно, что прямые DM и DN образуют с плоскостью основания пирамиды углы величиной β, а величины углов DMS и DNS равны α $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите величину угла MDN.

6. Прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей треугольника, перпендикулярна одной из его биссектрис. Известно, что отношение расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей к радиусу описанной окружности равно h. Найдите углы треугольника.

Вариант 5

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x}{x-1} < -1.$$

3. Решите неравенство $f(g(x)) < g(f(x))$, где $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = 2x + 1$.

4. Конус лежит на горизонтальной плоскости П, касаясь ее боковой поверхностью. Площадь основания конуса S_1, площадь боковой поверхности S_2. На какой высоте (над П) находится наивысшая точка конуса?

5. При каких значениях параметра p уравнение

$$(x-p)^2[p(x-p)^2 - p - 1] = -1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

Вариант 6

(биологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(1 + x - \sqrt{x^2 - 4}) < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \cos^2 3x = 1.$$

3. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписан куб. Вершины одной из граней куба лежат на основании $ABCD$ пирамиды. Вершины противоположной грани куба лежат на боковых ребрах пирамиды. Известно, что $|SA| = |AB| = a$, то есть длина бокового ребра пирамиды равна a и равна длине стороны ее основания. Чему равен объем куба?

4. Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{x^3+1}{x}$, которые вместе с осями координат ограничивают треугольник площади $\frac{1}{2}$.

5. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $|BP| : |PQ| : |QC| = 1:2:3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $|AR| : |RC| = 1:2$. Чему равно отношение площади четырехугольника $PQST$ к площади треугольника ABC, где S и T — точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

Вариант 7

(факультет почвоведения)

1. Из пункта A в пункт B отправился скорый поезд. Одновременно навстречу ему из B в A вышел товарный поезд, который встретился со скорым через $\frac{2}{3}$ часа после отправления. Расстояние между пунктами A и B равно 80 км, поезда двигались с постоянными скоростями. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он прошел за время на $\frac{3}{8}$ часа большее, чем время, за которое товарный поезд прошел 5 км?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2 - 3\cos 2x} = \sqrt{\sin x}.$$

3. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = |x^3 + 6x^2 + 9x + 1|$ на отрезке $[-3; 1]$.

4. В равнобедренный треугольник ABC (где $|AB| = |BC|$) вписана окружность радиуса 3. Прямая p касается этой окружности и параллельна прямой AC, но не совпадает с ней. Расстояние от точки B до прямой p равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых окружность касается сторон AB и BC.

5. Длина высоты SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, а длины сторон основания ABC равны $2\sqrt{6}$. Точки M и N — середины отрезков AC и AB. Вычислите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SAMN$ (то есть касающейся всех ее боковых граней и основания).

Вариант 8

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - x = 2.$$

2. При каких значениях x производная функции $y = 3 - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$ равна $2\sqrt{2}$?

3. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6 см, длина медианы CE равна 5 см, расстояние от точки пересечения BD с CE до стороны AC равно 1 см. Найдите $|AB|$.

4. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0 \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$$

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ длина ребра AB равна 4 см, длина ребра AD равна 6 см, длина ребра AA' равна 8 см. Точка K, лежащая на ребре AA', удалена от вершины A на 4 см. Расстояние от точки L ребра DD' до вершины D равно 2 см. Точка M лежит на отрезке $B'C$, длина MC вдвое больше длины $B'M$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K, L, M.

Вариант 9

(отделение геофизики геологического факультета и специальности «экономическая кибернетика» и «планирование народного хозяйства» экономического факультета)

1. Определите, что больше $\sqrt{1 - 2\sin\frac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$.

2. Найдите все решения неравенства

$$\frac{2x+5}{|x+1|}>1.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$9\cdot 4^{\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{\frac{1}{x}}=4\cdot 9^{\frac{1}{x}}.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sin 4x}{\cos 6x}=1.$$

5. Постройте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y=4-\left|y-\frac{6}{x}\right|-2\left|\frac{3}{x}-1\right|$$

и среди точек этого множества найдите все такие, где координата y принимает наибольшее значение.

6. Длина меньшего основания равнобочной трапеции равна сумме длин ее боковых сторон. Найдите наименьшее возможное целое k такое, что площадь полной поверхности фигуры, полученной вращением трапеции вокруг меньшего основания, в k раз больше площади трапеции.

Вариант 10

(отделение геологии геологического факультета и специальность «политическая экономия» экономического факультета)

1. Определите, что больше

$$\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{3\pi}{2}}\ \text{или}\ \sqrt[3]{5}.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}.$$

3. Найдите все решения неравенства

$$\log_3[(x+2)(x+4)]+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\sin\left(\frac{4}{3}\pi\cdot\sin x\right)=\frac{1}{2}.$$

5. В треугольник вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, AC треугольника ABC, соответственно, в точках M, D, N. Определите длину отрезка MD, если известно, что длина отрезка NA равна 2, длина отрезка NC равна 3, а угол BCA равен $\frac{\pi}{3}$.

6. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 8\cos x\cdot\cos y\cdot\cos(x-y)+1=0\\ x+y=z.\end{cases}$$

Вариант 11

(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\frac{2x-3}{4-x}>\frac{1}{x}.$$

2. Найдите координаты точки пересечения касательных к графику функции $y=\cos\pi x$ в точках с абсциссами $x=\frac{1}{6}$ и $x=\frac{7}{6}$.

3. Решите уравнение

$$2\sin x-\sqrt{3}=(\sqrt{2}-\sqrt{12})\sqrt{\sin x}.$$

4. В ромбе $ABCD$, где $B\hat{A}D=60°$, перпендикуляр к стороне AD, восстановленный из середины AD, пересекает диагональ AC в точке M, а перпендикуляр к стороне CD, восстановленный из середины CD, пересекает диагональ AC в точке N. Найдите отношение площадей треугольника MND и ромба $ABCD$.

5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Встретив в пути пешехода, мотоциклист сразу же развернулся, довез пешехода до пункта B, а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда беспрепятственно добрался. В результате мотоциклист затратил на дорогу до пункта A в два с половиной раза больше времени, чем если бы он ехал из пункта B в пункт A не подвозя пешехода. Во сколько раз медленнее пешеход добрался бы до пункта B, если бы весь путь от A до B он прошел пешком?

6. Решите уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3).$$

Вариант 12

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$2+\cos 2x=-5\sin x.$$

2. Найдите все числа x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям: $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+6}<\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$ и $x+\frac{1}{2}$ — целое число.

3. Проводятся две касательные к графику функции $y=6x+x^2$. Первая касательная проводится в точке с абсциссой $x_0=-2$, вторая — в точке минимума данной функции. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат и этими двумя касательными.

4. В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AB равна 1 и равна длине диагонали BD. Длины диагоналей относятся, как $1:\sqrt{3}$. Найдите площадь той части круга, описанного около треугольника BDC, которая не принадлежит кругу, описанному около ΔADC.

5. При каких значениях параметра γ количество пар целых чисел $(z;x)$, удовлетворяющих неравенству $\gamma^3|x|<\sqrt{2}(\gamma^2-z^2)$, минимально?

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Длинный невесомый жесткий стержень может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки O (рис. 1). На стержне на расстояниях l_1 и l_2 от точки O закреплены небольшие по размерам грузы массой m_1 и m_2 соответственно. Стержень отклонили от вертикали на угол α и отпустили. Каково будет натяжение стержня в точке A, находящейся между грузами, в момент прохождения стержнем положения равновесия?

2. Две пружины вставлены в закрепленную горизонтально трубку и разделены подвижным поршнем (рис. 2). Первая пружина имеет жесткость k_1 и упирается вторым концом

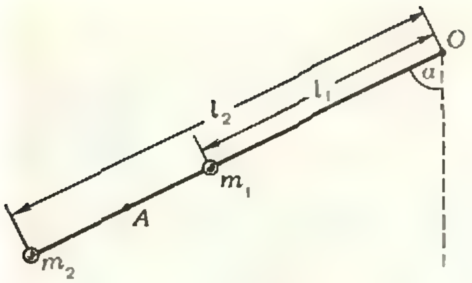


Рис. 1.

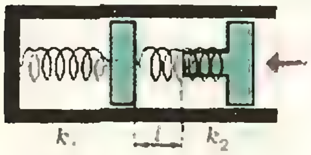


Рис. 2.

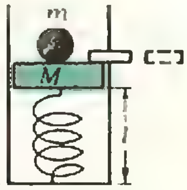


Рис. 3.

в дно трубки. Вторая пружина имеет жесткость k_2 и упирается вторым концом во второй подвижный поршень с ограничителем в виде штока. В недеформированном состоянии расстояние между разделительным поршнем и концом ограничителя второго поршня равно l. Какую работу нужно совершить, действуя медленно возрастающей по величине силой на второй поршень, чтобы шток дошел до разделительного поршня? Трением пренебречь.

3. В закрепленную вертикальную трубку вставлена невесомая пружина, верхний конец которой прикреплен к подвижному поршню массы M (рис. 3). Нижний конец пружины упирается в дно трубки. Пружина сжата до длины l и удерживается в сжатом состоянии с помощью защелки. На поршень положили шарик массой m. На какую высоту подскочит шарик, если освободить пружину, сдвинув защелку? Пружина в недеформированном состоянии имеет длину L. Жесткость пружины k. Трением пренебречь.

4. Баллон разделен перегородкой на две части. В первой части, объемом V_1, находится идеальный газ под давлением p_1, имеющий температуру T_1. Во второй части, объемом V_2, находится такой же газ под давлением p_2 и имеющий температуру T_2. Какое давление установится в баллоне, если перегородку убрать, а температуру газа сделать равной T?

5. В закрытом помещении объемом $V=60$ м^3 относительная влажность воздуха $r=50\%$ при температуре $t=18$ °C. Сколько воды необходимо испарить в этот объем, чтобы водяные пары при той же температуре стали насыщенными? Давление насыщенного пара при 18°C равно $p_н=2063$ Па; универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

6. В плоский конденсатор вставлена металлическая пластинка толщиной d_1 с двумя диэлектрическими пластинками по бокам, толщина каждой из них d_2, диэлектрическая проницаемость ε (рис. 4). Форма и размеры вставки соответетствуют форме и размерам пластин конденсатора. Расстояние между пластинами конденсатора несколько больше суммарной толщины вставки и равно d. Конденсатор со вставкой подключают к источнику постоянного напряжения с разностью потенциалов U_0. После того как конденсатор зарядился, источник отключают. Какая разность потенциалов будет между пластинами конденсатора, если после отключения источника вставку вынуть?

7. Конденсаторы емкостью $C_1=5$ мкФ и $C_2=2C_1$ подключили к источнику постоянной ЭДС $\mathscr{E}=300$ В (рис. 5). Затем переключатель K перевели с контакта 1 на контакт 2. Найдите количество теплоты, выделившееся при этом на резисторе с сопротивлением $R_1=200$ Ом, если $R_2=300$ Ом.

8. Для определения места повреждения двужильного кабеля используют схему, показанную на рисунке 6. Определите расстояние x до места, где один провод кабеля, вследствие повреждения изоляции, получил соединение с землей, если через гальванометр G не течет ток, когда сопротивления плеч реостата равны $R_{AB}=150$ Ом и $R_{BC}=50$ Ом. Длина кабеля $L=10$ км. Сопротивлением соединительных проводов схемы пренебречь (учитывать лишь сопротивление кабеля и реостата).

9. Две одинаковые прямоугольные стеклянные призмы составляют бипризму, изображенную на рисунке 7. На бипризму нормально падает широкий пучок света. На каком расстоянии от бипризмы нужно расположить экран, чтобы лучи света, прошедшие через бипризму, образовали на нем световое пятно минимальных размеров? Преломляющие углы малы и равны α. Ширина бипризмы h. Показатель преломления стекла n.

10. Тонкостенная сферическая колба, заполненная воздухом, погружена в сосуд с водой (рис. 8). На колбу направлен широкий параллельный пучок света. В колбу проникает часть пучка диаметром $d=6$ см. Найдите радиус сферической части колбы. Показатели преломления воздуха и воды равны $n_1=1$ и $n_2=1{,}33$ соответственно.

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. К концу однородной палочки массы $M=4{,}4$ г подвешен на нити алюминиевый шарик радиуса $R=0{,}5$ см (рис. 9). Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь такого положения равновесия, при котором

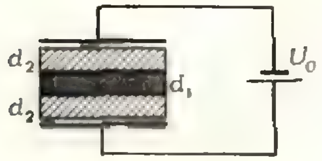


Рис. 4.

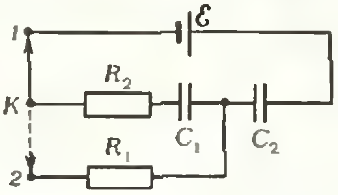


Рис. 5.

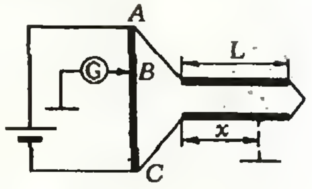
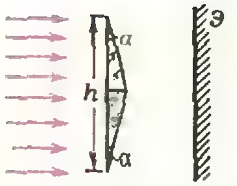
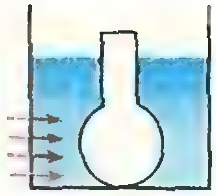


Рис. 6.





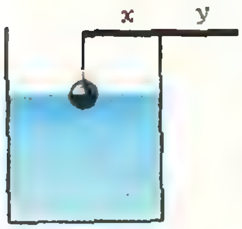


Рис. 9.

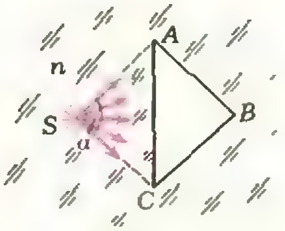


Рис. 10.

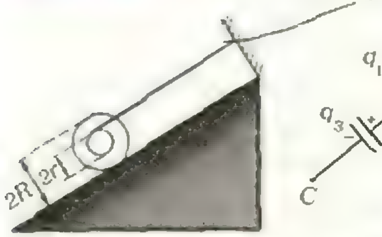


Рис. 11.

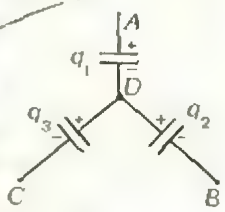


Рис. 12.

погруженной в воду оказывается половина шарика. Определите, в каком отношении делится длина палочки точкой опоры. Плотность алюминия $\varrho_a = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м³, плотность воды $\varrho_в = 10^3$ кг/м³.

2. Вертикальный цилиндр с тяжелым поршнем наполнен азотом, масса которого $M = 0{,}1$ кг. После увеличения температуры азота на $\Delta T = 100$ К поршень поднялся на высоту $h = 0{,}1$ м. Над поршнем все время сохраняется нормальное атмосферное давление p_0. Площадь поршня $S = 0{,}02$ м². Определите массу поршня. Молярная масса азота $\mu = 28$ кг/кмоль. Газовая постоянная $R = 8{,}3\cdot10^3$ Дж/(кмоль·К); $p_0 = 10^5$ Па.

3. Электрон влетает в область пространства с однородным электростатическим полем с напряженностью $E = 6\cdot10^4$ В/м перпендикулярно линиям напряженности. Определите величину и направление индукции магнитного поля, которое надо создать в этой области для того, чтобы электрон пролетел ее, не испытывая отклонений. Энергия электрона $W = 1{,}6\times10^{-16}$ Дж, масса электрона $m = 9\cdot10^{-31}$ кг.

4. В блоке оптического стекла с показателем преломления $n = \sqrt{3}$ сделана наполненная воздухом полость в виде равносторонней призмы ABC (рис. 10). Точечный источник света S находится в стекле и симметричен вершине B относительно плоскости AC. Угол расхождения лучей, падающих на призму, $\alpha = 60°$. Чему равен угол β расхождения лучей, прошедших через призму?

Химический факультет и факультет почвоведения

1. Катушка с нитками лежит на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 11). Свободный конец нити закреплен у верхнего конца наклонной плоскости так, что нить параллельна наклонной плоскости. Радиус катушки R, радиус намотки ниток r. При каком минимальном коэффициенте трения $\mu_{\min}$ катушки о плоскость система будет в равновесии?

2. В закрытом сосуде относительная влажность воздуха была $r = 30\%$. Затем в сосуд ввели каплю воды массы $m = 0{,}1$ г, которая полностью испарилась, после чего водяной пар стал насыщенным. Определите объем сосуда. Плотность насыщенного пара при данной температуре $\varrho_н = 17{,}3\cdot10^{-3}$ кг/м³.

3. Три одинаковых конденсатора, соединенных как показано на рисунке 12, подключены к точкам A, B и C, потенциалы которых, соответственно, $\varphi_A = 100$ В, $\varphi_B = 60$ В и $\varphi_C = 50$ В. Определите потенциал точки D.

4. На концах отрезка трубы диаметром $D = 3$ см и длиной $l = 12$ см вставлены две собирающие линзы одинакового с трубой диаметра. С одной стороны на трубу падает широкий пучок параллельных лучей, а с другой стороны свет выходит также параллельным пучком диаметром $d = 1$ см. Определите фокусные расстояния линз.

Географический и геологический факультеты

1. Пуля, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 510$ м/с, попадает в ящик, лежащий на горизонтальной поверхности на расстоянии $d = 0{,}5$ м от стены дома, и, пробив ящик, вылетает в том же направлении со скоростью $v = 10$ м/с. Ящик начинает двигаться по направлению к стене. Ударится ли ящик о стену дома? Коэффициент трения между ящиком и поверхностью $\mu = 0{,}1$, масса ящика $M = 10$ кг, масса пули $m = 10$ г, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2. Пузырек воздуха поднимается со дна цилиндрического сосуда, наполненного жидкостью, на поверхность. При этом объем пузырька увеличивается в 1,5 раза. Определите плотность жидкости. Атмосферное давление у поверхности жидкости $p_0 = 10^5$ Па. Высота жидкости в сосуде $h = 5{,}1$ м. Температуру считать постоянной, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

3. Лампочка накаливания мощностью $P = 180$ Вт используется для обогрева аквариума, содержащего $V = 10^{-3}$ м³ воды. За $\tau = 2$ мин вода нагревается на $\Delta T = 3$ К. Какая часть расходуемой лампочкой энергии теряется в виде лучистой энергии? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

4. В день весеннего равноденствия солнечный луч, проходя через маленькую прорубь, освещает дно реки, находящееся на глубине $h = 87$ см. Найдите показатель преломления воды, если расстояние между точками дна, освещаемыми лучом в моменты восхода и захода Солнца, равно $l = 2$ м. Толщиной льда пренебречь.

Публикацию подготовили
С. А. Ашманов, А. И. Боголюбов,
О. П. Виноградов, И. И. Мельников,
А. Н. Соколихин, Е. В. Талалаева,
Л. А. Черникова

Обратные тригонометрические функции

2. а) $\frac{\pi}{4}$. Указание $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)$. б) $2\pi-4$. в) $\frac{9}{14}\pi$.

3. а) См. рис. 1. Указание. $\arccos(\cos x)$ — четная функция. б) См. рис. 2.

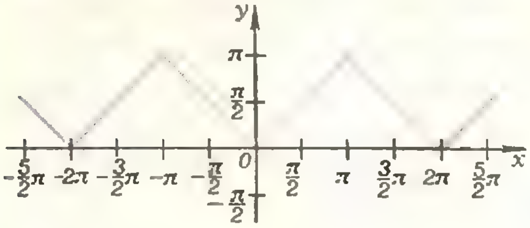


Рис. 1.

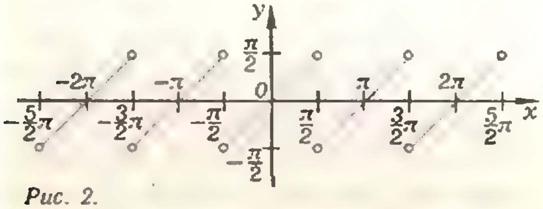


Рис. 2.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант I

1. {2}. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\log_2\dfrac{2(x^2-3)}{6x-10}=0\\ 6x-10>0.\end{cases}$$

2. $4\sqrt{5}$. Указание. Если K, L, M, N — точки касания, соответственно, сторон DA, AB, BC, CD с окружностью, то треугольники AOK, AOL, COM и CON конгруэнтны; аналогично, конгруэнтны треугольники DOK, DON, BOL и BOM. Выведите отсюда, что $\widehat{AOD}=\widehat{AOB}=\widehat{COD}=\widehat{COB}$.

3. $x=\frac{5}{6}\pi+2\pi k$ $(k\in Z)$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}5\sin x+\cos 2x=4\cos^2 x\\ \cos x<0.\end{cases}$$

4. Все точки интервала $]-\sqrt[4]{2};\ -1[$ за исключением точек $\frac{-1-\sqrt{1+16k}}{16}$ $(15<k<20)$ и все точки интервала $]1;\ \sqrt[4]{2}[$ за исключением точек $\frac{-1+\sqrt{1+16k}}{16}$ $(19<k<25)$. Указание. Неравенство

$$-\sqrt[4]{2}<\frac{-1-\sqrt{1+16k}}{16}<-1$$

равносильно неравенству

$$14<k<16\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2}.$$

Грубая оценка $(1<\sqrt[4]{2}<\sqrt{2};\ 1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5)$ показывает, что

$$19{,}6<16\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2}<22.$$

Двукратным возведением в квадрат проверяется, что на самом деле

$$20<16\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2}<21.$$

Аналогично, неравенство

$$1<\frac{-1+\sqrt{1+16k}}{16}<\sqrt[4]{2}$$

равносильно неравенству

$$18<k<16\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}.$$

Грубая оценка $(1{,}1<\sqrt[4]{2}<\sqrt{2}<1{,}5)$ показывает, что

$$19{,}8<16\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}<27.$$

Двукратным возведением в квадрат проверяется, что на самом деле

$$25<16\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}<26.$$

5. $\frac{5\sqrt{10}}{32}$. Решение. 1) Докажем, что $(AD)\perp(ABC)$. Допустим противное. Тогда, ввиду $\widehat{DAK}=\frac{\pi}{2}$, $\widehat{DAB}\neq\frac{\pi}{2}$ и $\widehat{DAC}\neq\frac{\pi}{2}$. Но по условию треугольники ABD и ACD — прямоугольные. Значит, во-первых, $\widehat{ADB}=\frac{\pi}{2}$ или $\widehat{ABD}=\frac{\pi}{2}$ и, во-вторых, $\widehat{ADC}=\frac{\pi}{2}$ или $\widehat{ACD}=\frac{\pi}{2}$. Если $\widehat{ADB}=\frac{\pi}{2}$ и $\widehat{ADC}=\frac{\pi}{2}$, то $(AD)\perp(BCD)$; значит, $\widehat{ADK}=\frac{\pi}{2}$ и в треугольнике ADK получились два прямых угла. Если $\widehat{ABD}=\frac{\pi}{2}$ и $\widehat{ACD}=\frac{\pi}{2}$, то $|AD|>|AB|$ и $|AD|>|AC|$; значит, $|AD|>|AK|=|AD|$. Если $\widehat{ABD}=\frac{\pi}{2}$ и $\widehat{ADC}=\frac{\pi}{2}$, то, ввиду $(KE)\parallel(CD)$, $(AD)\perp(KE)$; так как $(AD)\perp(AK)$, $(AD)\perp(AKE)$; значит, $\widehat{DAE}=\frac{\pi}{2}$, но $\widehat{AED}>\widehat{ABD}=\frac{\pi}{2}$ и в прямоугольном треугольнике DAE получился тупой угол. Случай $\widehat{ADB}=\widehat{ACD}=\frac{\pi}{2}$ приводится к противоречию аналогично. 2) Докажем, что $F\in[CD]$, $H\in[AB]$. Точка F лежит на одном из ребер CD, AB, AD, BC. Если $F\in[AB]$, то, ввиду того, что никакие три из четырех точек E, F, G, H не могут принадлежать одной грани (иначе плоскость сечения совпала бы с плоскостью этой грани), $H\in[CD]$; так как, по условию, $(EF)\parallel(HG)$, по теореме о линии пересечения плоскостей, проведенных через параллельные прямые (теорема 4 из «Геометрии 9—10»), $(HG)\parallel(AD)$; из $(AD)\perp(ABC)$ следует $(HG)\perp(ABC)$; значит, $(HG)\perp(GF)$; поскольку трапеция $EFGH$ — равнобедренная, $\widehat{EHG}=\widehat{HGF}=\frac{\pi}{2}$, но тогда $EFGH$ — прямоуголь-

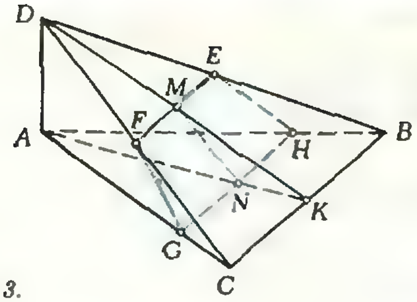


Рис. 3.

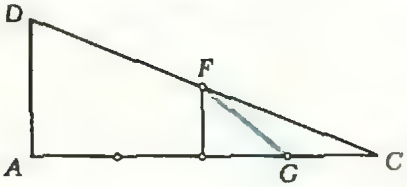


Рис. 4.

ник, что противоречит определению трапеции. Если $F \in [AD]$, то $H \in [BC]$; так как $(EF) \| (HG)$, $(EF) \| (AB)$; значит, $|AF| = |FD|$, что противоречит условию. Случай $F \in [BC]$ приводится к противоречию аналогично. 3) Итак, $F \in [CD]$, $H \in [AB]$ (рис. 3). Значит, $(EF) \| (BC)$ и $(GH) \| (BC)$. Поэтому $|DF| = |FC|$ и $|AH| = 3|HB|$. Из $\triangle ACD$ $|FG| = \sqrt{|CG|^2 + \frac{|AD|^2}{4}}$ (рис. 4). Аналогично, из $\triangle ADB$ $|EH| = \sqrt{|HB|^2 + \frac{|AD|^2}{4}}$. Поскольку, по условию, $|FG| = |EH|$, получаем $|CG| = |HB|$. Значит, $|AC| = |AB|$, откуда $|DC| = |DB|$. 4) Поскольку треугольники CAB и CDB — равнобедренные, их медианы AK, DK являются высотами. Значит, $(BC) \perp (AKD)$. Поэтому $(FE) \perp (AKD)$ и $(GH) \perp (AKD)$. Следовательно, $(FE) \perp (MN)$ (см. рис. 3) и $(GH) \perp (MN)$. Таким образом, $[MN]$ — высота трапеции $EFGH$. 5) Положим $|AD| = |AK| = h$. Из $\triangle AKD$, ввиду $|AN| = 3|NK|$, легко найти $|MN| = \frac{h\sqrt{5}}{4}$. Поскольку $|GH| = \frac{3}{4}|BC|$ и $|FE| = \frac{1}{2}|BC|$, площадь трапеции $S_1 = \frac{5\sqrt{5}}{32} h|BC|$. Из $|DK| = h\sqrt{2}$ получаем $S_2 = S_{\triangle BCD} = \frac{\sqrt{2}}{2} h|BC|$. Отсюда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5\sqrt{10}}{32}$.

Вариант 2

1. $\{4\}$.

2. $3\sqrt{3}$.

3. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

4. Все точки интервала $]-\sqrt[4]{3}; -1[$ за исключением точек $\frac{-1-\sqrt{1+21k}}{21}$ $(20 < k < 33)$ и все точки интервала $]1; \sqrt[4]{3}[$ за исключением точек $\frac{-1+\sqrt{1+21k}}{21}$ $(24 < k < 39)$.

5. $\frac{5\sqrt{5}}{16}$. Указание. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник, углы ECB и EDA — прямые и $(GK) \| (LH)$.

Вариант 3

1. $\sqrt{8}$.

2. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

3. $]-\infty; 0[\cup [1; 2]$.

4. 5. Указание. Задача равносильна следующей: найти такое $n \in \mathbf{N}$, что $\frac{6480}{n} \in \mathbf{N}$, $\frac{11\,200}{n+3} \in \mathbf{N}$ и $\frac{6480}{n} < \frac{11\,200}{n+3}$. Числа n и $n+3$ одновременно делятся (или не делятся) на 3.

5. $\{1\}$ при $|a| > 1$, $[1; +\infty[$ при $a = 1$, $[-3; 1]$ при $a = -1$, $\left\{1, \frac{a+7}{a-1}\right\}$ при $|a| < 1$. Указание. Рассмотрите три случая: $x < -3$, $-3 \leqslant x < 1$ и $x \geqslant 1$. Можно также нарисовать график функции $y = |x+3| - 4$ и рассмотреть семейство кривых $y = a|x-1|$, изменяя a от 1 до $+\infty$ и до $-\infty$.

6. $\frac{1}{2}\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$. Решение. Пусть $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{BCA} = \gamma$, $\widehat{BKC} = \delta$, $[OM] \perp [AC]$ $(M \in [AC])$, $\widehat{OAM} = \varphi$, $[ON] \perp [AB]$ $(N \in [AB])$. 1) Докажем, что $[BK]$ не пересекается с $[AC]$. Предполагая противное, получаем $\widehat{ACK} = \beta$ (задача 1179 из «Геометрии 6—8»). Из $\triangle BKC$ $\delta + (\beta + \gamma) + \frac{\beta}{2} = 180°$. Отсюда и из равенств $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, $\delta = \frac{1}{2}(3\alpha - \gamma)$ получаем $\gamma = 90°$. Значит, $O \in [AB]$. Тогда по условию $|OM| = 2$. Отсюда $|BC| = 4$. Следовательно, $|AB| + |AC| = 2 + \sqrt{3} < 4 = |BC|$ — противоречие с неравенством треугольника. 2) $\widehat{BCK} = \alpha$ (та же задача 1179), $\widehat{CBK} = 180° - \frac{\beta}{2}$. Из $\triangle BKC$ $\alpha + \left(180° - \frac{\beta}{2}\right) + \delta = 180°$. Отсюда и из тех же двух равенств получаем $\alpha = 30°$. Из $\alpha + \left(180° - \frac{\beta}{2}\right) + \delta = 180°$ следует $\frac{\beta}{2} > \alpha$. Значит, $\beta > 60°$ и $\gamma < 90°$. 3) Докажем, что $\beta > 90°$. Предполагая противное, получаем, что O лежит внутри $\triangle ABC$ (при $\beta < 90°$; ввиду $\alpha = 30°$ и $\gamma < 90°$, $\triangle ABC$ — остроугольный) или на $[AC]$ (при $\beta = 90°$). Тогда $\widehat{OAN} = 30° - \varphi$. Из условий

$$\begin{cases} 2R \cdot \cos\varphi + 2R \cdot \cos(30° - \varphi) = 2 + \sqrt{3} \\ R \cdot \sin\varphi + R \cdot \sin(30° - \varphi) = 2 \end{cases}$$

Отсюда $\operatorname{tg} 15° = \frac{4}{2+\sqrt{3}} > 1$ — противоречие. 4) Следовательно, O лежит вне $\triangle ABC$, причём O и B лежат по разные стороны от (AC). В этом случае $\widehat{OAN} = 30° + \varphi$. Из условий

$$\begin{cases} 2R \cdot \cos\varphi + 2R \cdot \cos(30° + \varphi) = 2 + \sqrt{3} \\ R \cdot \sin\varphi + R \cdot \sin(30° + \varphi) = 2. \end{cases}$$

Отсюда $R^2 \cdot \cos^2 15° = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 1$. Вычислив $\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2}$, находим R.

Вариант 4

1. $x = \pm 4 \arccos\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 8\pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$.

2. $]-\infty; -2[\ \cup\ ]1; +\infty[$.

3. $\frac{2\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}-6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $]3; +\infty[$.

5. $2 \arcsin\left[\frac{1}{2}\left(\sin\alpha + \sqrt{3\left(\cos^2\alpha - \sin^2\beta\right)}\right)\right]$.

Указание. Проведите через (BC) плоскость π, параллельную плоскости сечения. Пусть $(SA) \cap \pi = D'$. Тогда $\widehat{CD'B} = \widehat{MDN}$.

6. $2\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right)$, $\quad \pi - \arccos h - \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right)$, $\quad \arccos h + \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right) - 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right)$.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр описанной окружности, R — ее радиус, S — центр вписанной окружности, $(OS) \perp (AS)$, E — точка пересечения (AS) с описанной окружностью, $D = (OE) \cap (BC)$. Опустим из S перпендикуляры на (OE), (BC) и (AB); основания этих перпендикуляров обозначим, соответственно, через F, K и L. Положим $|OS| = l$. 1) $\widehat{EOS} = \widehat{AOS}$, так как $[OS]$ — высота в равнобедренном треугольнике AOE. Поэтому $\triangle FOS \sim \triangle SOA$. Отсюда $\frac{|OF|}{|OS|} = \frac{|OS|}{|OA|}$, $|OF| = \frac{l^2}{R}$. 2) Так как (AE) — биссектриса угла BAC, E — середина дуги BEC. Значит, $(OE) \perp (BC)$. $\widehat{COE} = \widehat{BAC}$, поскольку $\angle COE$ измеряется дугой CE, а $\angle BAC$ измеряется половиной дуги BEC. Следовательно, $|OD| = |OC| \cdot \cos\widehat{COE} = R \cdot \cos\widehat{BAC}$. 3) Из $\triangle OAS$ $|AS| = \sqrt{R^2 - l^2}$. Поэтому $|FD| = |SK| = |SL| = |AS| \cdot \sin\frac{\widehat{BAC}}{2} = \sqrt{R^2-l^2} \cdot \sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$.
4) Из $|OD| = |OF| + |FD|$ получаем уравнение

$$R \cdot \cos\widehat{BAC} = \frac{l^2}{R} + \sqrt{R^2-l^2} \cdot \sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$$

или $\left(\frac{l}{R} = h\right)$

$$\cos\widehat{BAC} = h^2 + \sqrt{1-h^2} \cdot \sin\frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Решив его, находим $\sin\frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}$, $\widehat{BAC} = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right)$. 5) Из $\triangle AOS$ $\cos\widehat{AOS} = \frac{l}{R} = h$, $\widehat{AOS} = \arccos h$. Если точка O лежит вне $\triangle ABC$, то $\widehat{AOC} = \widehat{AOS} + \widehat{SOE} + \widehat{EOC} = 2\widehat{AOS} + \widehat{BAC}$ и $\widehat{AOC} = 2\pi - 2\widehat{ABC}$, откуда $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{AOS} - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Если точка O лежит внутри $\triangle ABC$, то $\widehat{AOC} = 2\pi - \widehat{AOS} - \widehat{SOE} - \widehat{EOC} = 2\pi - 2\widehat{AOS} - \widehat{BAC}$ и $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$, откуда снова $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{AOS} - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Итак, $\widehat{ABC} = \pi - \arccos h - \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right)$. 6) $\widehat{ACB} = \pi - \widehat{BAC} - \widehat{ABC}$.

Вариант 5

1. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = -\frac{7}{12}\pi + \pi l \quad (k, l \in \mathbf{Z})$.

2. $[-1; 0[$.

3. $]-\infty; 0[$.

4. $\frac{2}{S_2}\sqrt{\frac{S_1(S_2^2 - S_1^2)}{\pi}}$.

5. $[1; +\infty[$. **Указание.** При $p \neq 0$ сделайте подстановку $(x-p)^2 = t$. Рассмотрите случаи $p<0$, $0<p<1$, $p=1$, $p>1$. Корни исходного уравнения симметричны относительно точки $x = p$.

Вариант 6

1. $[2; +\infty[$.

2. $x = \frac{\pi}{4} k \quad (k \in \mathbf{Z})$.

3. $\frac{a^3}{(\sqrt{2}+1)^3}$.

4. $y = x+1$, $y = \frac{9}{\sqrt[3]{25}}x - \frac{3}{\sqrt[3]{5}}$.

5. $\frac{5}{24}$. **Решение.** Через точку R проведем прямую, параллельную (BC) (рис. 5). Из подобия треугольников NAR и QAC

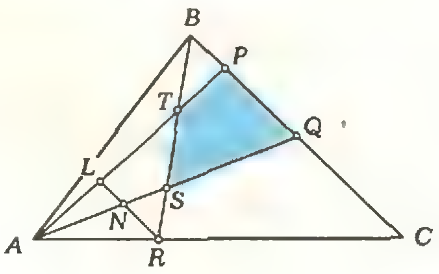


Рис. 5.

$$\frac{|NR|}{|QC|} = \frac{|AR|}{|AC|} = \frac{1}{3}.$$

Из подобия треугольников NSR и QSB

$$\frac{|SR|}{|BS|} = \frac{|NR|}{|BQ|} = \frac{|NR|}{|QC|} \cdot \frac{|QC|}{|BQ|} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{SBQ}}{S_{RBC}} = \frac{|SB| \cdot |BQ|}{|RB| \cdot |BC|} = \frac{3}{8}.$$

Аналогично, из подобий $\triangle ALR \sim \triangle APC$, $\triangle LRT \sim \triangle PTB$ получаем

$$\frac{S_{TBP}}{S_{RBC}} = \frac{1}{16}.$$

Значит, $S_{PQST} = S_{SBQ} - S_{TBP} = \frac{3}{8}S_{RBC} - \frac{1}{16}S_{RBC} = \frac{5}{16}S_{RBC} = \frac{5}{16}\left(\frac{2}{3}S_{ABC}\right) = \frac{5}{24}S_{ABC}$.

Вариант 7

1. 80 км/ч.

2. $x=(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$.

3. $\max\limits_{[-3;\,1]} f(x)=f(1)=17$. **Указание.** Нарисуйте график функции f.

4. $3\sqrt{3}$.

5. $\frac{\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. **Указание.** Если V — объем пирамиды, S — ее полная поверхность и r — радиус вписанного в нее шара, то $V=\frac{1}{3}Sr$.

Вариант 8.

1. $\{-1\}$.

2. $x_1=\frac{7}{16}\pi+\pi k,\ x_2=-\frac{5}{16}\pi+\pi l \quad (k,\ l \in \mathbf{Z})$.

3. $\frac{2}{3}\sqrt{145}$ см. **Указание.** Через точку E проведите прямые, параллельные (AC) и (BD).

4. Все пары $(x;\,y)$, где $\frac{3}{2}<x<2,\ 1<y<2$.

5. 28 см^2. **Указание.** Плоскость сечения пересекает параллельные грани параллелепипеда по параллельным плоскостям. Введите систему координат с началом A и осями по ребрам AD, AB, AA'.

Вариант 9

1. $\sqrt{1-2\sin\frac{3\pi}{2}}$.

2. $[-2;\,-1[\,\cup\,]-1;\,+\infty[$.

3. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4. $x_1=\frac{\pi}{20}+\pi k,\quad x_2=\frac{9}{20}\pi+\pi l,\quad x_3=\frac{13}{20}\pi+\pi m,$ $x_4=\frac{17}{20}\pi+\pi n \quad (k,\ l,\ m,\ n \in \mathbf{Z})$.

5. См. рис. 6; $\{(x;\,3)\}$, где $x \in [2;\,3]$.

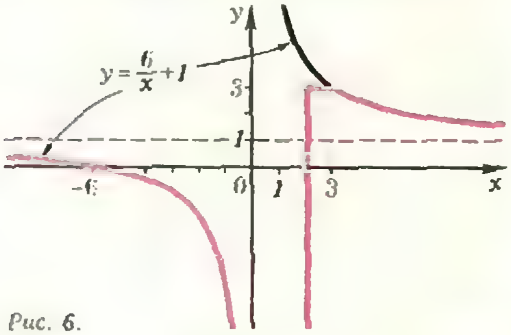


Рис. 6.

6. 10. **Указание.** $0<\cos\alpha<1$ (α — угол при большем основании).

Вариант 10

1. $\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{3\pi}{2}}$.

2. $\{1\}$.

3. $]-2;\,3[$.

4. $x_1=(-1)^k \arcsin\frac{5}{8}+\pi k,$

$x_2=(-1)^l \arcsin\frac{1}{8}+\pi l,$

$x_3=(-1)^{m+1} \arcsin\frac{7}{8}+\pi m \quad (k,\ l,\ m \in \mathbf{Z})$.

5. $\frac{5}{7}\sqrt{21}$.

6. $$\left\{\left(\frac{\pi}{3}+\pi(k+l);\ -\frac{\pi}{3}+\pi(k-l);\ 2\pi k\right),\right.$$
$$\left(-\frac{\pi}{3}+\pi(k+l);\ \frac{\pi}{3}+\pi(k-l);\ 2\pi k\right),$$
$$\left(\frac{2}{3}\pi+\pi(k+l);\ \frac{\pi}{3}+\pi(k-l);\ \pi+2\pi k\right),$$
$$\left.\left(\frac{\pi}{3}+\pi(k+l);\ \frac{2}{3}\pi+\pi(k-l);\ \pi+2\pi k\right)\right\}$$
$$(k,\ l \in Z).$$

Указание. Первое уравнение системы равносильно уравнению $4\cos^2(x-y)+4\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)+1=0$. Решите последнее уравнение относительно $\cos(x-y)$. Рассмотрите отдельно случаи $\cos(x-y)=1$ и $\cos(x-y)=-1$.

Вариант 11

1. $]-1;\,0[\,\cup\,]2;\,4[$.

2. $\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi};\ -\frac{\pi}{4}\right)$.

3. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \quad (k \in Z)$.

4. $\frac{1}{6}$.

5. В 2 раза.

6. $\{1-\sqrt{11+4\sqrt{3}},\ 1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}\}$. **Решение.** Данное уравнение равносильно уравнениям

$$\log_{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$$
$$2\log_{8+4\sqrt{3}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$$
$$\log_{8+4\sqrt{3}}(x^2-2x-2)=\frac{1}{2}\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$$
$$\log_{8+4\sqrt{3}}(x^2-2x-2)=\log_{(2+\sqrt{3})^2}(x^2-2x-3)$$
$$\log_{8+4\sqrt{3}}(x^2-2x-2)=\log_{7+4\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$$
$$\frac{\ln(x^2-2x-2)}{\ln(8+4\sqrt{3})}=\frac{\ln(x^2-2x-3)}{\ln(7+4\sqrt{3})}$$
$$\frac{\ln(x^2-2x-2)}{\ln(x^2-2x-3)}=\frac{\ln(8+4\sqrt{3})}{\ln(7+4\sqrt{3})}. \qquad (1)$$

Положим $7+4\sqrt{3}=a$ и рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{\ln(t+1)}{\ln t}=\frac{\ln(a+1)}{\ln a}. \qquad (2)$$

При $f(t)=\frac{\ln(t+1)}{\ln t}$ оно имеет вид

$$f(t)=f(a).$$

Поскольку

$$f'(t)=\frac{t[\ln t-\ln(t+1)]-\ln(t+1)}{t(t+1)\ln^2 t}$$

и ln возрастает на $]0;\,+\infty[$, заключаем, что $f'(t)<0$ на $]0;\,+\infty[$. Таким образом, f монотонна на $]0;\,+\infty[$. Следовательно, уравнение (2) имеет не более одного корня. Но один его корень $t=a$ очевиден. Поэтому уравнение (1) равносильно уравнению

$$x^2-2x-3=7+4\sqrt{3}.$$

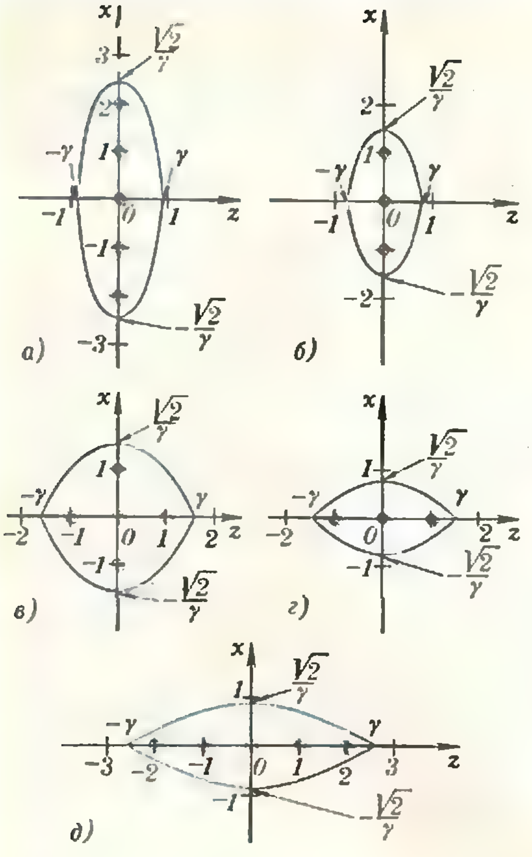


Рис. 7.

откуда $x=1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

Вариант 12

1. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k \quad (k\in \mathbf{Z})$.

2. $\left\{-3\frac{1}{2},\ -2\frac{1}{2}\right\}$.

3. $\frac{25}{4}$.

4. $\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{18}$. Указание. Докажите, что $|AC|=\sqrt{3}$ и $ABCD$ — ромб.

5. $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};1\right[\cup\left]\sqrt{2};2\right[$. Решение. При $\gamma<0$ решением данного неравенства является любая пара $z=0$, $x=n\in\mathbf{Z}$ — целочисленных решений бесконечно много. Пусть далее $\gamma>0$. Данное неравенство равносильно неравенству

$$|x|<-\frac{\sqrt{2}}{\gamma^3}z^2+\frac{\sqrt{2}}{\gamma}$$

или

$$\frac{\sqrt{2}}{\gamma^3}z^2-\frac{\sqrt{2}}{\gamma}<x<-\frac{\sqrt{2}}{\gamma^3}z^2+\frac{\sqrt{2}}{\gamma}.$$

Таким образом, нам надо оценить число точек с целочисленными координатами между параболами $x=-\frac{\sqrt{2}}{\gamma^3}z^2+\frac{\sqrt{2}}{\gamma}$ и $x=\frac{\sqrt{2}}{\gamma^3}z^2-\frac{\sqrt{2}}{\gamma}$. Если $0<\gamma<\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\frac{\sqrt{2}}{\gamma}>2$ — на оси ординат (оси x) имеется не меньше 5 искомых точек (рис. 7, *а*). Если $\frac{\sqrt{2}}{2}<\gamma<1$, то $1<\frac{\sqrt{2}}{\gamma}<2$ — между параболами (а именно — на оси ординат) имеется ровно 3 искомые точки (рис. 7, *б*). Если $1<\gamma<\sqrt{2}$, то $\frac{\sqrt{2}}{\gamma}>1$ — между параболами имеется не меньше 5 искомых точек (рис. 7, *в*). Если $\sqrt{2}<\gamma<2$, то $\frac{\sqrt{2}}{\gamma}<1$ — между параболами (а именно — на оси абсцисс) имеется ровно 3 искомые точки (рис. 7, *г*). Наконец, при $\gamma>2$ на оси абсцисс имеется не меньше 5 искомых точек (рис. 7, *д*).

Физика

Физический факультет

1. $T=m_2g\left(1+\frac{4(m_1l_1+m_2l_2)l_2\sin^2(\alpha/2)}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}\right)$.

2. $A=\frac{k_2(k_1+k_2)l^2}{2k_1}$.

3. $h=\frac{k(L-l)^2}{2g(M+m)}$.

4. $p=\left(\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}\right)\frac{T}{V_1+V_2}$.

5. $m_в=\left(1-\frac{r}{100\%}\right)\frac{p_н\mu V}{RT}=0{,}46$ кг, где $\mu=18\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды.

6. $U=U_0\frac{d}{d-2d_2-d_1+2d_2/\varepsilon}$.

7. $Q=\frac{C_1C_2^2\mathscr{E}^2}{2(C_1+C_2)^2}\frac{R_1}{R_1+R_2}=0{,}04$ Дж.

8. $x=2L\frac{R_{BC}}{R_{AB}+R_{BC}}=5\cdot10^3$ м $=5$ км.

9. $l\approx\frac{h}{4\alpha(n-1)}$.

10. $R=dn_2/(2n_1)=4$ см.

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\frac{y}{x}=1+\frac{4\pi R^3(2\rho_в-\rho_в)}{3M}\approx1{,}5$.

2. $m=\frac{MR\Delta T}{\mu hg}-\frac{p_0S}{g}\approx2{,}8\cdot10^3$ кг.

3. $B=E\sqrt{\frac{m}{2W}}\approx3{,}2\cdot10^{-3}$ Тл; линии магнитной индукции перпендикулярны линиям напряженности электрического поля и скорости электрона.

4. $\beta=120°$.

Химический факультет и факультет почвоведения

1. $\mu_{\min}=\dfrac{r\operatorname{tg}\alpha}{R+r}$.

2. $V=\dfrac{m}{\varrho_{\text{н}}(1-r/100\%)}\approx 8{,}3\cdot10^{-3}\ \text{м}^3\approx 8{,}3\ \text{л}$.

3. $\varphi_D=(\varphi_A+\varphi_B+\varphi_C)/3=70\ \text{В}$.

4. $F_1=\dfrac{Dl}{D+d}=9\ \text{см};\quad F_2=\dfrac{dl}{D+d}=3\ \text{см}$.

Географический и геологический факультеты

1. Ящик в стену не ударится, так как пройденный им путь

$$l=m^2(v_0-v)^2/(2\mu gM^2)=0{,}125\ \text{м}$$

меньше расстояния $d=0{,}5$ м до стены.

2. $\varrho=\dfrac{0{,}5p_0}{gh}\approx10^3\ \text{кг/м}^3$.

3. $\eta=1-\dfrac{\varrho Vc\Delta T}{P\tau}\approx0{,}4$ (здесь $\varrho=10^3\ \text{кг/м}^3$ — плотность воды).

4. $n=\sqrt{(2h/l)^2+1}=1{,}33$.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 1)

Задание 1 (С. Лимбах). **1. Фe4!** (но не 1. Фd1+? Лg1 2. Фd5+ e4!) **1... b1Ф 2. Ф:b1+ Лg1 3. Фb7+ e4 4. Ф:e4+ Лg2 5. Фb1+ Лg1 6. Фb7+ Лg2 7. Фe4!** Чисто геометрический мотив — дважды пройдя по треугольнику e4—b1—b7—e4, ферзь вынуждает короля покинуть свое убежище. **7... Крg1 8. Фe1** ×.

Задание 2 (Г. Риик, 1905 г.). **1. Кg4 Крh1 2. a7 g1Ф 3. a8Ф+ Фg2 4. Фh8+ Крg1 5. Фd4+ Крh1 6. Фd1+ Фg1 7. Фd5+ Фg2 8. Фh5+ Крg1 9. Фc5+ Крh1 10. Ф:c1+ Фg1 11. Фc6+ Фg2 12. Фh6+ Крg1 13. Фc1+ Фf1 14. Фc5+ Крh1 15. Фh5+ Крg2 16. Кe3+** и белые выигрывают.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

1. Боря живет в квартире 206.

2. Надо взять две нитки № 40 (а не № 10!) и сложить вместе.

3. Весы покажут больший вес. Действительно, давление воздуха в шарике больше атмосферного, поэтому добавление порции воздуха в шарик увеличит объем шарика на величину меньшую того объема, который эта порция воздуха занимала в атмосфере; следовательно, увеличение количества воздуха в шарике вызовет увеличение выталкивающей силы меньше, чем увеличение силы тяжести.

4. На месте знака «?» следует поставить представление числа 16 в троичной системе счисления, то есть 121. Действительно, в последовательности записаны представления числа 16 сначала в 16-ричной системе счисления, потом в 15-ричной, 14-ричной и т. д. Заметим, что вместо заключительного знака «?» в формулировке задачи можно было бы поставить запись числа 16 в «одноричной» системе счисления: IIIIIIIIIIIIIIII.

5. Не могут. Если бы отрезки *AM* и *BK* при пересечении делились бы пополам, то точки *A*, *B*, *M* и *K* были бы вершинами параллелограмма, то есть стороны *AC* и *BC* треугольника *ABC* были бы параллельны, что невозможно.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
Л. В. Денисенко, М. Б. Дубах, А. К. Малкин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурина
Фото: Т. П. Волосюк, А. С. Маклецов, А. Пушкарев (ТАСС), А. Сенцов (ТАСС), В. П. Шевченко

Главный художник В. А. Смирнов

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор О. М. Кривенко

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 16.2.83. Подписано в печать 16.3.83.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,90 Т-06945
Цена 40 коп. Заказ 355 Тираж 172 343 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ДОСКА ПОД ОХРАНОЙ

В прошлом номере журнала мы рассказали о комбинаторных задачах на шахматной доске, связанных с расстановкой наибольшего числа фигур, не угрожающих друг другу. Другой распространенный тип шахматных головоломок состоит в расстановке наименьшего числа фигур, которые держат под защитой все свободные поля доски, подсчете числа таких расстановок и обобщение задач на доску $n\times n$.

Ферзи. Пять ферзей на полях c6, d3, e5, f7, g4 охраняют всю шахматную доску. Число таких расстановок равно 4860. Любопытно, что пяти ферзей достаточно и для охраны досок 9×9, 10×10 и даже 11×11. В общем случае задача о числе ферзей, которые держат под обстрелом все свободные поля доски $n\times n$, не решена, есть лишь некоторые оценки (см. «Квант», 1977, № 12).

Ладьи. Здесь имеется полная ясность. На доске $n\times n$ нужно расставить ровно n ладей, чтобы они обстреливали все поля доски, число расстановок равно $2n^n-n!$ ($n!$ — произведение всех целых чисел от 1 до n).

Слоны. n слонов, поставленные вдоль одной из центральных вертикалей (горизонталей) доски, охраняют все свободные поля доски, то есть на обычной доске со своей задачей справятся 8 слонов. Формула для числа возможных расстановок n слонов на доске $n\times n$ имеет довольно громоздкий вид: $((2k-1)!(4k^2+k))^2$ при $n=4k$, $((2k)!(4k^2+5k+2))^2$ при $n=4k+2$, $2(k!)^2(k+2)$ при $n=2k+1$ ($k>0$).

Короли. Любое натуральное число n можно представить одним из следующих способов: $n=3k$, $n=3k-1$, $n=3k-2$, где k — некоторое натуральное число ($k=[(n+2)/3]$). Наименьшее число королей, охраняющих всю шахматную доску $n\times n$, равно k^2. В частности, для $n=8$ имеем $k=3$, и 9 королей (например, на полях b2, b5, b8, e2, e5, e8, h2, h5, h8) выполняют свои функции. Формула для числа расстановок неизвестна.

Кони. В общем случае, для доски $n\times n$ задача не решена. На обычной доске можно расставить 12 коней, охраняющих все свободные поля доски (b6, c2, c3, c5, c6, d3, e6, f2, f3, f6, f7, g2).

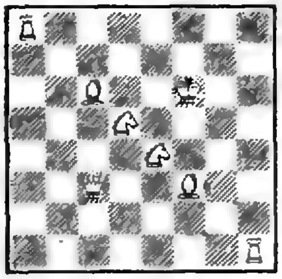
Пешки. На обычной доске для охраны хватает 29 пешек. Их можно поставить на первую горизонталь и на вертикали a, d и g. Число расстановок в общем случае (на доске $n\times n$) попробуйте найти самостоятельно.

В некоторых задачах об охране доски 8×8 требуется, чтобы под боем находились не только свободные поля, но и занятые фигурами. Пять ферзей, удовлетворяющих этому условию, можно поставить на поля a2, c4, d5, e6, g8. Восемь ладей, стоящих вдоль любой горизонтали или вертикали, также нападают на все поля доски. Что же касается других фигур, то для охраны всей доски их требуется несколько больше: коней — 14, слонов — 10, королей — 12.

В подобных задачах не обязательно брать одноименные фигуры. Пять ферзей справляются с шахматной доской, но двух из них можно заменить ладьями (ферзи b7, d1, f7, ладьи d3, h5) или даже ладьей и слоном (ферзи b4, f2, h6, ладья d8, слон e5), причем в первой расстановке атакованы все 64 поля доски. Ферзей может сопровождать конь или король (ферзи d6, e4, f5, g7 и конь c1 или король b2).

А можно ли расставить на шахматной доске полный комплект фигур (без пешек) так, чтобы они держали под обстрелом все 64 поля?

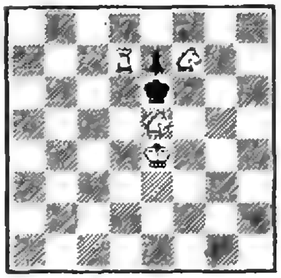
Как ни странно, восемь фигур могут охранять всю доску лишь в том случае, если слоны одноцветные.



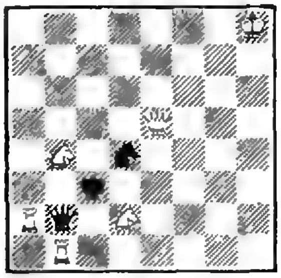
Если же слоны разного цвета, то одно поле всегда останется без охраны, причем доказано, что неатакованным может быть любое поле доски. Если мы хотим, чтобы под защитой находились только свободные поля доски, то хватает и семи фигур: Крb4, Фg2, Лf8, Лh1, Кc7, Кe5, Сc5.

Конкурсные задания

Апрель — «космический» месяц, и поэтому сегодня мы предлагаем две задачи на космическую тему. Первая из них посвящена В. Терешковой и Ю. Гагарину. Начальная буква «Т» в процессе решения трансформируется в букву «Г». В двухходовке начальное расположение фигур изображает ракету, устремившуюся к звездам.

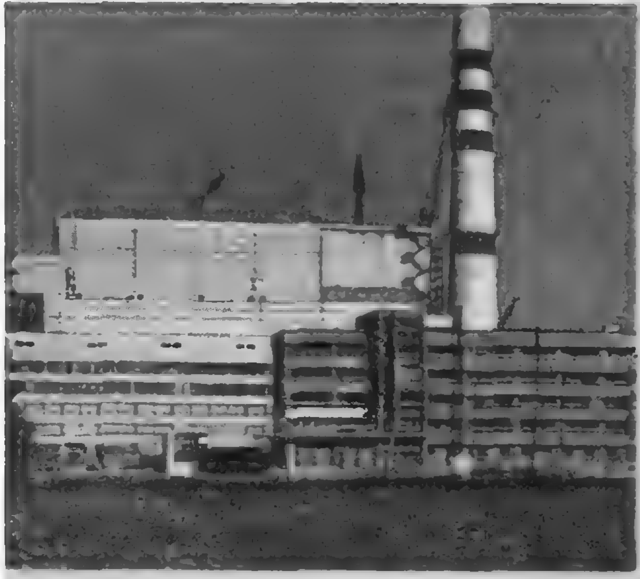


7. Мат в 5 ходов.



8. Мат в 2 хода.

Срок отправки решений — 25 июня 1983 года (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8»).



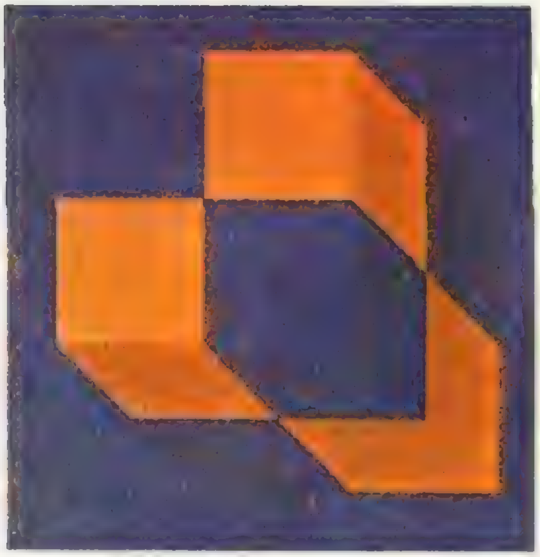
Верхнее фото — общий вид Ровенской атомной электростанции. Нижнее фото — нейтринный детектор. О том, как в нашей стране впервые были зарегистрированы нейтрино, рождающиеся внутри атомного реактора, рассказано в статье А. А. Борового «Первая в мире нейтринная лаборатория на атомной электростанции».

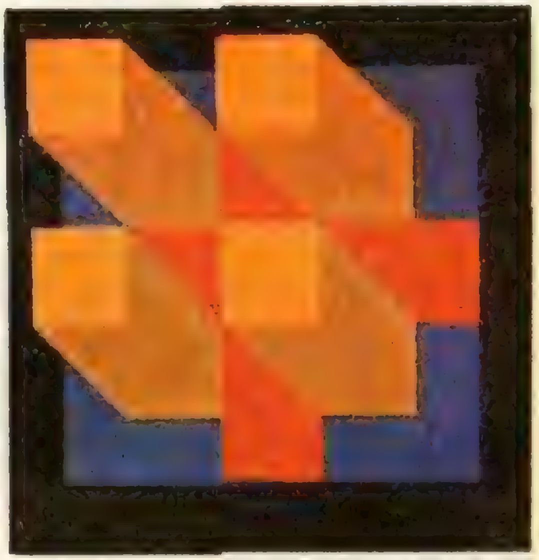
Цена 40 коп.

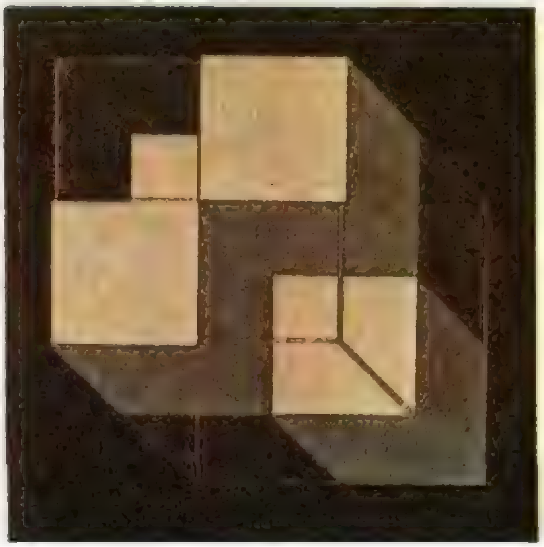
Индекс 70465

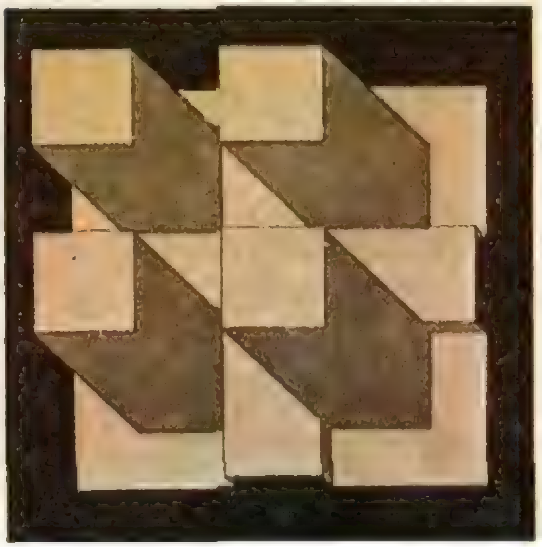
Известно, что несколько цветовых образцов, находящихся в одной плоскости, обычно воспринимаются лежащими в нескольких плоскостях, расположенных ближе или дальше реальной. Это — эффект хроматической стереоскопии. При рассмотрении цветового круга, помещенного на черное основание, становится очевидным, что его желтая область значительно выступает вперед, синяя — отступает в глубину, едва отрываясь от черного фона, красные и зеленые цвета занимают промежуточное положение. Аналогичным образом ощущает цвет в пространстве подавляющее большинство людей, обладающих нормальным цветовым зрением.

Одноцветный куб воспринимается как единый геометрический образ. Если разбить его на цветные кубики, он будет казаться пространственно расчлененным. Эту картину можно смоделировать в виде тонового рельефа, учитывающего кажущееся различие в расположении составляющих кубиков. Мы воспроизводим здесь два примера, иллюстрирующие связь между цветными изображениями и их тоновыми рельефами, предложенных художником А. В. Ефимовым.









НОМЕР
5

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

5 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука“. Главная редакция физико-математической литературы

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*И. К. Кикоин.* Физика и научно-технический прогресс	*I. K. Kikoin.* Physics and technological progress
9	*А. А. Шур.* Эти разные радиоволны	*A. A. Shur.* These varying radiowaves
16	*Ю. В. Нестеренко, Е. М. Никишин.* Очерк о цепных дробях	*Yu. V. Nesterenko, E. M. Nikishin.* Essay on continued fractions
21	*А. В. Митрофанов.* Задачи П. Л. Капицы	*A. V. Mitrofanov.* P. L. Kapitsa's problems
24	*А. Н. Зайдель.* Обман или заблуждение? (Об одном способе вычисления π.)	*A. N. Zaydel.* Mystification or error? (On a method for finding π.)
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
29	*А. А. Варламов.* Из старых опытов	*A. A. Varlamov.* From old experiments
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
34	*Л. П. Баканина.* Интерференция волн	*L. P. Bakanina.* Wave interference
	Новости науки	**Science news**
38	Открытие новой частицы	A new particle is discovered
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
39	Задачи	Problems
40	*Р. Ш. Данелия.* На пальцах и в уме	*R. Sh. Danelia.* On one's fingers or in one's head
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
42	Задачи М801—М805; Ф813—Ф817	Problems M801—M805; P813—P817
45	Решения задач М786—М790; Ф798, Ф799, Ф801, Ф802	Solutions M786—M790; P798, P799, P801, P802
53	**Практикум абитуриента**	**College applicant's section**
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Рецензии, библиография *(23, 28)*	**Book reviews** *(23, 28)*
	Наша обложка *(20, 52)*	**Our cover page** *(20, 52)*
	Смесь *(33, 37, 51)*	**Miscellaneous** *(33, 37, 51)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Симметрия и асимметрия *(3-я с. обложки)*	Symmetry and asymmetry *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1983

Физика и научно-технический прогресс

Академик И. К. КИКОИН

Первая часть этой статьи, посвященная влиянию физических открытий на развитие техники в XIX веке, была опубликована в 3-м номере нашего журнала.

В 1896 году французский физик Анри Беккерель, узнав об открытии Рентгена, предположил, что источником рентгеновских лучей служат флуоресцирующие вещества*). У Беккереля была целая коллекция таких веществ, среди которых наиболее интенсивно флуоресцировала урановая соль. Он провел ряд экспериментов. В опытах Беккереля флуоресцирующая урановая соль действительно засвечивала фотопластинку, закрытую черной бумагой. Но однажды он случайно оставил не освещенную предварительно урановую соль около фотопластинки. Оказалось, что и в этих условиях, в отсутствие флуоресценции, урановая соль засвечивала защищенную черной бумагой фотопластинку. Беккерель решил, что урановая соль испускает лучи, подобные рентгеновским. Так было открыто явление, получившее название радиоактивности (от латинского слова радиус — луч).

Этим явлением заинтересовались французские физики супруги Мария Склодовская-Кюри и Пьер Кюри. Они занялись детальным изучением урана и отходов от его фабричного производства и впервые обнаружили, что эти отходы дают излучение, которое по интенсивности намного превосходит излучение самого урана. В результате огромной работы Мария и Пьер Кюри впервые в мире выделили из этих отходов два новых доселе неизвестных элемента — полоний и радий.

Интенсивность излучения радия (в действительности это был хлорид радия) оказалась в миллион раз выше, чем интенсивность излучения урана. Выяснилось что каждый грамм радия в течение часа излучает около 580 джоулей. Непрерывное излучение химическими элементами энергии было совершенно непонятно и на первый взгляд, казалось, противоречило закону сохранения энергии.

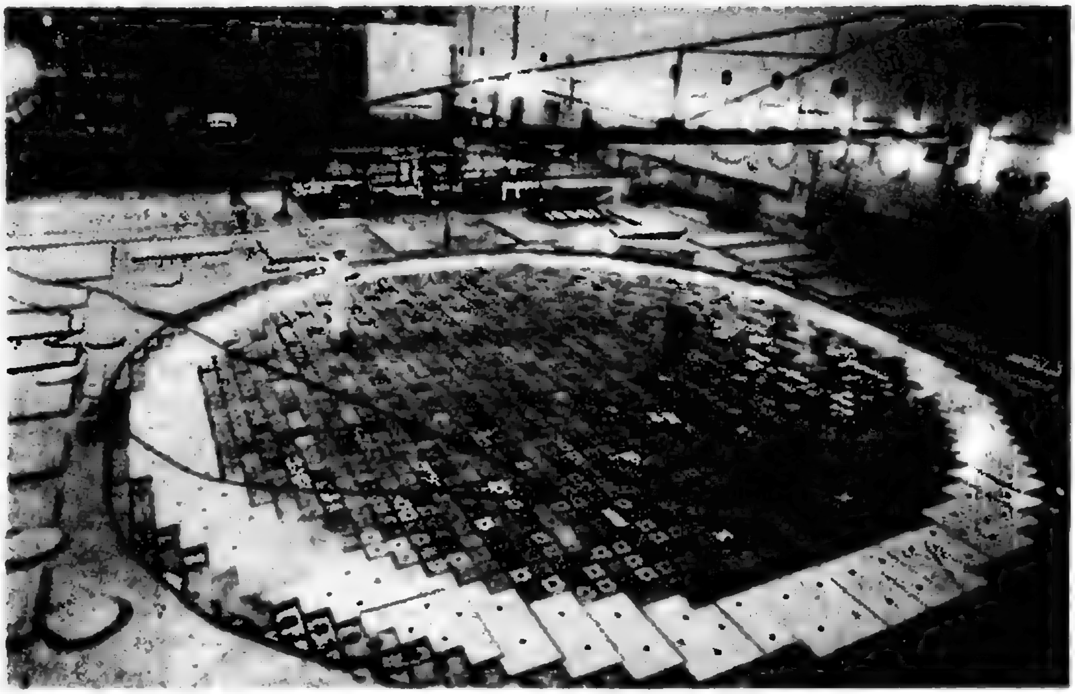
Способность радия испускать, хотя и очень медленно, значительные количества энергии больше всего заинтересовала физиков. Что заставляет радиоактивные вещества испускать лучи? Какова природа этих лучей? Откуда радиоактивные вещества берут энергию, которую они отдают в форме своих таинственных лучей? Такие вопросы волновали физиков. Это была загадка радия. Многие физики ломали голову над ее решением.

Экспериментальные исследования природы излучения радия продолжили Мария и Пьер Кюри. Они поместили радий в магнитное поле (между полюсами электромагнита) и заметили удивительное явление — излучение радия заметно ослабело. Супруги Кюри догадались, что ослабление излучения радия в магнитном поле связано с отклонением в этом поле каких-то заряженных частиц. Эти частицы назвали β-частицами. Теперь известно, что β-частицы — это электроны.

Резерфорд обнаружил, что кроме β-частиц радий испускает еще и положительно заряженные частицы. Они получили название α-частиц. И наконец, часть излучения радия, на которую магнитное поле вовсе не влияет, получила название γ-лучей.

---

*) Флуоресценция — свечение некоторых веществ, возникающее после облучения их светом. Флуоресценция имеет конечную длительность



Центральный зал четвертого энергоблока Ленинградской атомной электростанции им. В. И. Ленина.

Дальнейшие опыты, описание которых мы здесь опускаем (хотя они весьма поучительны), показали, что положительный заряд α-частиц ровно вдвое больше заряда электрона, а их масса совпадает с массой атома гелия. В целом атом электрически нейтрален. Поэтому легко догадаться, что α-частица — это атом гелия, из которого удалено 2 электрона. Что касается γ-лучей, то, как выяснилось, это электромагнитные волны, длина которых значительно меньше, чем у известных уже рентгеновских лучей.

Резерфорд решил использовать α-частицы в качестве разведчиков атомной структуры. Он вместе с сотрудниками сумел проследить за изменением траектории α-частиц при их прохождении через тонкий слой исследуемого вещества. Надо было брать именно тонкий слой вещества, потому что α-частицы, несмотря на свою большую скорость, составляющую около миллиона метров в секунду, застревают в веществе, если его толщина больше нескольких микрон. При этом Резерфорд получил совершенно неожиданный результат. Оказалось, что вместо равномерного расширения пучка α-частиц при прохождении через вещество некоторая часть α-частиц отклонялась от первоначальной траектории на очень большие углы. Наблюдались даже случаи, когда α-частица отклонялась почти на 180°. Этого не могло бы, конечно, произойти, если бы положительные и отрицательные заряды, из которых состоит нейтральный атом, располагались равномерно внутри атома.

Для объяснения наблюденных отклонений α-частиц на большие углы было необходимо предположить, что α-частица очень близко подходит к отклоняющему ее положительному заряду. При этом по закону Кулона на α-частицу действуют достаточно большие силы отталкивания, вызывающие ее отклонение. Оценки показывали, что эти расстояния примерно в 10 тысяч раз меньше размера самого атома. Поэтому Резерфорд предложил такую картину строения атома. Он представил себе атом в виде микроскопической копии Солнечной системы, где «Солнцем» служил положительный заряд, вокруг которого, как планеты, вращались электроны.

Если в Солнечной системе планеты движутся под действием гравитационных ньютоновских сил, то в атоме электроны движутся вокруг положительного заряда под действием электрических, кулоновских сил.

«Солнце» было названо ядром атома, которое имеет положительный заряд, равный сумме зарядов вращающихся вокруг него электронов (чтобы атом оставался электрически нейтральным). Это так называемая планетарная модель атома Резерфорда. Размер ядра при этом не превышает 10-тысячной доли размера самого атома (так же как размер Солнца много меньше размеров всей Солнечной системы). Так на свет появился новый термин, характеризующий атом, — атомное ядро. Открытие ядра положило начало новой отрасли физики, которая теперь называется ядерной физикой.

Исследования рассеяния α-частиц на различных элементах таблицы Менделеева привели к важному открытию: положительный заряд ядра численно равен произведению порядкового номера данного элемента в таблице Менделеева на заряд электрона. Это пролило новый свет на великий закон Менделеева, придав ему глубокий физический смысл. Оказалось, что номер химического элемента в его знаменитой таблице равен числу электронов, вращающихся вокруг ядра. Было выяснено также, что в состав ядра входят положительно заряженные частицы — протоны, заряд которых равен заряду электрона, а масса примерно в 1800 раз больше массы электрона.

Вначале изучением атомного ядра занимались лишь в очень небольшом числе лабораторий мира. Это лаборатория Резерфорда в Кембридже, лаборатория мадам Кюри в Париже и лаборатория Д. В. Скобельцына в Ленинграде. Однако к концу двадцатых — началу тридцатых годов основные свойства самих атомов были хорошо исследованы, и многие физики мира обратили свой взор на атомное ядро.

В 1932 году было сделано одно из крупнейших открытий в ядерной физике XX века: был открыт нейтрон — электрически нейтральная частица, масса которой приблизительно равна массе протона. Стало ясно, что ядро состоит из протонов и нейтронов.

Действительно, к тому времени было известно, что атомы, имеющие один и тот же номер в таблице Менделеева, могут обладать разными массами. Такие атомы называют изотопами данного элемента. Ядра атомов изотопов содержат таким образом, одинаковое число протонов, но разное число нейтронов.

В 1934 году супруги Ирен и Фредерик Жолио-Кюри сделали не менее важное открытие искусственной радиоактивности. Оно заключалось в том, что легкие элементы (например, бериллий) при облучении α-частицами сами становились радиоактивными, испуская при этом нейтроны.

При облучении тяжелых элементов таких явлений не наблюдалось. Знаменитый итальянский физик Ферми догадался, что у тяжелых элементов слишком велик заряд ядра, и α-частица, имеющая заряд того же знака, не может к нему достаточно близко подойти. На нейтрон, не имеющий заряда, положительный заряд не будет действовать кулоновскими силами. Ферми выполнил целый ряд опытов по облучению различных элементов нейтронами и обнаружил, что практически все элементы после облучения становятся искусственно радиоактивными. После облучения большинство элементов испускало α- и β-частицы, γ-лучи, нейтроны. При испускании α- и β-частиц образовывались новые химические элементы.

Вскоре Ферми опубликовал большую работу, в которой привел результаты своих исследований почти всех элементов таблицы Менделеева, которые после облучения нейтронами становились радиоактивными. При этом он дал практически полную характеристику искусственной радиоактивности каждого элемента. Тем самым открылась новая эра искусственного превращения элементов при соответствующем облучении.

Когда Ферми дошел до последнего (тогда) элемента системы Менделеева — урана, то после облучения нейтронами анализ полученных продуктов был настолько запутан, что Ферми не мог дать надлежащего описания прошедшей ядерной реакции.

Естественно, что после открытия нейтронной искусственной радиоактивности вопросами ядерных реакций занялись многие лаборатории мира, в частности Гана и Штрасмана в Берлине. Аналогичные работы проводились в Ленинградском физико-техническом институте в лаборатории И. В. Курчатова.

Парадоксальность ситуации с ураном состояла в том, что после облучения урановой мишени нейтронами в ней были обнаружены ядра таких элементов, как например барий, масса которых примерно вдвое меньше, чем масса урана. Распутать сложный процесс, который наблюдался Ганом и Штрасманом, помогла их бывшая руководительница Лиза Мейтнер, жившая тогда в Швеции. Подробную теорию этого процесса дал Нильс Бор, развивший идею, высказанную в короткой заметке известного советского физика Я. И. Френкеля.

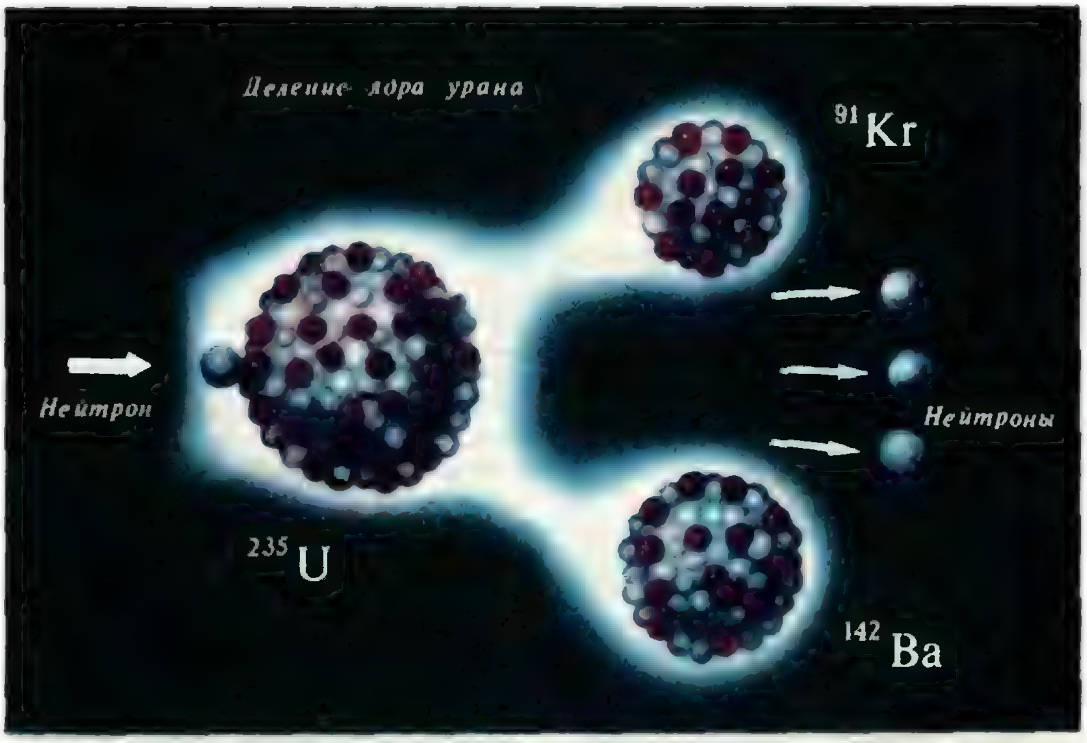
Не вдаваясь в рассмотрение сложных процессов, происходящих при облучении урана нейтронами, укажем главную особенность этой ядерной реакции: оказалось, что ядро урана расщепляется (делится) на два отдельных осколка. Они так и называются осколками. Это научный термин. Массы и заряды осколков определяют, какие именно изотопы элементов системы Менделеева они собой представляют. Вскоре выяснилось, что расщепляться могут не все изотопы урана, а только изотоп ^{235}U, которого очень мало в природном уране, всего 0,7%.

Энергия осколков, образующихся при делении ядра атома ^{235}U, оказалась во много раз больше, чем энергия нейтронов, которыми бомбардировали ядро урана. Такие случаи, когда энергия частиц, испускаемых ядрами, больше энергии облучающих частиц, уже бывали. Но до опытов с ураном было ясно, что только ничтожная часть бомбардирующих частиц (порядка миллионной доли) попадает в ядро и приводит к ядерной реакции. Остальные пролетают вдали от ядра и никакого действия не производят. Поэтому ясно, что если даже энергия испускаемых частиц искусственно радиоактивного вещества в сотни раз больше энергии бомбардирующих частиц, суммарная энергия, затрачиваемая на всю эту операцию, в 10 000 раз больше выделяемой энергии. Это и дало основание Резерфорду — основоположнику ядерной физики — утверждать, что атомное ядро не может служить источником энергии.

В случае с ураном все оказалось не так. Опыты показали, что при расщеплении ядра урана попавшим на него нейтроном кроме осколков, образующихся при этом, испускаются еще и нейтроны. При каждом акте взаимодействия ядра и попавшего в него одного нейтрона испускается в среднем больше двух нейтронов. А это значит, что нейтрон, попавший в ядро урана, рождает больше двух новых нейтронов, которые сами по себе ничем не отличаются от попавшего в ядро первичного нейтрона. Они могут, попав в другое ядро урана, снова его расщепить, при этом испустится еще два новых нейтрона, которые учетверяют количество расщепленных ядер, и т. д.

Другими словами, происходит самопроизвольное лавинообразное размножение нейтронов (цепная реакция). Надо только обеспечить условия, при которых образовавшиеся при расщеплении ядра урана нейтроны не вылетали бы из облучаемого куска урана, не успев расщепить новых его ядер.

Для этого нужно иметь достаточно большой объем, а следовательно, и большую массу урана. Такая масса называется критической массой. В этом случае потери нейтронов становятся незначительными, и огромная кинетическая энергия осколков урана передается атомам урана. Уран нагреется до очень высоких температур. Предсказание Резерфорда не подтвердилось. Было доказано, что ядра урана могут стать источником энергии.



Если бы удалось выделить практически в чистом виде ^{235}U, то, обеспечив его критическую массу, можно было бы получить огромное количество энергии. Как показали расчеты, процесс расщепления практически чистого ^{235}U под действием нейтронов происходит очень быстро и носит характер взрыва (такие расчеты провели Я. Б. Зельдович, Ю. Б. Харитон в СССР и ряд зарубежных физиков). Больше того, для этой цели даже не требуется специального источника нейтронов, потому что в атмосфере Земли всегда имеется небольшое количество нейтронов космического происхождения, которое достаточно для возбуждения взрывной реакции, если уран достиг критической массы. Стало ясно, что таким образом можно создать грозное оружие — атомную бомбу.

Многие физики во всем мире занялись детальным исследованием процесса деления ядер урана. Почти в каждом номере физических журналов во всем мире публиковались научные статьи или заметки, выясняющие детали, касающиеся расщепления ядер урана. Но получение чистого ^{235}U в нужных количествах, порядка десятков килограммов, казалось тогда фантастическим.

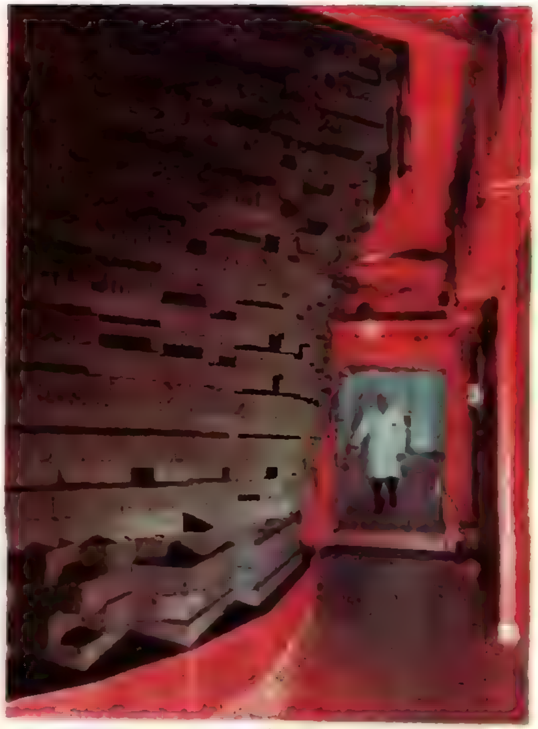
Однако вскоре стало ясно, что и естественная смесь изотопов урана может подвергаться цепной ядерной реакции. Для этого надо только как-то снизить энергию нейтронов, вылетающих при делении ядра ^{235}U. К счастью, оказалось, что скорость нейтронов можно регулировать в сторону ее уменьшения очень простым путем. Для этого достаточно пропустить нейтроны через вещество, состоящее из атомов, масса которых мало отличается от массы самих нейтронов. Тогда при столкновении нейтронов с такими атомами они довольно быстро передают часть своей энергии этим атомам, тем самым уменьшая свою скорость до уровня скорости теплового движения атомов.

Для замедления нейтронов пригодны вещества, масса атомов которых не слишком велика. Надо только, чтобы эти вещества не поглощали нейтронов, лишив их возможности замедлиться и расщепить соответствующие ядра урана. Свойством мало поглощать нейтроны обладает тяжелая вода, в состав которой вместо двух атомов обычного водорода входит два атома тяжелого водорода (изотопа водорода — дейтерия — с вдвое большей массой). Поместив блоки с естественным ураном в тяжелую воду, можно замедлить нейтроны и осуществить регулируемую самоподдерживающуюся цепную реакцию деления естественного урана. Это послужило основой создания ядерных реакторов на тепловых нейтронах.

В ядерном реакторе уран размещается в виде отдельных блоков (обычно цилиндрических), между которыми расположен замедлитель — графит или тяжелая вода. Постепенно увеличивая количество таких блоков, можно подойти к критической массе. При этом удается управлять числом нейтронов, выделяющихся при расщеплении ядер урана в блоках, и цепная реакция не переходит во взрывную. В атомной бомбе быстро соединяют две отдельные части урана, масса каждой из которых несколько меньше критической. Ясно, что общая масса соединенных частей быстро становится выше критической. В результате происходит взрыв. Ядерный реактор может служить долгодействующим источником энергии.

При работе ядерных реакторов происходит еще одно важное явление: часть избыточных нейтронов, взаимодействуя с ядрами ^{235}U, приводит к образованию изотопа нового элемента таблицы Менделеева с атомным номером 94 и массой ядра 239. Такого элемента в природе нет, и получают его только искусственно при облучении урана нейтронами. Этот элемент получил название плутония. Плутоний, так же как и ^{235}U, при облучении нейтронами расщепляется (делится) с образованием избыточного количества нейтронов. Его критическая масса в несколько раз меньше, чем у урана, и в этом его существенное преимущество по сравнению с ^{235}U. Плутоний химически отличен от урана, что позволяет выделить его из массы урана и получить в чистом виде химическим путем.

Таким образом, появились новые источники энергии — уран и получающийся из него плутоний. Чтобы представить себе масштабы энергии, которая выделяется при расщеплении ядер урана, достаточно сказать, что энергия, выделяющаяся при полном расщеплении одного килограмма ^{235}U, равна энергии, выделяющейся при сжигании 3000 тонн угля.


Первый советский атомный реактор, построенный в 1946 году (Москва. Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова).

К сожалению, первое техническое использование ядерной энергии пошло не на благо человека, а для чисто военных целей. В 1945 году американцы сбросили на города Хиросиму и Нагасаки две атомные бомбы. В этом не было необходимости, поскольку война с Японией уже была на исходе. Взрыв первой атомной бомбы над Хиросимой был эквивалентен 20 000 тонн обычного взрывчатого вещества (тринитротолуола).

Современные бомбы могут быть значительно мощней. Их мощность принципиально не ограничена. Поэтому использование такого оружия будет иметь катастрофические для всего человечества результаты.

Наша страна была всегда против применения ядерной энергии для военных целей, хотя в 1949 году у нас такое ядерное оружие уже существовало. Советский Союз прилагает максимальные усилия, чтобы избежать мировой ядерной катастрофы, и делает все возможное для использования ядерной энергии только в мирных целях.

СССР первым в мире использовал атомную энергию для блага человека, построив электростанцию, где в качестве горючего использовались не обычные источники энергии, нефть или уголь, а уран. Руководил этими работами академик И. В. Курчатов. Первая атомная электростанция была построена в Обнинске в 1954 году. В течение последних десятилетий атомные станции строились во многих странах мира. Строятся они и в СССР. Одна из самых больших в мире — это Ленинградская атомная станция (ЛАЭС) мощностью $4 \cdot 10^6$ кВт; сравнимую мощность имеет Воронежская АЭС и ряд других. В XI пятилетке решениями XXVI съезда партии предусмотрен ввод в действие атомных станций общей мощностью свыше $20 \cdot 10^6$ кВт.

В заключение я должен предостеречь читателей от мысли о том, что крупнейшие открытия в физике, приведшие к технической революции в середине нашего столетия, следовали одно за другим, совершая триумфальное шествие. В действительности все происходило не так. На пути к каждому открытию встречались огромные трудности. Для их преодоления потребовалась работа многих выдающихся ученых-физиков.

Всякой технической революции предшествует революция в самой физике. В прошлом столетии такой революцией было создание так называемой классической электродинамики Максвелла. Ясное понимание законов электромагнетизма открыло путь для широкого применения электричества в технике.

В нашем столетии во главе революции в физике стояли такие гиганты науки, как Альберт Эйнштейн и Нильс Бор. Теория относительности Эйнштейна привела к коренному изменению представлений о самых основных понятиях естествознания таких, как пространство и время. Нильс Бор заложил основы квантовой механики. Он показал, что движение частиц атомных размеров и меньших не описывается законами Ньютона. Для таких частиц существует свой свод законов, получивший название квантовой механики.

Теория относительности и квантовая механика поначалу представлялись весьма абстрактными, и мало кто понимал их значение. И только с течением времени эти теории получили всеобщее признание и были подтверждены многочисленными экспериментами. Все это привело в конце концов к ясному пониманию законов атомной и ядерной физики и к технической революции, из-за которой наш век стал называться ядерным веком.

Мы остановились здесь лишь на одной области физики, развитой в XX веке, на физике ядра, которая привела к революционному преобразованию современной техники, прежде всего — энергетики. Однако существует много других примеров, свидетельствующих о том, что развитие физической науки в нашем столетии служит основой научно-технического прогресса.

Эти разные радиоволны

Кандидат технических наук А. А. ШУР

Длинные радиоволны, короткие, ультракороткие... Сколько раз мы читали и слышали эти слова. Но мало кто знает, что за ними можно увидеть интересные особенности распространения и применения радиоволн, интересную историю их освоения. Сегодня мы затронем эту обширную тему, насколько это можно сделать в рамках журнальной статьи.

Сразу надо сказать следующее. При делении радиоволн на диапазоны исходят из качественных особенностей распространения, способов генерирования, излучения и приема радиоволн. Однако при переходе от одного диапазона к другому не всегда наблюдаются существенные изменения; поэтому границы диапазонов условны. Для простоты их определяют «круглыми», легко запоминающимися числами.

Длинные волны (диапазон ДВ) — радиоволны длиной от 10 км до 1 км, что соответствует частотам от 30 кГц до 300 кГц.

Средние волны (диапазон СВ) — от 1000 м до 100 м, соответственно частоты от 300 кГц до 3 МГц.

Короткие волны (диапазон КВ) — от 100 м до 10 м, частоты от 3 МГц до 30 МГц.

Ультракороткие волны (диапазон УКВ) — от 10 м до 1 см, частоты от 30 МГц до 30 000 МГц; диапазон УКВ подразделяется на три поддиапазона: метровые волны (1÷10 м), дециметровые волны (10÷100 см) и сантиметровые волны (1÷10 см).

Длинные волны

Немногим более 50 лет назад, на заре развития современной радиотехники, использовались преимущественно длинные волны. Под влиянием теории дифракции считали, что чем длиннее волна, тем лучше она огибает земной шар (ведь чем больше длина волны, тем бо́льшее по размерам препятствие волна способна огибать).

Техника того времени не давала возможности получать колебания более высоких частот. Мощности же, вырабатываемые в диапазоне ДВ, были вполне «приличные». Так, мощность машинных генераторов, созданных В. П. Вологдиным, на частотах 18÷50 кГц достигала 600 кВт. Машины Вологдина позволили осуществить радиотелеграфную связь между Москвой и Нью-Йорком (1925 год).

На длинных волнах началось массовое радиовещание. В Советском Союзе к регулярным передачам приступили почти одновременно две Московские радиопередающие станции (1924 год). Одна из них, расположенная в Сокольниках, имела небольшую мощность и предназначалась для радиолюбителей Москвы и области. Другая — радиостанция им. Коминтерна — находилась на Шаболовке и значительно превосходила по мощности сокольническую станцию. В радиус ее действия входили центральные районы европейской части страны.

Чтобы охватить вещанием всю огромную территорию России, необходимо было либо создать сверхмощную станцию, либо построить сеть маломощных станций, которые могли бы транслировать Москву и вести собственные программы. Второй путь оказался более разумным; им пользуются и в настоящее время.

В сети станций некоторые из них, расположенные далеко друг от друга, могут работать на одних и тех же частотах без взаимных помех. Но в большинстве случаев каждой станции выделяется своя полоса частот, иначе говоря — свой частотный канал. И тут стало ясно, что длинноволновый диапазон имеет весьма ограниченное число каналов. Весь диапазон занимает полосу частот 270 кГц. Для передачи одной радиовещательной программы требуется частотный канал шириной 9 кГц*). Легко подсчитать — в диапазоне ДВ содержится всего $\frac{270}{9} = 30$ радиовещательных каналов.

Другой недостаток длинных волн — слабо выраженная направленность антенн.

Понять качественно, что такое направленность, нетрудно. Приемная антенна улавливает колебания, распространяющиеся от источника по определенному направлению. Чем бо́льшая часть энергии, излучаемой передающей антенной, распространяется в данном направлении, тем лучше — это позволяет снизить мощность передатчика, а на приемной стороне — «отстроиться» от помех. Поэтому важно, чтобы передающая антенна «направляла» излучение, а приемная антенна «вылавливала» излучение, идущее по данному направлению.

Необходимые направленные свойства антенны нетрудно получить, когда размеры антенны превышают длину волны. На длинных волнах это сделать, мягко говоря, затруднительно.

Прием сигналов в диапазоне ДВ нередко сопровождается треском и шорохами. Это — атмосферные и индустриальные помехи. Источник атмосферных помех — ближние и дальние грозы.

Средние волны

Наряду с диапазоном ДВ для радиовещания стали использовать средние волны. И здесь очень скоро было замечено, что условия приема радиостанций, работающих в диапазоне СВ, различны в дневные и ночные часы. Днем радиус действия таких станций — сотни километров. Ночью же, особенно зимой, дальность приема существенно больше. Иногда можно «поймать» станции, удаленные на несколько тысяч километров. Была замечена и еще одна особенность приема на СВ: те станции, которые днем принимались устойчиво, ночью часто подвергались замираниям — громкость звука время от времени плавно возрастала и падала.

Когда были обнаружены эти явления, первоначальные представления о том, что радиоволны распространяются только вдоль земной поверхности, были сильно поколеблены. Стало очевидно, что в точку приема могут приходить две волны: одна «земная» — волна, распространяющаяся вдоль земной поверхности, а другая «небесная» — волна, отраженная от ионосферы (рисунок 1).

---

*) Диапазоны частот звуковых колебаний, возбуждаемых разными источниками, различны. Так, фортепианная музыка — звуковые колебания с частотой от 90 Гц до 9000 Гц, скрипичная музыка — от 260 Гц до 15 000 Гц, человеческий голос — от 100 Гц до 9000 Гц. Без особых требований к качеству звучания частотный канал можно ограничить шириной 9 кГц. Конечно, при этом могут «отрезаться» наиболее высокие или низкие частоты, но общий характер звучания передается достаточно точно.

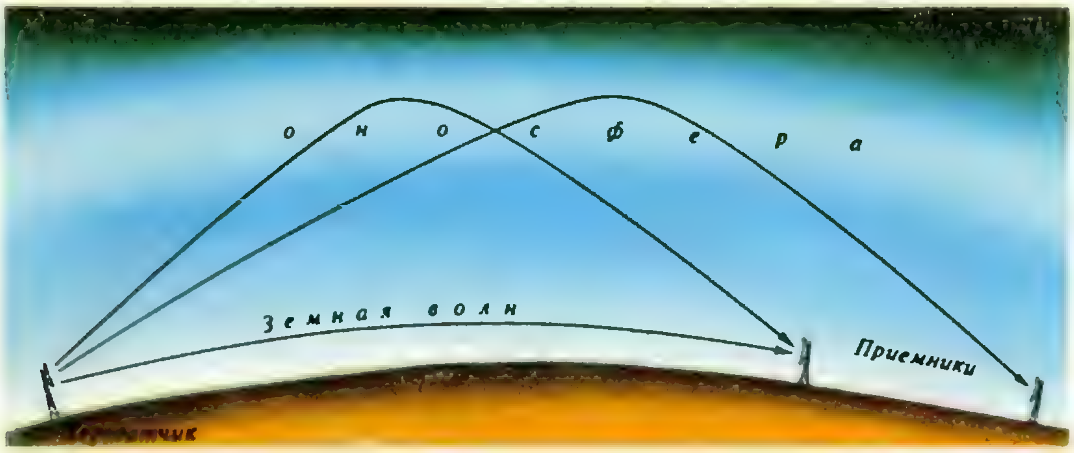


Рис. 1.

Напомним, что ионосфера — это слои ионизированного газа в верхней части атмосферы — на высотах от 60 км до 450 км. Ионизация газа происходит под действием ультрафиолетовых лучей и потока заряженных частиц, испускаемых Солнцем.

Средние волны отражаются от слоя, находящегося на высоте 100÷÷120 км (этот слой обозначают буквой «Е»). Но отражение возможно только в ночные часы. Днем в атмосфере на высоте 60÷80 км под воздействием солнечного излучения возникает слой, в котором средние волны сильно поглощаются (этот слой обозначают буквой «Д»). Так что в дневные часы на приемную антенну приходит только земная волна. Ночью же в тех местах приема, где происходит интерференция земной и небесной волн, и отмечается замирание сигнала (на рисунке 1 это происходит в ближней к источнику точке приема; до дальней точки земная волна не доходит — она затухает, и в этой точке принимается только отраженная волна). Если фазы волн совпадают, то результирующая напряженность поля возрастает — соответственно возрастает громкость звука. Если же волны компенсируют друг друга — слышимость станции ухудшается. Траектория отраженной волны и степень ее отражения все время изменяются, поэтому характер замираний случаен.

Изучение ионосферы привело к изменению взгляда и на распространение длинных волн. По современным представлениям, длинные радиоволны распространяются в своеобразном сферическом волноводе. Нижней стенкой волновода является земная поверхность, верхней — ионосфера.

Короткие волны

Коротковолновый диапазон шире диапазона длинных и средних волн в девять раз. Для работы на этих волнах можно создавать направленные антенны; при этом уровень помех меньше. Габариты передатчиков и антенн, работающих на КВ, сравнительно небольшие. Тем не менее короткие волны не сразу получили путевку в жизнь. Согласно теории дифракции, крупные препятствия на пути распространения коротких волн (большие дома, лесные массивы, возвышенности) экранируют передающую антенну. Поэтому считалось, что прием на КВ возможен только в зоне прямой видимости, и эти волны были отданы радиолюбителям для ближних связей и экспериментирования. В предоставленном им диапазоне радиолюбители стали устанавливать невиданные рекорды связи. Так, в январе 1925 года радиолюбитель Ф. А. Лбов при помощи передатчика мощностью 15 Вт передал из Нижнего Новгорода сигналы, которые были приняты в Багдаде, Париже и Лондоне. В 1928 году коротковолновик Е. В. Андреев, совершая поход на учебном парусном судне «Вега» вокруг Европы, поддерживал непрерывную связь с

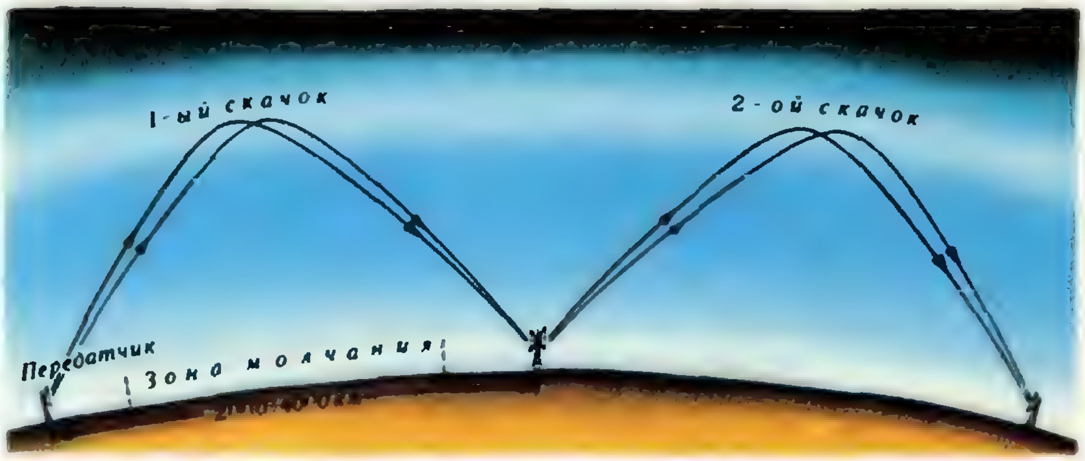


Рис. 2.

радиостанцией Ростовского университета. Станция Андреева имела мощность всего несколько ватт. Естественно, такие факты заставили специалистов переоценить возможности коротких волн и приступить к их систематическому изучению. В Советском Союзе исследованием коротких волн с 1923 года занималась, в частности, известная Нижегородская радиолаборатория им. В. И. Ленина. Как и следовало ожидать, распространение коротких волн на большие расстояния было обусловлено отражением от ионосферы.

Отражение может происходить на высотах 100÷400 км. Нетрудно рассчитать, что максимальная дальность приема при однократном отражении может составлять 2000÷÷4000 км (рисунок 2). Короткие волны способны отражаться от поверхности Земли и далее снова от ионосферы, поэтому они могут «обежать» весь земной шар и вернуться в точку передачи («кругосветное эхо»). С другой стороны, в некоторой средней части трассы скачка прием сигнала оказывается затрудненным. Этот участок называется «зоной молчания».

В точку приема всегда приходит несколько волн, прошедших различные пути и соответственно имеющих различные фазы. Вследствие их интерференции прием на коротких волнах всегда сопровождается быстрыми замираниями. Для борьбы с замираниями в радиоприемниках предусматривается система автоматического регулирования усиления. Принцип ее работы прост: при уменьшении сигнала усиление приемника возрастает, а при возрастании — уменьшается. На коротковолновых линиях связи для борьбы с замираниями применяется так называемый «разнесенный прием». При таком приеме сигнал от одного передатчика принимается на две или три антенны, которые установлены поперек трассы и разнесены друг от друга на расстояния, превышающие несколько длин волн. Сигналы на выходах приемных антенн изменяются несинхронно, и всегда есть возможность выбрать лучший сигнал (этот выбор производится, конечно, автоматически).

Поскольку коротковолновые антенны имеют довольно острую направленность, на одной и той же частоте могут работать без взаимных помех несколько удаленных друг от друга станций, вещающих на разные направления. К настоящему времени диапазон коротких волн использован до отказа. Можно себе представить, сколько сейчас в нем работает радиостанций, если в 1940 году число официально зарегистрированных станций, не считая радиолюбительских и военных, достигало 28 407!

Ультракороткие волны

Систематическое изучение ультракоротких волн в Советском Союзе началось в 1926 году под руководством Б. А. Введенского. Однако широкое их использование началось лишь после Великой Отечественной войны.

Главное преимущество диапазона УКВ — его ширина, почти 30 000 МГц! В этом диапазоне без труда можно передавать сигналы, содержащие широкий спектр (набор) частот, например, радиосигналы телевизионного изображения. Создание остронаправленных антенн в этом диапазоне не вызывает трудностей. Прием сигналов отличается высокой устойчивостью, практически не зависит от времени года и суток, не подвержен влиянию атмосферных и индустриальных помех. Но все эти преимущества реализуются, в основном, при наличии прямой видимости между антеннами передатчика и приемника. Если на пути распространения ультракоротких волн имеется препятствие, оно частично экранирует передающую антенну, и напряженность поля принимаемого сигнала существенно уменьшается. Качество приема ухудшается.

Очевидно, что расстояние прямой видимости зависит от высоты антенн (рисунок 3). В реальных условиях вследствие преломления (рефракции) в воздухе волны распространяются по несколько искривленной траектории. (Это позволяет увеличить расстояние прямой видимости на 15÷20%.) Для иллюстрации сказанного приведем пример из практики. В большинстве случаев передающая антенна телевизионных станций приподнята на 250 м, высота приемных антенн около 10 м. Расчет расстояния прямой видимости удовлетворительно совпадает с результатом экспериментальной проверки на равнинно-холмистой местности. Получается 75÷80 км.

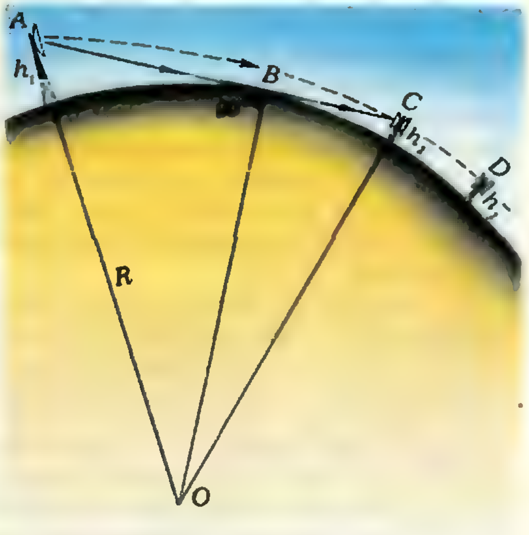


Рис. 3.

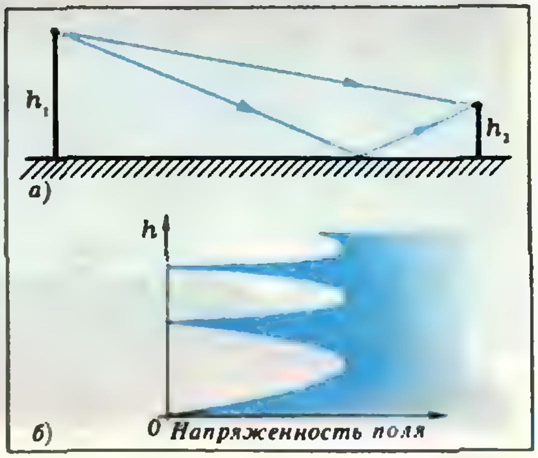


Рис. 4.

При передаче на ультракоротких волнах в пределах прямой видимости в точку приема приходят две волны. Вторая волна возникает вследствие отражения от земной поверхности (рисунок 4,*а*). Фазы волн различны. Поэтому при перемещении приемной антенны по высоте наблюдается периодическое возрастание и убывание напряженности поля (рисунок 4,*б*), образно говоря,— «застывшая» интерференционная структура электромагнитного поля. Максимум напряженности поля отмечается в тех точках приема, где фазы волн совпадают, минимум — при несовпадении фаз. Расчет радиолиний связан, конечно, с оптимальным подбором высоты антенн с учетом профиля местности.

Передача сигналов на очень большие расстояния в диапазоне ультракоротких волн осуществляется с помощью радиорелейных линий. Радиорелейная линия представляет собой цепочку приемно-передающих радиостанций, расположенных таким образом, чтобы между антеннами соседних станций была прямая видимость (рисунок 5). Сигнал, передаваемый с оконечной станции, принимается первой проме-

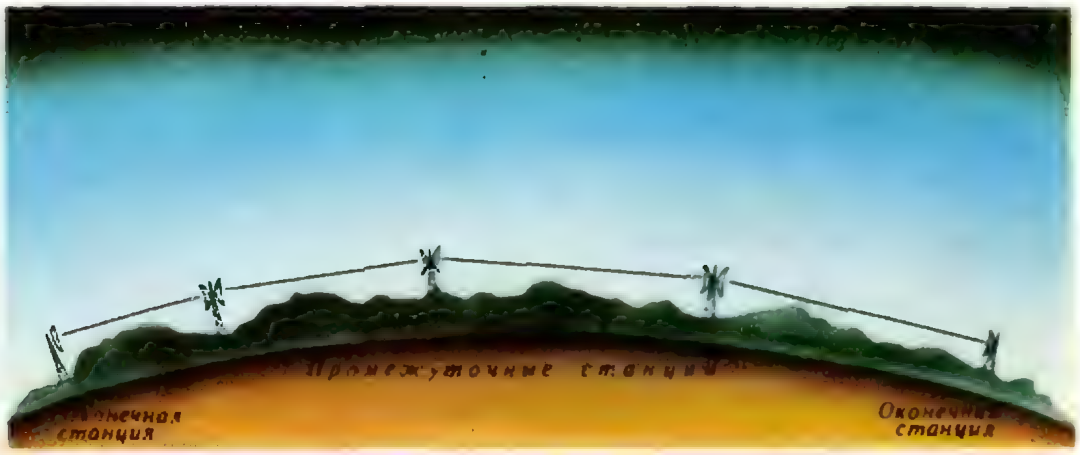


Рис. 5.

жуточной станцией, где он усиливается и передается на вторую промежуточную станцию, и т. д. до тех пор, пока он не будет принят оконечной станцией на другом конце линии. (Термин «радиорелейная» образован частично от английского слова «reley», что значит «смена», например, смена лошадей, смена в гонках с эстафетой и т. п.) Космическая радиорелейная линия работает по тому же принципу, но одна промежуточная станция находится на борту искусственного спутника Земли. Подача сигнала на спутник и прием его со спутника осуществляются с помощью остронаправленных антенн, которые автоматически следят с Земли за движением спутника. Дальнейшее использование наземных средств для телевизионного вещания (передающих станций, ретрансляторов, радиорелейных линий) становится все более трудным и экономически неэффективным, так как эти средства приходится располагать в удаленных районах с малой плотностью населения. Поэтому все шире пользуются космическими радиосистемами. К сожалению, передача программы со спутника непосредственно на домашний, индивидуальный телевизор стоит пока дорого. В существующих космических системах телевизионного вещания сигнал от спутника сначала принимается специальным ретранслятором, а от него уже передается на обычные телевизионные приемники. Для космического телевизионного вещания иногда используют стационарный спутник, положение которого относительно Земли неизменно.

Радиорелейные линии позволяют вести одновременно тысячи телефонных разговоров, производить обмен радиовещательными и телевизионными программами между городами и странами. Линии, как правило, работают на сантиметровых волнах. Острая направленность антенн, работающих в этом диапазоне, позволяет пользоваться передатчиками небольшой мощности — порядка нескольких ватт. При высоте антенных опор 50÷80 м средняя длина интервала между антеннами на линии составляет 50÷÷70 км.

Нельзя не рассказать о естественном распространении ультракоротких волн далеко за пределы прямой видимости. При экспериментальном изучении мешающих сигналов от мощных ультракоротковолновых станций было обнаружено, что напряженность поля сигналов далеко за горизонтом намного меньше, чем в условиях прямой видимости, но в десятки и сотни раз больше значений, предсказываемых теорией дифракции.

В частности, было установлено следующее. Радиоволны длиной 6÷10 м могут в некоторых случаях отражаться от ионосферы. Это может быть либо при повышенной электронной концентрации, либо при появлении так называемого спорадического слоя. Спорадический (нерегулярный) слой появляется на вы-

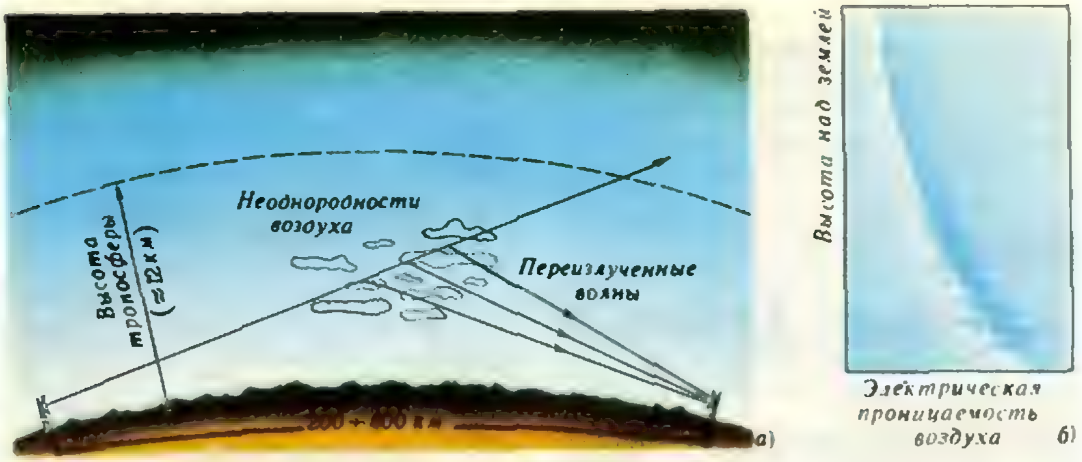


Рис. 6.

соте 90÷110 км. Он представляет собой скопление газа гораздо большей электронной плотности, чем электронная плотность на той же высоте в окружающей среде. Случайный прием телевизионных станций, удаленных от места приема на несколько тысяч километров, объясняется отражением волн от этого слоя. Попытки использования этого явления для регулярного приема телевидения, равно как и борьба с ним как с помехой, не имели успеха.

Изучение сигналов на расстояниях порядка 200÷800 км от передатчика привело к открытию ранее неизвестного явления, которое сейчас называется «дальнее тропосферное распространение УКВ». Такое распространение связано с переизлучением радиоволн в воздушной оболочке Земли, иными словами,— в тропосфере. Переизлучение объясняется неоднородным строением воздуха. Электрическая проницаемость воздуха зависит от влажности, температуры и давления. В воздухе всегда имеются неоднородности — области, в которых эти метеопараметры, а следовательно и электрическая проницаемость, отличаются от параметров окружающего воздуха. Ярким примером неоднородностей, видимых простым глазом, являются облака. Неоднородности воздуха приводят к частичному рассеянию и отражению энергии волны. Схематически это показано на рисунке 6. В правой части рисунка дана случайная зависимость электрической проницаемости воздуха от высоты. Зубчики на зависимости свидетельствуют о наличии неоднородностей. Форма неоднородностей и их взаимное расположение могут быть самыми различными. Наибольшую роль играют слоистые неоднородности. Их протяженность — от сотен метров до нескольких километров. Отраженные от неоднородностей ультракороткие волны могут быть приняты на большом расстоянии от передатчика. Изменчивость неоднородностей во времени приводит к интерференции приходящих волн и, как следствие, к быстрым замираниям сигнала. Переизлученная мощность составляет всего $10^{-6} \div 10^{-8}$ часть от мощности передаваемого сигнала.

Описанное явление используется в тропосферных радиорелейных линиях. Такие линии требуют установки мощных передающих устройств и систем разнесенного приема для устранения замираний сигнала. И все же они оказываются целесообразными для радиотелефонной связи в труднодоступных районах. Преимущество тропосферных линий — большая длина интервала между соседними станциями. При использовании дециметровых волн длина интервала получается равной 250÷300 км, но в отдельных случаях может быть и больше. Например, на известной тропосферной радиолинии «Советский Союз — Индия» расстояние между корреспондирующими пунктами около 700 км.

Очерк о цепных дробях

Кандидат физико-математических наук
Ю. В. НЕСТЕРЕНКО,
доктор физико-математических наук
Е. М. НИКИШИН

Известно много примеров, когда научное направление, считавшееся перспективным и важным, не оправдывало возложенных на него надежд; постепенно наблюдался отток от него научных сил, и само направление теряло свою актуальность. Одним из таких направлений в математике является теория цепных (или непрерывных) дробей. До конца прошлого века непрерывные дроби различного сорта весьма часто появлялись в математических работах. В прошлом веке и немного ранее были доказаны важные теоремы о непрерывных дробях. Теплилась надежда, что если удастся понять структуру цепных дробей, можно будет получить новые результаты в теории чисел и математическом анализе. Надежда оправдалась лишь частично, и в дальнейшем математика, особенно в области теории чисел, проложила новые пути так, что задачи теории цепных дробей были отодвинуты в сторону.

Но все равно, как некогда Северный полюс притягивал своих покорителей, простые по постановке, легкие на вид проблемы цепных дробей тянут к себе математиков, заставляют их снова и снова искать закономерности этого странного объекта. Многие важные вопросы современной математики и физики приводят к объектам типа цепных дробей. Поэтому методы исследований, оттачиваемые на них, оказываются полезными в широком круге проблем. Мы коснемся здесь лишь тех вопросов, которые связаны с теорией чисел, откуда, собственно говоря, и возникла теория цепных дробей.

Календарь, зубчатые колеса и немного истории

Сколько дней в году? Все знают, что в обычном году 365 дней, а в високосном — 366 дней. Високосными объявлены годы, номер которых делится на 4, например, 1904, 1908, ..., 1980, 1984, ..., 1996. Однако годы 1800, 1900, 2100, 2200 не объявляются високосными, а годы 2000, 2400, 2800 будут високосными. Почему?

Механика календаря довольно проста. Земля равномерно вращается вокруг своей оси, делая один оборот за сутки. Один круг обращения Земли вокруг Солнца составляет один год и этот год равен 365,24219878... суток. Конечно, можно сказать, что добавка 0,242... суток мала. Однако с течением времени она накапливается, если положить год равным 365 суток. В древности, когда знание длительности года в сутках было весьма приблизительным, накапливаемая ошибка достигала серьезных размеров. Так в Риме в 46 г. до н. э. отставание составляло 90 дней!

Чтобы установить закономерность чередования обычных и високосных годов в календаре, нужно выбрать длину цикла q (после которого все периодически повторяется) и число p високосных годов в цикле. Запишем величину года в виде $365+\alpha$, где $\alpha=0{,}242\ldots$ Натуральные числа p и q нужно подобрать так, чтобы величина

$$\beta=q\alpha-p$$

была по возможности маленькой, в то время как p и q были бы не очень большими. Собственно говоря, подбору подлежит лишь натуральное q, число же p есть ближайшее к $q\alpha$ целое. Тогда за q лет пройдет $365q+p$ суток. Из равенства $365q+p=q(365+\alpha)-\beta$ следует, что за это время Земля сделает

$$q-\frac{\beta}{365+\alpha}\approx q$$

оборотов вокруг Солнца. Ошибка в одни сутки набежит лишь за $\frac{1}{\beta}$ таких циклов или же $\frac{q}{\beta}$ лет. В григорианском календаре, по которому мы живем, в качестве длины цикла взято $q=400$ годам. Из этих лет 303 являются обычными и 97 високосными. Високосными объявляются годы, которые делятся на 4, за исключением тех из них, для которых число сотен тоже делится на 4. Таким образом, средняя длительность года по григорианскому календарю составляет

365,242500 суток,

ошибка в одни сутки набежит примерно за 3300 лет. Эта точность вполне удовлетворительна. Можно было бы достигнуть даже большей точности, взяв $q=128$ и $p=31$, однако устройство календаря 128-летними циклами неудобно для использования.

Для нас важна в данном случае возникающая здесь математическая задача: *по данному числу* α *найти* p *и* q*, по возможности небольшие, так чтобы число*

$$q\alpha-p$$

было по возможности маленьким.

Аналогичная задача возникает при конструировании зубчатых передач. Для передачи вращения с одного колеса на другое требуется нарезать q зубцов на одном и p на другом так, чтобы их отношение $\frac{p}{q}$ как можно лучше приближало заданное заранее число ω (нужное отношение угловых скоростей). Ясно, что из соображений экономии следует подбирать p и q по возможности меньше.

Можно было бы увеличить список примеров, которые приводят нас к задаче наилучшего приближения действительных чисел при помощи рациональных. Например, устройство музыкальной гаммы, применения в вычислительной математике, в теоретических вопросах небесной механики и др.

Цепные дроби как раз и являются инструментом, дающим в некотором смысле наилучшие приближения рациональными числами. Эти дроби для вычислительных целей начали применять очень давно. Уже в 1572 году итальянский математик и инженер Р. Бомбелли (1526 ? —1572) использовал их для вычисления $\sqrt{13}$. Позднее англичанин У. Броункер (1620—1684) применил их для уточнения числа π. X. Гюйгенс (1629—1695), выдающийся физик, астроном, математик (изобретатель маятниковых часов), был первым, кто при использовании цепных дробей указал, в каком смысле они дают наилучшую аппроксимацию действительного числа. Великий Л. Эйлер (1707—1783) дал обоснование ряда положений теории непрерывных дробей и нашел цепную дробь для числа e. Перечислить математиков, внесших свой вклад в эту теорию после работ Эйлера, уже очень трудно из-за их большого числа. Начиная с работ выдающегося русского математика П. Л. Чебышева (1821—1894), активно развивается теория, имеющая дело с функциональными цепными дробями.

Алгоритм Евклида и разложение числа в цепную дробь

Пусть p, q — два натуральных числа. Производя деление с остатком, найдем

$$\begin{aligned}
p&=a_0q+q_1, & 0&<q_1<q\\
q&=a_1q_1+q_2, & 0&<q_2<q_1,\\
q_1&=a_2q_2+q_3, & 0&<q_3<q_2,\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
q_{k-2}&=a_{k-1}q_{k-1}+q_k, & 0&<q_k<q_{k-1},\\
q_{k-1}&=a_kq_k.
\end{aligned}$$

Указанный набор действий называется *алгоритмом Евклида*. Можно показать, что полученное число q_k будет наибольшим общим делителем чисел p, q. Нам этот факт не потребуется, поэтому доказательство мы опускаем*).

Из полученных равенств следует

$$\frac{p}{q}=a_0+\frac{q_1}{q}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{q_2}{q_1}}=\ldots$$

$$\ldots=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{\vdots}{\cdots+\cfrac{1}{a_k}}}}.$$

---

*) См., например, Квант, 1979, № 3, с. 24.

Л. Эйлер.

К тому же результату приводит и такой процесс. Пусть α — действительное число. Положим

$$\alpha=a_0+\frac{1}{\alpha_1},\ a_0 \text{ — целое,}$$

где $\alpha_1>1$. Если α_1 — не целое, то продолжим процесс дальше. Представим α_1 в виде $\alpha_1=a_1+\frac{1}{\alpha_2}$, где a_1 — целое, положительное и $\alpha_2>1$. Таким образом,

$$\alpha=a_0\,\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\alpha_2}}.$$

Если α_2 — не целое, то можно продолжить процесс дальше. Таким образом, на k-м шаге получаем равенство. «Многоэтажная» запись дроби (1) очень громоздка, поэтому в дальнейшем мы будем часто пользоваться следующей более компактной специальной записью:

$$\alpha=a_0+\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\dots+\frac{1|}{|a_{k-1}}+\frac{1|}{|\alpha_k},\qquad(1)$$

где $\alpha_k>1$.

Нетрудно доказать, что если $\alpha=\frac{p}{q}$ — рациональное число, то для некоторого k число α_k будет целым. Ясно также, что если при некотором k получится целое α_k, то число α является рациональным. Если же α — иррациональное число, то указанный процесс никогда не оборвется и возникнет бесконечная *цепная* (или *непрерывная*) *дробь*

$$\alpha=a_0+\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\dots+\qquad(2)$$
$$\dots+\frac{1|}{|a_{k-1}}+\frac{1|}{|a_k}+\dots$$

Знак равенства здесь стоит условно, поскольку непонятно, что означает выражение справа. Для того чтобы придать ему смысл, рассмотрим конечные суммы вида

$$\pi_k=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{\dots}{\dots+\cfrac{1}{a_k}}},$$

которые называются *подходящими дробями* непрерывной дроби (2). По определению принимают, что *правая часть равенства* (2) *представляет собой предел подходящих дробей:*

$$\lim_{k\to\infty}\pi_k.$$

Сформулируем теперь в виде набора задач те свойства цепных дробей, которые составляют основу их элементарной теории и, в частности, устанавливают равенство (2).

Основные свойства цепных дробей

1. *Пусть* $\pi_k=\frac{p_k}{q_k}$ *— подходящая дробь цепной дроби* (2). *Докажите справедливость рекуррентных соотношений:*

$$p_0=a_0,\ p_1=a_0a_1+1,\ \dots,\ p_{k+1}=a_{k+1}p_k+p_{k-1},\ \dots$$

$$q_0=1,\ q_1=a_1,\ \dots,\ q_{k+1}=a_{k+1}q_k+q_{k-1},\ \dots$$

для $k=1,2,3,\dots$

2. *Установите следующие соотношения:*

а) $q_np_{n-1}-p_nq_{n-1}=(-1)^n,\quad n\geqslant1;$

б) $q_kp_{k-2}-p_kq_{k-2}=(-1)^{k-1}a_k,\ k\geqslant2;$

в) $\pi_{n-1}-\pi_n=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}\ n\geqslant1;$

г) $\pi_{k-2}-\pi=\frac{(-1)^{k-1}a_k}{q_kq_{k-2}},\ k\geqslant2.$

П. Л. Чебышев.

3. *Покажите, что дроби π_0, π_2, π_4, ... монотонно возрастают:*

$$\pi_0<\pi_2<\pi_4<\pi_6<\ldots,$$

а дроби π_1, π_3, ... монотонно убывают:

$$\pi_1>\pi_3>\pi_5>\ldots$$

4. *Пусть числа a_k определены равенством (1). Докажите соотношение:*

$$\alpha=\frac{p_{k-1}\alpha_k+p_{k-2}}{q_{k-1}\alpha_k+q_{k-2}},\quad k\geqslant 2.$$

5. *Докажите неравенство*

$$\frac{1}{2q_{n+1}}<|q_n\alpha-p_n|\leqslant\frac{1}{q_{n+1}}.$$

6. *Докажите, что*

$$\lim_{k\to\infty}\pi_k=\alpha.$$

Как видно из задач 1—6, подходящие дроби π_n довольно хорошо приближают число α. Так, из оценок задачи 5 и неравенства $q_{n+1}<q_n$ следует, что если α — иррационально, то неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$$

выполняется для всех подходящих дробей $\pi_n=\frac{p_k}{q_k}$ цепной дроби числа α.

Числовые примеры

Цепную дробь (2) числа α иногда обозначают $[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots]$. Можно доказать, что для каждой последовательности целых чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$, ($a_0\geqslant 0$ и $a_j\geqslant 1$ для $j\geqslant 1$) существует единственное положительное число α такое, что

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots].$$

Если последовательность a_0, a_1, a_2, ... известна, то последовательность подходящих дробей $\pi_k=\frac{p_k}{q_k}$ удобно вычислять, пользуясь равенствами из задачи 1, заполняя следующую таблицу:

a		a_0	a_1	a_2	...	a_{k-1}	a_k	a_{k-1}	a_{k+2}	...
p	1	a_0	p_1	p_2	...	p_{k-1}	p_k	...		...
q	0	1	q_1	q_2	...	q_{k-1}	q_k	...		...

Пример 1. Найдем разложение в цепную дробь числа $\sqrt{2}$.

Имеем $a_0=1$,

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1,\quad a_1=2,$$

$$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1,\quad a_2=2.$$

Ясно, что в последовательности α_j, $j=1, 2, \ldots$, все члены равны $\sqrt{2}+1$, а в последовательности a_j, $j=1, 2, \ldots$, все члены равны 2. Итак,

$$\sqrt{2}=[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots].$$

Вычислим несколько подходящих дробей для $\sqrt{2}$:

a		1	2	2	2	2	2	2	...
p	1	1	3	7	17	41	99		...
q	0	1	2	5	12	29	70	169	...

Получили последовательность подходящих дробей: $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, ...

Из задачи 5 следует, что

$$\left|\sqrt{2}-\frac{99}{70}\right|<\frac{1}{70\cdot 169}<10^{-4}.$$

Таким образом, рациональная дробь

$\frac{99}{70}$ приближает $\sqrt{2}$ с точностью лучшей, чем 0,0001.

Пример 2. Рассмотрим периодическую цепную дробь

$$[2;\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ \ldots].$$

Коротко ее можно записать так: $[2;\ \overline{1,\ 1,\ 1,\ 4}]$. Найдем число, которому она соответствует. Если это число обозначить через α, то выполняется равенство (почему?)

$$\alpha=2+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2+\alpha}$$

или, после преобразований,

$$\alpha=\frac{21+8\alpha}{8+3\alpha}.$$

Отсюда следует, что $\alpha^2=7$, и, так как $\alpha>2$, получаем $\alpha=\sqrt{7}$.

Легко видеть, что этим способом можно найти значение любой периодической цепной дроби.

Наилучшие приближения и цепные дроби

Наилучшим приближением к числу α называется дробь $\frac{p}{q}$ $(q>0)$ такая, что

$$|q'\alpha-p'|>|q\alpha-p|$$

для всех $1\leqslant q'<q$ и всех p'. Справедлива

Теорема. *Всякое наилучшее приближение к α есть подходящая дробь к α; при $k>1$ верно и обратное, то есть любая подходящая дробь $\frac{p_k}{q_k}$ при $k>1$ доставляет наилучшее приближение к числу α.*

Доказательство этой теоремы несложно, и мы предоставляем его читателю. (Если же трудности окажутся непреодолимыми, то можно обратиться к книге С. Ленга «Введение в теорию диофантовых приближений» (М., Мир, 1970.)

Эквивалентность чисел

Два числа α и β называются *эквивалентными*, если

$$\alpha=\frac{a\beta+b}{c\beta+d},$$

где a, b, c, d — целые и $ad-bc=1$ или -1.

Обозначим через σ и σ_k (где k — целое) операции, определенные следующим образом:

$$\sigma\alpha=\frac{1}{\alpha},\quad \sigma_k\alpha=k+\alpha.$$

Ясно, что, применяя σ и σ_k к числу α, мы всегда получаем эквивалентное число. Ясно также, что применение операций вида

$$\sigma\sigma_k\alpha=\frac{1}{\alpha+k},\quad \sigma_k\sigma_\alpha=k+\frac{1}{\alpha}=\frac{k\alpha+1}{\alpha}$$

также дает пример эквивалентных числу α чисел.

Задачи

7. *Докажите, что если α и β эквивалентны, то найдутся целые числа $k_1, k_2, \ldots, k_l$ такие, что*

$$\beta=\sigma_{k_1}\sigma\sigma_{k_2}\sigma\ldots\sigma_{k_l}\alpha.$$

8. *Пусть числа α и β имеют одинаковое разложение в цепную дробь, начиная с некоторых номеров k и S, то есть*

$$\alpha=r_0+\frac{1|}{|r_1}+\frac{1|}{|r_2}+\ldots+\frac{1|}{|r_k}+\frac{1|}{|d_1}+\frac{1|}{|d_2}+\ldots,$$

$$\beta=h_0+\frac{1|}{|h_1}+\frac{1|}{|h_2}+\ldots+\frac{1|}{|h_{s'}}+\frac{1|}{|d_1}+\frac{1|}{|d_2}+\ldots$$

Докажите, что тогда числа α и β эквивалентны.

9. *Докажите, что если числа α и β эквивалентны, то их цепные дроби имеют вид* (3).

(Продолжение в следующем номере)

Наша обложка

Бумажные звездочки, показанные на первой странице обложки, — не просто декоративный сюжет к Первомайскому празднику. Они связаны с математикой, причем с разными ее разделами. С одной стороны — это модели одного из звездчатых многогранников, о которых уже писалось в «Кванте» (1973, № 5, с. 26), и поэтому они относятся к теории симметрий в пространстве (геометрия, теория групп). С другой стороны, эти звездочки соприкасаются с теорией узлов (см. «Квант», 1975, № 7, с. 6 или 1981, № 3, с. 8) и с так называемой теорией кос. В теории кос алгебраическими методами изучаются приемы сплетения кос из веревок или полосок, а наши звездочки как раз и сплетены из бумажных полосок. О том, как это делается, мы расскажем в одном из ближайших номеров журнала.

О. М.

Задачи П. Л. Капицы

Кандидат физико-математических наук
А. В. МИТРОФАНОВ

Некоторые из читателей «Кванта» наверное слышали о «Физических задачах» лауреата Ленинской и Нобелевской премий академика П. Л. Капицы. В полном объеме (153 задачи) они были изданы в 1972 году*). Предназначались эти задачи, в основном, для студентов и аспирантов физтеха — Московского физико-технического института. Сейчас задачи Капицы популярны у молодых физиков. Чем же они примечательны?

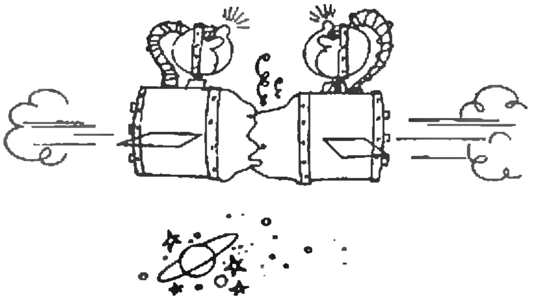
Формулировки задач П. Л. Капицы занимательны, непохожи на аналогичный материал из других задачников. В задачах много юмора, шутки. Курьезные эксперименты, примеры из истории физики, забавные физические опыты, принципы действия некоторых игрушек и серьезных технических устройств — часто это тоже темы капицынских задач. Некоторые из них удобнее решать, экспериментируя с простейшими самодельными устройствами,— в этом случае можно легче «отгадывать» решение. В некоторых задачах требуется рассмотреть опыт или явление, на которые обычно мало кто обращает внимание. Во многих задачах не заданы численные значения физических величин; решающий задачу должен сам выбрать эти значения. Делается это для того, чтобы учащиеся могли конкретно представлять себе масштабы тех физических величин, которыми приходится оперировать (ток, скорость, напряжение, температура и т. п.).

Для достаточно полного решения всех задач требуется хорошая профессиональная подготовка. Но уловить идею решения той или иной задачи, оценить полученный результат, хотя бы по порядку величины, бывает доступно и школьнику.

Пользуясь любезным разрешением академика П. Л. Капицы, мы помещаем в этом номере журнала несколько новых его задач. Одну из них мы попробуем решить здесь же. Соображения о выборе подхода к решению остальных задач, ответы и решения некоторых из них будут опубликованы в одном из следующих номеров «Кванта». Попробуйте решить предложенные задачи самостоятельно *). Не огорчайтесь, если они сразу у вас не получатся. Путь поиска истины никогда еще не был легким. Зато эти поиски помогут вам открыть для себя новый мир Физики. Желаем вам в этом успеха!

Задачи

1. Два спутника летят навстречу друг к другу. Опишите, что произойдет в результате их лобового столкновения.

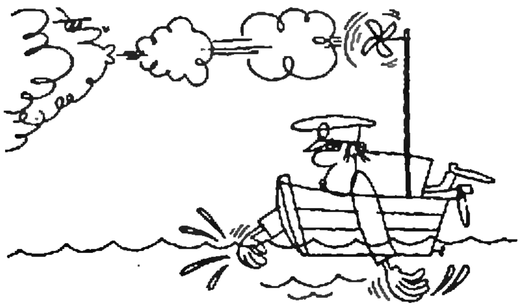


• **2.** На корабле установлен ветродвигатель типа ветряной мельницы, который вращает гребной винт корабля. Рассмотрите возможность движения такого корабля против ветра.

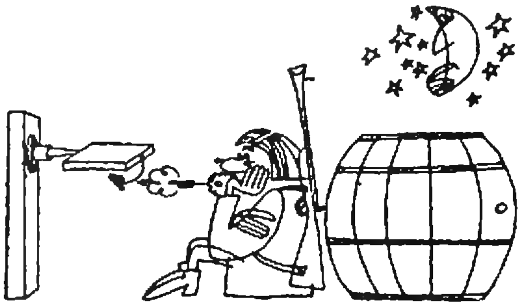
---

*) П. Л. Капица. Физические задачи. М., Знание, 1972. В предисловии к этому сборнику П. Л. Капица рассказывает об истории создания задач.

*) **От редакции.** Если вам очень понравится собственное решение какой-нибудь из этих задач — присылайте его в редакцию. Наиболее интересные читательские решения мы опубликуем.

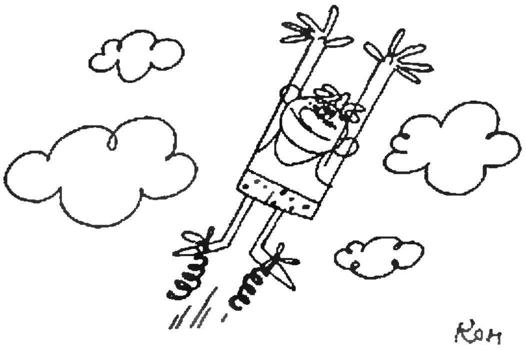


3. В старые добрые времена у сторожей были колотушки (чтобы злоумышленники знали, что сторож не спит). Такая колотушка — это дощечка с рукояткой, к дощечке на веревке подвешен шарик. При каком движении колотушки шарик будет стучать с периодом T?

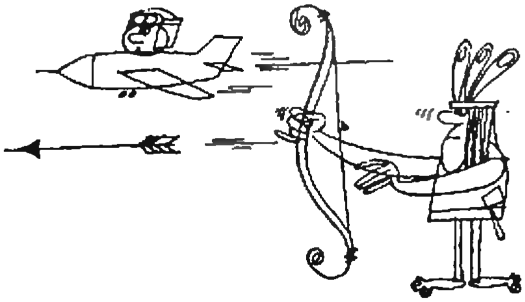


4. С горы высоты $h=1$ км с уклоном в 45° катится без скольжения и разрастается снежная лавина. Определите скорость лавины у подножия горы.

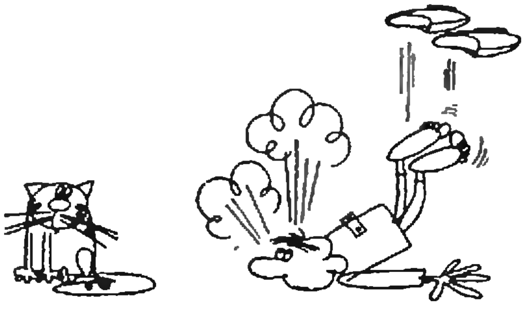
5. Гимнасты, многократно отскакивая от батута, увеличивают высоту прыжков. Батут — это горизонтальная плоскость на пружинных подвесах. Рассчитайте наиболее эффективную конструкцию пружины батута и выясните, что ограничивает высоту прыжков гимнастов.



6. Как влияет на скорость полета стрелы форма лука? Оцените предельную скорость стрелы, выпущенной из современного спортивного лука.



7. Человек мог бы ходить по потолку, как ползает по потолку муха, если бы ноги человека прилипали к потолку. В случае железного потолка это можно было бы осуществить с помощью магнитных башмаков. Придумайте и рассчитайте конструкцию таких башмаков.



8. Чем определяется точность фокусировки электронного пучка? Какова точность фокусировки луча в современном телевизоре?

Решение задачи 3

Эту задачу удобнее решать, экспериментируя с моделью колотушки, которую можно изготовить самому из доски с вырезанной рукояткой. К низу доски в центре надо каким-либо удобным способом прикрепить веревку с металлическим шариком на конце. Таким «шариком» может быть гайка (ни при каких условиях шарик не должен соскакивать!). Нетрудно заметить, что существует три наиболее простых способа воспроизводить периодические удары шарика о поверхность доски: 1) подбрасывать шарик вверх горизонтально расположенной доской; 2) наклонной доской ударять шарик, раскачивая его подобно маятнику; 3) держась за рукоятку, опустить доску вниз, отвести руку назад и резко сообщить быстрое движение шарику в вертикальной плоскости, после чего он, описав примерно половину дуги окружности, ударится в доску, которая к этому моменту занимает горизонтальное положение. На опыте проверяется, что именно в последнем случае возникают резкие громкие удары, наподобие тех, которыми отпугивали когда-то злоумышленников.

Период T — время между ударами — складывается из времени t_1 разгона доски, при котором шарику сообщается большая скорость v_0 (отвод руки назад и резкий взмах вперед), времени t_2, за которое шарик описывает полуокружность с радиусом r, двигаясь в поле силы тяжести с начальной скоростью v_0, и времени t_3, за которое шарик, потеряв скорость при ударе о доску, упадет вниз с высоты $2r$.

Рецензии, библиография

Олимпиадные задачи

Недавно вышла из печати книга «Всесоюзные олимпиады по физике»*). В ней собраны задачи, предлагавшиеся школьникам на Всесоюзных олимпиадах (с I по XIV), на I и II Всероссийских олимпиадах, а также на олимпиадах Московского физико-технического института и Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

В последние годы издавалось довольно много сборников задач по физике, были среди них и книги с трудными, «олимпиадными» задачами. Иногда задают вопрос: «А зачем решать так много задач, особенно трудных? Нужно ли это?».

Скажем сразу: решение задач — не самоцель. Это очень удобный (и объективный!) способ проверить, все ли вы понимаете в пройденной теме, умеете ли применять полученные знания. Это способ потренировать свое мышление, ведь многие задачи родились одинаково — как упрощенные (а иногда и вовсе не упрощенные!) вопросы, возникавшие в ходе научных исследований. Это способ сравнить свой уровень с уровнем участников олимпиад по физике. И, наконец, это просто увлекательное занятие.

Ко всем задачам сборника приведены решения. Но эти решения вовсе не единственно возможные. Трудную задачу почти всегда можно решать несколькими способами. Возможно, ваш способ окажется проще, красивее и — не исключено! — просто правильнее. В этих случаях напишите в редакцию нашего журнала — ведь олимпиадные задачи интересуют очень многих.

Основное место в книге отведено задачам обоих туров — теоретического и экспериментального — Всесоюзных олимпиад. Для экспериментальных задач даны краткие указания, как их делать. Бо́льшая часть этих задач может быть поставлена в любом школьном физическом кабинете.

Многие задачи сборника «Всесоюзные олимпиады по физике» уже публиковались в различных задачниках, в журнале «Квант». Однако, собранные вместе, они могут принести много пользы — и при занятиях физических кружков, и в самостоятельной работе.

А. Р. Зильберман

---

*) И. Ш. Слободецкий, В. А. Орлов. Всесоюзные олимпиады по физике. Пособие для учащихся. (М., «Просвещение», 1982.)

Обман или заблуждение?

(Об одном способе вычисления π)

Доктор физико-математических наук
А. Н. ЗАЙДЕЛЬ

Как определить экспериментально численное значение π? Наверное, проще всего взять нитку, измерить с ее помощью длину какой-нибудь окружности известного диаметра и разделить результат на длину диаметра. Оказывается, приближенно найти π можно и с помощью иголки ... и теории вероятностей. Такой способ придумал французский естествоиспытатель Ж. Л. Л. Бюффон (1707—1788)[*]. Впоследствии опыт Бюффона не раз повторялся для проверки некоторых выводов теории вероятностей (вернее, их применимости на практике). Не обошлось при этом и без одного курьезного случая, о котором и пойдет у нас речь. Но сначала расскажем, в чем состоит

Опыт Бюффона

Для его осуществления нужно немного: плоская горизонтальная поверхность с нанесенными на ней параллельными равноотстоящими прямыми и игла. Расстояние между прямыми h и длина иглы l должны удовлетворять соотношению $l<h$ (рис. 1). Будем произвольным образом подбрасывать иглу над такой поверхностью, сообщая ей каждый раз небольшое вращение так, чтобы игла свободно падала с высоты 50—60 см, составляя при падении совершенно случайный угол с начерченными прямыми. После каждого броска будем отмечать, пересекла (рис. 1, *а*) или не пересекла (рис. 1, *б*) игла одну из параллельных прямых и подсчитывать частоту пересечений, то есть отношение числа m бросаний, при которых пересечение произошло, к их общему числу n. Довольно скоро мы заметим, что при многократном повторении бросаний частота будет меняться все меньше и меньше. Более того, если произвести много длинных серий подбрасываний, обнаружится, что частота пересечений почти во всех сериях будет примерно одной и той же.

Это свойство «устойчивости» частоты (наряду, разумеется, со случайностью, или непредсказуемостью, исхода каждого опыта) характерно для всех экспериментов, изучаемых в теории вероятностей[*]. Каждому исходу такого эксперимента сопоставляется некоторое число p, $0<p<1$, — *вероятность* этого исхода, выражающее степень возможности появления данного исхода в результате эксперимента. Вероятность — это как раз и есть то значение, около которого колеблется частота

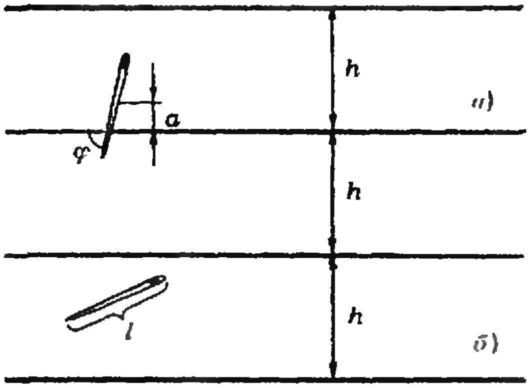


Рис. 1.

---

[*] См. об этом также в заметке А. Виленкина «Число «пи» и теория вероятностей» (Квант, 1977, № 5).

[*] Для ознакомления с началами теории вероятностей можно рекомендовать популярные книжки: Е. С. Вентцель «Теория вероятностей (первые шаги)» (М., Знание, 1977), А. В. Скороход «Вероятность вокруг нас» (Киев, Наукова думка, 1980), А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров «Введение в теорию вероятностей» (М., Наука, 1982).

осуществления того или иного события в достаточно длинных сериях экспериментов. *Поэтому приближенное значение вероятности можно получить эмпирически, вычислив соответствующую частоту.* (Точным математическим выражением наблюдаемого в эксперименте стремления частоты к какому-то предельному значению (вероятности) служит так называемый *закон больших чисел*, доказанный в своей самой простой форме около трехсот лет назад Якобом Бернулли.) С другой стороны, методы теории вероятностей во многих случаях позволяют исходя из условий проведения эксперимента рассчитывать вероятности теоретически.

В конце статьи мы покажем, как решается задача Бюффона о нахождении вероятности p того, что игла пересечет одну из линий. Ответ получается замечательный: $p = \frac{2}{\pi}\,\frac{l}{h}$! А поскольку частота пересечений m/n примерно равна этой вероятности, для приближенного вычисления π имеем формулу

$$\pi \approx \frac{2l}{h}\cdot\frac{n}{m}. \qquad (1)$$

Что показали эксперименты

Точность приближения в формуле (1) будет тем выше, чем больше n, и на первый взгляд кажется, что, бросая иглу достаточно много раз, можно получить сколь угодно точное значение π. Попробуйте проделать такой опыт и вы легко убедитесь, что получить этим способом для π значение 3,1 довольно легко. Надежно получить следующий десятичный знак — 4 — уже значительно труднее.

В прошлом веке, когда теория вероятностей зачастую рассматривалась как полуэкспериментальная наука, такие опыты имели большое значение и весьма тщательно ставились многими учеными. Ниже приводится таблица, взятая из курса теории вероятностей Б. В. Гнеденко.

Экспериментатор	Год	Число бросаний	Экспериментальное значение π
Вольф	1850	5000	3,1596
Смит	1855	3204	3,1553
Фокс	1894	1120	3,1419
Лаццарини	1901	3408	3,1415929
Истинное значение π с восемью знаками			3,1415927

В первой колонке даны фамилии ученых, бросавших иглу, во второй — год проведения опыта, в третьей — число бросаний, из которого было определено π, и в последней — полученное в результате опытов значение. В нижней строке таблицы дано значение π с восемью знаками.

Сравним с этим числом экспериментальные значения. Числа в первых двух строках отличаются от π на 0,01—0,02. Число, полученное Фоксом, всего на 0,0003 больше π — это удивительный результат, а вот число Лаццарини лишь на 0,0000002 отличается от истинного значения. Это уже действительно — чудо, а чудеса бывают только в сказках.

Неизбежность ошибок

Постараемся разобрать, что заставляет нас удивляться и, скажем откровенно, не верить в результат последнего опыта. Таких причин несколько. Первая — погрешности измерений. Для того чтобы получить из (1) точное значение π, нам необходимо точно знать величины h и l, вернее, их отношение. Эти данные мы можем получить только в результате измерений. А погрешности измерений внесут свой вклад в погрешность определения π. Оценим эти погрешности. Пусть длина иглы будет 50 мм, такое же расстояние между линиями. Пользуясь обычными измерительными инструментами, например штанген-циркулем или линейкой с нониусом, сравнительно легко измерить обе нужные длины с точностью до 0,1 мм или 0,2%. Мы видим, что для любой из нужных нам длин расстояние 0,1 мм кладет предел точности измерений[*]. Однако, применив более совершенные инструменты, можно все длины измерить с погрешностью 0,01 мм. Это уже практический предел — уменьшить погрешность до 0,001 мм в таком опыте исключительно трудно — изменение температуры иглы или поверхности, на которой нанесены линии, на 1—2 градуса уже вызовет изменение размеров на величину около 0,001 мм. Деформация иглы при ударе о поверхность, стирание ее концов, деформация самой поверхности — все эти причины делают проведение опыта на уровне погрешности 0,001 мм нереальным. Поэтому, и не производя более детальных оценок, можно уверенно сказать, что в описанных опытах число π могло определяться с погрешностью, не меньшей 0,2—0,02%. То есть в опытах с простым измерительным инструментом (с каким они обычно проводятся) можно ожидать значение $\pi = 3{,}141 \pm 0{,}006$. При очень тщательно выполненных опытах можно рассчитывать на результат $\pi = 3{,}1416 \pm 0{,}0006$. А получить для π из подобных опытов величину с погрешностью в восьмой значащей цифре так же невозможно, как нельзя взвесить спичку на весах, предназначенных для взвешивания железнодорожных вагонов — слишком грубы инструменты.

---

[*] В небольшом числе опытов (примерно 0,1—0,2% от общего числа бросаний) расстояние от конца иглы до прямой будет меньше 0,1 мм. В таких случаях глаз не различает, произошло пересечение или нет. Это обстоятельство может внести свою, правда, малую по сравнению с другими погрешность.

Разумеется, при любом измерении следует оценить его точность и приводить результат с тем количеством знаков, которое ей соответствует. Если мы получим для какой-то величины A в результате измерений и вычислений значение $A = 2{,}474329$, а точность измерительного прибора — 1%, то следует писать $A = 2{,}47$, зачеркнув все последующие цифры, которые отражают только точность нашего вычислительного устройства (современные, даже простейшие микрокалькуляторы всегда дают 6—8 десятичных знаков), а не результат реального опыта. Выписывать в таких случаях все знаки, которые можно сосчитать, — это заведомо пытаться обмануть себя и других, преувеличивая реальную точность опыта.

Однако в большой точности измерений вообще нет необходимости: вполне достаточно измерять длины с погрешностью в 0,1 мм. Причина в том, что точность определения π ограничивается совершенно другим, «вероятностным» по природе обстоятельством — невозможностью произвести достаточное число бросаний для того, чтобы приближенное равенство (1) надежно выполнялось с относительной погрешностью, меньшей 0,01. Можно выяснить, с какой скоростью убывает разница $\left|\frac{m}{n} - p\right|$ между частотой данного события в серии из n испытаний и его вероятностью при возрастании числа испытаний. Оказывается, для того чтобы увеличить точность приближенного равенства $\frac{m}{n} \approx p$ в N раз, число испытаний надо увеличивать в N^2 раз, другими словами, *погрешность приближенного определения вероятности обратно пропорциональна квадратному корню из числа испытаний*. Более точный расчет для опыта Бюффона показывает, что при $h \approx l$ погрешность α значения π, которая более или менее надежно не будет превышена при n бросаниях иглы, можно оценить так:

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{5}{n}}. \qquad (2)$$

Если мы потребуем, чтобы α было не больше 0,02, то из формулы (2) получаем $n \approx 12\,000$. В опытах, приведенных в таблице (кроме опыта Фокса), проводилось от 3000 до 5000 бросаний. В соответствии с (2), α получается при этом несколько больше, то есть примерно 0,025—0,030. Это находится в хорошем согласии с результатами Вольфа и Смита. Примерно такая же погрешность получается при ошибках измерения длин порядка 0,1 мм. Следовательно, нет оснований их измерять точнее, так как погрешности в каждом звене опыта не должны существенно различаться — нет смысла измерять длину иглы с точностью до 0,001%, если погрешность, связанная с ограниченностью числа испытаний, приводит к ошибке конечного результата в 0,2%—0,3%. Выбор числа бросаний в 3000—5000 вполне оправдан. Одно испытание должно занять около 5 с (попробуйте бросать быстрее). При этом 10 000 бросков займут примерно 14 часов, то есть два полных рабочих дня. Если мы захотим получить результат в десять раз более точный, то, в соответствии с «законом $1/\sqrt{n}$ », нужно бросать в 100 раз дольше — 200 дней, а это уже многовато.

А вот для того, чтобы получить результат Лаццарини, погрешность которого составляет всего 0,0000002, нужно бросать иглу около 4 000 000 лет! (Разумеется, при соответствующей абсолютно нереальной точности измерения всех длин.) Так что, начав свой опыт в 1901 году и бросая до сегодняшнего дня, Лаццарини был бы так же далек от опубликованного им результата, как и в день начала опыта.

Укажем еще один источник погрешностей в опытах такого рода. Для того чтобы вероятность пересечения действительно равнялась теоретическому значению $p=2l/\pi h$, все положения упавшей иглы относительно линий на поверхности должны быть совершенно равноправны, то есть ни одно из них не должно встречаться чаще других (более точную фомулировку этого требования мы приведем при вычислении p). Есть все основания полагать, что в реальном эксперименте добиться этого трудно.

В связи со всем сказанным следует отметить, что число знаков, приведенных в таблице, неоправданно велико. Следовало оставить в первых двух строках четвертой колонки 3,16, а в третьей — 3,14.

И все-таки: обман или заблуждение?

Как же все-таки объяснить полученный Лаццарини результат? Трудно предположить попытку сознательного обмана. Когда Лаццарини занимался бросанием иглы, закон больших чисел был хорошо известен и те расчеты, которые здесь приведены, мог проделать любой математик. Вероятно, никто из ученых никогда серьезно этот результат не воспринимал, хотя его неоднократно публиковали. Приступая к опытам, Лаццарини должен был знать заранее, чего от них можно было ожидать. И, даже получив в результате арифметических упражнений приведенное им число, он не должен был публиковать такой фантастический результат, не подтвердив его повторной серией опытов. Мне кажется, что ему очень хотелось получить то, чего до него никто получить не сумел. Такое слишком сильное желание иногда увлекает исследователя и заставляет принимать желаемое за реальность.

Можно, конечно, предположить, что, бросая иглу, он после каждого испытания вычислял π и прекратил опыты после 3408 бросков именно потому, что как раз после такого числа испытаний он случайно получил приведенное им число. Разумеется, даже из 10 000 бросаний получить хотя бы один раз значение с точностью до $2 \cdot 10^{-7}$ очень мало вероятно (вероятность этого примерно равна 10^{-3}), но все же событие с такой вероятностью могло произойти. Если дело было действительно так, то Лаццарини не обманывал других, но обманул самого себя. К сожалению, и такое в науке случается.

Будем удовлетворены тем, что, хотя результат опыта Лаццарини не подтвердил правильность выводов теории вероятностей (а скорее даже вступил с ними в противоречие, если уж воспринимать его всерьез), он послужил нам еще одним поводом для обсуждения того, как осторожно нужно относиться к получаемым в опыте результатам и их статистической обработке.

Решение задачи Бюффона

Нам остается объяснить, как вычисляется вероятность пересечения иглы и одной из параллельных прямых в опыте Бюффона. Обозначим расстояние от центра иглы до ближайшей прямой через a $(0\leqslant a\leqslant h/2)$, а угол между иглой и прямой — через φ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$. Тогда, как ясно из рисунка 1, *а*, условие пересечения иглы и прямой можно

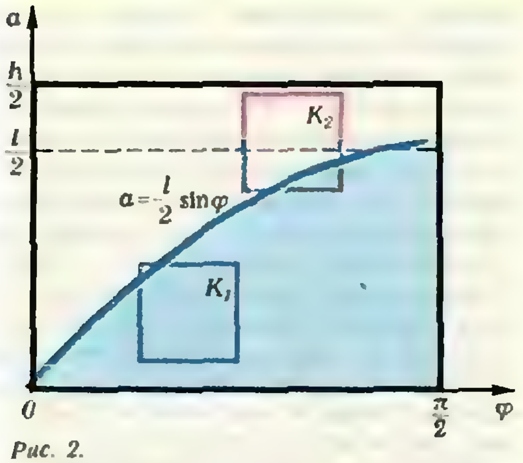


Рис. 2.

записать в виде

$$a < \frac{l}{2}\sin\varphi.$$

Каждому возможному результату нашего эксперимента отвечает точка на плоскости с координатами $(a;\ \varphi)$, лежащая внутри прямоугольника, ограниченного координатными осями и прямыми $a=\frac{h}{2}$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (рис. 2). Точки прямоугольника, лежащие под кривой $a=\frac{l}{2}\sin\varphi$, соответствуют случаям пересечения иглы с прямой; точки, лежащие выше этой кривой — случаям, когда пересечение не имеет места. Теперь задачу можно сформулировать так: *в прямоугольнике* $\{0<\varphi<\pi/2;\ 0<a<h/2\}$ *наугад выбирается точка; какова вероятность того, что эта точка окажется под синусоидой* $a=(l/2)\sin\varphi$?

Слово «наугад» заменяет здесь требование равноправности *) всех положений упавшей иглы. Его строгий смысл можно объяснить по-разному. Проще всего сказать, что вероятность попадания выбранной точки в любой квадрат $\{\varphi_1<\varphi<\varphi_2;\ a_1<a<a_2\}$ $(\varphi_2-\varphi_1=a_2-a_1=d)$ с данной стороной не зависит от положения этого квадрата внутри прямоугольника (хотя, разумеется, зависит от длины d его стороны). Например, вероятности того, что точка окажется внутри квадратов K_1 или K_2 на рисунке 2, одинаковы. Отсюда нетрудно вывести, что вероятность попадания внутрь любой фигуры, лежащей в нашем прямоугольнике, пропорциональна ее площади и, следовательно, равна отношению этой площади к площади всего прямоугольника.

В частности, площадь криволинейной трапеции, ограниченной рассматриваемой синусоидой, равна

$$S_1=\int_0^{\pi/2}\frac{l}{2}\sin\varphi\,d\varphi=$$
$$=\frac{l}{2}\left(\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\cos 0\right)\right)=$$
$$=\frac{l}{2}.$$

А так как площадь S прямоугольника равна $\pi h/4$, для искомой вероятности получаем значение

$$p=\frac{S_1}{S}=\frac{2l}{\pi h}.$$

---

*) Мы предпочитаем не говорить о «*равновероятности*», *потому что вероятность того, что* игла займет какое-то *точно фиксированное* положение попросту равна нулю.

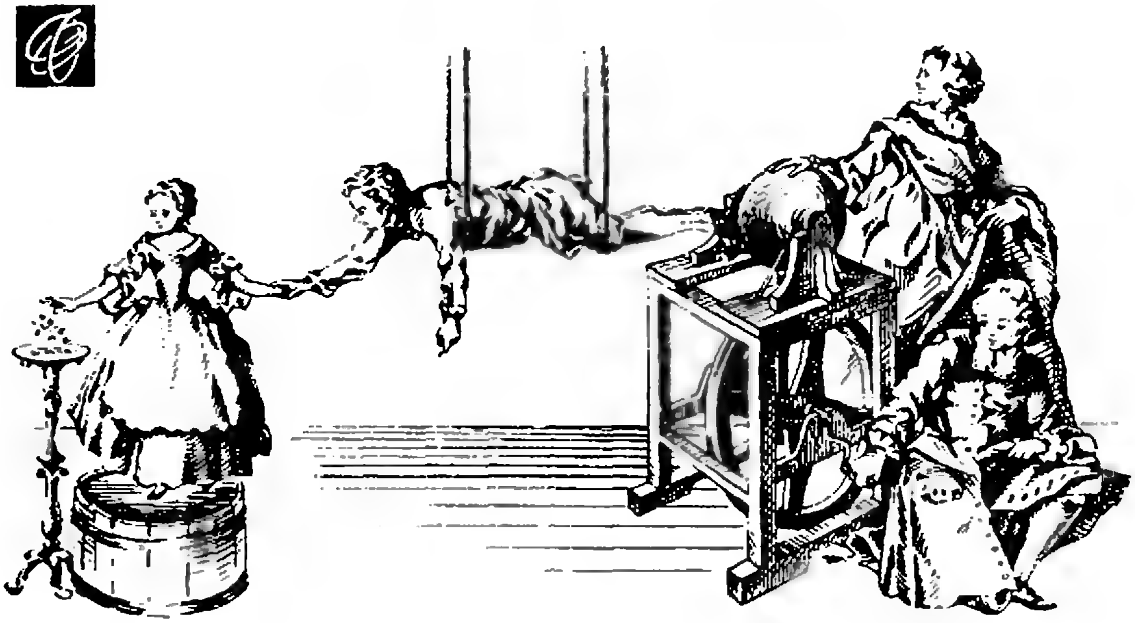
Рецензии, библиография

Новые книги

В 1984 году издательство «Наука» предполагает выпустить в серии Библиотечка «Квант» следующие книги (цена каждой книги 40 к.):

1. В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев. Удивительная гравитация.
2. Г. С. Воронов. Штурм термоядерной крепости.
3. В. И. Гольданский, Р. П. Кузьмин. Эффект Мёссбауэра.
4. В. Н. Дубровский, Я. А. Смородинский, Е. Л. Сурков. Релятивистский мир.
5. В. А. Займовский, Т. Л. Колупаева. Необычные свойства обычных металлов.
6. Занимательно о физике и математике. (Составители С. С. Кротов, А. П. Савин.)
7. М. Е. Левинштейн, Г. С. Симин. Знакомство с полупроводниками.
8. А. П. Пурмаль, Е. М. Слободецкая, С. О. Травин. Как превращаются вещества.
9. С. С. Хилькевич. Физика вокруг нас.
10. А. Д. Чернин. Звезды и физика.

Мы советуем всем заинтересованным читателям оформить заказы на эти книги в книжных магазинах или в отделах «Книга — почтой».



Из старых опытов

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ

Полгода назад мы опубликовали первую статью о занимательных опытах, которые проводили любознательные юноши в прошлом веке.) Сегодня мы продолжаем эту тему и предлагаем вниманию читателей рассказ о нескольких забавных опытах по электричеству.*

В начале XIX столетия Распорядительный совет Королевского института Великобритании в целях просвещения юношества в области естественных наук учредил специальный курс научных чтений. (Заметим, что естественные предметы в английской школе в то время не преподавались вовсе.) По своей организации это было нечто вроде воскресной школы, которую, как вы помните, прилежно посещал Том Сойер. Однако вместо «плюгавого директора с молитвенником и скучными проповедями» на кафедру Королевского института всходили и выступали перед юными любознательными слушателями выдающиеся ученые того времени Майкл Фарадей, Джон Тиндаль и другие.

Некоторые из прочитанных курсов были записаны и затем опубликованы. Так всемирную известность получила серия лекций под названием «Химическая история свечи», прочитанная Фарадеем в 1860 году и впервые опубликованная в 1861 году. С тех пор эта книга многократно переиздавалась на разных языках, в том числе и на русском. Очередное издание вышло совсем недавно в Библиотечке «Квант»*).

Не менее замечательна и книга Тиндаля «Уроки по электричеству». О некоторых опытах из этой книги вы сегодня узнаете.

Учение об электричестве стало развиваться значительно позже механики. Так, на протяжении почти двух тысячелетий познания человечества в этой области ограничивались лишь тем фактом, что янтарь может притягивать к себе легкие предметы. И только в XVII веке были открыты первые закономерности, описывающие электрические явления.

Причину такого застоя Тиндаль видел в пренебрежении опытами. Именно искусство проводить опыты, то есть умение вызывать явления, проявляющие и проясняющие сущность физических законов, дает «возможность беседовать с Природой, задавая ей вопросы и получая ответы на них».

---

*) А. Варламов. Сто лет назад. «Квант», 1982, № 10.

*) М. Фарадей «История свечи», М., «Наука», серия «Библиотечка «Квант», 1980.

Первые три из предлагаемых ниже опытов (именно они и взяты из лекций Тиндаля) не требуют никакого специального оборудования и основаны на простейшем явлении электризации трением. Для проведения последних опытов необходима так называемая электрофорная машина. Можно сделать ее самостоятельно (по предлагаемому описанию) или воспользоваться готовой, имеющейся в школьном физическом кабинете.

«Покорные» мыльные пузыри

Известно, что диэлектрики обладают замечательным свойством — электризацией при трении. Так, если палочку из сургуча (или подходящей пластмассы) потереть шелковым лоскутком, она зарядится и начнет притягивать клочки бумаги и другие мелкие предметы. При этом чем легче эти предметы, тем с большего расстояния они притягиваются.

Эффектный опыт, основанный на описанном явлении, может быть проведен с мыльными пузырями. Чтобы получить прочный и большой (величиной с крупный апельсин) мыльный пузырь, необходимо два условия — хорошая мыльная вода и подходящая трубочка. Для приготовления мыльного раствора лучше всего использовать зеленое мыло (например, «Русский лес») и разводить его мягкой (кипяченой или дождевой) водой. При этом мыло не следует разводить слишком жидко — в этом случае пузыри получаются слабыми. Для придания пузырям еще большей прочности в раствор можно добавить немного глицерина. Трубку лучше всего выбрать стеклянную, не слишком тонкую, с немного расширенным и закругленным концом; этот конец необходимо предварительно натереть мылом. Следите, чтобы в трубку не попадала слюна, иначе пузыри быстро лопаются.

Для проведения опыта возьмите приготовленную палочку из сургуча и натрите ее шелком. Затем выдуйте пузырь и вы увидите, что ваша палочка приобрела над ним волшебную силу: пузырь, как на привязи, неотступно следует за ней. Почему?

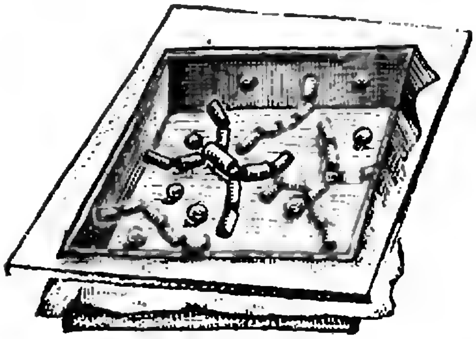
Опыт можно разнообразить и украсить, например, сделав два мыльных пузыря один в другом. Оказывается, пузырь не лопается, если к нему прикоснуться или даже проткнуть его стеклянной трубкой, смоченной в мыльной воде. Аккуратно введите трубку с мыльным раствором в мыльный пузырь средних размеров и внутри него выдуйте второй пузырь, который упадет на дно наружного. Слабым толчком трубки внутренний пузырь можно вытолкнуть наружу, и тогда он повиснет, как гондола у аэростата.

Забавные человечки

Возьмите деревянную или картонную коробку высотой 3—4 см и оклейте ее со всех сторон фольгой от шоколада или чая. Внутрь коробки положите легкие шарики, змейки и фигурки человечков, изготовленные из сердцевины бузины. Эти фигурки легко сделать, соединив кусочки бузины с помощью иголки с ниткой так, чтобы они свободно шевелили руками и ногами. Закройте коробку сверху обыкновенным стеклом, и прибор готов к демонстрации.

Когда зрители собрались, потрите стекло кусочком шелка или кожи. При этом на стекле появятся электрические заряды, и поскольку поверхность коробки благодаря фольге является проводящей, они распределятся по ней.

Заряжаясь одноименно с дном коробки, фигурки постепенно начинают



«оживать» — поднимают руки и ноги, подпрыгивают и, наконец, прилипают к стеклу.

Как только вы прекратите электризовать стекло трением, заряд начнет стекать с коробки, и фигурки станут падать на дно, но еще довольно долго будут подергивать руками и ногами, пока из них не уйдет жизнь, дарованная им электричеством.

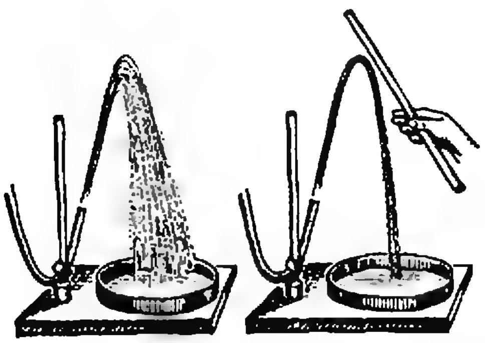
Оригинальные фонтаны

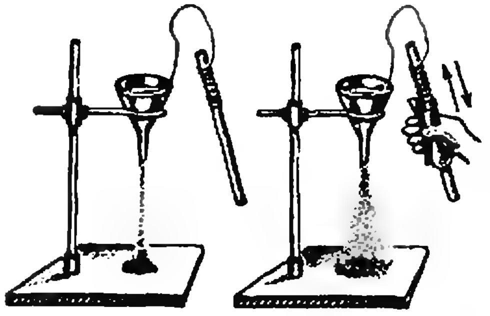
Устройте простейший фонтан с помощью резервуара с водой, поставленного на возвышение (скажем, на шкаф), и обыкновенного сифона, сделанного из резиновой трубки. Укрепите конец трубки так, чтобы струя воды била не вертикально вверх, а несколько под углом, достигая высоты сантиметров пятьдесят. После достижения максимальной высоты, струя обычно рассыпается на сноп брызг. Если же вы поднесете к ней заранее наэлектризованную палочку, сноп брызг тут же послушно стянется в спокойную струю. Попробуйте объяснить, почему.

Этот опыт эффектно показывать в темноте, осветив снизу лишь струю воды.

А теперь опишем красивый опыт, демонстрирующий противоположное действие электрических зарядов.

Закрепите неподвижно воронку и воткните в нее проволоку. Другой конец проволоки обмотайте вокруг нагретой стеклянной трубки. Насыпьте в воронку металлические опилки — они будут высыпаться из нее ровной сплошной струей. Но стоит вам потереть трубку кусочком кожи или шелка, как картина резко изменится. Заряды, возникшие на трубке в результате трения, передадутся по проволоке металлическим опилкам, они приобретут одноименные заряды и разлетятся, образуя своеобразный фонтан.



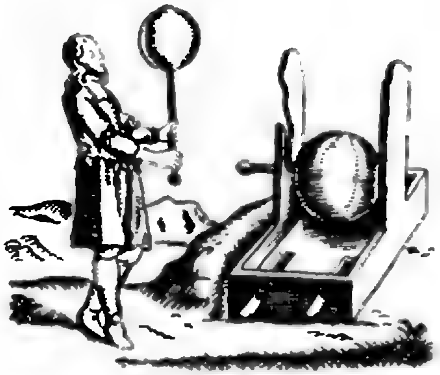


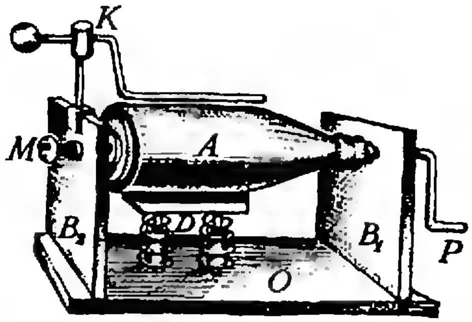
Как сделать электрофорную машину

Если вы хотите выйти за рамки опытов с наэлектризованной палочкой, необходимо научиться сообщать телам гораздо большие заряды. Например, с помощью предлагаемой машины.

Первая электрическая машина была сконструирована бургомистром Магдебурга, военным инженером Отто фон Герике в 1660 году. Герике известен прежде всего своими опытами по обнаружению атмосферного давления, которые вошли в историю физики под названием «опыты с магдебургскими полушариями» (о них упоминается в учебнике физики для 6—7 классов).

Электрическая машина Герике представляла собой шар из серы величиной с детскую головку, насаженный на железную ось с рукояткой и укрепленный на деревянной подставке. С этим шаром можно было проводить различные опыты. Например, вращая шар с помощью рукоятки и натирая его прямо сухой рукой, Герике наблюдал возникновение маленьких искр вокруг шара — шар светился в темноте. Сняв шар с подставки и перемещаясь с ним по комнате, ему удавалось заставить легкие тела, например перышко, плавать в воздухе. В процессе опытов Герике заметил важное обстоятельство: лег-





кие тела сначала притягиваются наэлектризованным шаром, но после прикосновения к нему тут же отталкиваются (подумайте, почему?) и держатся от него на некотором расстоянии, пока не коснутся других предметов, после чего они снова могут притягиваться к шару. В дальнейшем серный шар был заменен стеклянным цилиндром, а затем — более удобным стеклянным диском. Эти машины давали столь сильные искры, что они были способны воспламенить эфир.

Во всех последующих образцах электрофорных машин, позволяющих получать еще большие электрические заряды, присутствует характерный и для современных машин дополнительный элемент — кондуктор, то есть собиратель зарядов.

Опишем устройство одной из простейших машин, которую несложно изготовить самостоятельно. Она состоит из двух главных элементов — уединенного цилиндра, электризующегося трением, и кондуктора.

Цилиндр *А* сделан из простой бутылки. Вместе с пробкой в горлышко входит коленчатая ручка *Р*, с помощью которой цилиндр приводится во вращение. Стойки B_1 и B_2, приклеенные к основанию *О* машины, вырезаны из фанеры, их высота 10—12 см. В верхней части стоек на одинаковой высоте просверливаются отверстия для оси вращения. К дну бутылки приклеивается кусочек дерева, в который упирается пропущенный сквозь стойку винт *М*. Он служит левым концом оси вращения и одновременно прижимает бутылку к противоположной стойке. Чтобы винт не врезался в деревяшку, под него лучше подложить металлическую пластинку с углублением в центре.

Трущая щетка представляет собой оклеенную кожей дощечку *Д* шириной 4—5 см, которая прижимается к бутылке с помощью двух тугих пружин. Щетка крепится к основанию следующим образом: в основание вклеиваются две короткие достаточно широкие тонкостенные трубки, а в щетку вклеиваются трубки меньшего диаметра, свободно входящие в нижние.

Кондуктор *К* состоит из металлического прута толщиной 4—6 мм и металлического шарика, прикрепленного к левому концу прута. К пруту приклеивается медная насадка, с помощью которой кондуктор закрепляется в трубке, вклеенной в верхушку левой стойки. Места соединения прута с шариком и медной насадкой должны быть хорошо зачищены.

Электрический ветер и электрическое сегнерово колесо

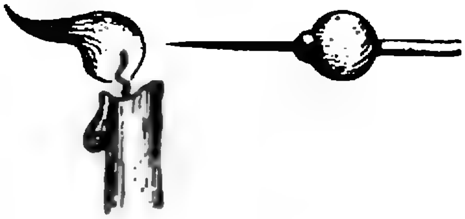
С помощью изготовленной вами электрофорной машины можно провести множество интересных опытов. Один из самых простых — это создание так называемого электрического ветра. Прикрепите с помощью пластилина к шарику кондуктора булавку так, чтобы ее головка обязательно касалась кондуктора, а сама булавка была расположена горизонтально. Если теперь вы одной рукой будете крутить ручку машины, а другую подставите к острию, то почувствуете дуновение ветра. Этот ветер может быть настолько силен, что его порывы задуют пламя свечи.

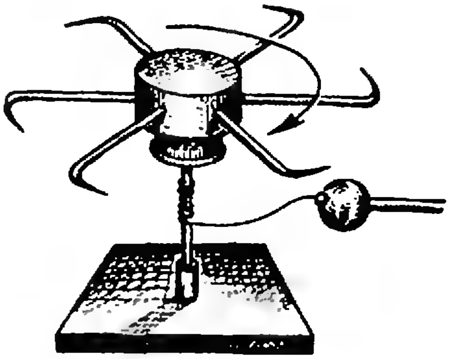
Такое, на первый взгляд загадочное, явление объясняется электрическими свойствами острия. Так как заряды одного знака отталкиваются, они, стекая с кондуктора, стремятся отойти от него как можно дальше и в большом количестве скапливаются на конце острия. Эти заряды притягивают заряды противоположного знака из воздуха, которые «сидят» на различных частичках, взвешенных в воздухе. Прикоснувшись к острию, частички тут же перезаряжаются и, обретя заряд того же знака, что и на кондукторе, улетают прочь от острия. Поток этих частиц и создает ощущаемый ветер.

Описанное свойство острия можно использовать для устройства электрического аналога известного с древности сегнерова колеса (вращающегося с помощью реактивной силы вытекающей из его сопел воды). Возьмите пробку, выдолбите ее середину так, чтобы туда вошел металлический наперсток. Снаружи воткните, расположив их симметрично, несколько металлических стержней, загнутых в виде крючков. Теперь установите это «колесо» на металлической вертикальной оси, подсоединенной к кондуктору электрофорной машины. При вращении ручки машины на остриях скапливаются заряды и, как в предыдущем опыте, от них пойдут потоки перезарядившихся частичек. Эти потоки приводят «колесо» во вращение.

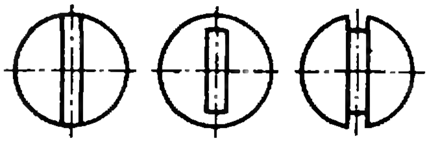
На этом же свойстве основано действие громоотвода. Его изобретатель Бенджамин Франклин чрезвычайно остроумно продемонстрировал принцип действия громоотвода следующим образом. Известно, что грозовые облака всегда очень неровные, отдельные их участки находятся на разных расстояниях от земли, некоторые из них проходят иногда совсем низко над землей. Франклин полагал, что такие спускающиеся «звенья» грозовой тучи являются ступенями, облегчающими молнии выбор пути. Для демонстрации этого он подвесил к кондуктору электрофорной машины несколько клочков рыхлой бумаги, прикрепив их друг к другу. При поступлении на них заряда клочки вытягивались к земле. Поднося к нижнему из клочков острие иглы, Франклин заставлял его подняться к предыдущему и проделывал это до тех пор, пока вся бумага не возвращалась к кондуктору, как если бы он не был заряжен.

Попытайтесь и вы проделать и объяснить этот опыт.





Задача



На рисунке изображены головки трех винтов (вид сверху). Одна из этих головок имеет цилиндрическую форму, другая — форму усеченного конуса, третья — полушара. Какая — какую?

Интерференция волн

Кандидат физико-математических наук
Л. П. БАКАНИНА

Интерференция волн — большой и важный раздел физики. Исследование этого явления сыграло большую роль в развитии оптики, так как обнаружение интерференции света служит убедительным доказательством его волновой природы.

При наложении волн действует принцип суперпозиции — результирующее колебание представляет собой сумму колебаний, вызванных каждой волной в отдельности. Однако интерференционная картина возникает только тогда, когда складывающиеся колебания (а значит, и вызывающие их волны) когерентны, то есть они имеют одинаковые частоты и постоянную во времени разность фаз. Что же представляет собой эта картина?

Пусть вдоль некоторого направления распространяется плоская синусоидальная волна. В точке, находящейся на расстоянии d, она вызовет колебания, происходящие по закону*)

$$a=A\cos\omega\left(t-\frac{d}{v}\right)=$$

$$=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{T}\frac{d}{v}\right)=$$

$$=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}d\right).$$

Здесь a — значение колеблющейся величины в момент времени t, A — амплитуда, ω — циклическая частота, $T=2\pi/\omega$ — период колебаний, v — скорость волны (для электромагнитных волн v равно скорости света c).

При сложении двух когерентных волн одинаковой амплитуды получаем

$$a=a_1+a_2=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}d_1\right)+$$

$$+A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}d_2\right)=$$

$$=2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(d_2-d_1)}{2}\times$$

$$\times\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(d_1+d_2)}{2}\right).$$

Амплитуда результирующего колебания равна

$$A_{\text{рез}}=2A\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(d_2-d_1)}{2}\right|=$$

$$=2A\left|\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right|,$$

где $\Delta\varphi=2\pi(d_2-d_1)/\lambda$ — разность фаз складываемых колебаний. В зависимости от разности фаз $\Delta\varphi$, а значит и от разности хода (d_2-d_1) волн, результирующая амплитуда может меняться от $A_{\text{рез max}}=2A$ (когда фазы совпадают) до $A_{\text{рез min}}=0$ (когда фазы сдвинуты на π).

Глаз (или фотоприемник) воспринимает не амплитуду колебаний, а их интенсивность I, то есть энергию, падающую в единицу времени на единицу площади. Интенсивность, как и энергия колебаний, пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому

$$I_{\text{рез}}\sim A^2_{\text{рез}}\sim 4A^2\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Следовательно, есть точки, где суммарная интенсивность больше суммы интенсивностей налагающихся волн ($I_{\text{рез max}}\sim 4A^2$), и точки, где волны как бы уничтожают друг друга

Статья предназначена для школьников десятого класса.

*) См., например, статью Л. Асламазова и И. Кикоина «Что такое волна?» («Квант», 1982, № 6). (*Прим. ред.*)

($I_{\text{рез min}}=0$). Такое перераспределение энергии в пространстве и является характерным признаком интерференции.

Явление интерференции легко демонстрируется для волн на воде или для радиоволн. В оптике наблюдать интерференционную картину нелегко, так как обычные источники света (не лазеры) испускают колебания с быстро и случайно изменяющейся фазой и, следовательно, некогерентные. Однако если свет от одного источника разделить на два пучка и затем наложить эти пучки друг на друга, то можно получить достаточно четкую интерференционную картину*).

Заметим, что для правильного описания явления интерференции ошибка при определении разности фаз колебаний должна быть существенно меньше π (иначе будет невозможно отличить максимум от минимума). При этом ошибка в измерении разности хода волн должна быть много меньше длины волны λ (для световых волн эта ошибка должна быть много меньше 0,1 мкм).

Теперь разберем несколько конкретных задач. Почти все они взяты из билетов письменного экзамена по физике в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Плоская электромагнитная волна частоты ν, сформированная рупорной антенной, падает перпендикулярно на плоский отражающий экран. Определите амплитуду отраженной волны, если измеритель напряженности электрического поля при перемещении между экраном и рупором зафиксировал максимальную амплитуду поля A_1 и минимальную A_2. Определите также расстояние между двумя соседними максимумами поля.*

В пространстве между рупором и отражающим экраном происходит наложение падающей и отраженной волн. В точках максимума фазы колебаний, вызванных этими волнами, совпадают, и, следовательно, результирующее колебание происходит с амплитудой

$$A_1=A_{\text{пад}}+A_{\text{отр}}.$$

В точках минимума падающая и отраженная волны находятся в противофазе, и суммарная амплитуда колебаний равна

$$A_2=A_{\text{пад}}-A_{\text{отр}}.$$

Из этих двух равенств находим

$$A_{\text{отр}}=(A_1-A_2)/2.$$

Пусть колебания в точке с координатой x, вызванные падающей волной, описываются выражением

$$a_{\text{пад}}=A_{\text{пад}}\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)=$$

$$=A_{\text{пад}}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

Если расстояние от рупора до экрана равно l, то отраженная волна проходит до данной точки расстояние $2l-x$, и колебания, вызванные отраженной волной, имеют вид

$$a_{\text{отр}}=A_{\text{отр}}\cos\omega\left(t-\frac{2l-x}{c}\right)=$$

$$=A_{\text{отр}}\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{4\pi l}{\lambda}\right).$$

(На самом деле при отражении волны фаза колебаний может измениться на противоположную, но на дальнейшие наши рассуждения это повлиять не может.)

Пусть два соседних максимума наблюдаются в точках с координатами x_1 и x_2. Разности фаз колебаний, возбуждаемых падающей и отраженной волнами в этих точках, равны соответственно

$$(\Delta\varphi)_1=\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x_1\right)-$$

$$-\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x_1-\frac{4\pi}{\lambda}l\right)=-\frac{4\pi}{\lambda}x_1+\frac{4\pi}{\lambda}l$$

и

$$(\Delta\varphi)_2=-\frac{4\pi}{\lambda}x_2+\frac{4\pi}{\lambda}l.$$

В двух соседних максимумах фазы результирующих колебаний должны

---

*) О том, как можно наблюдать интерференцию света от обычных источников, подробно рассказано в статье Н. Берюлевой «Интерференция света» («Квант», 1981, № 6). (*Прим. ред.*)

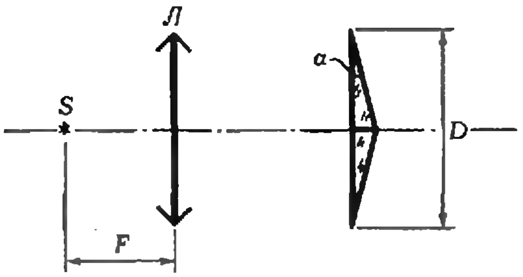


Рис. 1.

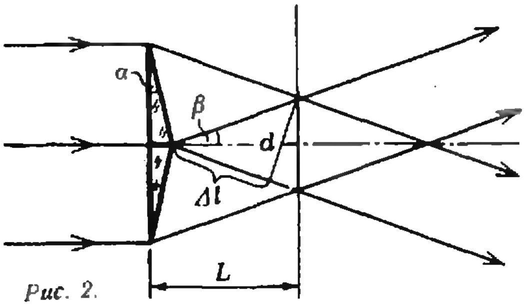


Рис. 2.

отличаться на 2π; следовательно,

$$\Delta\varphi=(\Delta\varphi)_1-(\Delta\varphi)_2=2\pi,$$

или

$$\frac{4\pi}{\lambda}(x_2-x_1)=2\pi.$$

Отсюда получаем

$$x_2-x_1=\frac{\lambda}{2}=\frac{c}{2\nu}.$$

Задача 2. *Точечный источник света S расположен в фокусе линзы Л, за которой находится бипризма с преломляющим углом $\alpha=0{,}01$ рад и шириной $D=6$ см (рис. 1). На каком расстоянии L от бипризмы можно наблюдать наибольшее число интерференционных полос? Сколько полос можно увидеть на экране? Чему равна ширина полос? Коэффициент преломления стекла бипризмы $n=1{,}5$, длина волны света $\lambda=0{,}5$ мкм.*

Поскольку источник света находится в фокусе линзы, на бипризму падает параллельный пучок, идущий вдоль оптической оси системы (рис. 2). Из бипризмы выходят два параллельных световых пучка, наклоненных к оси под углом β, который можно найти из закона преломления $\sin\alpha/\sin\beta=n$. Так как углы малы,

$$\beta\approx\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}\approx\frac{\alpha}{n}.$$

Очевидно, что наибольшая ширина интерференционной картины будет в том месте, где самая большая площадь пересечения интерферирующих пучков. Из рисунка 2 видно, что это будет на расстоянии

$$L\approx\frac{D}{4\operatorname{tg}\beta}\approx\frac{D}{4\beta}\approx\frac{Dn}{4\alpha}\approx112{,}5\text{ см}.$$

При этом ширина всей интерференционной картины равна $b=D/2=3$ см.

Каждый из пересекающихся пучков имеет ширину $d=(D/2)\cos\beta\approx D/2$. Волновые поверхности пучков образуют между собой угол, равный 2β; следовательно, максимальная разность хода пучков равна

$$\Delta l=d\operatorname{tg}2\beta\approx d\cdot2\beta.$$

Разность хода, соответствующая двум соседним максимумам (или минимумам), равна длине волны λ. Таким образом, число интерференционных полос, образующихся на экране, равно

$$N=\frac{\Delta l}{\lambda}\approx\frac{2d\beta}{\lambda}\approx\frac{D\alpha}{n\lambda}\approx800,$$

а ширина одной полосы —

$$b_0=\frac{b}{N}\approx\frac{D/2}{D\alpha/(n\lambda)}\approx\frac{n\lambda}{2\alpha}\approx37{,}5\text{ мкм}.$$

Задача 3. *Приемник радиосигналов, следящий за появлением спутника Земли из-за горизонта, расположен на берегу озера на высоте $H=3$ м над поверхностью воды. По мере поднятия спутника над горизонтом наблюдаются периодические изменения интенсивности принимаемого сигнала. Определите частоту радиосигнала спутника, если максимумы интенсивности наблюдались, в частности, при углах возвышения спутника над горизонтом $\alpha_1=3°$ и $\alpha_2=6°$. Поверхность озера можно считать идеально отражающим зеркалом.*

В приемник попадают лучи, идущие непосредственно от спутника и отразившиеся от поверхности озера. На рисунке 3 это лучи 1 и 2 соответственно. Разность хода между ними

$$\Delta l=|AC|-|AB|=\frac{H}{\sin\alpha}-\frac{H}{\sin\alpha}\cos2\alpha$$

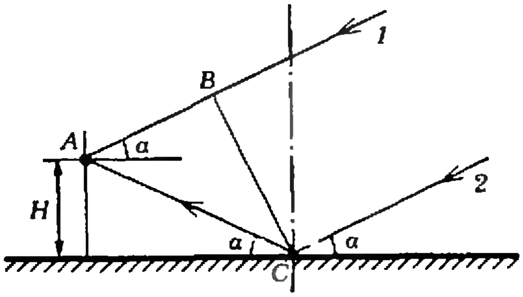


Рис. 3.

(BC — волновая поверхность, перпендикулярная обоим лучам). Рассматриваемые в задаче углы малы, так что $\sin\alpha\approx\alpha$ и $\cos\alpha\approx 1-\alpha^2/2$, откуда получаем

$$\Delta l=\frac{H(1-\cos 2\alpha)}{\sin\alpha}\approx 2H\alpha.$$

Максимум интенсивности принимаемого сигнала наблюдается, если разность хода интерферирующих лучей равна целому числу длин волн:

$$2H\alpha_1=k\lambda \text{ и } 2H\alpha_2=(k+1)\lambda.$$

Отсюда длина волны равна

$$\lambda=2H(\alpha_2-\alpha_1),$$

а частота радиосигнала —

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=\frac{c}{2H(\alpha_2-\alpha_1)}\approx 10^9 \text{ Гц}.$$

Упражнения

1. Антенна в виде рупора излучает плоскую электромагнитную волну частоты $\nu=9{,}4\cdot 10^9$ Гц в направлении, перпендикулярном отражающему экрану. Измеритель напряженности электрического поля при перемещении между рупором и экраном фиксирует результат интерференции прямой и отраженной волн. Определите минимальную толщину диэлектрической пластины, которую следует установить вплотную к экрану, чтобы измеритель стал показывать минимальную напряженность электрического поля, если до установки пластины он находился в месте с максимальной напряженностью. Показатель преломления пластины $n=1{,}4$, поглощением в пластине и отражением от ее поверхности можно пренебречь.

2. Коротковолновый передатчик работает на частоте $\nu=30$ МГц. Приемник находится на расстоянии $L=2000$ км от него. Радиоволны достигают приемника, отражаясь от ионосферных слоев, расположенных на высотах $h_1=100$ км и $h_2=300$ км. Найдите, по какому закону будет изменяться интенсивность радиосигнала, если приемник перемещать вдоль прямой, соединяющей его с передатчиком. Перемещение мало по сравнению с L.

3. Радиоизлучение от звезды, расположенной в плоскости экватора, принимается с помощью двух антенн, расположенных на экваторе на расстоянии $L=200$ м друг от друга. Сигналы с антенн подаются по кабелям одинаковой длины на приемник. Найдите закон изменения амплитуды напряжения на входном контуре приемника вследствие вращения Земли. Прием ведется на длине волны $\lambda=1$ м. За время наблюдения звезда мало отклоняется от зенита.

Разложение на различные множители

В разложении натурального числа на простые множители, вообще говоря, сомножители повторяются: $4=2^2$, $12=2^2\cdot 3$ и т. п.

Обозначим через B такое множество натуральных чисел, что каждое не входящее в B натуральное число $n>1$ можно — и притом единственным образом! — представить в виде произведения различных чисел из B.

1. Постройте такое множество B; докажите, что оно определено однозначно. а) Какой вид имеют разложения на простые множители чисел из B? Обозначим через b_n n-й по величине элемент множества B. Легко видеть, что $b_1=2$, $b_2=3$, $b_3=4$, $b_4=5$, $b_5=7$, $b_6=9$. б) Докажите, что $b_n<2^{n-1}$ при $n>2$.

2. Рассмотрим представления натуральных чисел в виде произведения чисел из B (для чисел $b\in B$ будем считать такими представлениями равенства $b=b$). Например, $2=2$, $10=2\cdot 5$, $12=3\cdot 4$, $30=2\cdot 3\cdot 5$, $90=2\cdot 5\cdot 9$, $120=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$. Для $b\in B$ обозначим через $\nu_b(n)$ количество чисел, не превосходящих n, в упомянутое представление которых входит сомножителем b. Например, $\nu_2(2)=\nu_2(3)=\nu_2(4)=\nu_2(5)=1$, $\nu_2(6)=\nu_2(7)=2$, $\nu_2(8)=\nu_2(9)=3$, $\nu_2(10)=4$. Докажите, что для каждого $b\in B$ а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\nu_b(n)}{n}=\frac{1}{b+1}$; б) есть бесконечно много таких n, что $\frac{\nu_b(n)}{n}=\frac{1}{b+1}$.

3. Положим $m\prec n$, если каждый множитель из вышеупомянутого представления числа m входит и в представление числа n. Например, $2\prec 2$, $2\prec 10$, $30\prec 120$, но не $30\prec 90$. Положим также $1\prec n$ для всех n. Сколько существует таких m, что $m\prec n$, если n раскладывается в произведение k чисел из B? Назовем число n *гармоничным*, если оно равно сумме всех $m\prec n$ таких, что $m\prec n$. Например, числа 6 и 90 гармоничны: $6=2\cdot 3=1+2+3$, $90=2\cdot 5\cdot 9=1+2+5+9+10+18+45$. а) Найдите еще несколько гармоничных чисел (автору неизвестно, конечно ли их множество). б) Докажите, что любое гармоничное число четно. в) Найдите все числа, являющиеся одновременно гармоничными и совершенными.

В. С. Шевелев

Открытие новой частицы

Январь 1983 года отмечен крупным событием в истории физики. В Женеве, в Европейской организации ядерных исследований (ЦЕРН) объявлено об открытии новой частицы — W-бозона. Частица родилась при столкновении протона и антипротона, разогнанных до энергии 270 ГэВ (1 ГэВ$=10^3$ МэВ$=10^9$ эВ) каждый.

Явление это — чрезвычайно редкое. За два месяца работы установки зарегистрировано лишь шесть случаев рождения W-бозона (еще о двух случаях сообщила другая группа физиков).

Открытие новой частицы ожидалось с большим нетерпением. И неслучайно: ее существование было теоретически предсказано еще несколько лет назад. Дело в том, что бозоны — «главные действующие лица» теории электрослабого взаимодействия, единой теории электромагнитных и слабых процессов (ее авторы С. Вайнберг, Ш. Глэшоу и А. Салам получили Нобелевскую премию 1979 года). Они связаны с полем слабого взаимодействия — взаимодействия, которое проявляется, например, при бета-распаде ядер. Эти частицы суть кванты слабого поля, аналогично тому, как фотоны представляют собой кванты электромагнитного поля.

Семейство слабых квантов состоит из трех частиц: W^+, W^- и Z^0; первые две — заряженные, последняя — нейтральная. С их помощью осуществляются многие превращения в мире элементарных частиц.

Когда о новых частицах зашла речь, никто ни в одном опыте их не видел, и это очень огорчало ученых. Однако теория предсказала не только сам факт их существования, но и их массу: 78 ГэВ для W^+ и W^- и 89 ГэВ для Z^0 (напомним, что в физике элементарных частиц массу принято выражать не в единицах массы, а в единицах энергии).

Два года длилась подготовка к опытам, и, наконец, первые бозоны были зарегистрированы приборами. Опыты (их руководителем был итальянский физик Руббиа) проводились со встречными пучками протонов и антипротонов, при столкновениях которых наряду с другими частицами должны были рождаться и W-бозоны:

$$p+\bar{p} \rightarrow W + \text{что угодно.}$$

«Поймали», конечно, не сам бозон, а зафиксировали его последующий распад (вот почему более полное название новой частицы — промежуточный бозон). Например, родившийся положительный W-бозон распадается на позитрон и нейтрино:

$$W^+ \rightarrow e^+ + \nu.$$

Удивительно, что опытные оценки массы W-бозона — (81±5) ГэВ — оказались очень близкими к теоретическим (добавка ±5 ГэВ — это оценка точности эксперимента; действительное значение лежит в пределах от 76 до 86 ГэВ). Это дает возможность считать проведенные опыты весьма правдоподобными.

Можно сказать, что теперь теория электромагнитного и слабого взаимодействий получила экспериментальное обоснование. Хотя, конечно же, работа предстоит еще немалая — надо накопить побольше случаев рождения W-бозонов, уточнить их свойства и, наконец, надо «поймать» и нейтральный бозон тоже.

Я. С.

КВАНТ для младших школьников

Задачи

1. За книгу заплатили рубль, и осталось заплатить еще столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за нее заплатили столько, сколько осталось заплатить.

Сколько стоит книга?

2. Расставьте в кружочках на рисунке числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы суммы пяти троек чисел, расположенных по «отрезкам», были равны между собой.

3. На какое наибольшее число делится произведение любых трех последовательных четных чисел?

4. Двое играют в «крестики-нолики» на доске 3×3 по измененным правилам: каждый на своем ходу может поставить как «крестик», так и «нолик». Выигрывает тот, после хода которого образуются три подряд стоящих одинаковых значка (по вертикали, горизонтали или диагонали — как в обычных «крестиках-ноликах»). Кто выигрывает в эту игру — начинающий или второй игрок? И как?

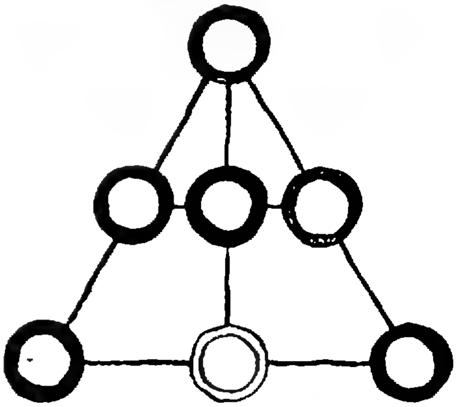
5. В солнечный день я ехал на машине по мокрой дороге с дядей Сережей, опытным водителем. Комочки грязи, летящие из-под колес впереди идущих машин, попадали на лобовое стекло. Когда машина остановилась по красному сигналу светофора, я спросил:

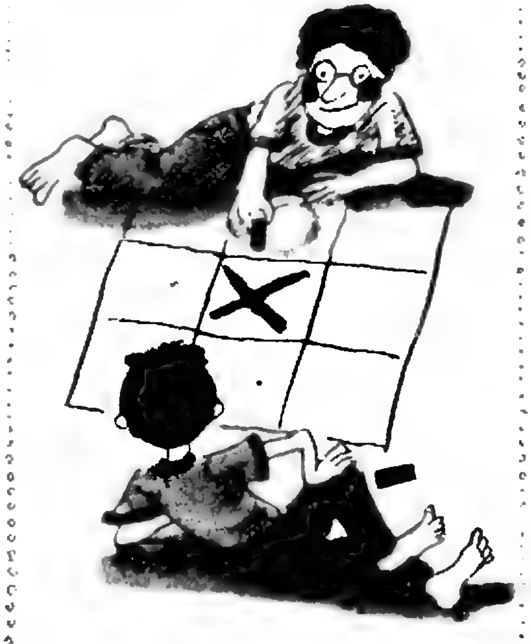
— Дядя Сережа, можно я быстренько вытру стекло мокрой тряпкой?

— Ни в коем случае,— ответил дядя Сережа,— иначе придется это делать постоянно!

Объясните, в чем тут дело.

Эти задачи нам предложили
Н. К. Антонович, М. А. Мнацаканян, А. П. Савин, Л. Фельдман, С. С. Кротов





На пальцах и в уме

Р. Ш. ДАНЕЛИЯ

В детстве для сложения чисел мы все пользовались вычислительной машиной, устроенной самой природой — десятью пальцами. Оказывается, этим же «прибором» можно пользоваться и при умножении чисел. Покажем, как «на пальцах» перемножить любые два числа от 6 до 10 включительно. Для этого пронумеруем пальцы рук: мизинец — 6, безымянный — 7, средний — 8, указательный — 9, большой — 10. Допустим, надо найти произведение 7×8. Для этого на левой руке загнем пальцы 6, 7, на правой — 6, 7, 8, затем количество загнутых пальцев обеих рук умножим на десять и прибавим произведение количества распрямленных пальцев правой руки на количество распрямленных пальцев левой: $5 \cdot 10+2 \cdot 3=56$.

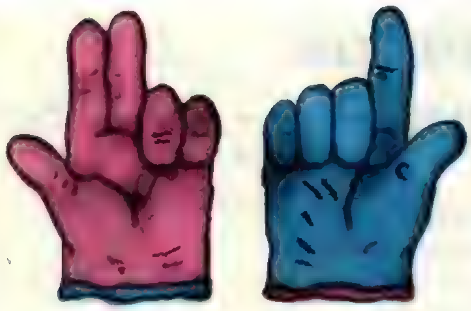
Поупражнявшись немного или научив этому нехитрому искусству младшего брата, еще плохо знающего таблицу умножения, вы заодно можете проверить, что этот способ умножения всегда дает правильный результат. Почему?

Искомое число — это произведение ab, где $6 \leqslant a \leqslant 10$, $6 \leqslant b \leqslant 10$. Ясно, что на левой руке загнуто $a-5$ пальцев, а на правой $b-5$. Таким образом, количество распрямленных пальцев равно $a+b-10$. На левой руке разогнуто $10-a$, на правой $10-b$ пальцев. Их произведение равно $(10-a)(10-b)$.

Согласно высказанному, надо найти сумму:

$$(a+b-10) \cdot 10+(10-a)(10-b).$$

Раскрыв скобки, мы убедимся, что сумма действительно равна $a \cdot b$, то есть



$$\boxed{\begin{aligned}a\cdot b=(a+b-10)\cdot 10+\\+(10-a)(10-b).\end{aligned}}\qquad(1)$$

Таким образом, используемый нами метод умножения на пальцах обоснован.

* * *

Поглядев внимательно на тождество (1), легко понять, что вместо числа 10 можно поставить любое число m, то есть

$$\boxed{\begin{aligned}ab=(a+b-m)\,m+\\+(m-a)(m-b).\end{aligned}}\qquad(2)$$

Проверьте это! С помощью этого тождества можно быстро найти произведение двух таких чисел, у которых одно и то же число десяток, сотен, ...

Рассмотрим примеры.

1. Вычислим произведение $16\cdot 17$. В тождестве (2) возьмем $m=20$. Тогда

$$16\cdot 17=(33-20)\cdot 20+4\cdot 3=272.$$

2. Найдем произведение $42\cdot 44$. Возьмем $m=50$. Тогда

$$42\cdot 44=(86-50)\cdot 50+8\cdot 6=1848.$$

Конечно, для m можно брать и другие значения. Например, будет неплохо, если мы в качестве m возьмем 40.

В этом случае мы имеем

$$42\cdot 44=(86-40)\cdot 40+2\cdot 4=1848.$$

3. Чтобы найти произведение $121\cdot 103$, в тождестве (2) возьмем $m=100$. Тогда

$$121\cdot 103=(224-100)\cdot 100+\\+21\cdot 3=12463.$$

* * *

Возможно, вы знаете правило возведения в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5. *Для того чтобы найти $(10x+5)^2$, достаточно цифру x умножить на число, следующее за ним, и к полученному произведению прибавить* 25. Например,

$$35^2=3\cdot 4\cdot 10+25=145.$$

Это правило является следствием равенства

$$\boxed{(10x+5)^2=10x(x+1)+25,}\qquad(3)$$

которое, в свою очередь, — частный случай тождества (2).

* * *

Наконец, рассмотрим случай, когда $a=10x+y$, $b=10x+z$. Тогда мы имеем

$$(10x+y)(10x+z)=\\=x(10x+y+z)\,10+yz.$$

Если $y+z=10$, мы получим тождество, подобное тождеству (3):

$$\boxed{\begin{aligned}(10x+y)(10x+z)=\\=100x(x+1)+yz.\end{aligned}}\qquad(4)$$

На основе этого можно сформулировать следующее правило: *чтобы найти произведение двух чисел, число десятков которых одно и то же, а сумма единиц равна 10, необходимо число десятков умножить на последующее число и к полученному числу приписать произведение единиц* (если одно однозначно, перед ним приписывается 0). Например:

1. $48\cdot 42$; $4\cdot 5=20$, $8\cdot 2=16$; $48\cdot 42=2016$;

2. $99\cdot 91$; $9\cdot 10=90$, $9\cdot 1=09$; $99\cdot 91=9009$;

3. $102\cdot 108$; $10\cdot 11=110$, $2\cdot 8=16$, $102\cdot 108\cdot 11016$.

* * *

Поупражнявшись в этих приемах умножения, вы научитесь быстро умножать в уме многие числа. А если вы придумаете другие приемы, сокращающие умножение, — напишите нам.

задачник кванта

Задачи

М801 — М805; Ф813 — Ф817

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 июля 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М801, М802» или «Ф813». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М801*. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[4]{n}] + \ldots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + [\log_4 n] + \ldots + [\log_n n]$$

($[x]$ означает целую часть числа x).

В. В. Кисиль

М802. На сторонах AB и BC треугольника ABC как на гипотенузах построены вне его прямоугольные треугольники APB и BQC с одинаковыми углами величины β при их общей вершине B (см. рис. 1). Найдите углы треугольника PQK, где K — середина стороны AC.

Л. П. Купцов

М803. Сумма двух рациональных чисел x и y — натуральное число, сумма обратных к ним чисел $1/x$ и $1/y$ — тоже натуральное число. Какими могут быть x и y?

Р. А. Мазов, А. П. Савин

М804. Точка O — середина оси прямого кругового цилиндра, A и B — диаметрально противоположные точки окружности нижнего основания цилиндра, C — некоторая точка окружности верхнего основания, не лежащая в плоскости OAB. Докажите, что сумма двугранных углов трехгранного угла $OABC$ (с вершиной O) равна 2π.

И. К. Жук

М805*. а) На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} \leqslant S_{ABC}/4$.

б) На гранях BCD, CDA, BDA, ABC тетраэдра $ABCD$ выбраны соответственно точки A_1, B_1,

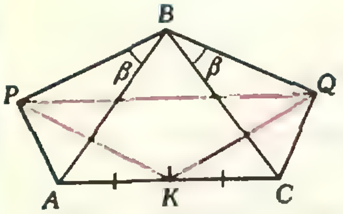


Рис. 1.

C_1, D_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $V_{A_1B_1C_1D_1} < V_{ABCD}/27$.

Р. П. Ушаков

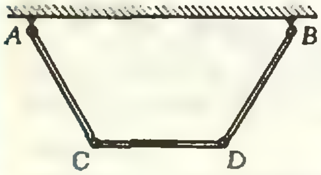


Рис. 2.

Ф813. Три невесомых шарнирно связанных стержня длины a каждый закреплены шарнирно в точках A и B, лежащих на одной горизонтали (рис. 2); $|AB|=2a$. К шарниру C подвесили груз массы m. При какой минимальной силе, приложенной к шарниру D, средний стержень будет сохранять горизонтальное положение?

С. К. Строков

Ф814. На гладкой горизонтальной поверхности тележки лежит шар радиуса R. Тележка начинает двигаться со скоростью v_0. Найти горизонтальную проекцию скорости шара в момент его удара об пол.

А. Р. Зильберман

t, °C	σ, $\frac{\text{мН}}{\text{м}}$
0	76
20	73
50	67
90	60

Ф815. Нижний конец капилляра радиуса $r=0{,}2$ мм и длины $l=8$ см погружают в воду, температура которой постоянна и равна 0°С. Температура верхнего конца капилляра $t_0=100°\text{C}$. Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения $\sigma(t)$ воды приведена в таблице. На какую высоту поднимется вода в капилляре? Теплопроводность капилляра намного превосходит теплопроводность воды в нем; теплообменом с окружающим воздухом можно пренебречь.

А. И. Буздин

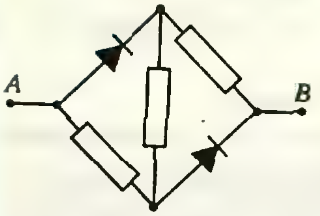


Рис. 3.

Ф816. В схеме, приведенной на рисунке 3, сопротивления резисторов одинаковы и равны $R=60$ Ом, диоды идеальные. Батарею, дающую напряжение $U=12$ В, подключают к точкам A и B на время $t_1=1$ с. Затем, поменяв полюса местами, подключают батарею к схеме на время $t_2=5$ с. Найти выделившееся в схеме количество теплоты.

Л. П. Баканина

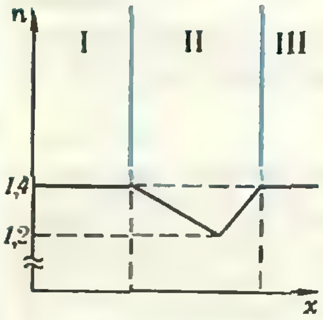


Рис. 4.

Ф817. На рисунке 4 показана зависимость показателя преломления n от координаты. Узкий монохроматический пучок света падает на границу раздела сред I и II. При каких углах падения свет проникает в среду III?

В. В. Можаев

Problems

M801—M805; P813—P817

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that July 31st 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103 006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M801*. Prove that for any positive integer n

$$[\sqrt{n}\,] + [\sqrt[3]{n}\,] + [\sqrt[4]{n}\,] + \ldots + [\sqrt[n]{n}\,] =$$
$$= [\log_2 n] + [\log_3 n] + [\log_4 n] + \ldots + [\log_n n]$$

(here $[x]$ denotes the integer part of x).

V. V. Kisil

M802. The sides AB and BC of triangle ABC are the hypothenuses of right triangles APB and BQC (lying outside of ABC) with congruent angle β at their common vertex B (see figure Рис. 1). Find the angles of triangle PQK, where K is the midpoint of AC.

L. P. Kuptsov

M803. The sum of two rational numbers x and y is a positive integer, and so is the sum of their inverses $1/x$ and $1/y$. What can be said about x and y?

R. A. Mazov, A. P. Savin

M804. The midpoint of the axis (perpendicular to the base) of a cylinder is O; A and B are diametrically opposed points on the bottom circle, C is some point of the top circle, not contained in the plane OAB. Prove that the sum of the three angles between planes OAB, OBC, OCA of the pyramid $OABC$ (with vertex O) equals 2π.

I. K. Juk

M805*. a) The points A_1, B_1, C_1 are chosen on sides BC, CA, AB of triangle ABC respectively so that the line segments AA_1, BB_1, CC_1 have a single common point. Prove that for the areas of triangles we have

$$S_{A_1B_1C_1} \leqslant S_{ABC}/4.$$

b) The points $A_1B_1C_1D_1$ are chosen on the faces BCD, CDA, BDA, ABC of the tetrahedron $ABCD$ respectively so that the line segments AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, have a single common point. Prove that

$$V_{A_1B_1C_1D_1} \leqslant V_{ABCD}/27.$$

R. P. Ushakov

P813. Three weightless rods each of length a are connected by hinges to the points A and B on the same horizontal level (see figure Рис. 2); $|AB| = 2a$. A weight of mass m is applied to the hinge C. For what minimal force applied to the hinge D will the middle rod remain horizontal?

S. K. Strokov

P814. A ball of radius R lies on the smooth horizontal surface of a cart which moves with velocity v_0. Find the horizontal projection of the ball's velocity when it hits the floor.

A. R. Zilberman

P815. The lower end of a capillary of radius $r = 0.2$ mm and length $l = 8$ cm is immersed in water of temperature 0°C. The temperature of the upper end of the capillary is 100°C. The dependence of the coefficient of water surface tension σ (t) on temperature is shown in the table. How high up the capillary will the water rise? The heat conductivity of the capillary is much greater than that of the water in it; the heat exchange with the surrounding air is negligible.

A. I. Buzdin

P816. In the circuit shown on figure Рис. 3, the resistances are both $R = 60$ Ohm, the diods are ideal. A battery yielding

the tension $U=12$ V is connected to the points A and B for time $t_1=1$ sec. Then the battery (with poles inverted) is connected to the circuit for time $t_2=5$ sec. Find the amount of heat irradiated by the circuit.

L. P. Bakanina

P817. Figure Рис. 4 shows the dependence of the refraction index n on the coordinate. A thin monochromatic beam of light falls on the boundary between the media I and II. For what angles of incidence does the beam penetrate into the medium III?

V. V. Mojaev

Решения задач

M786—M790; Ф798, Ф799, Ф801, Ф802

M786. *Докажите, что для любых натуральных n и k (больших 1) число n^k можно представить в виде суммы n последовательных нечетных чисел. (Например, $4^3=13+15+17+19$; $7^2=1+3+5+7+9+11+13$; $3^4=25+27+29$.)*

Искомые n чисел образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Пусть a — первое из них, тогда их сумма равна $a+(a+2)+\ldots+(a+2n-2)=n(a+n-1)=n^k$. Отсюда находим: $a=n^{k-1}-n+1$. Это число нечетно при любых целых n и k, $k>1$, поскольку n^{k-1} и n — числа одной четности. Поэтому $a=n^{k-1}-n+1$, $n^{k-1}-n+3$, ..., $n^{k-1}+n-1$ — искомые числа.

Замечание. Найденное нами представление числа n^k можно использовать для вывода формулы суммы кубов первых n натуральных чисел. Имеем: $1^3=1$, $2^3=3+5$, $3^3=7+9+11$, ..., $(n-1)^3=(n-1)^2-(n-1)+1+\ldots+(n-1)^2+n-2$, $n^3=(n^2-n+1)+\ldots=((n-1)^2+n)+\ldots$, следовательно, $1^3+2^3+\ldots+n^3=1+3+5+7+\ldots+(n^2+n-1)$. Число слагаемых в последней сумме равно $1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$ и по формуле для суммы арифметической прогрессии $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2+n}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)^2}{2}$.

А. Н. Козаченко

◆

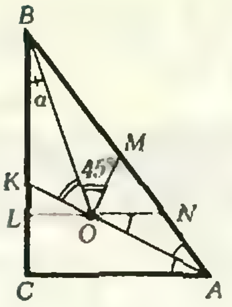
M787. *Найдите отношение сторон прямоугольного треугольника, если известно, что одна половина гипотенузы (от вершины до середины гипотенузы) видна из центра вписанной окружности под прямым углом.*

Ответ. $a:b:c=4:3:5$, где a и b — длины катетов, а c — длина гипотенузы данного треугольника. Этот ответ нетрудно получить, составив и решив тригонометрическое уравнение: например, можно воспользоваться тем, что в треугольнике AOB, где O — центр вписанной окружности (см. рисунок), медиана OM делит угол AOB, равный $135°$ $\left(\widehat{AOB}=180°-\frac{1}{2}(\widehat{CAB}+\widehat{CBA})\right)$, на части, равные $\widehat{AOM}=90°$ и $\widehat{BOM}=135°-90°=45°$. Однако, как правило, при таком «хорошем» ответе можно найти и «хорошее» решение *). Существует оно и у этой задачи.

Проведем прямую через точку O и середину N отрезка AM. Поскольку треугольник AOM прямоугольный, $|ON|=|NA|$, следовательно, $\widehat{NOA}=\widehat{NAO}=\widehat{CAO}$ (AO — биссектриса угла CAB). Поэтому прямая ON параллельна CA и $|CL|:|LB|=|AN|:(|NM|+|MB|)=1:3$ $(|MB|=|MA|=2|AN|)$. Но $|LC|=|LO|$, поскольку O — центр вписанной окружности прямоугольного треугольника и отрезок OL перпендикулярен катету BC. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha=1/3$, где $\alpha=\widehat{OBC}=\widehat{B}/2$, и $|AC|:|AB|=\operatorname{tg}\widehat{B}=2\operatorname{tg}\alpha/(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=3/4$.

---

*) Примеры таких «хороших» решений приводились, скажем, в статье Я. Н. Суконника и П. И. Горнштейна «Простой ответ и «сложной» задаче» («Квант», 1976, № 2).



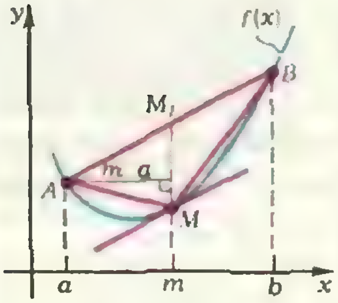
Еще одно геометрическое решение нам сообщил десятиклассник М. Дьячков (пос. Черноголовка Московской обл.). Пусть K — точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC (см. рисунок). Как мы заметили выше, $\widehat{BOM}=45°$, следовательно $\widehat{BOK}=90°-45°=\widehat{BOM}$. Отсюда вытекает, что треугольники $\widehat{BOM}$ и $\widehat{BOK}$ и, в частности, их стороны BM и BK конгруэнтны. По известной теореме о биссектрисе $|CK|:|KB|=|CA|:|CB|$, то есть $\left(a-\frac{c}{2}\right):\frac{c}{2}=b:c$ или $2a-c=b$. С другой стороны, по теореме Пифагора $c^2=a^2+b^2$. Из этих двух уравнений легко вывести ответ.

В. Н. Дубровский

◆

M788. *а) На графике $y=x^2$ отмечены точки $A(a;\ a^2)$ и $B(b;\ b^2)$. Найдите между ними точку $M(m;\ m^2)$, для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM, наименьшая.*

б) На графике дифференцируемой функции $y=f(x)$ отмечены точки A и B. Известно, что график и отрезок AB ограничивают выпуклую фигуру. Пусть M — точка графика, расположенная между A и B, для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM, наименьшая. Докажите, что касательная к графику в точке M параллельна хорде AB.



Приведем сначала решение для общего случая (пункт б), а затем применим результат к функции $f(x)=x^2$ (пункт а).

Поскольку по условию сегмент AB, ограниченный отрезком AB и графиком $y=f(x)$, — это выпуклая фигура, его площадь равна сумме площадей треугольника ABM и сегментов AM и MB (см. рисунок). Следовательно, если сумма площадей сегментов AM и MB минимальна, площадь треугольника ABM максимальна. Разобьем этот треугольник на два — AM_1M и BM_1M — прямой MM_1, параллельной оси ординат. Пусть a, b и m — абсциссы точек A, B и M, причем, для определенности, $a<b$. Тогда

$$S_{ABM}=S_{AM_1M}+S_{BM_1M}=\frac{1}{2}(m-a)\cdot|MM_1|+$$

$$+\frac{1}{2}(b-m)\cdot|MM_1|=\frac{1}{2}(b-a)\cdot|MM_1|,$$

поэтому наибольшее значение площади треугольника ABM достигается, когда максимальна длина отрезка MM_1. Обозначим через $l(x)=kx+c$ линейную функцию, графиком которой служит прямая AB, тогда $|MM_1|=l(m)-f(m)$. (Мы считаем, что хорда AB расположена над графиком — см. рисунок; в противном случае $|MM_1|=f(m)-l(m)$.) По теореме Ферма (см. Алгебра и анализ 9-10, п. 26), в точке максимума функции $g(x)=l(x)-f(x)$ ее производная равна нулю, то есть $g'(m)=l'(m)-f'(m)=0$ и $f'(m)=l'(m)=k$. Но $f'(m)$ и k — это угловые коэффициенты касательной к графику $y=f(x)$ в точке M и прямой AB, а из равенства угловых коэффициентов вытекает параллельность соответствующих прямых.

В частности, если $f(x)=x^2$, угловой коэффициент прямой AB равен $(b^2-a^2)/(b-a)=a+b$, а производная функции $f(x)$ в точке m равна $2m$. Фигура, ограниченная параболой и ее хордой, как легко видеть, является выпуклой. Поэтому абсцисса точки M, для которой сумма площадей сегментов AM и MB максимальна, удовлетворяет условию $2m=a+b$, то есть точка M имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2};\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$.

Е. Д. Москаленский, Ю. В. Чиняев

◆

M789. *а) 10 точек, делящие окружность на 10 равных дуг, попарно соединены 5 хордами. Обязательно ли среди них найдутся две хорды одинаковой длины?*

б) 100 точек, делящие окружность на 100 равных дуг,*

а) Ответ: необязательно. На рисунке 1 показано такое соединение 10 точек 5 хордами, при котором все они имеют различные длины.

б) Пусть $2n$ точек, разбивающих окружность на $2n$ равных дуг, попарно соединены n хордами. Выведем необходимое условие того, что все эти хорды имеют разные длины и проверим, что число $n=50$ этому условию не удовлетворяет.

попарно соединены 50 хордами. Докажите, что среди них обязательно найдутся две хорды одинаковой длины.

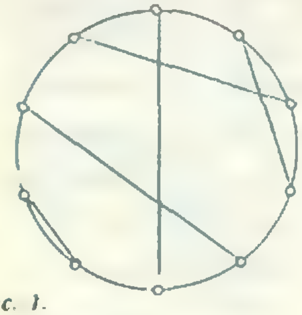


Рис. 1.

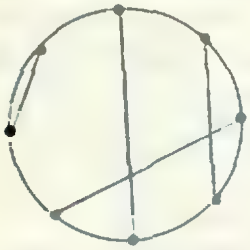


Рис. 2.

Занумеруем проведенные хорды числами 1, ..., n. Примем длину дуги между двумя соседними точками за 1, тогда длина l_i меньшей из дуг, соединяющей концы i-й хорды — натуральное число, не большее n — длины полуокружности. Если длины всех хорд различны, то и числа $l_1, \ldots, l_n$ различны, поэтому среди них встречаются по разу все числа от 1 до n. Назовем i-ю хорду *четной*, если l_i — четное число, и *нечетной* в противном случае. Количество четных хорд обозначим через k. Оно, очевидно, равно количеству четных чисел, не больших n. Покажем, что k — обязательно четное число, $k=2m$, то есть $n=4m$ или $n=4m+1$.

С этой целью окрасим данные точки поочередно в красный и черный цвет (рис. 2). Ясно, что любая из k четных хорд соединяет точки одного цвета, а любая из $n-k$ нечетных — точки разных цветов. Поэтому ровно $n-k$ из n красных точек служат концами нечетных хорд, а остальные k должны быть попарно соединены между собой (четными) хордами. Значит, k — четное число.

Итак, при $n=4m+2$ (в частности, при $n=50$) и при $n=4m+3$ требуемого соединения не существует. Рисунки 1 и 2 показывают, что при $n=4m$ и $n=4m+1$ оно может существовать (на рисунках $m=1$); но можно ли построить соединения с попарно различными хордами для любого числа такого вида, мы не знаем, хотя предполагаем, что это так.

В. В. Произволов

◆

М790. *а) Про числовую функцию f известно, что если $|x-y|=1$, то $|f(x)-f(y)|=1$. Верно ли, что при любых x и y будет выполнено равенство*

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|?$$

Пусть про отображение F плоскости в себя известно, что любые две точки X, Y, находящиеся на расстоянии 1, оно переводит в две точки $F(X)$, $F(Y)$, также находящиеся на расстоянии 1:

$$\varrho(X, Y)=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varrho(F(X), F(Y))=1;$$

тогда для любых двух точек X, Y плоскости

$$\varrho(X, Y)=\varrho(F(X), F(Y)),$$

то есть отображение F сохраняет расстояние. Докажите следующие утверждения, из которых вытекает эта теорема: для любых X, Y

б) $\varrho(F(X), F(Y)) < \varrho(X, Y)+1$;

*в)** $\varrho(X, Y)=\sqrt{3} \Rightarrow \varrho(F(X), F(Y))=\sqrt{3}$;

*г)** $\varrho(F(X), F(Y)) \leqslant \varrho(X, Y)$;

*д)** $\varrho(F(X), F(Y)) \geqslant \varrho(X, Y)$.

(Вы можете, конечно, предложить и другой план доказательства теоремы.)

Ответ в задаче а): неверно. Опровергающим примером может служить функция $f_1(x)=[x]$ (целая часть x; рис. 1) или $f_2(x)=x-2[x/2]$ (рис. 2). Вообще, единственное требование, которому должна удовлетворять функция f, состоит в том, чтобы для последовательности значений $f(\alpha+n)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, при каждом α, $0 \leqslant \alpha < 1$, выполнялось условие $|f(\alpha+n+1)-f(\alpha+n)|=1$, причем при разных α эти последовательности можно задавать совершенно независимо.

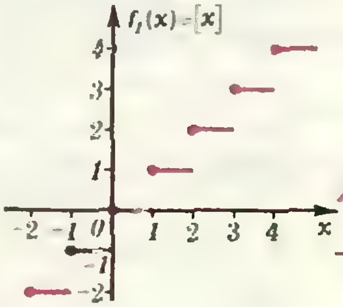


Рис. 1

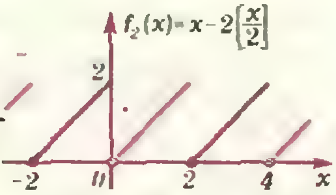


Рис. 2.

Докажем теперь теорему об отображении плоскости, следуя плану б) — д). Для краткости вместо $F(X)$ мы всюду будем писать X', и расстояние между точками X и Y будем, как обычно, обозначать $|XY|$.

Будем говорить, что отображение F *сохраняет расстояние* $r>0$, если для любых двух точек X и Y, находящихся на расстоянии $|XY|=r$, $|X'Y'|=r$, и что F сохраняет некоторую *фигуру* Ф, если для любых точек X и Y этой фигуры $|XY|=|X'Y'|$ (то есть при отображении Ф перемещается как жесткая фигура). В дальнейшем мы покажем, что рассматриваемое в задаче отображение (сохраняющее расстояние 1) сохраняет сколь угодно малые расстояния $r>0$, и пока предположим, что F сохраняет расстояние $r>0$ и изучим некоторые свойства такого отображения.

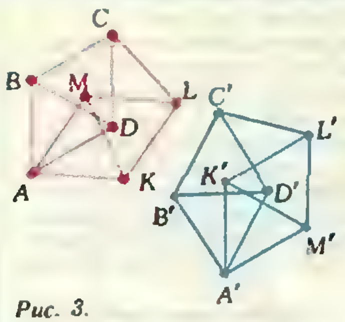


Рис. 3.

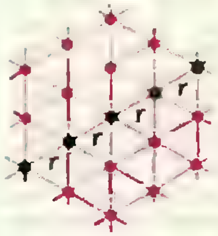


Рис. 4.

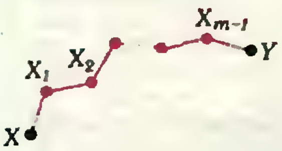


Рис. 5.а.

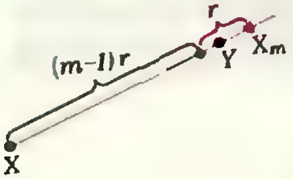


Рис. 5.

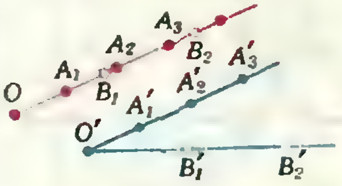


Рис. 6.

Очевидно, что F сохраняет тройку вершин любого правильного треугольника со стороной r. Докажем, что F сохраняет также и четверку вершин любого ромба $ABCD$ со стороной r и диагональю $|BD|=r$ (отсюда вытекает в): $|A'C'|=|AC|=\sqrt{3}$ при $r=1$). Достаточно доказать, что $C'\neq A'$. Для этого рассмотрим вместе с ромбом $ABCD$ равный ему ромб $AKLM$, такой что $|CL|=r$ (рис. 3). Если $C'=A'$, то $|C'L'|$ равно 0 или $\sqrt{3}\,r$, а это невозможно, ибо $|C'L'|=|CL|=r$.

Итак, F сохраняет четверку $ABCD$, а следовательно, «треугольную решетку», то есть множество вершин правильных треугольников со стороной r, покрывающих плоскость, и ее подмножество — цепочку точек на прямой, отстоящих друг от друга на расстояние mr, $m=1, 2, \ldots$ (рис. 4). Поэтому F сохраняет расстояние mr.

Докажем теперь, что для любых двух точек X и Y

$$|XY|-2r<|X'Y'|<|XY|+r \qquad (*)$$

(второе неравенство при $r=1$ — это пункт б) задачи). Пусть $(m-1)r<|XY|<mr$, где m — натуральное число. Тогда точки X и Y можно соединить ломаной $XX_1X_2\ldots X_{m-1}Y$ из m звеньев длины r (рис. 5, *а*) и $|X'Y'|<|X'X_1'|+|X_1'X_2'|+\ldots+|X_{m-1}'Y'|=mr<|XY|+r$. С другой стороны, если X_m — такая точка луча XY, что $|XX_m|=mr$ (рис. 5, *б*), то $|X_mY|<r$ и $|X'Y'|>|X'X_m'|-|X_m'Y'|$. Но $|X'X_m'|=|XX_m|=mr$, а $|X_m'Y'|<|X_mY|+r<2r$, поэтому $|X'Y'|>mr-2r>|XY|-2r$.

Наконец, докажем, что если F сохраняет расстояние 1, то можно указать и сколь угодно малое расстояние r, сохраняющееся при этом отображении. Отсюда, пользуясь неравенствами (*), мы выведем утверждения г) и д).

Рассмотрим луч l с началом O и две последовательности его точек (A_m) и (B_n): $|OA_m|=m$, $|OB_n|=n\sqrt{3}$, $m, n=1, 2, \ldots$. Отображение F, сохраняющее расстояние 1, сохраняет, как мы знаем, каждую из этих последовательностей. Более того, оно сохраняет и их объединение, то есть лучи $O'A_m'$ и $O'B_n'$ совпадают. (В противном случае (рис. 6) можно найти столь большое n, что $|A_m'B_n'|>2$ при всех m. В то же время $|A_mB_n|<1$ при некотором m, а тогда в силу (*) $|A_m'B_n'|<2$.) Отсюда следует, что отображение F сохраняет расстояние $r=|m-n\sqrt{3}|$ при всех целых m, n. Остается применить следующую важную лемму: *среди чисел $|m-n\sqrt{3}|$ можно найти число, меньшее любого положительного* ε. (Аналогичное утверждение верно для множества чисел $|m-n\alpha|$, где m, n — целые, при любом иррациональном α.) Для доказательства достаточно заметить, что число $(2-\sqrt{3})^N$ имеет вид $a_N-b_N\sqrt{3}$, где a_N и b_N — целые, а при достаточно *большом* N это число меньше ε.

Итак, если F сохраняет расстояние 1, то неравенства (*) выполняются при сколь угодно малом положительном r. Следовательно, $|XY|\leq|X'Y'|\leq|XY|$ (пункты г) и д)), то есть $|X'Y'|=|XY|$ для любых двух точек X и Y. Другими словами, F — это просто перемещение плоскости.

Оставляем читателям в качестве задачи доказательство аналогичной теоремы в пространстве. (Заметим, что здесь нужны новые идеи, поскольку одними правильными тетраэдрами замостить пространство нельзя! Попробуйте доказать, что если отображение F пространства в себя сохраняет расстояние r, то оно сохраняет не только правильный тетраэдр и составленную из двух тетраэдров «бипирамиду», но и правильный октаэдр с ребром r.)

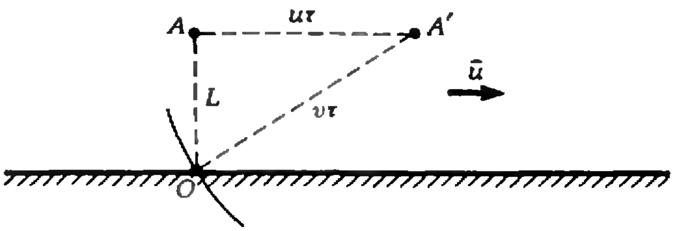
А. Тышка, Н. Б. Васильев

◆

Ф798. *В реку, скорость течения которой везде равна* u, *из точки* O *на берегу бросают камень перпендикулярно бе-*

В системе отсчета, связанной с водой (то есть движущейся со скоростью u относительно берега в направлении течения реки), фронт волны, распространяющейся по воде из точки падения камня, представляет собой в любой момент *регу. Скорость поверхностных волн в воде равна v. Через какое время после падения камня волна придет в точку O, если камень упал на расстоянии L от берега?*

времени t окружность радиуса $R=vt$ ($t=0$ в момент падения камня). Относительно берега центр этой окружности — точка A на рисунке — движется со скоростью $\vec{u}$. К моменту времени τ, когда волна придет в точку O, точка A переместится в точку A', пройдя путь $|AA'|=u\tau$.



Время τ найдем из условия (см. рисунок)

$$L^2+(u\tau)^2=(v\tau)^2.$$

Отсюда

$$\tau=\frac{L}{\sqrt{v^2-u^2}}.$$

П. И. Зубков

◆

Ф799. *Высота вертикального водяного фонтана от уровня выходной трубы насоса равна H. Во сколько раз следует изменить мощность насоса, чтобы полная высота фонтана осталась прежней после подсоединения к выходной трубе насоса вертикальной трубы такого же диаметра с высотой h<H?*

Масса воды, проходящей за единицу времени через сечение выходной трубы насоса, равна $m=\rho vs$, где ρ — плотность воды, v — скорость течения воды в выходной трубе насоса, s — площадь сечения трубы. Мощность насоса равна энергии, «уносимой» водой за единицу времени, то есть равна $N=mv^2/2$. Для того чтобы вода в фонтане поднималась на высоту H, ее скорость на выходе из трубы должна быть равна $v=\sqrt{2gH}$.

Следовательно, мощность насоса должна быть равной

$$N=\frac{mv^2}{2}=\frac{1}{2}\rho s(2gH)^{3/2}.$$

Аналогичное выражение для мощности получим в том случае, когда к выходной трубе насоса подсоединена дополнительная труба высоты h. Скорость воды «на выходе» в этом случае должна быть $v'=\sqrt{2g(H-h)}$, а мощность —

$$N'=\frac{1}{2}\rho s(2g(H-h))^{3/2}.$$

Таким образом, чтобы полная высота фонтана осталась прежней, мощность насоса надо уменьшить в

$$k=\frac{N'}{N}=\left(1-\frac{h}{H}\right)^{3/2}.$$

П. И. Зубков

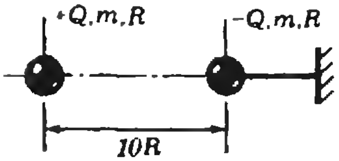
◆

Ф801. *В исходном состоянии центры двух шаров с массами m и радиусами R разнесены на расстояние 10R. На одном из них равномерно распределен заряд +Q, на втором — Q. Первый шар привязан к удаленной стенке ниткой, которая выдерживает на разрыв натяжение T. Второй шар в некоторый момент*

Максимальная сила электростатического притяжения между шарами равна $F_{\max}=k\frac{Q^2}{4R^2}$. Если $T<F_{\max}$, то нить оборвется до момента столкновения шаров. Если $T>F_{\max}$, то привязанный шар до столкновения будет находиться в состоянии покоя. Рассмотрим сначала случай $T<F_{\max}$.

Пусть в момент обрыва нити расстояние между центрами шаров равно x. В этот момент сила кулоновского взаимодействия шаров равна по модулю силе натяжения нити T:

отпускают. Найти скорость шаров после соударения, если удар абсолютно неупругий. Заряды не перераспределяются.



$$k\frac{Q^2}{x^2} = T. \qquad (1)$$

С этого момента система из двух шаров становится замкнутой, и полный импульс системы остается неизменным.

Пусть v — скорость левого шара в момент обрыва нити, а u — скорость шаров после столкновения. Тогда

$$mv = 2mu. \qquad (2)$$

Скорость v находится из закона сохранения энергии:

$$-k\frac{Q^2}{10R} = -k\frac{Q^2}{x} + m\frac{v^2}{2}. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) — (3), находим u:

$$u = \sqrt{k\frac{Q^2}{2m}\left(\frac{1}{Q}\sqrt{\frac{T}{k}} - \frac{1}{10R}\right)}.$$

Если $T > F_{\max}$, то в предыдущих рассуждениях следует сразу принять $x = 2R$. Тогда

$$u = \sqrt{\frac{0{,}2kQ^2}{mR}}.$$

Г. В. Федотович

◆

Ф802. *Закрытый с торцов теплоизолированный цилиндр массы m перегорожен неподвижным поршнем массы M. С обеих сторон от поршня находится по одному молю идеального газа, внутренняя энергия которого равна $U = cT$. Коротким ударом цилиндру сообщают скорость $\vec{v}$, направленную вдоль его оси. На сколько изменится температура газа после затухания колебаний поршня? Трения между поршнем и цилиндром нет.*

Пусть u — скорость, с которой движутся цилиндр и поршень после того, как колебания поршня затухли. Согласно закону сохранения импульса

$$mv = (M+m)\,u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{M+m}v.$$

Уменьшение кинетической энергии системы —

$$\Delta K = m\frac{v^2}{2} - (M+m)\frac{u^2}{2} = \frac{Mm}{M+m}\frac{v^2}{2}$$

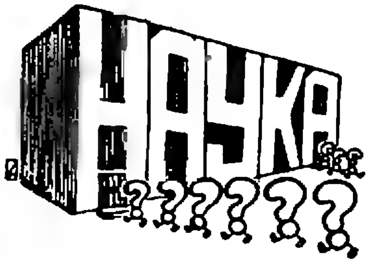
— обусловлено переходом части ΔK этой энергии в тепло и равно увеличению внутренней энергии газа в цилиндре (теплоемкость цилиндра и поршня считаем пренебрежимо малыми по сравнению с теплоемкостью газа). Поскольку поршень, как и вначале, оказался в равновесии, оба моля газа (справа и слева от поршня) вновь имеют одинаковые объем, давление и температуру. Таким образом, изменение внутренней энергии газа равно

$$\Delta U = 2c \cdot \Delta T = \frac{Mm}{M+m}\frac{v^2}{2}.$$

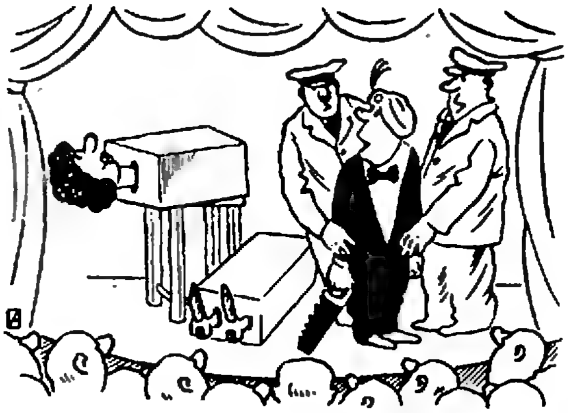
Отсюда находим изменение температуры газа:

$$\Delta T = \frac{Mm}{M+m}\frac{v^2}{4c}.$$

Г. В. Меледин



Там, где кончаются сомнения, кончается наука.

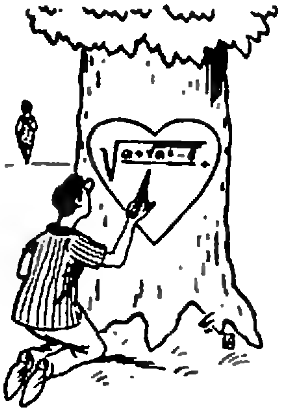


Только очень глупые люди не понимают шуток

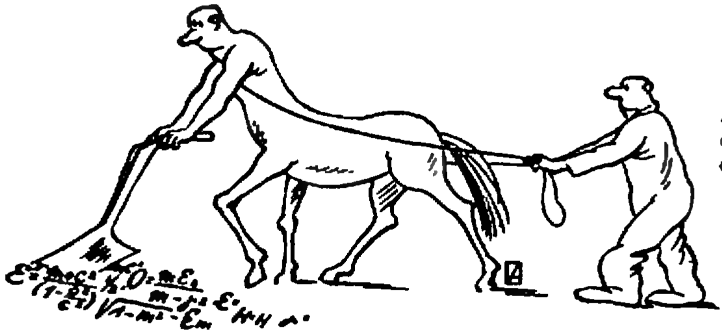
КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Афоризмы академика П. Л. Капицы

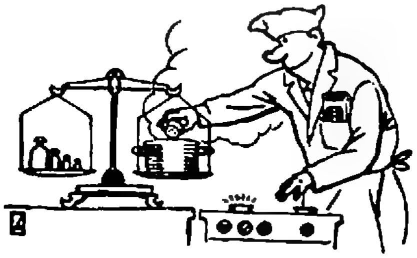
с рисунками художника А. А. Орехова



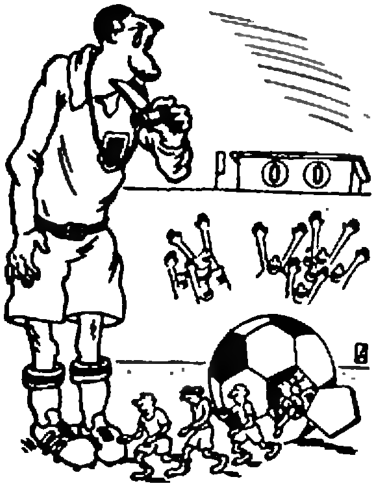
На словах только в любви объясняются, а о делах следует писать.



Хорошую работу чужими руками не сделаешь.



Только кухарка прибавляет соли на глаз, а физики должны все рассчитывать.



Дело не в размере. Атомное ядро еще мельче, а страсти вокруг него еще больше.

Топология автомобильной развязки

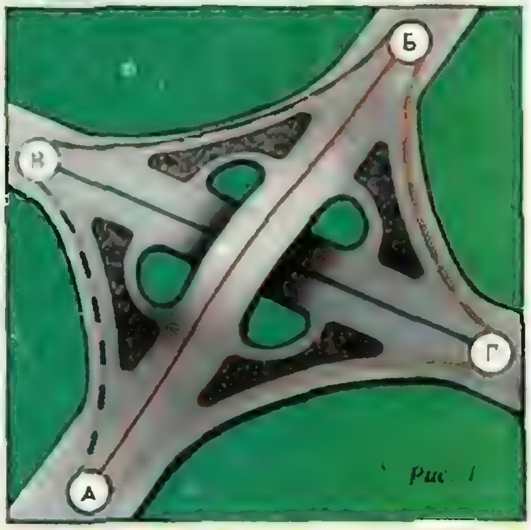


Рис. 1

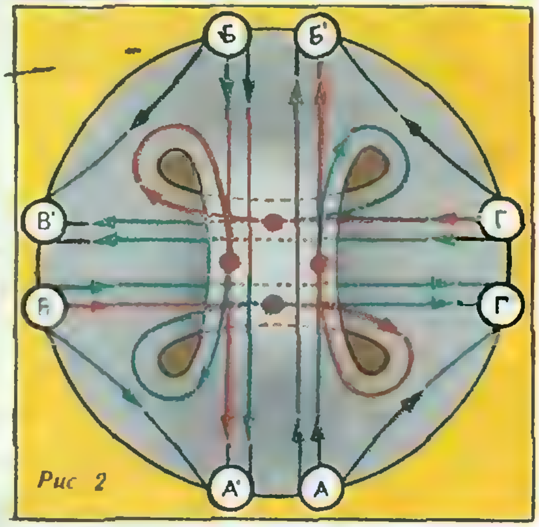


Рис. 2

Четыре точки на границе круга или квадрата (например, вершины квадрата) нельзя попарно соединить непересекающимися линиями (путями), проведенными внутри фигуры. В этом нетрудно убедиться, взяв в руки карандаш и бумагу, хотя для строгого доказательства необходимы познания из области топологии. Если же заменить квадрат на такой кусок поверхности с фигурным вырезом и «мостиком», как на рисунке 1, задача легко решается.

Подобные топологически сложные поверхности представляют не только умозрительный интерес — они полезны в практике проектирования и строительства автомагистралей, железнодорожных путей, сети городских улиц и т. п. Глядя на рисунок 1, читатель наверняка узнал современную автомобильную развязку «клеверный лист». На первый взгляд, возможность попарно соединить непересекающимися путями четыре пункта означает, что можно организовать беспрепятственное движение автомобильных потоков.

Однако, присмотревшись внимательнее, можно заметить, что схема, приведенная на рисунке 1, недостаточно точна. На самом деле, движение транспорта — двухстороннее, и встречные потоки также не должны пересекаться, поэтому количество пунктов и путей следует удвоить. Как показано на рисунке 2, каждый из пунктов «отправления» *А*, *Б*, *В*, *Г* следует соединить ориентированным путем с каждым из пунктов «прибытия» *А'*, *Б'*, *В'*, *Г'*. И на поверхности «клеверного листа» сделать это без пересечений, как ни странно, не удается.

Красными кружочками на рисунке помечены точки пересечения потоков транспорта. Правда, эти пересечения происходят в местах, где потоки попутны (например, автомобилист, движущийся из пункта *А* в пункт *В'*, на мосту должен перестраиваться, так как его путь пересекает путь автомобилиста, следующего из пункта *В* в пункт *Б'*), но при интенсивном движении и такие перестроения нежелательны.

Как быть? Может быть, можно иначе направить потоки транспорта по такой развязке? Нет, устранить таким путем пересечения нельзя — это теорема, которую умеют доказывать топологи.

Но те же топологические соображения подсказывают нам и выход из создавшейся ситуации: надо усложнить «топологическое строение» развязки. Одно из решений, позволяющее беспрепятственно направить все транспортные потоки, показано на четвертой странице нашей обложки. Здесь в средней части поверхности образована еще одна конструкция с фигурным вырезом, которая соединяет поверхность «моста» с расположенной внизу поперечной дорогой.

Возможно, показанное решение не удовлетворит конструкторов автомагистралей. Но в практике современного строительства есть примеры топологически весьма сложных узлов и развязок.

Ю. В. Котов

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1982 году.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления)

1. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} y=\sin(a+\pi x)+\sin(a-\pi x) \\ 3\sin a=\dfrac{1}{1+y^2}\left(\dfrac{3}{2}+x+\dfrac{1}{2x^2}\right) \end{cases}$$

имеет единственное решение в области $x\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$, $y\in\left]-\infty;0\right]$?

2. Решите уравнение

$$2(\sin 3x+\cos x)=$$
$$=(\sin x+\cos x)^2+(\sin 2x+\cos 2x)^2.$$

3. Решите неравенство

$$\cos x+\sqrt{2+\cos x}<0.$$

4. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с единичными сторонами середины P, Q сторон AB, CD и S, T сторон BC, DE соединены отрезками PQ и ST. Пусть M и N — середины отрезков PQ и ST. Найдите длину отрезка MN.

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребрами длины a. На ребре AA' взята точка E так, что $|AE|=\frac{1}{4}a$. Найдите объем пирамиды, у которой вершина совпадает с точкой A', а основанием служит сечение, проходящее через точки D, E и середину ребра BB'.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Стрелок из лука стоит на берегу над отвесным обрывом, высота которого равна H. Вектор начальной скорости стрелы составляет угол α с горизонтом и по величине равен v. Через какое время T после начала полета стрела окажется на высоте h над водой? Размерами стрелы и ростом стрелка пренебречь.

2. При каком x функция

$$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+x}}}}+$$
$$+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4-x}}}}$$

принимает наибольшее значение?

3. Укажите отрицательные корни уравнения

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}=0,$$

удовлетворяющие неравенству $x^3+5x^2-3x-3>0$.

4. Вычислите величину $\operatorname{tg} 37^\circ 30'$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде стороны основания равны a, боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на апофемах пирамиды, а основание принадлежит основанию пирамиды. Найдите объем куба.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Смешав по 2 см^3 трех веществ, получили 16 г смеси. Известно, что 4 г второго вещества занимают объем на 0,5 см^3 больший, чем 4 г третьего вещества. Найдите плотность третьего вещества, если известно, что масса второго вещества в смеси вдвое больше массы первого.

2. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h. Какую наименьшую длину может иметь медиана, делящая пополам больший катет?

3. Решите уравнение

$$8\sin^2 x+\sin 2x=5.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x-2^{y^2}=77 \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y^2}{2}}=7. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$13^{\frac{x}{13}+1}+13^{\frac{x}{13}}+13^{\frac{x}{13}-1}+\ldots=$$
$$=15^{2x+1}+15^{2x}+15^{2x-1}+\ldots$$

Вариант 4

(экономический факультет и факультет психологии)

1. Три свечи имеют одинаковую длину, но разную толщину. Первая свеча была зажжена на один час раньше других, зажженных одновременно. В некоторый момент горения первая и вторая свечи стали одинаковой длины, а через два часа после этого одинаковой длины стали первая и третья. За сколько часов сгорает первая свеча, если вторая сгорает за 8 часов, а третья — за 12 часов? Предполагается, что скорости сгорания свечей не зависят от продолжительности горения.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{|xy|}(x^2-y^2)=1 \\ \log_{|xy|}(x-y)=0. \end{cases}$$

3. Выразите величину lg 640 через величину $a=\lg 62{,}5$.

4. Найдите количество корней уравнения

$$3x^4+8x^3-6x^2-24x-10=0$$

на промежутке $[0;\ 3]$.

5. Наименьший из углов прямоугольного треугольника равен α. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведен круг, касательный к гипотенузе. Найдите отношение площадей круга и треугольника.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

1. Клин, наклонная поверхность которого образует угол α с горизонтом, может перемещаться поступательно по горизонтальной поверхности (рис. 1). С какой силой F следует тянуть за нить в горизонтальном направлении, чтобы брусок перемещался вверх по клину? С какими ускорениями будут двигаться при этом брусок и клин? Масса клина M, масса бруска m. Трением, массой нити и массой блока пренебречь.

2. Нагревается или охлаждается газ, расширяющийся по закону $pV^2=\text{const}$?

3. Собрана электрическая схема, показанная на рисунке 2. Как изменится показание вольтметра, если ключ K разомкнуть? Сопротивление вольтметра считать бесконечно большим.

4. На пути плоской монохроматической волны поставлен экран, в точке A которого помещен индикатор, регистрирующий энергию излучения, приносимую в единицу времени на единицу площади экрана. Во сколько раз изменится показание прибора, если перед экраном на расстоянии L от него поместить собирающую линзу так, чтобы точка A лежала на ее главной оптической оси (рис. 3)? Постройте графики зависимости искомой величины от L при фиксированном фокусном расстоянии линзы F и от F при фиксированном L. Потерями энергии в линзе пренебречь.

5. **Теоретический вопрос.** Трансформатор. Передача и распределение электроэнергии.

Вариант 2

1. Шар массы m налетает со скоростью v на неподвижный шар массы M по линии, соединяющей их центры. После удара модуль скорости первого шара становится вдвое меньше по сравнению с первоначальным. Найдите отношение суммарной кинетической энергии обоих шаров после удара к первоначальной кинетической энергии налетающего шара.

2. Один моль одноатомного идеального газа изохорически охлаждается так, что его давление уменьшается в n раз. Затем газ изобарически расширяется так, что его объем возрастает в n раз. Определите число n, если известно, что сообщенное газу при этих переходах суммарное количество теплоты в два раза меньше его первоначальной внутренней энергии.

3. Собрана электрическая схема, изображенная на рисунке 4. Как изменится показание амперметра, если ключ K замкнуть, то есть соединить накоротко точки A и $Б$?

4. Лучи от Солнца падают на небольшое плоское зеркало прямоугольной формы и после отражения попадают на экран, куда не падают прямые солнечные лучи. Какую форму имеет освещенное пятно на экране?

5. **Теоретический вопрос.** Понятие о волновых и квантовых свойствах света.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления, химический и геологический факультеты

1. По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Чему равен коэффициент трения ящика о сходни, если наименьшее усилие, необходимое для этого, получается, когда веревка образует угол β с вертикалью?

2. На тело массы m в течение времени t действует постоянная сила F, направленная горизонтально. Коэффициент трения тела о горизонтальную поверхность, на которой оно лежит, равен μ. Какой путь пройдет тело до остановки?

3. Две звезды с массами m_1 и m_2 движутся так, что расстояние между их центрами остается неизменным. Определите характер движения звезд (траекторию, скорость, ускорение), пренебрегая их взаимодействием с другими небесными телами.

4. Воздух массой $m=2$ кг находится в цилиндре, закрытом подвижным поршнем. Какая работа будет совершена при изобарном нагревании воздуха на $\Delta T=100$ K?

5. Один моль водорода нагревается при постоянном давлении. Какое количество теплоты необходимо сообщить водороду, чтобы его объем удвоился? Какая работа будет при этом совершена газом?

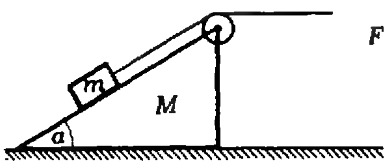


Рис. 1

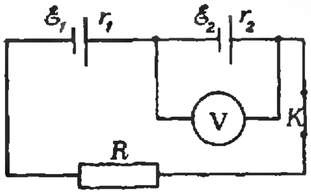


Рис. 2.

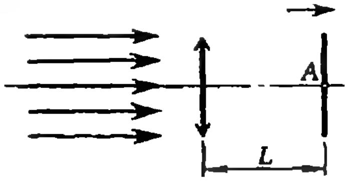


Рис. 3.

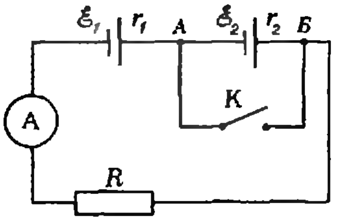


Рис. 4.

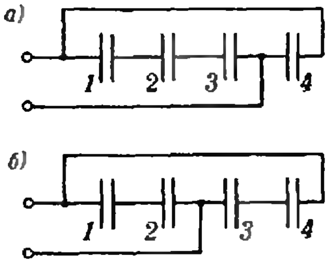


Рис. 5.

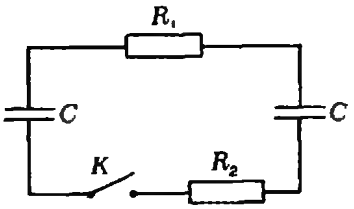


Рис. 6.

6. Батарея из четырех различных конденсаторов включена один раз по схеме а), другой раз по схеме б) (рис. 5). При каком условии емкости этих батарей будут одинаковыми?

7. Определите количество теплоты, выделившееся на каждом резисторе после замыкания ключа K (рис. 6). Вначале один конденсатор заряжен до напряжения U, другой не заряжен.

8. Какой шунт нужно присоединить к гальванометру со шкалой на 100 делений, ценой деления $I_0=1$ мкА и сопротивлением $R=180$ Ом, чтобы им можно было измерять токи до $I=1$ мА?

9. С подводной лодки в погруженном состоянии определили скорость самолета, пролетающего над лодкой. Во сколько раз кажущаяся скорость самолета отличается от истинной?

10. Во сколько раз нужно изменить время экспозиции, если расстояние фотографической бумаги от источника света увеличивается втрое?

Публикацию подготовили
Ю. Н. Бибиков, А. С. Кондратьев

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сумма первого и четвертого членов геометрической прогрессии относится к сумме второго и третьего членов как 13:4. Найдите прогрессию, если третий ее член равен 32.

2. Решите уравнение

$$1-\cos x=\operatorname{tg} x-\sin x.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{2^x}{5^{x-1}}+3-\frac{5^x}{2^{x-1}}.$$

4. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{x\cdot\log_2(x+2)}$.

5. В конус с основанием радиуса R и осевым сечением, являющимся равнобедренным прямоугольным треугольником, вписана правильная четырехугольная призма наибольшего объема так, что одно ее боковое ребро лежит на диаметре основания, вершины противоположного ребра лежат на боковой поверхности конуса, а остальные вершины равноудалены от основания конуса. Найдите объем призмы.

Вариант 2

1. Трактор выехал от станции к деревне на 30 мин раньше грузовика. Когда грузовик, обогнав трактор, прибыл в деревню, трактору осталось ехать до деревни 3 км. Найдите скорости трактора и грузовика, если известно, что скорость грузовика на 20 км/ч больше скорости трактора, а расстояние от станции до деревни равно 12 км.

2. Решите уравнение

$$\cos 6x+\sin^2 x=\cos^2 x.$$

3. Решите уравнение

$$\log_4\frac{32}{18-4^{2x}}=2x.$$

4. Решите неравенство

$$16\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x(x+2)}>\frac{1}{256}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}.$$

5. В правильный тетраэдр вписана правильная треугольная призма наибольшего объема так, что два боковых ребра призмы параллельны одному из ребер тетраэдра и равноудалены от него, а все вершины призмы лежат на гранях тетраэдра. Найдите отношение объемов призмы и тетраэдра.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Мяч, брошенный со скоростью $v_0=10$ м/с под углом $\alpha=45°$ к горизонту, ударяется о вертикальную стену, находящуюся на расстоянии $s=3$ м от места бросания. Определите модуль и направление скорости мяча (v и угол β) после удара. Удар считать абсолютно упругим, а углы падения и отражения — равными. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

2. Тело массой $m=2$ кг соскальзывает с горки высотой $H=4,5$ м по наклонной поверхности, плавно переходящей в цилиндрическую поверхность радиусом $R=2$ м (рис. 1). Определите силу давления тела на цилиндрическую поверхность в верхней ее точке B, если работа сил трения при движении тела до этой точки равна $A=40$ Дж. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Определите изменение внутренней энергии $z=0,5$ моля газа при нагревании

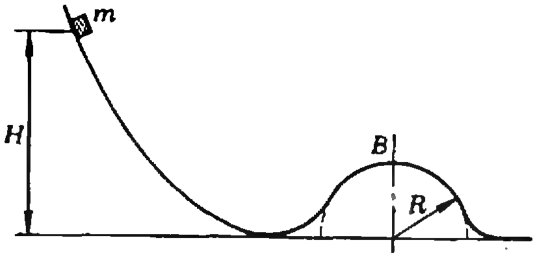


Рис. 1.

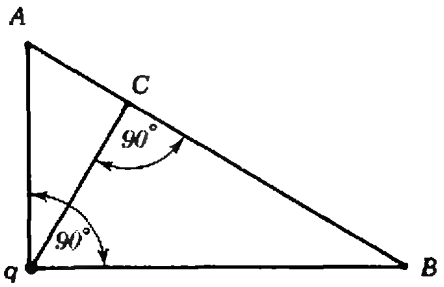


Рис. 2.

его при постоянном давлении от температуры $t_1=27°$C до температуры $t_2=47°$C, если газу было сообщено количество теплоты $Q=290$ Дж. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К).

4. Чтобы принять ванну, необходимо нагреть $V=200$ л воды от температуры $t_1=7$ °C до температуры $t_2=47$ °C. Если такое количество теплоты сообщить идеальной тепловой машине, работающей при температуре нагревателя t_2 и холодильника t_1, то с помощью этой машины можно поднять груз массой $m=4{,}2\cdot 10^4$ кг на высоту $H=10$ м. Определите по этим данным удельную теплоемкость воды. Плотность воды $\rho=10^3$ кг/м³. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

5. Определите суммарный заряд электронов, содержащихся во всех молекулах водорода, который занимает объем $V=1$ см³ при температуре $t=27$ °C и давлении $p=10^2$ Па. Число Авогадро $N_A=6\cdot 10^{23}$ 1/моль, элементарный заряд $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К).

6. Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом q, в точках A и B (рис. 2) равна соответственно $E_A=2\cdot 10^2$ В/м и $E_B=10^2$ В/м. Определите напряженность электрического поля в точке C.

7. В пространство, где одновременно действуют горизонтальное и вертикальное однородные электрические поля с напряженностью $E_г=4\cdot 10^2$ В/м и $E_в=3\cdot 10^2$ В/м, вдоль направления силовой линии результирующего электрического поля влетает электрон, скорость которого на пути $L=2{,}7$ мм изменяется в два раза. Определите скорость электрона в конце пути. Масса электрона $m=9\cdot 10^{-31}$ кг, элементарный заряд $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

8. Источник постоянного тока с внутренним сопротивлением $r=1$ Ом замкнут в первом случае на резистор сопротивлением R, во втором случае — на 4 таких же резистора, соединенных параллельно. Определите величину сопротивления R, если мощность, выделяемая в нагрузке, в первом и втором случаях одна и та же.

9. Луч света, идущий от источника света, находящегося на дне сосуда с жидкостью, падает на поверхность жидкости под предельным углом полного отражения. Можно ли будет увидеть источник, если на поверхность жидкости поместить стеклянную пластину? Абсолютный показатель преломления у стекла больше, чем у жидкости.

10. При взаимодействии ядер алюминия ${}^{27}_{13}$Al с X-частицами образуются ядра изотопа магния ${}^{27}_{12}$Mg и ${}_{1}$Y-частицы. При взаимодействии же ${}_{1}$Y-частиц с ядрами алюминия ${}^{27}_{13}$Al образуются ядра изотопа магния ${}^{24}_{12}$Mg и Z-частицы. Какие широко известные частицы X, Y, Z участвуют в этих ядерных реакциях?

Публикацию подготовили
Н. А. Гладков, В. Ф. Панов

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Докажите тождество

$$\frac{\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)}{4\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

2. Решите уравнение

$$4^{x+\frac{1}{2}}+31\cdot 2^{x-1}=4.$$

3. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α и гипотенузой c. Все двугранные углы при основании равны φ. Найдите боковую поверхность пирамиды.

4. Сумма первых n членов последовательности вычисляется по формуле $S_n=4-4\cdot 2^{-n}$. Докажите, что последовательность является геометрической прогрессией и найдите ее пятый член.

5. Где возрастает функция $y=\dfrac{(x-7)(5-x)}{x+3}$?

Вариант 2

1. Докажите тождество

$$\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta) + \sin\beta = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}.$$

2. Решите уравнение

$$|3x-2|+x=11.$$

3. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар, радиус которого равен r. Найдите объем пирамиды, если боковая грань составляет с плоскостью основания угол φ.

4. Сумма первых n членов последовательности вычисляется по формуле $S_n=\frac{2n^2+n}{2}$. Докажите, что последовательность является арифметической прогрессией и найдите ее двадцатый член.

5. Найдите точки экстремума функции $y=4x\cdot e^x-4e^x-x^2+2$.

Задачи устного экзамена

1. Вычислите $\operatorname{tg} 510°$.

2. При каких значениях числа x числа $\frac{1}{x+2}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x-1}$ являются первыми тремя членами арифметической прогрессии? Найдите пятидесятый член этой прогрессии.

3. Решите уравнение
а) $x^4-15x^2-16=0$;
б) $x+\sqrt{4x-3}=6$;
в) $3\cos 2x+8\sin^2 x=7\sin x$.

4. При каких значениях a уравнение

$$ax^2-(4a+1)x+5a+2=0$$

имеет единственный корень?

5. Постройте график функции
а) $y=\log_2(4^x)$;
б) $y=|\lg|x-1||$;
в) $y=2\sin\left|x-\frac{\pi}{4}\right|$.

6. Является ли функция

$$y=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+5x-\frac{1}{15}$$

возрастающей?

7. Найдите точки экстремума функции

$$y=2x\sqrt{x}+3x-12\sqrt{x}+1.$$

8. Являются ли точки A (1; 2; 4), B (2; 4; 3), C (3; 3; 2), D (4; 5; 1) вершинами параллелограмма?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Во сколько раз период обращения искусственного спутника, совершающего движение по круговой орбите на высоте h от поверхности Земли (радиус Земли R_3), превышает период обращения спутника на околоземной орбите ($h=0$)?

Примечание. Учесть, что Земля ведет себя так, как если бы вся ее масса была сосредоточена в центре.

2. Сферические сосуды объемов $V_1=200$ см^3 и $V_2=100$ см^3, наполненные кислородом при температуре $t=27°$C под давлением $p_0=760$ мм рт. ст., соединены трубкой, внутри которой находится теплоизолированная пористая перегородка, обеспечивающая одинаковость давлений в сосудах. Затем первый сосуд нагревается до температуры $t_1=100°$C, а второй — охлаждается до $t_2=0°$C. Пренебрегая тепловым расширением сосудов, определите установившееся в системе давление.

3. Три резистора, обладающие сопротивлениями $R_1=2$ Ом, $R_2=6$ Ом и $R_3=1{,}5$ Ом, соединены по типу «звезды» и включены в цепь постоянного электрического тока, создаваемого батареей с напряжением $U=6$ В. Пренебрегая сопротивлением подводящих проводов, найдите силу полного тока, протекающего через батарею, и силы токов в каждом резисторе. Какие еще параметры цепи можно определить?

4. Водолаз ростом $a=1{,}5$ м, стоящий на горизонтальном дне водоема, видит отраженную от поверхности воды часть дна, расположенную от него на расстоянии большем $s=15$ м. На какой глубине находится водолаз, если показатель преломления воды $n=1{,}33$?

Публикацию подготовили
В. А. Винокуров, С. И. Мешков, А. А. Симонов

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$9^{x-1}=8\cdot 3^{x-2}+1.$$

2. Решите неравенство

$$1-\lg x>\lg(x-3).$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=4\cos 2x.$$

4. Треугольник ABC вращается вокруг оси, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через вершину A параллельно биссектрисе угла ABC. Найдите объем и площадь полной поверхности тела вращения, если $|AB|=3$, $|AC|=5$, $|BC|=6$.

5. В замкнутую фигуру, ограниченную графиком функции $y=27-6x-x^2$ и осью абсцисс, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две вершины прямоугольника лежат на графике функции, а две другие — на оси абсцисс. Найдите координаты вершин и площадь прямоугольника.

Вариант 2

(примерный вариант на предстоящих экзаменах в 1983 г.)

1. Вычислите без таблиц
$\sqrt{5-2\sqrt{6}} : ((\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}))$.

2. Решите уравнение

$$2x+\sqrt{3x-2}=3.$$

3. Найдите число целых решений неравенства

$$5+\frac{17}{x-2}<\frac{2}{x+3}.$$

4. Решите уравнение

$$\log_5 x+\log_5(x-4)=1.$$

5. В равнобедренной трапеции даны длины оснований 21 и 9 длина и высоты 8. Найдите радиус описанной окружности.

6. Найдите сумму квадратов наибольшего и наименьшего значений функции $y=x^3-3x^2+3x+2$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

7. Определите число решений уравнения

$$(1+\cos x)\operatorname{ctg} x=\sin 2x.$$

на промежутке $\left]-\frac{3}{2}\pi;\ \frac{\pi}{3}\right]$.

8. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых 11 членов этой прогрессии.

9. Найдите $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x)=\sqrt{2}\sin^3 x$.

10. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и BCD — правильные треугольники. Угол между этими гранями равен φ. При каком значении φ полная поверхность пирамиды будет наибольшей? В ответе напишите не φ, а $\frac{1}{\cos\varphi}$.

Физика

В 1982 году вступительные экзамены по физике в МИСиС проводились в письменной форме. Каждому абитуриенту предлагался отдельный вариант, содержащий десять задач по различным разделам физики. Результаты работ обрабатывались на ЭВМ.

Вариант

1. Материальная точка движется прямолинейно из точки A в точку B. Первую половину пути точка двигалась со скоростью $v_1=20$ м/с, а вторую половину — со скоростью $v_2=30$ м/с. Определите среднюю скорость v движения точки на участке AB.

2. Два бруска с массами $m_1=1$ кг и $m_2=2$ кг соответственно находятся на горизонтальной поверхности и связаны между собой невесомой и нерастяжимой нитью, способной выдержать максимальное разрывное усилие $F=5$ Н. Определите максимальную силу $F_м$, с которой можно тянуть за брусок массы m_2 вдоль прямой, являющейся продолжением нити, что эта нить не оборвалась. (Трение между брусками и поверхностью отсутствует.)

3. Небольшое плоское тело начинает двигаться вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью $v_0=10$ м/с. Определите расстояние l, которое пройдет тело по наклонной плоскости до полной остановки, если угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30°$, а коэффициент трения между телом и поверхностью наклонной плоскости $\mu=0{,}6$.

4. В узкой стеклянной трубке, один конец которой запаян, находится воздух, запертый столбиком ртути длиной $l=20$ см. Когда трубка стоит вертикально открытым концом вверх, то объем воздуха под столбиком ртути равен $V_1=1{,}5$ см^3. Какой объем V_2 займет запертый воздух при горизонтальном положении трубки, если атмосферное давление $p_a=750$ мм рт. ст., а температура воздуха постоянна?

5. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v=300$ м/с, ударяется о стальную плиту и останавливается. На сколько градусов Δt увеличилась при этом температура пули, если $\alpha=40\%$ ее кинетической энергии пошло в момент удара на нагревание плиты и окружающего воздуха?

6. Два точечных заряда $q_1=3{,}2\cdot10^{-10}$ Кл и $q_2=8\cdot10^{-12}$ Кл находятся в вакууме на расстоянии $r_1=72$ см. Какую работу A надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $r_2=32$ см?

7. Плоский воздушный конденсатор, имеющий расстояние между обкладками $d_1=1$ см, зарядили до разности потенциалов $U_1=100$ В, а затем отключили от сети. Определите разность потенциалов U_2 между обкладками конденсатора, если их раздвинули до расстояния $d_2=2$ см.

8. Нагреватель электрического чайника состоит из двух спиралей одинакового сопротивления. При параллельном соединении спиралей и включении их в сеть вода в чайнике закипает через $t_1=3$ мин. Через какое время t_2 закипит вода, имеющая ту же массу и такую же начальную температуру, если спирали нагревателя соединить последовательно и включить в ту же сеть?

9. На горизонтальное дно резервуара опирается вертикальный стержень длиной $l=2$ м, полностью покрытый водой с показателем преломления $n_в=1{,}33$. Определите длину тени x от стержня на дне резервуара, если на поверхность воды падают лучи Солнца под углом $\alpha=30°$.

10. Поверхность калия облучается потоком монохроматического света с длиной волны $\lambda=0{,}331\cdot10^{-6}$ м. Определите скорость v электронов, вырываемых с поверхности калия, если работа выхода электрона $A_в=2{,}2$ эВ.

Публикацию подготовили
Б. Г. Разумейко, А. Г. Токаев

Интерференция волн

1. $d_{\min} = \frac{c}{4\nu(n-1)} = 2$ см.

2. $I \sim \cos^2\left(\frac{2\pi}{l}\Delta L\right)$, где $l = \frac{cL^2}{2\nu(h_2-h_1)} \times$ $\times \frac{1}{(2h_0+h_1+h_2)} = 180$ м — расстояние, на котором фаза колебаний изменяется на 2π (расстояние h_0 можно найти из рисунка 1: $h_0 = R_3(1-\cos\alpha) \approx \frac{R_3\alpha^2}{2} \approx$ $\approx \frac{R_3}{2}\left(\frac{L}{2R_3}\right)^2 \approx 80$ км).

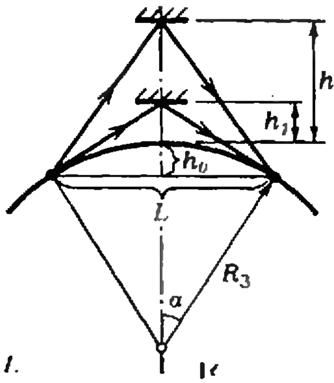


Рис. 1.

3. $U \sim \cos\frac{\pi L\sin\omega t}{\lambda} \sim \cos\frac{\pi L\omega t}{\lambda} \sim \cos\frac{2\pi}{T}t$, где $T = \frac{2\lambda}{L\omega} \approx 2{,}3$ мин (ω — угловая скорость вращения Земли).

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Вариант 1

1. $a \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5}{6}\pi + 2\pi k\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$. Решение. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = 2\sin a \cdot \cos\pi x \\ (4\sin^2 a \cdot \cos^2\pi x + 1)\sin a = \\ \qquad = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} + x + \frac{1}{2x^2}\right). \end{cases} \qquad (1)$$

Поскольку $\cos\pi x < 0$ при $x \in \left[1;\ \frac{3}{2}\right]$, система (1) имеет в рассматриваемой области единственное решение тогда и только тогда, когда $\sin a > 0$ и второе уравнение системы имеет единственное решение на промежутке $\left[1;\ \frac{3}{2}\right[$. При возрастании x от 1 до $\frac{3}{2}$ функция, стоящая в левой части этого уравнения, убывает от $\sin a + 4\sin^3 a$ до $\sin a$, а функция, стоящая в его правой части, возрастает от 1 до $1\frac{2}{27}$. Поэтому исследуемое уравнение имеет на $\left[1;\ \frac{3}{2}\right[$ единственное решение тогда и только тогда, когда $4\sin^3 a + \sin a > 1$ (рис. 2). Функция $4z^3 + z - 1$

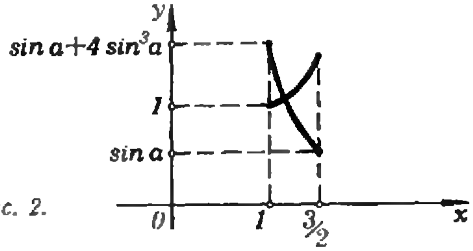


Рис. 2.

возрастает на $\mathbf{R}$ и обращается в 0 при $z = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $4\sin^3 a + \sin a > 1 \Leftrightarrow \sin a >$ $> \frac{1}{2}$.

2. $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. $x = \pi + 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$. Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2 + \cos x \leqslant \cos^2 x \\ \cos x \leqslant 0. \end{cases}$$

4. $\frac{1}{4}$. Указание. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$. Выразите $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DE}$.

5. $\frac{1}{4}a^3$. Указание. Пусть F — середина ребра BB', S — четвертая вершина сечения. Пирамида $A'DEFS$ является объединением двух пирамид одинакового объема с вершиной S — пирамиды $SA'ED$ и пирамиды $SA'EF$.

Вариант 2

1. $T = \frac{1}{g}\left(v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha - 2g(h-H)}\right)$ при $h < H$, $T = 0$ при $h = H$ и $\alpha \leqslant 0$, $T =$ $= \frac{1}{g}(v\sin\alpha \pm v\sin\alpha)$ при $h = H$ и $\alpha > 0$, $T =$ $= \frac{1}{g}\left(v\sin\alpha \pm \sqrt{v^2\sin^2\alpha - 2g(h-H)}\right)$ при $H < h < H + \frac{1}{2g}v^2\sin^2\alpha$ и $\alpha > 0$; $T = \frac{1}{g}v\sin\alpha$ при $h = H + \frac{1}{2g}v^2\sin^2\alpha$ и $\alpha > 0$; при $h > H$, $\alpha \leqslant 0$ и при $h > H + \frac{1}{2g}v^2\sin^2\alpha$, $\alpha > 0$ решений нет. Указание. В системе координат, показанной на рисунке 3, стрела в момент t будет

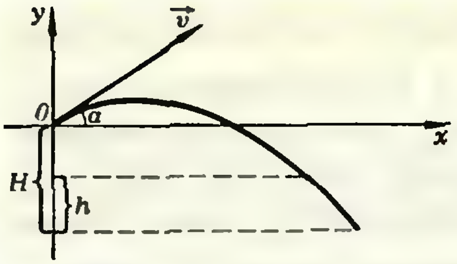


Рис. 3.

находиться в точке с координатами $(vt\cdot\cos\alpha;\ vt\cdot\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2)$. Искомое время T есть неотрицательный корень уравнения $vT\cdot\sin\alpha-\frac{T}{2}gT^2=h-H$.

2. 0. Указание. f' — нечетная функция.

3. $x=\frac{2\pi}{7}k$ $(k=-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6)$.

4. $\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{-1+2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$. Указание. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

5. $\frac{a^3\operatorname{tg}^3\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$. Указание. Достаточно нарисовать сечение пирамиды плоскостью SOK (S — вершина пирамиды, O — основание ее высоты, K — середина одной из сторон основания).

Вариант 3.

1. $4\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

2. $\frac{3}{2}h$.

3. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x_2=-\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+\pi l\ (k,l\in\mathbb{Z})$.

4. $\{(4;\ \sqrt{2}),\ (4;\ -\sqrt{2})\}$.

5. $\left\{\log_{\frac{13\sqrt{13}}{225}}\frac{1350}{1183}\right\}$.

Вариант 4

1. 16 ч.

2. $\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

3. $\frac{11-3a}{2}$.

4. 1. Указание. Постройте график.

5. $\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На рисунке 4 показаны силы, действующие на брусок (красным цветом) и на клин (синим цветом). Обозначив проекции ускорения бруска $\vec a_б$ на горизонтальное и вертикальное направления через a_x и a_y, а проекцию ускорения клина $\vec a_к$ на горизонтальное направление через a, получим

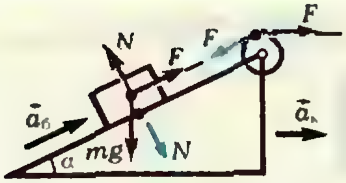


Рис. 4.

$$F\cos\alpha-N\sin\alpha=ma_x,$$
$$F\sin\alpha+N\cos\alpha-mg=ma_y,$$
$$F-F\cos\alpha+N\sin\alpha=Ma.$$

При этом

$$a_y=(a_x-a)\operatorname{tg}\alpha.$$

Решая совместно систему четырех уравнений, найдем

$$a=\frac{F(1-\cos\alpha)+mg\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha},$$

$$a_x=\frac{F(m\sin^2\alpha+M\cos\alpha)-Mmg\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{m(M+m\sin^2\alpha)},$$

$$a_y=$$
$$=\frac{F\cos\alpha(M+m(1-\cos\alpha))-mg(M+m)\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{m(M+m\sin^2\alpha)}\operatorname{tg}\alpha$$

Для того чтобы брусок перемещался по наклонной поверхности клина вверх, нужно выполнение следующих условий:

$$a_x>a,\ N>0.$$

Отсюда, используя предыдущие соотношения, придем к неравенству

$$\frac{m(M+m)\sin\alpha}{M+m(1-\cos\alpha)}g<F<\frac{M\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}g.$$

Нетрудно убедиться в том, что полученные выражения дают правильные значения в предельных случаях: а) $M\to\infty$, б) $\alpha\to0$ и в) $\alpha\to\pi/2$, когда задача становится тривиальной и ответ может быть написан непосредственно.

2. Однозначного ответа дать нельзя, так как данных задачи для этого недостаточно.

а) Если предположить, что газ идеальный и масса его не меняется, то температура газа должна уменьшаться. Это непосредственно следует из уравнения состояния и заданного закона расширения газа.

б) Если газ идеальный, но масса его меняется, то возможны варианты. Подставляя $p=\text{const}/V^2$ в уравнение состояния $pV=mRT/\mu$, получим

$$\frac{mVRT}{\mu}=\text{const}.$$

Отсюда видно, что T зависит от величины mV. Если mV растет, то T убывает и наоборот. Если же mV остается постоянной, то и температура не меняется.

в) Если газ не является идеальным, то при постоянной массе он может нагреваться.

Действительно, пусть уравнение состояния одного моля газа имеет вид $p(V-b)=RT$, где b — некоторая постоянная, связанная с собственными размерами молекул газа. Тогда подстановка $p=RT/(V-b)$ в закон расширения газа дает

$$\frac{RTV^2}{V-b}=\text{const},$$

откуда следует, что температура газа будет расти, если $V^2/(V-b)$ при расширении убывает. Нетрудно показать, что так будет при $V<2b$ (отметим, что V всегда больше b).

3. Вольтметр, подключенный к зажимам второго источника, показывает напряжение

$$U_2=\mathcal{E}_2-Ir_2, \text{ где } I=\frac{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2}{r_1+r_2+R}.$$

Если ток I в цепи меньше тока короткого замыкания второго элемента $I_2=\mathcal{E}_2/r_2$, то $U_2>0$ и при размыкании ключа вольтметр покажет ЭДС второго элемента $\mathcal{E}_2$. Если $I>I_2$, то $U_2<0$. Это значит, что при размыкании ключа вольтметр даст отброс в противоположную сторону. При этом прибор с нулем посередине шкалы покажет напряжение, равное $-\mathcal{E}_2$. Если при замкнутом ключе вольтметр показывал нуль (в этом случае $I=I_2$), то при размыкании ключа вольтметр с нулем посередине шкалы покажет $\mathcal{E}_2$, только даст отбросы в разных направлениях.

4. В приближениях геометрической оптики искомая величина

$$\alpha=\frac{F^2}{(L-F)^2},$$

независимо от того, какая из величин F и L больше. Графики зависимости $\alpha=\alpha(L)$ и $\alpha=\alpha(F)$ имеют вид, показанный на рисунке 5.

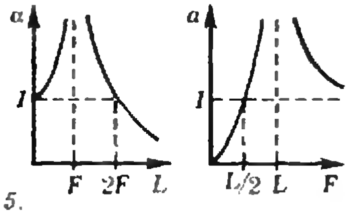


Рис. 5.

В действительности линза фокусирует параллельные лучи не в точку, а дает так называемое дифракционное пятно. Поэтому, если размеры индикатора меньше размеров дифракционного пятна на экране при $L\to F$, то разрывов на графиках не будет. Если же размеры индикатора больше размеров дифракционного пятна, то для ответа на вопрос необходимо знать, как работает индикатор в случае, когда освещена только часть его поверхности.

Вариант 2

1. а) Рассмотрим случай, когда после удара налетающий шар продолжает двигаться в том же направлении, что и до удара. По закону сохранения импульса имеем $mv=mv/2+MV$, и поскольку скорость шара массы M после удара $V>v/2$, то $m>M$. Очевидно, что при $m=M$ удар абсолютно неупругий и после удара шары движутся вместе со скоростью $v/2$. Отношение кинетической энергии после удара к первоначальной равно

$$\alpha=\frac{m(v/2)^2/2+MV^2/2}{mv^2/2}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Максимальное значение $\alpha=1$ достигается при абсолютно упругом ударе, откуда получаем, что $m<3M$. Минимальному значению α соответствует рассмотренный выше абсолютно неупругий удар, при котором $\alpha=1/2$. Итак, рассмотренный случай возможен, когда $M<m<3M$; при этом $1/2<\alpha<1$.

б) Пусть после удара шар массы m движется в противоположном направлении. Тогда $mv=-mv/2+MV$, откуда $V=3mv/(2M)$ и

$$\alpha=\frac{1}{4}\left(1+9\frac{m}{M}\right).$$

Очевидно, что $m>0$, поэтому $\alpha>1/4$. При $m=M/3$ (абсолютно упругий удар) $\alpha=1$. Итак, $1/4<\alpha<1$ при $0<m<M/3$.

2. Ответ: $n=4$. Указание. Из условия задачи вытекает, что температура газа в конечном состоянии такая же, как и в начальном. Следовательно, такой же остается и внутренняя энергия газа, а все подведенное количество теплоты идет на совершение работы по расширению газа.

3. Качественно понятно, что показания амперметра могут и увеличиться, и уменьшиться. Например, при $\mathcal{E}_2\approx 0$ ток в цепи возрастет, так как при замыкании ключа просто закорачивается часть цепи. При $\mathcal{E}_1\approx 0$ ток в цепи после замыкания ключа практически обращается в нуль.

Теперь получим аккуратное решение.

До замыкания ключа ток в цепи равен

$$I=\frac{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2}{r_1+r_2+R},$$

а после замыкания —

$$I'=\frac{\mathcal{E}_1}{r_1+R}.$$

Пусть ток I меньше тока короткого замыкания второго элемента $I_2=\mathcal{E}_2/r_2$:

$$\frac{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2}{r_1+r_2+R}<\frac{\mathcal{E}_2}{r_2}.$$

Тогда нетрудно показать, что

$$\frac{\mathcal{E}_2}{r_2}>\frac{\mathcal{E}_1}{r_1+R} \text{ или } \frac{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2}{r_1+r_2+R}>\frac{\mathcal{E}_1}{r_1+R},$$

то есть ток в цепи после замыкания ключа уменьшится. При обратном неравенстве, когда $I>I_2$, ток в цепи увеличится. Если же выполняется равенство $I=I_2$, ток в цепи не изменится.

4. Зеркало играет двоякую роль. Во-первых, оно ограничивает пучок солнечных лучей, образующих пятно на экране (подобно диафрагме), а во-вторых, изменяет их направление. Для выяснения вопроса о форме освещенного пятна изменение направления лучей при их отражении несущественно. Поэтому достаточно рассмотреть ограничение пучка отверстием такой же формы и размеров, как и зеркало.

Решение задачи основывается на факте, что свет от источника дает изображение источника, если экран далеко от отверстия,

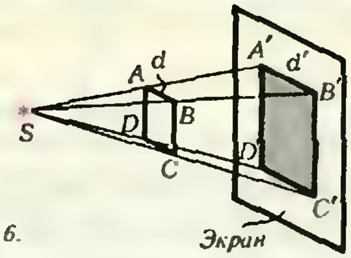


Рис. 6.

и дает изображение отверстия, если экран близко. Рассмотрим подробно оба случая. а) Пусть экран расположен близко к отверстию. В первом приближении Солнце можно считать точечным источником S (рис. 6). Освещенное пятно на экране — это центральная проекция отверстия на плоскость экрана. Центр проекции S расположен очень далеко, поэтому все лучи практически параллельны, а форма и размер освещенного пятна совпадают с формой и размерами отверстия. При наклоне нормали к плоскости экрана на угол β (относительно направления на Солнце) размер пятна в соответствующем направлении увеличивается: $d' = d/\cos\beta$. При наклоне нормали к плоскости отверстия на угол γ размер пятна уменьшается: $d' = d\cos\gamma$. В общем случае $d' = d\cos\gamma/\cos\beta$. Из-за конечности углового диаметра Солнца ($\alpha \approx 0{,}01$) границы тени от краев отверстия будут размыты. Ширина полутени (рис. 7) $d'' = \alpha L$. Поэтому сказанное выше справедливо при условии $\alpha L \ll d$.

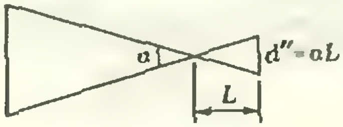


Рис. 7.

Подставляя $\alpha = 0{,}01$, получаем $L \ll 100d$. Если размер зеркала $d \sim 10$ см, то $L \ll 10$ м. Итак, этот случай реализуется, если расстояние до экрана от зеркала $L \ll 10$ м.

б) Пусть экран находится далеко от отверстия. Тогда отверстие в первом приближении можно считать точечным, его форма роли не играет. Освещенное пятно на экране — это изображение Солнца в так называемой камере-обскуре. Оно представляет собой сечение кругового конуса солнечных лучей с вершиной в отверстии и углом α при вершине, равным угловому диаметру Солнца. Если экран перпендикулярен к оси конуса лучей, то пятно представляет собой круг диаметра $d' = \alpha L$. При наклоне экрана на угол β этот круг превращается в эллипс с большой осью $d'' = d'/\cos\beta = \alpha L/\cos\beta$. С увеличением размеров отверстия освещенность пятна возрастает, но одновременно края его становятся более размытыми. Это размытие порядка диаметра отверстия d. Поэтому этот случай реализуется, когда $d \ll \alpha L$, то есть $L \gg 100d$. Для зеркала с $d \sim 10$ см $L \gg 10$ м.

Задачи устного экзамена

1. $\mu = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$, $\alpha+\beta < \pi/2$.

2. $s = \dfrac{F(F-\mu mg)}{2\mu m^2 g} t^2$, $F > \mu mg$.

3. Звезды движутся по окружностям с общим центром в центре масс системы; центр масс может перемещаться с постоянной скоростью. Если расстояние между звездами l, то радиусы окружностей

$$r_1 = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}, \quad r_2 = \frac{m_1 l}{m_1+m_2}.$$

Период обращения

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^3}{G(m_1+m_2)}}$$

одинаков у обеих звезд. Скорости движения по окружностям

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T}, \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{T};$$

ускорения —

$$a_1 = \frac{v_1^2}{r_1}, \quad a_2 = \frac{v_2^2}{r_2}.$$

4. $A = m/\mu\, R\Delta T$.

5. $Q = C_pT = (C_V+R)T$, $A = RT$, где T — первоначальная температура газа.

6. $C_4 = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$; возможны еще физически неинтересные случаи: $C_3 = 0$ и $C_3 \to \infty$.

7. $Q_1 = \dfrac{CU^2}{4}\ \dfrac{R_1}{R_1+R_2}$; $Q_2 = \dfrac{CU^2}{4}\ \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$.

8. $R_ш = 20$ Ом.

9. При небольшой глубине погружения кажущаяся скорость в n раз меньше истинной (n — показатель преломления воды).

10. Увеличить в 9 раз.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. $a_1 = 2$, $q = 4$ или $a_1 = 512$, $q = \dfrac{1}{4}$.

2. $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \dfrac{\pi}{4} + \pi l\ (k, l \in Z)$.

3. $\{1\}$.

4. $]-2; -1] \cup [0; +\infty[$.

5. $\dfrac{4}{27}R^3$. Указание. Выразите объем призмы через $x = |SN|$ (обозначения см. на рис. 8).

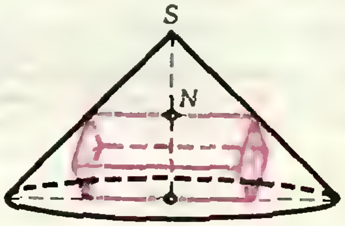


Рис. 8.

Вариант 2

1. 10 км/ч, 30 км/ч.

2. $x = \dfrac{\pi}{4} k\ (k \in Z)$.

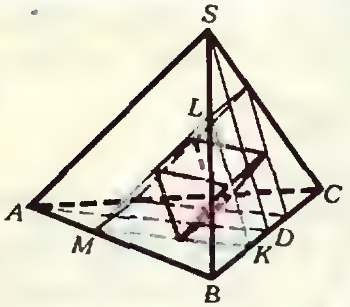


Рис. 9.

3. $\left\{1, \frac{1}{4}\right\}$.

4. $]-3; 2[$.

5. $\frac{20\sqrt{6}-48}{9}$. Указание. Докажите, что любая такая призма симметрична относительно плоскости SAD (D — середина того ребра тетраэдра $SABC$, которому параллельны боковые ребра призмы; обозначения см. на рис. 9), что плоскости ее основания параллельны плоскости SAD и что сечение тетраэдра плоскостью основания призмы есть равнобедренный треугольник (на рисунке 9 один из этих треугольников выделен синим цветом). Пусть a — ребро тетраэдра, b — сторона основания призмы, h — ее высота, $x=|LM|$. Из $\triangle LKM$ выразите b и $|MK|$ через x. Из $\triangle MKB$ найдите $|BK|=\frac{x}{2}$. Отсюда $h=a-x$.

Физика

1. $v=v_0\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\left(1-\frac{2gs}{v_0^2\sin 2\alpha}\right)^2}\approx$ $\approx 7{,}6$ м/с; $\beta=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{gs}{v_0^2\cos^2\alpha}\right)\approx 22°$.
2. $F=(3-2H/R)mg+2A/R=10$ Н.
3. $\Delta U=Q-\nu R(T_2-T_1)=207$ Дж.
4. $c=\frac{mgHT_1}{\varrho V(T_2-T_1)^2}=4{,}2\cdot 10^3$ Дж/(кг · К).
5. $q=-2eN_A\rho V/(RT)\approx 7{,}7\cdot 10^{-3}$ Кл.
6. $E_C=E_A+E_B=3\cdot 10^2$ В/м.
7. $v=\sqrt{2eL/(3m)}\,(E_г^2+E_в^2)^{1/4}=1\cdot 10^5$ м/с.
8. $R=2r=2$ Ом.
9. Источник увидеть нельзя.
10. Это нейтрон, протон и альфа-частица.

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

2. $\{-2\}$.

3. $\frac{\sin 2\alpha}{4\cos\varphi}c^2$.

4. $\frac{1}{8}$.

5. На промежутках $[-3-4\sqrt{5}; -3[$ и $]-3; -3+4\sqrt{5}[$.

Вариант 2

2. $\left\{-\frac{9}{2}, \frac{13}{4}\right\}$.

3. $\frac{4}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

4. $39\frac{1}{2}$.

5. $x=-\ln 2$ — точка максимума, $x=0$ — точка минимума.

Задачи устного экзамена

1. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2. $x=-5$, $a_{50}=\frac{15}{4}$. 3. а) $\{-4, 4\}$; б) $\{3\}$; в) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$. 4. $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$. 5. а) Указание. $y=2x$; б) Указание. Постройте последовательно графики функций $\lg x$, $\lg|x|$, $\lg|x-1|$, $|\lg|x-1||$; в) Постройте последовательно графики функций $\sin x$, $\sin|x|$, $\sin\left|x-\frac{\pi}{4}\right|$, $2\sin\left|x-\frac{\pi}{4}\right|$. 6. Да. 7. $x=1$ — точка минимума. 8. $ABDC$ (именно в таком порядке) — параллелограмм.

Физика

1. $T_h/T_0=(1+h/R_3)^{3/2}$.
2. $p=p_0\frac{V_1+V_2}{T}\left(\frac{V_1}{T_1}+\frac{V_2}{T_2}\right)^{-1}\approx 842$ мм рт.ст.
3. $I=I_3=\frac{U}{R_3+R_1R_2/(R_1+R_2)}=2$A; $I_1=\frac{IR_2}{R_1+R_2}=1{,}5$ A; $I_2=I-I_1=0{,}5$ A; $U_1=U_2=I_1R_1=I_2R_2=3$ В; $U_3=IR_3=3$ В.
4. $h=(s\sqrt{n^2-1}+a)/2\approx 7{,}3$ м.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. $\{2\}$.
2. $]3; 5[$.

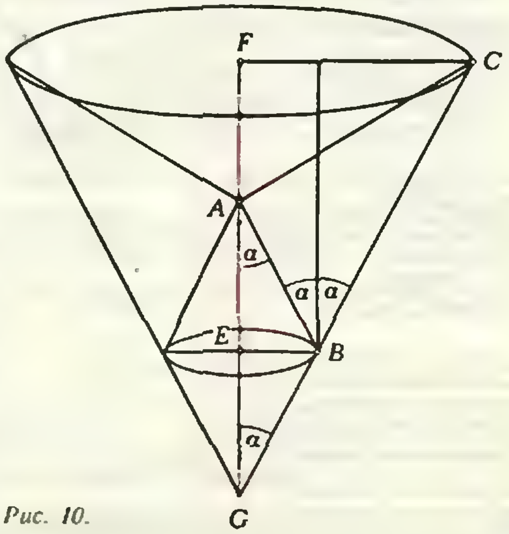


Рис. 10.

3. $x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $x_2=(-1)^l\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}l$ (k, $l\in\mathbf{Z}$).

4. $V=\frac{32\sqrt{7}}{3}$ л, $S=42\sqrt{2}$ л. Указание. $V=V_{GFC}-2V_{AEB}-V_{AFC}$, $S=S_{GFC}-S_{AFC}$ (обозначения см. на рис. 10).

5. $(-3+2\sqrt{3};\,0)$, $(-3+2\sqrt{3};\,24)$, $(-3-2\sqrt{3};\,0)$, $(-3-2\sqrt{3};\,24)$; $96\sqrt{3}$. Указание. Выразите площадь прямоугольника через $t=|ED|$, где E — середина его нижнего основания CD.

Вариант 2

1. 1. Указание. $5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

2. $\{1\}$. 3. 4. 4. $\{5\}$. 5. $10\frac{5}{8}$. Указание. Окружность, описанная около трапеции $ABCD$, описана также около $\triangle ACD$. См. также задачу 1193 из «Геометрии 6—8». 6. 592. 7. 3. 8. 44. 9. $\frac{3}{2}$. 10. -3.

Физика

1. $v=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}=24$ м/с.

2. $F_н=F(1+m_2/m_1)=15$ Н.

3. $l=\frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}=5$ м.

4. $V_2=V_1\left(1+\frac{\varrho gl}{p_a}\right)=V_1\left(1+\frac{l}{H_a}\right)=1{,}9$ см^3 (здесь $H_a=750$ мм).

5. $\Delta t=\frac{v^2(1-\alpha/100\%)}{2c}=214{,}3$ К (здесь $c=126$ Дж/(кг · К) — удельная теплоемкость свинца).

6. $A=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=0{,}4\cdot10^{-10}$ Дж (здесь $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).

7. $U_2=U_1d_2/d_1=200$ В.

8. $t_2=4t_1=12$ мин.

9. $x=l\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n_в^2-\sin^2\alpha}}=0{,}81$ м.

10. $v=\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda}-A_в\right)}=7{,}38\cdot10^5$ м/с (здесь $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг — масса электрона, $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света).

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

Решения обеих задач носят геометрический характер.

Задание 3. 1. d7 Лd1 2. a7 Сb1+ 3. Крh6 Се4 4. Кg6+ Крg8 5. Ке7+ Крf7 6. Кd5! Л:d5 (ладья перекрыла дорогу слону) 7. а8Ф+ и т. д.; 6... С:d5 (слон перекрыл дорогу ладье) 7. d8Ф+ и т. д.

Задание 4. 1. Кf7+ Крh7 2. е7 Лd1+ 3. Крh2 Ле1 4. Кg5+ Крg6 5. с7 Сf5 6. Ке6, и одна из черных фигур, забирая коня на е6, перекрывает дорогу другой. 1... Крg6 2. с7 Лс5 3. Ке5+ Крf5 4. е7 Са4 5. Кс6. Теперь то же перекрытие осуществляется на с6.

Если белая фигура занимает поле, на котором пересекаются линии действия двух черных фигур, и любое взятие белой фигуры приводит черных к катастрофе, то в шахматной композиции это называется «темой Новотного». Таким образом, оба этюда иллюстрируют собой тему Новотного.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
Ю. М. Аратовский, М. Б. Дубах, С. В. Красовский, А. К. Малкин, Ю. П. Мартыненко, Э. В. Назаров, М. П. Сидоров, Э. А. Смирнов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина
Фото: Н. Адамович (ТАСС), Ю. П. Митрофанов, В. Н. Оболзинский

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор А. Л. Ипатова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 17.3.83. Подписано в печать 15.4.83.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,66 Т-08355
Цена 40 коп. Заказ 666 Тираж 172626 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

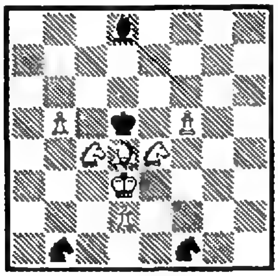
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

СИММЕТРИЯ И АСИММЕТРИЯ

Сегодня мы расскажем об одной геометрической идее, на которой основан ряд задач и этюдов.

Р. Бианкетти, 1925 г. Белые: Кра1, Лс3, Сс1; черные: Kph8, Лf6. Выигрыш.

После **1.Cb2!** все фигуры выстраиваются на большой диагонали, и в зависимости от того, куда двинется ладья черных, получаются два изящных симметричных варианта: 1...Лf8 (1...Лf7 2.Лh3++ Kpg8 3.Лh8×) 2.Лс7+ Kpg8 3.Лg7+ Kph8 **4.Кра2!** (но не 4.Kpb1 Лf1+ 5.Кра2 Ла1+ 6.Kpb3 Ла3+ 7.Крс2 Лс3+ 8.С:с3 пат), и белые выигрывают ладью. Ответ 1...Лh6 приводит к тому же финалу.



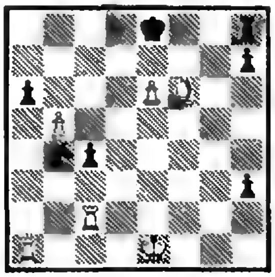
В. Паулн, 1920 г. Мат в 4 хода.

На первый взгляд позиция совершенно симметрична, и потому и решения должны быть симметричны. Но шахматная геометряя такова, что ось симметрии позиции (вертикаль d) не совпадает с осью симметрии доски (граница вертикалей d и e). В данной задаче решает **1. Cg7!** Са5(с7) 2. Cf8 Cd8 3. Cd6!, и мат следующим ходом. Если на первом ходу трогается с места черный конь b1, то на это следует 2.Кс3+ Крс5 3.Cf8+ и 4.С:е7×. Интересно, что ход 1.Са7, симметричный рассмотренному, не годится — черный слон пользуется вертикалью h: 1...Ch4! 2.Cb8 Cf2! 3.Cd6 Cd4! и мата нет.

Т. Доусон, 1924 г. Белые: Кре8, Ке6, п.е7; черные: Кре2, п п.d3, f3. Выигрыш.

В распоряжении белых два логичных продолжения — 1.Kd4+ или 1.Kf4+. Вертикаль а, нарушающая симметрию, как будто не играет никакой роли. Но, оказывается, к победе ведет лишь **1.Kd4+! Кре3 2.К:f3 Кр:f3 3.Kpf8! d2 4.е8Ф d1Ф 5.Фh5+** (если черные не ставят ферзя, то окончание «ферзь против центральной пешки» легко выиграно), а 1.Kf4+ приводит к ничьей — 1...Кре3 2.K:d3 Кр:d3 3.Kpd8 f2 4.е8Ф Kpd2! Разница в том, что эндшпиль «ферзь против слоновой пешки» уже ничейный: 5.Фd5 Kpe1 6. Фb1+ Кре2 7.Фе4+ Kpf1 8.Kpc7 Kpg1 9.Фg4+ Kph1 10.Фf3+ Kpg1 11. Фg3+Kph1! 12. Ф:f2 пат.

Очевидно, зеркальное отражение позиции относительно оси симметрии доски позволяет получить другую, симметричную позицию. Существует ход, который не сохраняется при зеркальном отражении — рокировка.

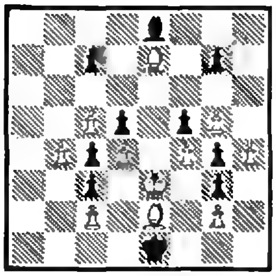


В. Паулн, 1911 г. Мат в 3 хода.

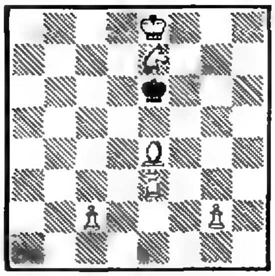
Решает только **1. 0—0—0! Kd3+ 2.Л:d3 cd 3.Лс8×** (другие варианты: 1...Ка2+ 2.Л:а2, 1...Kd5 2.Л:d5, 1...Кс6 2.bc и всюду 3.Лd8×). Не ведет к цели 1.Л:а6 (с надеждой на 1...К:а6 2.Лd2 и 3.Лd8×) из-за ответа 1...0—0!

Поставьте на доске зеркальную позицию с той же задачей — мат в 3 хода, и вы увидите, что зеркальное решение не годится — длинная рокировка теперь невозможна. Здесь решает **1.Л:h6!** Фокус в том, что рокировки лишились не только белые, но и черные. **1...К:h6** (1...К:f2+ 2. Кре2, 1...Ке3+ 2.Kpc1 и 3.Лh8×) **2.Ле2!** и **3.Ле8×**.

Конкурсные задания



9. Мат в 4 хода.

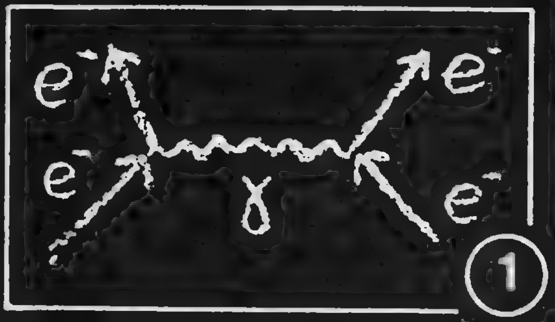


10. Мат в 5 ходов.

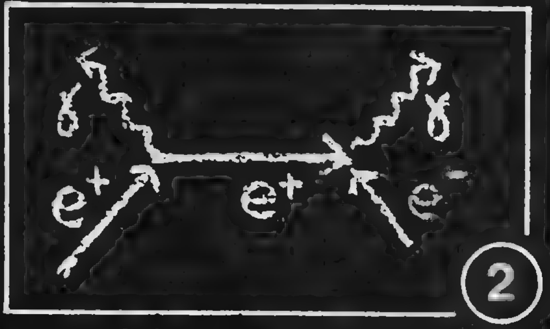
Срок отправки решений — 25 июля 1983 года (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9, 10).

Победителями конкурса признаны: Г. Бедный (Бердичев), В. Беляев (Куйбышев), С. Бондаренко (Каменск-Шахтинский), М. Германов (Курганская обл.), А. Дьяченков (Московская обл.), И. Кваша (Ростовская обл.), В. Колпаков (Николаевская обл.), Д. Красиков (Ростов-на-Дону), М. Креймер (Житомир), И. Купалов (Москва), З. Курганов (Чирчик), Г. Леонов (Курган), В. Макаренко (Черновцы), Н. Малин (Баку), В. Москаленко (Ворошиловград), Н. Пархоменко (Винница), А. Попов (Воронежская обл.), В. Попов (Красноярский край), В. Прудников (Подольск), А. Рябов (Куйбышев), А. Скороход (Чернигов), И. Тетко (Кодыма), А. Харченко (Мурманск), А. Чилингарян (Ереван), В. Шумада (Ивано-Франковск).

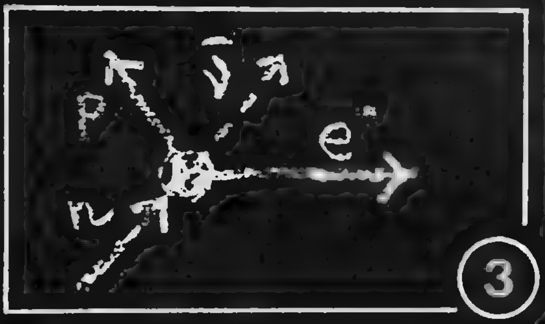
Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются шахматно-математической литературой с автографами ведущих шахматную страничку.



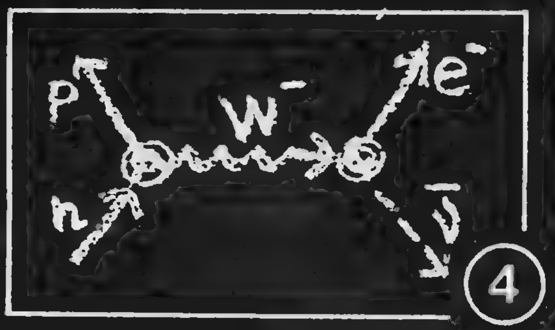
①



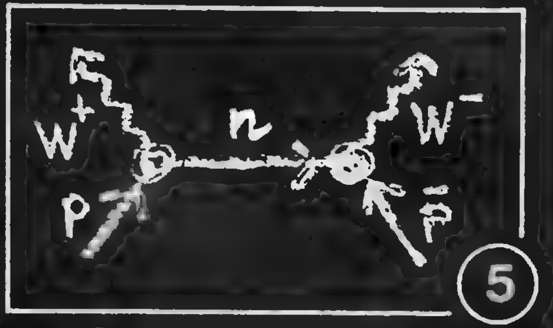
②



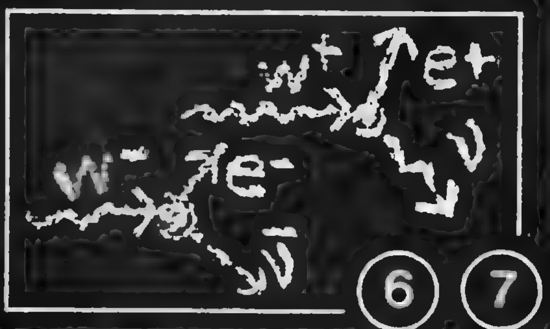
③



④



⑤



⑥ ⑦

Для наглядного изображения различных процессов, происходящих в мире элементарных ...тиц, физики пользуются специальными ри- ...ми, называемыми графами. Выше нари... ...колько таких графов.

...тное взаимодействие двух

...ой аннигиляция элект... ...происходит в два ...излучается один

3. Бета-распад нейтрона по старой теории: протон, электрон и антинейтрино рождаются одновременно.

4. Бета-распад по новой теории — теории электрослабого взаимодействия.

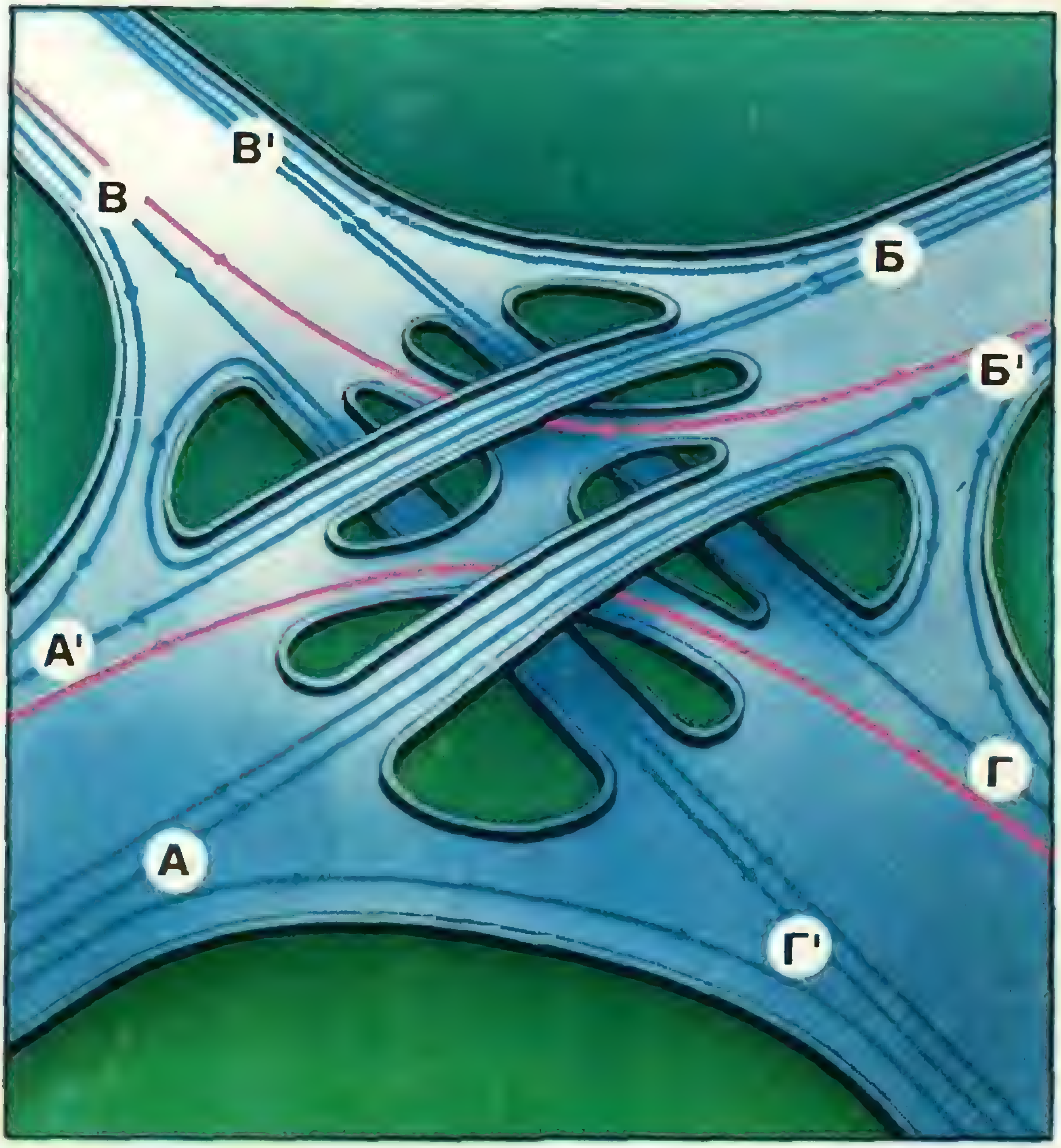
5. Рождение двух W-бозонов при аннигиляции протона и антипротона. (Чаще вместо одного из бозонов рождаются какие-либо другие частицы.)

6—7. Примеры распадов образовавшихся W-бозонов. Об открытии W-бозонов можно прочитать в разделе «Новости науки».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Слева на черно-белой фотографии показана современная «клеверная» развязка двух автодорог. Однако при такой развязке некоторые пути следования транспортных потоков пересекаются. Более сложная развязка, нарисованная нашим художником, обеспечивает беспрепятственное движение. Подробнее об этом рассказано в заметке Ю. В. Котова в разделе «Наша обложка».



НОМЕР
6

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

КВАНТ **6** **1983**

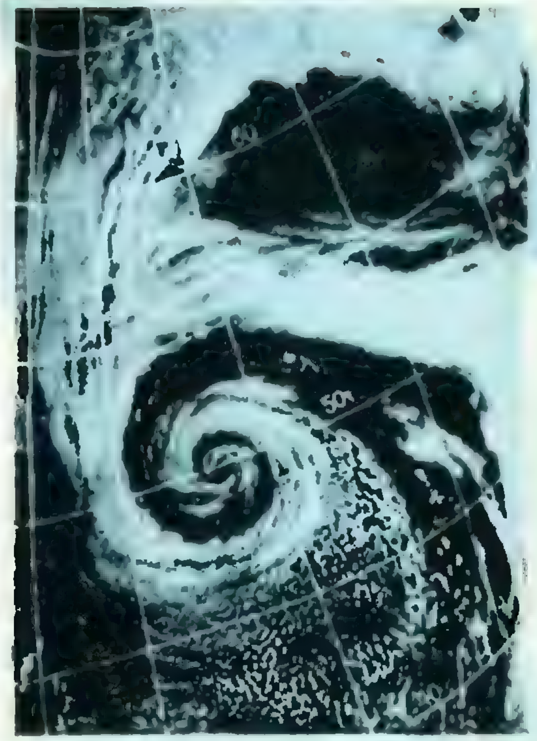
Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE
2	*А. В. Бялко.* Что такое атмосфера	*A. V. Byalko.* What is the atmosphere
10	*С. Г. Гиндикин.* О пользе чисел «поистине софистических»	*S. G. Gindikin.* On the usefulness of "truly sophistic" numbers
18	*А. Т. Фоменко.* Минимальные поверхности	*A. T. Fomenko.* Minimal surfaces
26	*Ю. В. Нестеренко, Е. М. Никишин.* Очерк о цепных дробях	*Yu. V. Nesterenko, E. M. Nikishin.* Essay on continued fractions
	Новости науки	**Science news**
31	*М. Д. Франк-Каменецкий.* Левая спираль ДНК	*M. D. Frank-Kamenetski.* The left DNA spiral
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
32	*А. А. Боровой.* Неоновая лампочка	*A. A. Borovoy.* The neon lamp
	Математический кружок	**Mathematics circle**
35	*С. Н. Беспамятных.* Раскраска плоскости и теорема Ван дер Вардена о прогрессиях	*S. N. Bespamiatnykh.* Coloring the plane and van der Waerden's theorem on progressions
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
39	Задачи	Problems
40	*А. В. Токарев.* Дом, который построил...	*A. V. Tokarev.* The house built by...
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
43	Задачи М806—М810; Ф818—Ф822	Problems M806—M810; P818—P822
46	Решения задач М791, М792, М794, М795; Ф803—Ф807	Solutions M791, M792, M794, M795; P803 P807
52	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
54	Задачи вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы в 1982 году	Entrance examination problems in mathematics and physics at various colleges in 1982
62	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(9, 53)*	**Miscellaneous** *(9, 53)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Три эпизода с жертвой ферзя (3-я с. обложки)	Three episodes with Queen sacrifices *(3rd cover page)*

На первой странице обложки показана мыльная пленка с пузырем, натянутая на каркас тетраэдра (об этом см. статью А. Т. Фоменко на с. 18).

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1983



Что такое атмосфера

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

Взгляните на небесную лазурь — это атмосфера Земли, вдохните воздух полной грудью — это тоже она. Но что такое атмосфера с точки зрения физики? Чем определяются ее состав, ее давление и температура на разных высотах? Попытаемся кратко ответить на эти вопросы.

Состав атмосферы

Вы знаете, что атмосфера Земли состоит на 78% из азота, на 21% из кислорода и на 1% из аргона. Есть еще в ней малые примеси углекислого газа, паров воды и совсем ничтожные количества неона, гелия, криптона и водорода. Но попробуем понять, почему легкая оболочка нашей планеты состоит именно из этих газов и воды.

Состав атмосферы определяется, прежде всего, геологической историей планеты. Земля, так же как и Луна, и другие планеты Солнечной системы, образовалась, как полагают, при столкновениях и слипании малых твердых небесных тел. Первичное вещество планеты сжималось силами тяготения — Земля под действием гравитации принимала форму шара, из-за вращения чуть сплюснутого у полюсов. При сжатии недра ее разогревались. Под действием высоких температур и давления в первичном веществе происходили химические реакции. При этом более тяжелые продукты реакций опускались вниз, формируя земное ядро; более легкие образовали земную кору; а газы отделились от тверди, создав атмосферу. Затем пары воды, которой в земной атмосфере оказалось очень много, сконденсировались в океан.

Не надо думать, что все это произошло раз и навсегда в далеком прошлом Земли. Этот процесс продолжается и сейчас, хотя и не так интенсивно, как в начале эволюции. И ныне обновляется земная кора, а вулканы планеты выбрасывают в атмосферу немалые количества паров воды, углекислоты, азота. А кроме того, еще и сернистый газ, хлористый водород и другие малоприятные газы. Почему же их нет в нормальной атмосфере?

Ответ почти очевиден. Все газы атмосферы должны находиться в химическом равновесии и друг с другом, и с океаном, и с веществом земных пород. Поэтому кислотные окислы, выброшенные вулканами, очень быстро растворяются в океане, образуя кислоты. Взаимодействуя с основными окислами земной коры, эти кислоты дают соли. Растворимые соли растворены в океане, нерастворимые составляют осадочные породы.

Внимательный читатель, наверное, уже увидел «слабое место» этой теории. Кислород! Его нет в вулканических газах, его нет и в атмосферах других планет.

Главный источник кислорода Земли — растительность. Хлорофилл растений под действием солнечных лучей перерабатывает углекислоту (двуокись углерода). Ее углерод входит в органические соединения, а кислород поступает в атмосферу. Есть, однако, и другой источник кислорода нашей планеты. Чтобы понять, как он действует, нужно сначала ответить на вопрос: а что же удерживает атфосферы планет, почему газы атмосферы не разлетаются в космическое пространство?

Давление воздуха у поверхности Земли равно, как известно, $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Это означает, что на каждый квадратный метр земной поверхности со стороны атмосферы действует сила в $1{,}013 \cdot 10^5$ Н. Сила эта обусловлена притяжением Земли и равна весу столба воздуха над земной поверхностью с площадью поперечного сечения 1 м^2. Поскольку высота атмосферы мала по сравнению с радиусом Земли, можно считать, что ускорение свободного падения в пределах атмосферы постоянно и равно $g \approx 9{,}8$ м/с^2. Вес столба атмосферного воздуха с площадью сечения 1 м^2 равен $p_0 = m_1 g$, где m_1 (кг/м^2) — масса этого воздуха. Так что над всей поверхностью Земли площадью $4\pi R_З^2$ масса воздуха равна $m_1 \cdot 4\pi R_З^2$, то есть равна

$$m_А = \frac{p_0}{g} 4\pi R_З^2 \approx 5{,}3 \cdot 10^{18} \text{ кг}.$$

Как видите, масса атмосферы составляет приблизительно миллионную долю всей массы Земли $m_З \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг. Интересно сравнить массу атмосферы с массой воды на нашей планете: воды на Земле $1{,}4 \cdot 10^{21}$ кг, так что масса атмосферы в 266 раз меньше.

Сила земного тяготения не только создает давление атмосферы у поверхности. Она же препятствует разлету атмосферных газов в космическое пространство. Вы знаете, что молекулы газов находятся в состоянии хаотического, теплового движения. Средняя квадратичная скорость молекул при температуре T равна $v = \sqrt{3RT/\mu}$, где R — универсальная газовая постоянная, а μ — молярная масса газа. Давайте сравним скорости молекул разных газов при температуре, скажем, 300 К со второй космической скоростью $v_{II} = \sqrt{2gR_З} = 11{,}2$ км/с. Для водорода $v_H \approx 1{,}3$ км/с, для гелия $v_{He} \approx 1$ км/с, для кислорода и азота средняя скорость молекул близка к 0,5 км/с. На первый взгляд, все в порядке. Скорости газов меньше второй космической скорости. Это означает, что Земля может удержать в своей атмосфере любой из этих газов. На самом деле, газы атмосферы все же очень медленно улетучиваются в космос. Происходит это потому, что в высоких слоях атмосферы температура, как мы вскоре узнаем, намного выше, чем у поверхности Земли, она достигает 1000 К — скорости молекул там раза в два больше, чем полученные нами оценки. С другой стороны, мы оценивали средние скорости молекул. При тепловом равновесии со скоростями, близкими к средней, движется подавляющее большинство молекул. Однако всегда имеется малая доля молекул, скорости которых значительно превышают среднюю и достигают значения второй космической скорости. Эти-то быстрые молекулы и могут покинуть Землю.

При данной температуре наибольшие средние скорости имеют молекулы водорода и гелия. Им легче других газов улететь в космос, им легче и подняться на большие высоты. Казалось бы, количество этих газов в атмосфере должно непрерывно убывать. Но этого не происходит. Почему?

Есть, оказывается, процессы, поддерживающие содержание этих легких газов. Гелий образуется в земной коре при распаде тяжелых радиоактивных элементов. А водород верхней атмосферы образуется из воды. Под действием ультрафиолетового излучения Солнца молекулы H_2O на высотах больше 50 км распадаются на водород и кислород. Таким образом, улетучивание водорода в космос приводит к убыли воды на Земле и к возрастанию содержания кислорода в атмосфере.

Каждую секунду из атмосферы улетает примерно 1 кг водорода.

Много это или мало? Прикинем, надолго ли хватит воды в океанах и ледниках планеты (напомним, что масса этой воды $1{,}4 \cdot 10^{21}$ кг). В 9 кг воды содержится 1 кг водорода. Следовательно, земной воды достаточно на $1{,}5 \cdot 10^{20}$ с, или на 5000 миллиардов лет. Так что океан можно считать неисчерпаемым, ведь возраст Земли — «всего» 4,5 миллиарда лет.

Таким образом, вóды Земли — еще один источник атмосферного кислорода. А теперь оценим, сколько кислорода образовалось за время существования Земли. Разумеется, это будет очень грубая оценка — нельзя на самом деле считать, что Солнце все это время светило так же, как сейчас. Но попробуем. Итак, 8 кг в секунду за 4 миллиарда лет дадут нам 10^{18} кг кислорода — как раз столько, сколько его в нашей атмосфере и содержится, пятая часть массы атмосферы.

Не нужно переоценивать это совпадение. Ведь гораздо больше, чем его содержится на сегодняшний день в атмосфере, потребовалось кислорода для того, чтобы привести к современному состоянию химическое равновесие Земли — чтобы окислить метан и аммиак первичной атмосферы, чтобы окислить все породы земной коры. Без растений это было бы невозможно. Они производят по порядку величины 10^{14} кг кислорода в год, или $3 \cdot 10^{6}$ кг в секунду. Но содержание кислорода в атмосфере сейчас не увеличивается — весь кислород, создаваемый растениями, расходуется на дыхание животных и окисление вулканических газов.

Из всего сказанного вам, должно быть, стало ясно, что состав атмосферы зависит от высоты. Действительно, земная атмосфера имеет одинаковый состав (хорошо перемешана) только ниже 90 км. Эта ее часть называется гомосферой. Выше лежит гетеросфера — часть земной атмосферы, состав которой меняется с высотой. Выше 700 км атмосфера Земли состоит практически только из гелия и водорода. В основном, эти газы и улетучиваются в космос.

Рисунок 1 дает наглядное представление о том, как меняются с высотой концентрации отдельных газов и полная концентрация молекул в атмосфере.

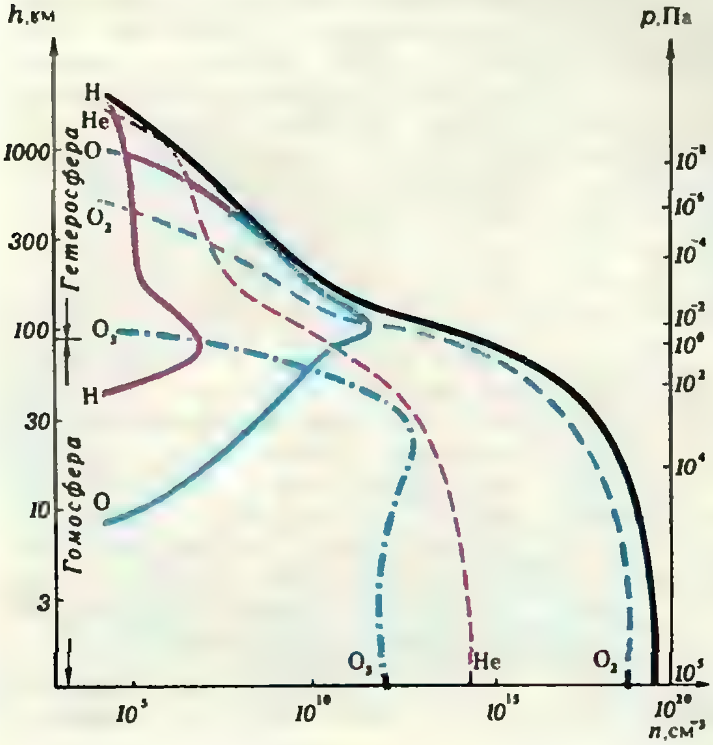


Рис. 1. Изменение с высотой концентрации n молекул некоторых газов (цветные кривые) и полной концентрации молекул (черная кривая) в атмосфере.

В гомосфере концентрации большинства газов убывают одинаково. Выше 90 км содержание газов начинает существенно зависеть от высоты. Под действием ультрафиолетового излучения Солнца кислород распадается на атомы, и на высотах 200÷600 км атомарный кислород становится наиболее распространенным газом атмосферы. Еще выше атмосфера Земли становится преимущественно гелиевой; и, наконец, на тех высотах, где происходит улетучивание газов в космос, в атмосфере больше всего водорода.

Обратите внимание на поведение кривой для озона (O_3) на высоте 20÷50 км. Дальше вы узнаете, почему этот слой важен для нас.

Тепловое равновесие планет

Мы видели, что от температуры зависит поток газов, улетучивающихся в космос. Но прежде всего температура атмосферы интересует нас, жителей Земли с практических позиций — от нее сильно зависят условия жизни.

Главный источник тепловой энергии Земли — Солнце. Человечество сознавало это всегда. Вот как, например, писал русский поэт Александр Сумароков в 1760 году:

> О Солнце, ты — живот и красота природы,
> Источник вечности и образ божества!
> Тобой жива земля, жив воздух, живы воды,
> Душа времен и вещества!

Попробуем дать количественную оценку этих вечных истин. Солнце — раскаленный термоядерными реакциями шар радиуса $R_{\text{С}}=6{,}96\times\times10^8$ м; температура поверхности Солнца $T_{\text{С}}=5800$ К.

Всем хорошо известно, что раскаленные тела светятся, излучают энергию. В конце прошлого века австрийские физики Стефан и Больцман открыли закон излучения: поток энергии, то есть энергия, излучаемая за единицу времени с единицы площади поверхности тела, находящегося в состоянии теплового равновесия (имеющего постоянную температуру), пропорционален четвертой степени температуры: $\varepsilon=\sigma T^4$, где $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4) — коэффициент пропорциональности, который называют постоянной Стефана—Больцмана.

Солнце не находится в полном тепловом равновесии, но для него закон Стефана—Больцмана приближенно выполняется. Согласно этому закону, мощность, излучаемая Солнцем, равна

$$P_{\text{С}}=4\pi R_{\text{С}}^2\sigma T_{\text{С}}^4\approx3{,}8\cdot10^{26}\text{ Вт}.$$

Эта мощность излучается равномерно по всем направлениям. Нетрудно подсчитать, какая ее часть попадает на Землю. На расстоянии $R=1{,}5\times\times10^{11}$ м, равном радиусу земной орбиты, на каждый квадратный метр поверхности, перпендикулярной лучам, попадает мощность $P_{\text{С}}/4\pi R^2$. Земля «затеняет» на такой поверхности площадь $\pi R_{\text{З}}^2$. Следовательно, мощность, попадающая от Солнца на Землю, равна

$$P=P_{\text{С}}\frac{\pi R_{\text{З}}^2}{4\pi R^2}=1{,}75\cdot10^{17}\text{ Вт}.$$

Куда расходуется эта мощность? Часть ее отражается Землей в космос. Все знают, что планеты и Луна видны на звездном небе именно благодаря отраженному солнечному свету. Точно так же, удалясь в космическое пространство, можно видеть и свет, отражаемый Землей. Доля отраженной световой мощности называется альбедо (от латинского albus — белый; альбедо — это как бы степень белизны). Точность, с которой нам сейчас известно альбедо нашей планеты, невелика. Считается, что альбедо Земли A лежит в пределах от 28 до 36 процентов. А куда девается остальная энергия $P(1-A)$? Ясно, что именно она и является причиной того, что на нашей планете тепло. Однако солнечное излучение поступает к Земле постоянно, и если бы никакого отвода энергии не было, то температура планеты постоянно росла бы. Следовательно, теплоотвод существует. Осуществляется он точно тем же физическим процессом, что и излучение самого Солнца. Да, представьте себе, и Земля, и остальные планеты тоже являются источниками излучения. Но спектр этого излучения лежит в невидимой глазу области, в инфракрасном диапазоне.

Давайте вычислим температуру равновесного теплового излучения Земли, считая ее альбедо равным 0,28 (таковы последние измерения со спутников). Нам надо приравнять мощность поглощаемого Землей солнечного излучения $P(1-A)$ мощности теплового излучения Земли. Если температура Земли $T_{\text{З}}$, то излучаемая с ее поверхности мощность равна $4\pi R_{\text{З}}^2\sigma T_{\text{З}}^4$. Итак,

$$P(1-A)=4\pi R_{\text{З}}^2\sigma T_{\text{З}}^4,$$

откуда

$$T_{\text{З}}=\left(\frac{P(1-A)}{4\pi R_{\text{З}}^2\sigma}\right)^{1/4}=258\text{ К}=-15\text{ °C}.$$

Неплохой морозец! Но ведь мы

знаем, что среднегодовая температура умеренных широт Земли выше нуля, а немалую долю земной поверхности занимают тропики, где температура и летом, и зимой редко опускается ниже плюс 25 °С. В чем же дело? Может быть, у Земли есть какой-нибудь собственный источник тепловой энергии?

Да, такой источник действительно есть. Это недра Земли. С каждым километром в глубь земной коры температура возрастает в среднем на 30 градусов. Разогрев этот происходит в основном за счет энергии, выделяющейся при распаде тяжелых радиоактивных элементов. Однако расчеты показывают, что тепловой поток, попадающий в атмосферу из земных недр, в 6 тысяч раз меньше, чем поток солнечного излучения. Так что на климате нашей планеты тепло земных недр не сказывается.

Почему же средняя температура земной поверхности остается постоянной и не падает до —15°С, соответствующих тепловому равновесию?

«Слоеный пирог» атмосферы

Оказывается, тепло в космос излучает не сама земная поверхность, а окружающий ее воздух, атмосфера. На первый взгляд это кажется странным — ведь воздух прозрачен. Но спектр излучения при температуре около 300 К лежит в далекой инфракрасной области. О свойствах веществ пропускать излучение с такими длинами волн мы не можем сказать ничего, опираясь только на свои ощущения. А измерения инфракрасными спектрометрами показывают следующее: основные газы воздуха — азот, кислород и инертные газы — прозрачны и в инфракрасном диапазоне, однако углекислый газ и пары воды, присутствующие в атмосфере в малых количествах, поглощают инфракрасное излучение так сильно, что именно они и определяют радиационные свойства земной атмосферы и Земли в целом.

Тепловое излучение Земли испускается слоями атмосферы на высоте 6—12 км. Именно на этих высотах средняя температура ~258 К. Представьте себе космического пришельца, который видит только инфракрасный свет. Для него Земля выглядела бы светящимся шаром с радиусом, чуть большим истинного, а настоящую земную поверхность он мог бы видеть очень редко: около южного полюса во время полярной ночи или зимой в северном полушарии в Восточной Сибири. Происходит это потому, что только при очень сильных морозах воздух становится так сух, что атмосфера прозрачна уже и в инфракрасном свете.

Ту часть атмосферы, которая лежит под поверхностью инфракрасного излучения, называют тропосферой. Тропосфера содержит около 80% всей массы атмосферы Земли. Вы ведь знаете, давление падает с подъемом. На высоте Эвереста, примерно совпадающей с высотой радиационной поверхности, давление воздуха составляет только одну пятую нормального давления. Это и означает, что выше лежит одна пятая массы атмосферы. Тропосфера — наиболее практически важная для нас часть атмосферы. Ее движение определяет все явления погоды. Все обычные облака тоже лежат в тропосфере — выше паров воды очень мало. Поэтому состоянием тропосферы определяются осадки — дождь, снег, град.

Строго говоря, к тропосфере относят и область, лежащую на 2—3 км выше поверхности инфракрасного излучения, ту область, где температура воздуха продолжает падать с подъемом.

А выше 15 км температура атмосферы начинает расти! И дорастает она до 270 К, то есть снова почти до нуля градусов Цельсия, на высоте около 50 км. Этот слой атмосферы называют стратосферой. Но отчего же температура в стратосфере растет?

Оказывается, тепловую энергию этому слою сообщают химические реакции, происходящие под действием ультрафиолетового излучения Солнца. Это — реакция разложения кислорода на атомы и реакция

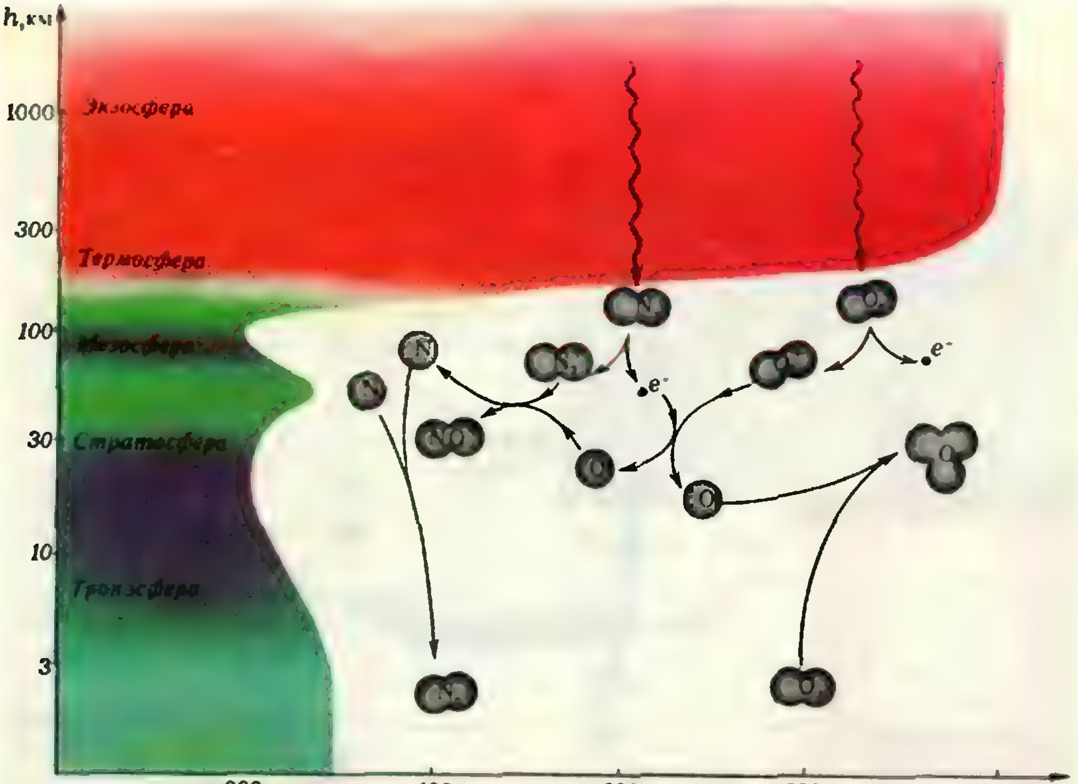


Рис. 2.

образования молекул озона O_3. Слой повышенной концентрации озона в стратосфере (мы отметили его, обсуждая рисунок 1) служит как бы экраном, не пропускающим к земной поверхности губительное для всего живого ультрафиолетовое излучение Солнца.

Озонный слой необходим Земле, но он непрочен. Озон частично разрушается от образования в стратосфере окислов азота при ядерных взрывах в атмосфере, при мощных извержениях вулканов и даже при запуске ракет. Опасны для озонного экрана и содержащие хлор и фтор органические газы, которыми наполняют аэрозольные баллончики и хладообменники холодильников. Большинство этих воздействий на озонный слой вызвано деятельностью человека. Их суммарный эффект должен быть ограничен, поскольку озон стратосферы восстанавливается медленно.

Выше 55 км температура воздуха падает. Она опускается до 187 К на высоте 90 км над поверхностью Земли. Этот слой атмосферы называется мезосферой. Падение температуры в мезосфере происходит в результате того, что воздух в ней слабо поглощает солнечный свет.

Выше, над мезосферой, лежат термосфера и экзосфера Земли. В термосфере температура начинает резко возрастать и достигает значений около 1000 К на высотах 350—400 км*). Происходит это в результате поглощения основными газами атмосферы — кислородом и азотом — ультрафиолетового излучения Солнца. Над термосферой температура не меняется с высотой. Это — экзосфера, переходная область между атмосферой Земли и космосом, та часть атмосферы, где происходит убегание от Земли водорода, гелия и в очень малых количествах остальных газов.

Вот так устроен «слоеный пирог» земной атмосферы (рисунок 2).

Потоки энергии в атмосфере

Падающая на Землю энергия солнечных лучей перераспределяется разными слоями атмосферы Земли и ее твердой или жидкой поверхностью. Как это происходит, понятно из рисунка 3, где прослеживается

---

*) Эту температуру нельзя измерить термометром: плотность газа термосферы и экзосферы настолько мала, что тепловое равновесие между газом и термометром никогда не устанавливается. Температура в данном случае измеряется по средней кинетической энергии молекул газа.

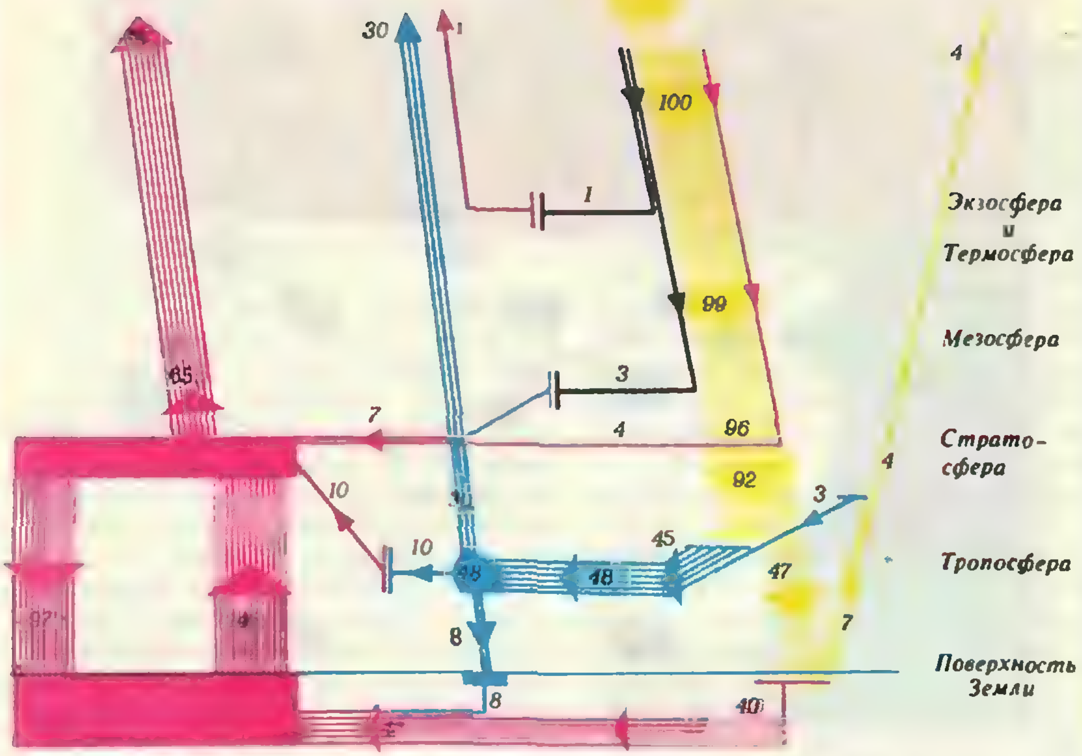


Рис. 3. Тепловой баланс в атмосфере.

Один процент солнечной мощности поглощается молекулами в экзосфере и термосфере. Еще три процента поглощаются озоном стратосферы. Верхние слои тропосферы, содержащие пары воды, поглощают инфракрасную часть солнечного спектра. Остается 92 единицы первоначальной мощности.

Эта мощность, большая часть которой приходится уже на видимый диапазон, проникает в плотные приземные слои воздуха. Значительная часть ее — около 45 единиц — рассеивается в воздухе. Прямые солнечные лучи — оставшиеся 47 единиц начального светового потока — достигают непосредственно поверхности Земли. Она отражает наверх примерно 7 единиц. Оставшиеся 40 единиц поглощаются поверхностью Земли, нагревая сушу и океан.

Рассеянная в атмосфере световая мощность (всего 48 единиц) частично поглощается ею (10 единиц), и остальное распределяется между поверхностью Земли и космосом. При этом в космическое пространство уходит больше энергии, чем попадает вниз, на поверхность, — целых 30 процентов первоначального потока.

У нас осталось 65 единиц мощности, поглотившихся и перешедших в тепло в атмосфере и на поверхности Земли: 3 из них дал озон, 4 — пары воды верхней тропосферы, 10 — поглотились в основной толще атмосферы и, наконец, 48 перешли в тепло в почве и водах океана. Все эти 65 единиц мощности в конечном счете перешли в тепло и излучаются в космос уже не в видимом и ультрафиолетовом диапазонах, а тепловой радиацией.

путь 100 условных единиц солнечной мощности, падающей на Землю.

Обратите внимание на то, что на рисунке изображен тепловой поток в 145 единиц, исходящий от земной поверхности, тогда как исходный поток солнечной энергии был равен только 100 единицам. Так, до некоторой степени условно, отражен тот факт, что средняя температура земной поверхности равна +15 °С, или 288 К, и тепловой поток, излучаемый с поверхности Земли, примерно в 1,45 раз больше, чем те начальные 100 единиц, которые дает нам Солнце. Но в космос уходит только часть этого излучения. Остальная энергия — 97 единиц — постоянно циркулирует между поверхностью Земли и тропосферой.

Этот механизм прогрева земной поверхности и нижних слоев атмосферы называют иногда парниковым эффектом. Действительно, очень похоже на парник. Солнечные лучи тоже легко проникают через прозрачное покрытие парника, нагревая почву и воздух. Но уйти теплу трудно — стекло или пластиковая пленка парника не пропускают наверх ни теплый воздух, ни инфракрасное излучение; поэтому охлаждение парника происходит медленно.

Точность, с которой нам сегодня известны тепловые потоки, изображенные на рисунке 3, невелика.

Тем не менее такой тепловой баланс разумно объясняет, почему температура земной поверхности выше равновесной температуры излучения Земли.

Как уже говорилось, парниковый эффект возникает за счет малых примесей в атмосфере Земли водяных паров и двуокиси углерода, которые не пропускают в космос инфракрасное излучение от Земной поверхности. Содержание CO_2 в атмосфере сейчас равно 0,0337%. А всего 20 лет назад оно было меньше: 0,0318%. Это возрастание произошло вследствие все увеличивающегося сжигания органических топлив: нефти, угля, газа. Так не будет ли парниковый эффект все возрастать? Не грозит ли Земле перегрев?

Конечно, дополнительная углекислота атмосферы способствует потеплению климата. Климат, однако, зависит не только от нее. К тому же надо отметить, что количество CO_2 в атмосфере возрастает отнюдь не так быстро, как сжигается топливо — подавляющая часть дополнительной углекислоты растворяется в океане и поглощается растениями при фотосинтезе. Океан содержит растворенной углекислоты в 30—100 раз больше ее атмосферной массы и способен поглотить еще очень много. Увеличение доли углекислоты в атмосфере связано с тем, что процесс растворения ее в океане медленный по сравнению с поступлением CO_2 от сжигания органических топлив. В ближайшие 50—100 лет нефтяные ресурсы истощатся, и человечество будет вынуждено перейти к атомной энергетике. Тогда проблема атмосферной углекислоты будет решена автоматически.

От редакции. Разумеется, в небольшой статье нельзя подробно рассказать о многих физических явлениях, происходящих в атмосфере Земли. Тем, кого интересуют эти вопросы, мы советуем прочитать книгу А. В. Бялко «Наша планета — Земля», которая выходит в издательстве «Наука» в серии «Библиотечка Квант».

Наш календарь

150
лет назад

Правило Ленца

В 1831 году английский ученый Фарадей открыл явление электромагнитной индукции, явление, которое наглядно проиллюстрировало возможность «превращения магнетизма в электричество». В опытах Фарадея индукционный ток возникал либо при движении проводников друг относительно друга, либо при относительном движении проводника и магнита. Для определения направления тока Фарадей сформулировал два соответствующих правила: 1) электрический ток вызывает в приближаемой к нему параллельной проволоке ток противоположного направления, а в удаляемой — ток того же направления; 2) магнит вызывает в перемещающемся около него проводнике ток, зависящий от направления, в котором проводник в своем движении пересекает магнитные силовые линии.

Ознакомившись с работами английского ученого, экстраординарный академик Петербургской Академии наук Эмилий Христианович Ленц (1804—1865) расценил эти правила как неудовлетворительные. Действительно, они имели чисто геометрическое содержание, описывали лишь частные случаи и не охватывали всего явления в целом.

Взамен этому Ленц предложил одно общее правило, с помощью которого можно определить направление индуцированного тока независимо от того, как наводится ток — движением проводника или магнита, включением или выключением тока в соседнем проводнике. Вот это правило в том виде, в каком Ленц сформулировал его 29 ноября 1833 года, когда на заседании Петербургской Академии впервые сообщал о своем открытии:

«Если металлический проводник движется поблизости от гальванического тока или магнита, то в нем возбуждается гальванический ток такого направления, что если бы данный проводник был неподвижным, то ток мог бы обусловить его перемещение в противоположную сторону; при этом предполагается, что покоящийся проводник может перемещаться только в направлении движения или в противоположном направлении». Справедливость предложенного им правила Ленц надежно подтвердил целой серией убедительных экспериментов.

Конечно, эта формулировка не так лаконична, как эквивалентная ей современная формулировка правила Ленца.

Б. Е. Явелов

О пользе чисел «поистине софистических»

Кандидат физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

Многовековая история развития представлений человека о числах — одна из самых ярких сторон развития человеческой культуры. В стремлении расширить мир чисел трудноразгадываемым образом переплелись разнообразные мотивы.

Дроби появились очень рано — уже у египтян и вавилонян — по-видимому, в связи с переходом к более мелким долям измерения. Их связь с делением натуральных чисел понималась более смутно и вторично.

Греки осознавали числа через процесс геометрического измерения: именно так они уяснили себе существование иррациональных чисел (несоизмеримость диагонали квадрата и его стороны) и построили теорию «величин» (как мы сказали бы сегодня, теорию положительных действительных чисел) — одну из вершин греческой геометрии. Характерный штрих: «числами» назывались лишь натуральные числа, а их расширения — «величинами». Вычислительный аспект отодвигался на второй план и обычно не считался достойным внимания ученого. Платон, энергично заботившийся о том, чтобы практические задачи не оскверняли подлинного духа геометрии, смеялся над вычислителями, «которые разменивают единицу на мелкую монету» (занимаются делением).

Отрицательные числа появились в V—VI веках в индийской и арабской математике, где на первый план выдвинулась вычислительная сторона дела. И хотя довольно рано была осознана возможность интерпретировать отрицательные числа, скажем, как долг в задачах коммерческого содержания, практика показывала, что ими удобно пользоваться чаще, чем такая интерпретация возможна. Сильно упрощая, можно сказать, что вычислители рассматривали отрицательные числа как «воображаемые», ненастоящие числа, которыми удобно пользоваться в промежуточных вычислениях как результатом вычитания, когда оно невыполнимо в области положительных чисел. При этом важно было убедиться, что не нарушаются «правила гигиены»: можно доверять окончательному положительному ответу. Ни о каком равноправии отрицательных чисел с положительными речь не шла: в окончательном ответе, кроме простейших ситуаций, отрицательные числа не появлялись. Об отношении к ним выразительно говорят разные варианты их названий: «ложные», «фиктивные», «абсурдные», «невозможные», «мнимые».

Впрочем, последний термин позднее пришлось «уступить» другому классу чисел, который удивительным образом появился в европейской математике одновременно с первым серьезным рассмотрением отрицательных чисел. Этот историко-математический парадокс связан с Джероламо Кардано (1501—1576), яркой и противоречивой личностью с повышенной склонностью к фантазиям и мистике, что нередко далеко заводило его в ложном направлении. Однако более практичный и осторожный человек вряд ли решился бы в то время на построения, которым математика обязана Кардано.

Главные результаты Кардано относятся к исследованию формулы для решения кубического уравнения, которую впервые получил дель Ферро (1465—1526) и которую Кардано узнал от Тартальи (1500?—1577) (подробнее об этом см. в моей книге «Рассказы о физиках и математиках» (М., «Наука», 1981)).

Напомним, что общее кубическое уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ заменой $x=y-\frac{a}{3}$ приводится к виду

$$x^3+px+q=0. \qquad (1)$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде $x=y_1+y_2$. Тогда $x^3=y_1^3+y_2^3+3xy_1y_2$. Сопоставляя с (1), мы видим, что если y_1 и y_2 удовлетворяют равенствам $3y_1y_2=-p$, $y_1^3+y_2^3=-q$, то $x=y_1+y_2$ является решением уравнения (1). Такие y_1, y_2 легко найти: если $t_1=y_1^3$, $t_2=y_2^3$, то по теореме Виета t_1 и t_2 являются корнями квадратного уравнения $t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$,

то есть $t_{1,2}=-\frac{q}{2}\pm\quad\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$,

откуда

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+$$

$$+\sqrt{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (2)$$

формулу (2) называют сейчас *формулой Кардано.*

Вспомним теперь, что Кардано вел свои рассмотрения в рамках положительных чисел. (Кроме того, он не владел алгебраической символикой, что невероятно осложняло дело, особенно при попытках формулировать общие правила. Однако этот тип трудностей мы не будем здесь имитировать.) Поэтому Кардано изучает отдельно уравнения

$$x^3+ax=b, \qquad (3)$$

$$x^3=ax+b, \qquad (4)$$

$$x^3+b=ax, \qquad (5)$$

где a, b положительны. Четвертый формально возможный тип $x^3+ax+b=0$ он не рассматривает, так как такое уравнение, очевидно, не имеет (положительных!) корней.

Дель Ферро придумал правило для решения (3). Тарталья переотрыл это правило и придумал правило для решения (4); он сформулировал оба правила в виде стихотворения, которое и было сообщено Кардано.

Говоря прозой, речь идет о том, что решение ищется в виде $x=\sqrt[3]{u}\mp\sqrt[3]{v}$ (минус для (3), плюс для (4)), где, соответственно, $u\mp v=b$, $uv=\left(\frac{a}{3}\right)^3$ (ср. с (2)).

Уравнение (3) всегда имеет единственный действительный корень, причем этот корень всегда положителен (сегодня в этом легко убедиться по графику) и благополучно находится по указанному правилу.

В (4) также всегда имеется единственный положительный корень x, причем всегда $x > \sqrt{a}$ (почему?). Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27} > 0$ (это равносильно тому, что $x < \quad \frac{4a}{3}$), то корень находится по формуле (2). В этом случае других действительных корней нет. Если же $\Delta < 0$, то в (2) под квадратным радикалом стоит отрицательное число и формула отказывает. На самом деле в этом случае (он был назван *неприводимым*) кроме одного положительного имеется два отрицательных корня (быть может, кратных). Тарталья несомненно знал на примерах, что и при $\Delta < 0$ положительный корень у уравнения (4) может существовать, а Кардано недвусмысленно утверждал существование корня в общем случае. Неприводимый случай уравнения (4) доставил много волнений и Тарталье и Кардано, но способ находить корень так и не был найден!

Что касается уравнения (5), то оно легко сводится к (4): корни (5) отличаются от корней (4) знаком, и, стало быть, при $\Delta = \frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27} > 0$ у (5) нет положительных корней, а при $\Delta < 0$ (в неприводимом случае) имеются два положительных корня (и один отрицательный). Но такой тип рассуждений был за пределами возможностей математиков XVI века. Тарталья пишет, что решение (5) сводится к решению (4), но не делает никаких намеков на способ сведения.

Кардано придумал способ перейти от (5) к (4), довольно близкий к подстановке $x = -y$. Мы ищем положительный корень x уравнения (5). Пусть y — положительный корень уравнения (4); он всегда существует, причем $y > \sqrt{a}$ и, в неприводимом случае, $y < \sqrt{\frac{4a}{3}}$. Складывая (4) и (5), получаем $x^3 + y^3 = a(x+y)$, откуда $x^2 - xy + y^2 = a(x+y \neq 0$ в положительной области), $x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \quad a - \frac{3y^2}{4}$. В результате при $y < \sqrt{\frac{4a}{3}}$, то есть в неприводимом случае ($\Delta < 0$), мы выражаем через положительный корень y уравнения (4) два положительных корня уравнения (5) (их положительность следует из неравенства $y > \sqrt{a}$). Кардано замечает, что $y = x_1 + x_2$, то есть в неприводимом случае положительный корень уравнения (4) равен сумме положительных корней уравнения (5).

Таким образом, изучая уравнение (5), Кардано сумел остаться в рамках положительных корней. Но именно в результате этих рассмотрений он понял ту роль, которую играют отрицательные корни. Он понял, что у уравнения (5) всегда имеется «ложный» (отрицательный) корень $-y$, что при $\Delta < 0$ сумма всех его корней, включая «ложный», равна нулю, что для справедливости этого утверждения при $\Delta = 0$ надо считать, что уравнение (5) имеет кратный положительный корень, что уравнение (4) в неприводимом случае имеет два «ложных» корня и что сумма всех его корней в этом случае тоже равна нулю.

Утверждение о сумме корней уравнения, имеющего три корня (считая «ложные»), Кардано обобщил на общие кубические уравнения: сумма корней знаком отличается от коэффициента при x^2. (Надо сказать, что известная теорема Виета, относящаяся к корням квадратного уравнения, была получена позднее.) Кардано первым работал с отрицательными корнями, причем он не просто обратил внимание на возможность их рассмотрения — он показал, сколь гармонично они входят в теорию алгебраических уравнений. С этих результатов Кардано началась алгебра в современном смысле слова.

Результаты Кардано были собраны в его книге «Великое искусство или о правилах алгебры», вышедшей в 1545 г. Глава XXXVII этой книги носит название «О правиле рассмотрения ложного неизвестного». И если первое правило в этой главе относится к отрицательным корням, то второе правило гласит: «Второй вид ложного решения уравнения заключается в корне из отрицательного количества. Я приведу пример. Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые по перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножении, скажем 40, как я объяснял тебе это в главе о действиях в 4-й книге; тогда останется m:15; если взять от этого R и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут $5p{:}Rm{:}15$ и $5m{:}Rm{:}15$». Текст этот нетрудно расшифровать. Речь идет об уравнении $x(10-x)=40$, то есть $x^2-10x+40=0$. Утверждается, что его корнями будут $5\pm\sqrt{25-40}=5\pm\sqrt{-15}$. Читатель без труда восстановит обозначения, которыми пользуется Кардано.

Так впервые появились в математике комплексные числа, которые Кардано называл «поистине софистическими». Новыми числами Кардано совершенно не пользовался и, похоже, относился к ним не без подозрения.

Во всем этом есть один интригующий момент. Нередко высказывают предположение (например, Н. Бурбаки), что Кардано придумал комплексные числа, пытаясь разобраться с неприводимым случаем кубического уравнения. Дело в том, что если в формуле (2) при $\Delta<0$ не побояться извлечь квадратный корень из отрицательного числа, то в последующих операциях мнимые части уничтожаются и в результате получается правильный ответ, являющийся действительным числом*). Таким образом, обращение к комплексным числам не только позволяет оправдать формулу Кардано в общем случае, но они неминуемо возникают в задаче определения действительных корней кубического уравнения с действительными коэффициентами. Было бы очень логично, если бы Кардано ввел комплексные числа по этой причине. Но никаких свидетельств того, что при работе с комплексными числами Кардано выходил за пределы квадратных уравнений, нет. В реальных исторических фактах часто не удается обнаружить «естественных» связей!

Связь комплексных чисел с неприводимыми кубическими уравнениями была обнаружена, если и не Кардано, то очень скоро. Это было сделано непосредственным преемником Кардано, инженером из Болоньи Рафаэлем Бомбелли (около 1530—1572), автором знаменитой «Алгебры», вышедшей в 1572 г. Среди многих замечательных результатов в «Алгебре» имеется систематическое изучение комплексных (и отрицательных) чисел. У Бомбелли можно найти соотношения

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1},$$

$$\sqrt[3]{52+\sqrt{-2209}}=4+\sqrt{-1}\,.$$

Интересно, что Бомбелли вводит специальное наименование для i ("piu de meno"; 1 он называет "piu"). Бомбелли уверенно применяет комплексные числа к неприводимому кубическому уравнению.

В формуле Кардано фигурируют выражения вида $\sqrt[3]{\alpha\pm\sqrt{\beta}}$, где β может быть любого знака; эти выражения и исследует Бомбелли. Пусть $\sqrt[3]{\alpha\pm\sqrt{\beta}}=u\pm\sqrt{v}$ (значит, из (2) $x=2u$). Тогда $u^3+3uv=\alpha$, $u^2-v=\sqrt[3]{\alpha^2-\beta}$ и, если положить $\gamma=\sqrt[3]{\alpha^2-\beta}$, для u, независимо от знака β, возникает уравнение $4u^3=3\gamma u+\alpha$. В частности, в формуле Кардано для уравнения (4) имеем $\alpha=\frac{b}{2}$, $\beta=\frac{b}{2}\Big)^2-\frac{a}{3}\Big)^3$, $\gamma=\frac{a}{3}$. Теперь, с одной стороны, понятно, как действительный корень выражается через кубические корни из комплексных чисел ($x=2u$), но, с другой стороны, выражения для x через действительные радикалы все равно не получается, поскольку возникает кубическое уравнение $4u^3=$

---

*) См. статью Н. Клумовой и Д. Фукса «Формула существует, но...» («Квант», 1976, № 9).

$=au+\frac{b}{2}$, фактически совпадающее (подстановка $x=2u$) с исходным уравнением (4).

Позднее Лейбниц (1646—1716), который изучал кубические уравнения по книге Бомбелли, окончательно осознал, что в неприводимом случае невозможно выразить корни уравнения через радикалы оставаясь в действительной области.

На рубеже XVI—XVII веков судьба новых чисел еще не решилась. Франсуа Виет (1540—1603), которого часто называли «отцом алгебры» за то, что он начал пользоваться алгебраической символикой (буквенными обозначениями для коэффициентов уравнения, а не только для неизвестных), старался обходиться не только без комплексных корней, но и без отрицательных. Поскольку он занимался, в частности, соотношениями между корнями и коэффициентами (теорема Виета), это было ему не просто, но он находил выход из положения. Скажем, если уравнение (5) имеет два положительных корня x_1, x_2 и один отрицательный корень x_3, то Виет, вместо равенств $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-a$, $x_1x_2x_3=-b$ (сейчас эти равенства называются *формулами Виета*), показывал, что $x_1^2+x_2^2+x_1x_2=a$, $x_1x_2(x_1+x_2)=b$ (докажите!), не привлекая, в отличие от Кардано, ни третьего отрицательного корня, ни положительного корня вспомогательного уравнения (4). Есть мнение (Н. Бурбаки), что относительный консерватизм Виета связан с тем, что он был страстным почитателем древних.

Мы должны вспомнить Виета еще в связи с его интерпретацией неприводимого кубического уравнения. Виет был великим мастером получать алгебраические соотношения тригонометрическими средствами. Занимаясь тригонометрическими функциями кратных углов, Виет решил воспользоваться формулой

$$\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi \qquad (6)$$

для решения кубических уравнений. Он сопоставил (6) с уравнением (4). Чтобы это сопоставление было более прозрачным, сделаем в (4) замену $a=3r^2$, $b=\alpha r^2$. В этих обозначениях неприводимому случаю отвечает $r>\frac{\alpha}{2}$, что делает естественным замену $\alpha=2r\cdot\cos v\,(0<v<\frac{\pi}{2})$. Если еще сделать замену неизвестного $x=2ry$, то (4) превратится в уравнение

$$4y^3-3y=\cos v, \qquad (7)$$

которому, в силу (6), удовлетворяет $y=\cos\frac{v}{3}$, то есть для (4) получаем выражение для положительного корня $x_1=2r\cdot\cos\frac{v}{3}$. Ясно, что два отрицательных корня равны $x_{2,3}=2r\cdot\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}+\frac{v}{3}\right)$ и что для уравнения (5) корректны аналогичные выкладки, только $\frac{\pi}{2}<v<\pi$ и x_1 — отрицательный корень, а x_2, x_3 — положительные (сопоставьте эти представления для корней со способом Кардано переходить от корней уравнения (4) к корням уравнения (5)).

Откажемся на время от имитации старины и перепишем формулу Виета в обозначениях (1), (2). Если $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ (неприводимый случай), то, в частности, $p<0$. Полагая $r=\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $\alpha=\frac{3q}{p}$ (тогда $2r>\alpha$), $v=\arccos\frac{\alpha}{2r}$, окончательно получаем

$$x=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{2\pi k}{3}+\frac{\arccos\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}}{3}\right)$$

Все выкладки Виет производит в области действительных чисел, однако в его представлении корней участвуют не только алгебраические операции, но и тригонометрические функции. Его формула не противоречит тому, что не существует алгебраического представления корней неприводимого кубического уравнения. Формула Виета несомненно пригодна в вычислительном плане:

она позволяет вычислять корни при помощи тригонометрических таблиц.

В идейном отношении она допускает следующую интерпретацию. Среди геометрических задач древних, приводивших к кубическим уравнениям, можно выделить две задачи: задачу о построении куба заданного объема (в частности, задачу об удвоении куба), сводящуюся к извлечению кубического корня, и задачу о трисекции угла, сводящуюся к уравнению (7). Формула Кардано показывает, что в приводимом случае решение кубического уравнения (при помощи арифметических операций и извлечения квадратного корня) сводится к задаче о построении куба (кстати, Кардано выводил свою формулу на геометрическом языке!). Результат Виета показывает, что в неприводимом случае в аналогичном смысле все сводится к уравнению трисекции угла. Итак, две классические геометрические задачи отражают две возможные *не сводящиеся друг к другу* (в области действительных чисел) ситуации в кубических уравнениях.

В XVII веке к отрицательным числам пришло окончательное признание. Единообразная трактовка трех возможных типов квадратных уравнений (в положительной области!) восходит еще к Михаилу Штифелю (1487—1567), к его «Общей арифметике», вышедшей в Нюрнберге в 1544 г. (за год до «Великого искусства» Кардано).

В 1585 г. в «Арифметике» Симона Стевина (1548—1620), замечательного механика и математика, общие квадратные уравнения рассматриваются уже достаточно последовательно. Стевин решительно пользуется разными типами чисел: рациональными, иррациональными, отрицательными. Он возрождает геометрический взгляд греческих математиков на числа (это сделал уже Бомбелли в оставшейся неизвестной современникам IV книге «Алгебры»), начинает работать с (конечными) десятичными дробями, приближая ими любые действительные числа. Принципиально, что Стевин настаивает на полном равноправии новых чисел со старыми, на их реальности: «Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел, но что среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной законченностью».

Все же окончательное признание отрицательных чисел связано с их интерпретацией при помощи числовой оси в аналитической геометрии и направленного движения в механике. Но и это признание далось нелегко. Тому есть интересное свидетельство. В середине XVIII века Д'Аламбер (1717—1783) пишет в статье «Отрицательное» в «Энциклопедии»: «Правила алгебраических действий с отрицательными количествами в общем приняты всеми и считаются точными независимо от того, что подразумевается под этими количествами». Итак, нет сомнений в корректности их использования, но еще не ясен окончательно вопрос об их реальности.

Теперь о комплексных числах. Даже такой смелый человек, как Стевин, считал, что заниматься ими — дело бесполезное, отвлекающее от занятий «законными» вопросами. И все же, хоть и медленно, дело двигалось вперед. Начинают говорить об «идеальных», реально не существующих корнях уравнений высокой степени, которые удобно рассматривать, чтобы сохранить соотношения между корнями и коэффициентами в общем случае. Причем пока совсем не ясно, что «идеальные» корни сводятся к комплексным: почему хватит этих чисел, придуманных для обслуживания квадратных уравнений?

Альбер Жирар (1590—1633) в изданной в 1629 г. книге «Новое открытие в алгебре» утверждал, что уравнение n-й степени имеет n корней, считая «идеальные» (это утверждение мельком упоминалось у Петера Роте еще в 1608 г.*)). «Можно было бы спросить: кому нужны такие решения, которые невозможны? — писал Жирар. — Я отвечаю: они нужны для трех вещей — для справедливости общего правила, и чтобы убедиться, что нет других решений, и ради своей полезности.» Справедливость требует не согласиться с Жираром: в то время «полезность» комплексных чисел еще никак не проявилась.

---

*) Позднее было выяснено, что оно легко следует из так называемой «основной теоремы алгебры», утверждающей, что каждый многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень (см., например, «Квант», 1982, № 4).

Теорема о корнях уравнения n-й степени появляется и на «алгебраических» страницах знаменитой «Геометрии» Рене Декарта (1596—1650), вышедшей в 1637 г. в Лейдене (там же, где книга Жирара). В этой книге заложены основы аналитической геометрии, но очень поучителен также текст, относящийся к общим алгебраическим уравнениям. Декарт не пользуется буквенными обозначениями для коэффициентов (как это делал Виет) и вынужден пояснять утверждения на примерах; Декарт вводит обозначение x для неизвестного и от него идут современные обозначения для степеней x^3, x^4 (впрочем, вместо x^2 все еще пишется xx). «Итак, знайте, — пишет Декарт, — что в каждом уравнении может иметься столько различных корней, то есть значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений». Показатель степени здесь называется «измерением», потому что по-прежнему на первый план выдвигается геометрическая интерпретация степени (квадрат, куб). Далее: «Но иногда случается, что некоторые из этих корней ложны, или меньше, чем ничего». Как и следовало ожидать от создателя аналитической геометрии, Декарт уверенно обращается с отрицательными числами. Он четко формулирует утверждение, называемое теперь *теоремой Безу* (который жил заметно позже — в XVIII веке), как для положительных, так и для отрицательных корней, что позволяет понижать степень уравнения, если известен корень. После этого Декарт пишет: «Впрочем, как истинные, так и ложные корни не всегда действительны, но иногда они только мнимые ("imaginaires"; отсюда и пошел термин «мнимые» — *С. Г.*), то есть всегда можно вообразить себе столько корней, сколько я сказал, но иногда не существует никакой величины, которая соответствовала бы корням, которые воображают себе. Так, например, в уравнении $x^3—6xx+13x—10\infty 0$ (Декарт пользовался знаком ∞ вместо уже существовавшего $=$) можно вообразить себе три корня, но среди них только один действительный, именно 2; что же касается двух других, то их можно увеличивать, уменьшать или умножать так, как я только что объяснил, но при всем том они останутся только мнимыми».

Обратим внимание на два обстоятельства: Декарт не пытается делить левую часть уравнения на $x—\alpha$ для комплексного корня α и, соответственно, не готов рассматривать уравнения с комплексными коэффициентами (комплексные числа играют служебную роль). Декарта можно понять так, что комплексные числа бывают положительными и отрицательными, то есть он не понимает еще, что комплексные числа нельзя естественно упорядочить! Это заблуждение великого ученого показывает, сколь смутными были еще представления о комплексных числах. Мы привели длинные извлечения из Декарта, чтобы продемонстрировать в наиболее совершенном варианте представления об алгебраических уравнениях и комплексных числах, которые сложились к середине XVII века.

А затем почти полтора века силы лучших математиков были сконцентрированы на создании математического анализа. Алгеброй, которая тогда фактически сводилась к теории алгебраических уравнений, занимались мало, и алгебраические результаты по сравнению с аналитическими достижениями выглядели скромными. Можно сказать, что выдающиеся математики в основном обращались к алгебре в связи с нуждами анализа и аналитической геометрии. Скажем, разложение многочленов на множители понадобилось для интегрирования рациональных дробей. А к комплексным числам начали понемногу привыкать. В связи с нуждами анализа рассматривали даже логарифмы комплексных чисел.

В 1746 г. Д'Аламбер публикует доказательство основной теоремы алгебры с некоторыми пробелами, но с «истинным стержнем» (Гаусс). С работ Лагранжа (1736—1813) началась новая эпоха в теории алгебраических уравнений. Показательно, что и Лагранж, и Эйлер (1707—1783) уделяют заметное внимание исследованию формулы Кардано в комплексной области. Эйлер рассматривает элементарные функции комплексного переменного и обнаруживает поразительную связь показательной и тригонометрических функций. Это был принципиальный шаг, поскольку прежде комплексные числа связывались лишь с алгебраическими уравнениями.

Еще в начале XVIII века был обнаружен важный пример, когда комплексные корни не просто могут быть введены для полноты картины, но связаны с конкретной действительной задачей. Котес и Муавр обнаружили связь уравнения $x^n-1=0$ с классической задачей о делении круга на n равных частей. Эта связь очевидна, если знать геометрическую интерпретацию комплексных чисел (n комплексных корней из 1 являются вершинами правильного n-угольника).

Гаусс (1777—1855), возможно, уже знал эту интерпретацию, когда в 1796 г. использовал связь с уравнением $x^{17}-1=0$ для построения правильного 17-угольника. Однако в своей публикации, как, впрочем, и в диссертации 1798 г., посвященной первому строгому доказательству основной теоремы алгебры (у нее есть чисто действительная формулировка: любой многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение таких же многочленов не выше второй степени), он предпочитает комплексными числами не пользоваться. В 1811 г. в письме к Бесселю Гаусс пишет: «Подобно тому, как всю область действительных величин можно представить с помощью бесконечной прямой, можно себе представить область всех величин, действительных и мнимых, с помощью бесконечной плоскости, где каждая точка, определенная своей абсциссой a и своей ординатой b, представляет в то же время величину $a+ib$.» Этот результат Гаусс опубликовал только в 1831 г. Аналогичные результаты менее известных современников Гаусса остались почти незамеченными: Ж. Арган (1806 г.), К. Вессель (1798 г., работа оставалась неизвестной сто лет). В сознании математиков геометрическая интерпретация комплексных чисел превращала воображаемый объект в реальный (кстати, термин «комплексное число» предложил Гаусс).

Историю математики в XIX веке уже нельзя отделить от комплексных чисел. Гаусс, Коши, Якоби, Абель, Риман показывают, что переход к анализу функций комплексной переменной позволяет обнаружить глубочайшие факты, которые нельзя увидеть в действительной области.

В геометрии «воображаемые» элементы появились на сто лет позже, чем в алгебре. Жерар Дезарг (1593—1662) обнаружил, что если ввести «воображаемые» бесконечно удаленные точки, в которых «пересекаются» параллельные прямые, то параллельность в самом деле превращается в частный случай пересечения. Здесь картина во многом напоминает ситуацию с комплексными числами, которые позволили избежать рассмотрения исключительных случаев. Виктор Понселе (1788—1867) почти через двести лет (было это в Саратове, в плену после войны 1812 г.) показал, что все окружности «проходят» через две комплексные бесконечно удаленные точки. Это был момент, когда комплексные числа появились в геометрии. Многие считали, что они противоречат подлинной геометрической интуиции (известный геометр Якоб Штейнер (1796—1863) называл их «призраками», «царством теней»). И все же выбора не было — слишком многие (действительные) геометрические факты стали понятны с комплексной точки зрения.

Три века понадобилось комплексным числам, чтобы занять бесспорное положение в математике. Быть может, это и не так много в сравнении с десятью веками, которые понадобились отрицательным числам. Впрочем, в школьной математике положение комплексных чисел (в отличие от отрицательных) остается непрочным по сей день.

Минимальные поверхности

Доктор физико-математических наук
А. Т. ФОМЕНКО

Когда бельгийский физик Жозеф Плато в XIX веке начал опыты по изучению конфигурации мыльных пленок, он вряд ли предполагал, что они послужат толчком к возникновению целого научного направления, бурно развивающегося вплоть до настоящего времени и известного сегодня под названием «проблема Плато». Опыты, которые когда-то проводил Плато, хорошо знакомы нам с детства — вряд ли кто-нибудь не развлекался в свое время выдуванием мыльных пузырей или конструированием мыльных пленок, затягивающих проволочный контур.

Если вы хотите в домашних условиях получить красивые мыльные пленки (например те, которые обсуждаются в этой статье), вот несколько практических советов. Вам нужны: гибкая тонкая проволока, туалетное мыло, стакан или миска воды и глицерин (можно и без него, но с ним пленки устойчивее). Из четверти куска мыла сделайте мелкую стружку, растворите в теплой воде и добавьте ложку глицерина (если он есть). Из проволоки сделайте замкнутый контур с ручкой, опустите в раствор и осторожно выньте его; замысловато изгибая контур, можно разнообразить форму пленок.

Когда мы вынимаем проволочный контур из мыльной воды, на нем повисает красивая радужная мыльная пленка, ограниченная этим контуром. Размеры пленки могут быть довольно значительны, но, конечно, чем больше пленка, тем легче она лопается под воздействием силы тяжести. Если, напротив, размеры контура невелики, то во многих вопросах, связанных с изучением мыльных пленок, можно пренебрегать силой тяжести. Этим обстоятельством мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Как образуется мыльная пленка?

Рассмотрим изменение свойств поверхностной пленки жидкости при добавлении в нее мыла. На рисунке 1,*а* условно изображена граница раздела двух сред: воды и воздуха. Стрелками обозначены силы взаимного притяжения, действующие между полярными молекулами воды, характеризующимися асимметричным распределением электрического заряда. Отчетливо видно, что именно эти силы вызывают появление по-

---

Заставка к статье нарисована ее автором.

верхностного натяжения на границе двух сред. В отличие от молекул воды, молекулы мыла образованы длинными тонкими неполярными углеводородными цепями с полярной кислородной группой на одном из концов цепи. Когда молекулы мыла добавлены в воду, они устремляются к поверхности и заполняют ее равномерным слоем, причем каждая из них ориентирована своим неполярным концом наружу (рис. 1,*б*). Оттесняя молекулы воды внутрь, молекулы мыла уменьшают, тем самым, поверхностное натяжение. Оказывается, это обстоятельство придает поверхностной пленке дополнительную эластичность, проявляющуюся в тот момент, когда мы опускаем, а затем извлекаем из воды тонкий проволочный контур.

В самом деле, когда проволока достигает поверхности (см. рисунок 1,*б*, где показано сечение проволоки), поверхность вспучивается, обволакивая контур. Это происходит вследствие того, что около проволоки число молекул мыла временно уменьшается (см. рис. 1,*б*), то есть падает их число на единицу площади пленки, а следовательно, увеличивается поверхностное натяжение, определяемое прорывающимися снизу молекулами воды. Это придает пленке в непосредственной близости от проволоки дополнительную гибкость, приводящую к появлению мыльной пленки на контуре после его извлечения из воды. Ясно также, что толщина мыльной пленки, затягивающей контур, ограничена снизу суммой длин двух молекул мыла (рис. 1,*в*). Процесс образования мыльной пленки показан на рисунке 1, *г*. По мере подъема контура гибкая поверхностная пленка обволакивает его и тянется вслед за ним. Сила тяжести ограничивает размер поверхности и при значительном удалении контура от жидкости пленка лопается.

Минимальная поверхность — модель мыльной пленки

Физический принцип, лежащий в основе формирования мыльных пленок и регулирующий их поведение и свойства, чрезвычайно прост: физическая система сохраняет определенную конфигурацию только в том случае, когда она не может легко изменить ее, заняв положение с меньшим значением энергии. Энергия по-

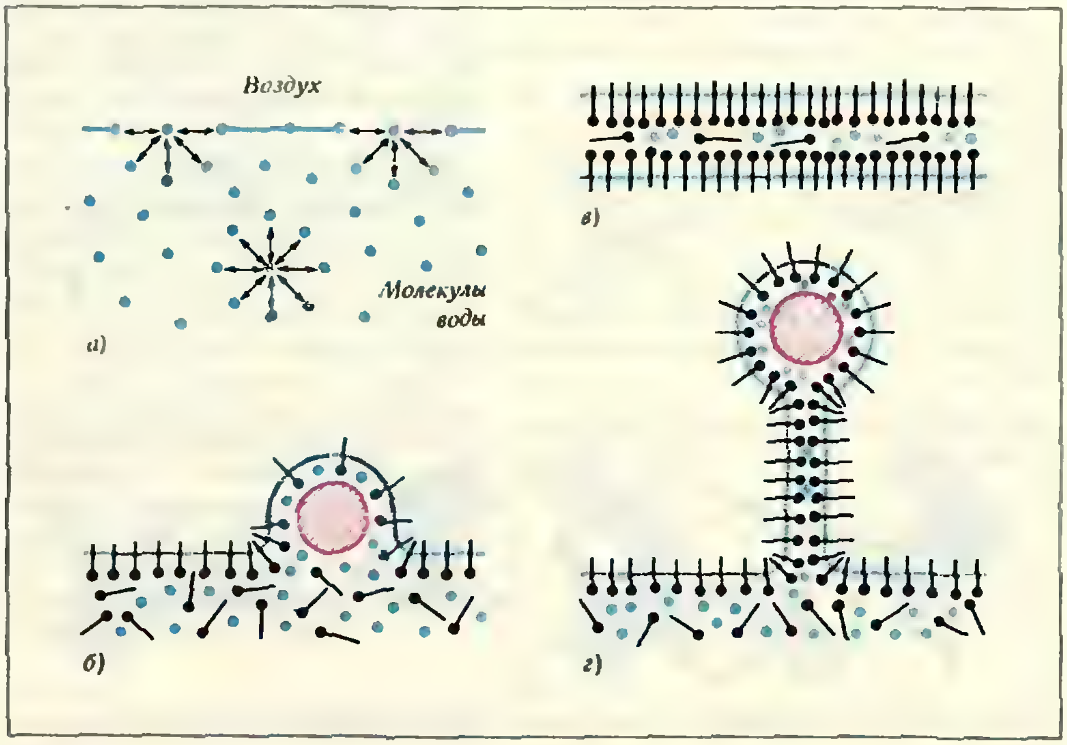


Рис. 1

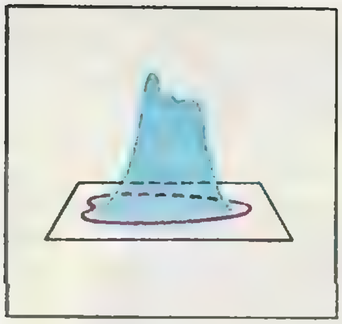


Рис. 2.

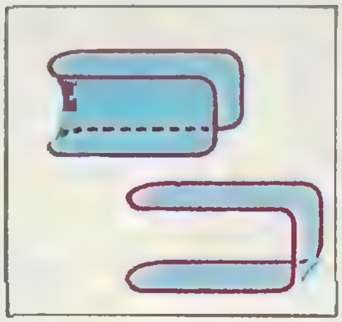


Рис. 3.

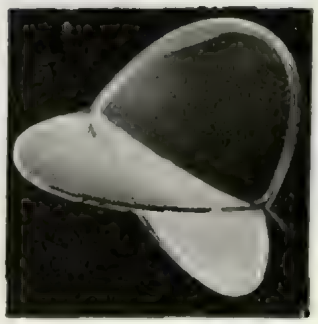


Рис. 4.

верхности (мыльной пленки), часто описываемая в терминах поверхностного натяжения жидкости, обусловлена наличием сил притяжения между отдельными молекулами и несбалансированностью этих сил на границе поверхности. Наличие несбалансированных сил влечет за собой следующий интересный эффект: жидкая пленка превращается в эластичную поверхность, стремящуюся минимизировать свою площадь и, следовательно, минимизировать энергию натяжения, приходящуюся на единицу площади. При этом мы пренебрегаем силой тяжести и давлением воздуха.

Таким образом, математической моделью мыльной пленки служит гладкая поверхность минимальной площади, стягивающая данный контур: математики ее называют *минимальной поверхностью*. Классическая математическая теория этих поверхностей относится к так называемому вариационному исчислению — области анализа, возникшей в XVIII веке. В наши дни для развития этой теории привлекаются и более современные средства топологии и дифференциальной геометрии. Разумеется, пользуясь лишь «школьной» математикой, саму теорию не изложить; но ее результаты легко пояснить наглядно и можно даже проверить на опыте. Впрочем, здесь попутно возникают красивые геометрические задачи, которые решаются средствами элементарной математики.

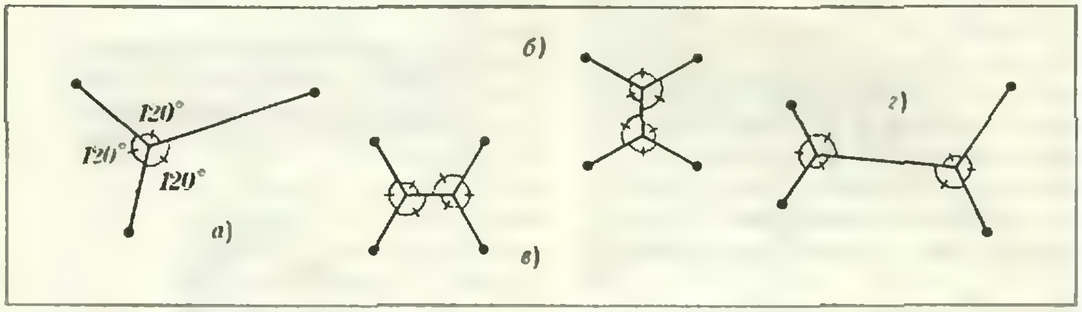


Рис. 5.

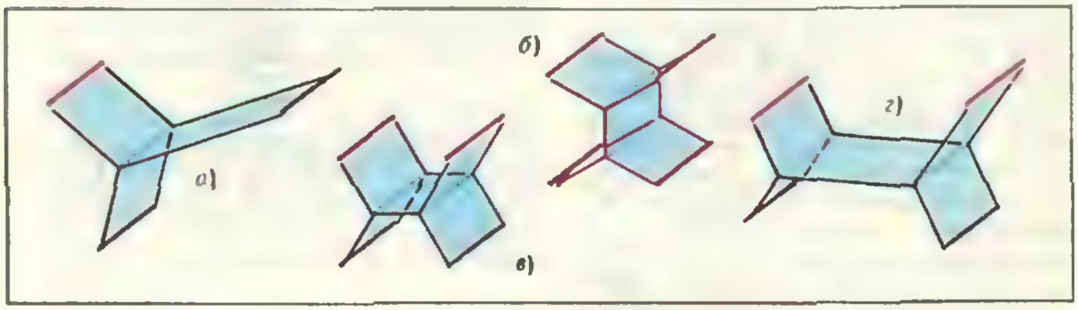


Рис. 6.

Простейшие контуры

Рассмотрим сначала случай, когда контур не слишком сильно изогнут — именно, когда его можно взаимно-однозначно*) спроектировать на выпуклый контур, лежащий в некоторой плоскости. Тогда из математической теории следует, что существует одна и только одна минимальная поверхность, затягивающая данный контур. Когда этот контур плоский, «теорема существования и единственности» представляется очевидной: контур можно затянуть куском плоскости, который он ограничивает, а любая другая стягивающая его поверхность будет большей площади (рис. 2).

Разные пленки на одном контуре

Если не ограничиваться простейшими контурами, описанными в предыдущем разделе, то теорема единственности перестает быть верной: на один и тот же контур иногда можно натянуть две совсем разные минимальные поверхности. Несложный пример показан на рисунке 3; этот пример легко воспроизводится с мыльными пленками. Обратите внимание на то, что контур на рисунке 6 нельзя «хорошо» спроектировать ни на какую плоскость: возникают «двойные точки» (как на рисунке) или целые отрезки вырождаются в одну точку.

Задача 1. Придумайте другие контуры, на которые натягиваются несколько минимальных поверхностей. Может ли таких поверхностей быть больше двух?

Если сильно запутать контур (например, заузлить его), то не только может нарушиться единственность пленки, но и сама ее структура может усложниться. Именно, в общем случае «почти наверняка» появляются *особые точки* (или *сингулярности*) — такие точки, в окрестности которых пленка уже не устроена, как (изогнутый) диск, а имеет более сложную, ветвящуюся структуру. Это проще всего увидеть, если использовать

Контуры с ветвлением

Простейший такой контур показан на рисунке 4. Стягивающая его минимальная поверхность имеет целый отрезок особых точек, от которого поверхность разветвляется в три плоских листа, образующие между собой углы в 120°. Причины этого эффекта вам станут понятнее, если вы решите следующую задачу.

Задача 2. а) Соедините три точки отрезками так, чтобы сумма их длин была минимальной. Сделайте то же б) для вершин квадрата, в) для вершин произвольного четырехугольника.

Ответы на эту задачу показаны на рисунке 5, а куски аналогичных минимальных поверхностей — на рисунке 6. Обратите внимание на то, что в ответах все углы равны 120°, и на вновь возникшую неоднозначность поверхности (рис. 6,*б* и *в*).

Интересно, что попытки построить минимальную пленку, у которой на каком-либо сингулярном отрезке сходилось бы число листов, большее, чем три, терпят неудачу. Это объясняется простым геометрическим обстоятельством. Допустим, что на каком-то отрезке сошлись четыре листа пленки. Рассмотрим сечение поверхности, ортогональное этому

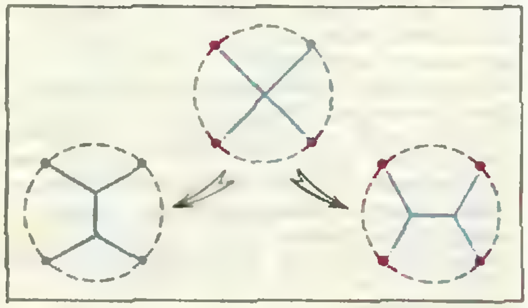


Рис. 7.

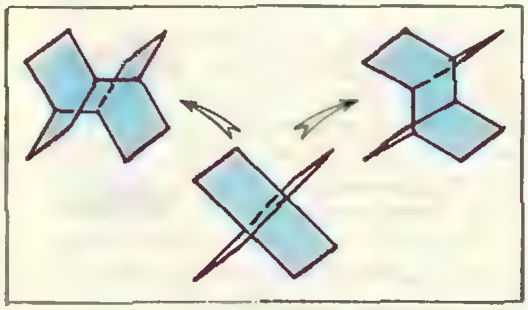


Рис. 8.

---

*) То есть так, что никакие две различные точки контура не попадут на одну и ту же точку плоскости.

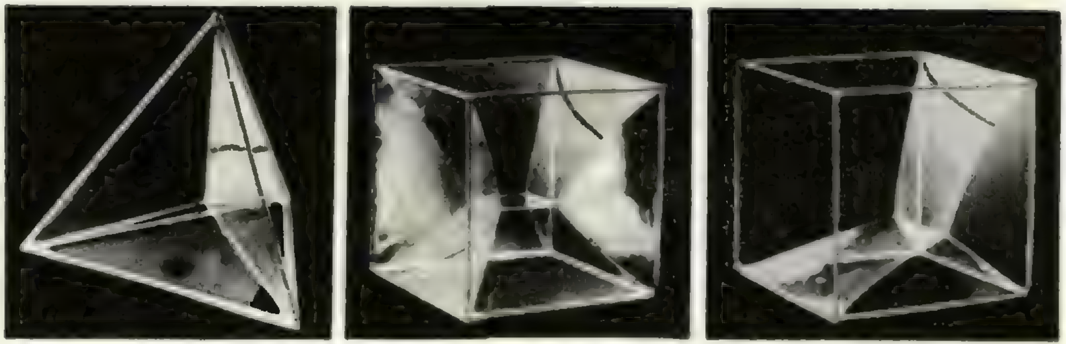


Рис. 9. а. б. в.

сингулярному отрезку (рис. 7). Тогда четырехкратная особая точка (то есть такая, в которой сошлись 4 листа) распадается в объединение двух трехкратных точек, поскольку длина ломаной, состоящей из двух диагоналей, больше, чем длина каждой из двух других ломаных, показанных на рисунке 7 (в чем вы убедились, если решили задачу 2). На рисунке 8 этот процесс распадения показан в непосредственной близости от сечения пленки.

Ясно, что изображенная перестройка пленки уменьшает ее полную площадь по сравнению с площадью исходной пленки. Минимальная поверхность находится в устойчивом равновесии, в частности, малые возмущения пленки лишь увеличивают ее площадь, поэтому равнодействующая всех сил, действующая на каждую точку пленки, должна быть равна нулю. Это относится и к особым точкам. В положении равновесия в каждой такой точке сходятся ровно три листа, поэтому сумма трех сил, действующая в направлении листов, должна быть равна нулю. Отсюда следует, что листы должны сходиться на их общем сингулярном отрезке под углами в 120°. Аналогичные рассуждения показывают, что если на общем ребре сходится больше четырех листов, то поверхность, стремясь занять положение с минимальной площадью, перестраивается и сингулярное ребро распадается в несколько трехкратных ребер.

Задача 3. Нарисуйте ломаную минимальной длины, соединяющую пять вершин правильного пятиугольника. Сколько различных таких ломаных существует?

Другие красивые ветвящиеся пленки получаются, если пленкой стянуть каркас тетраэдра или куба (рис. 9). Обратите внимание на особые точки, в которых сходятся несколько сингулярных ребер.

Задача 4. а) Найдите все углы между плоскостями минимальной поверхности, стягивающей ребра правильного тетраэдра (рис. 9, *а*). б) При каком значении x стороны центрального квадрата стягивающая поверхность куба будет минимальной (рис. 9, *б*)?

Задача 5*. Могут ли в особой точке минимальной поверхности сходиться не 4 особых линии, а три? А пять?

Незамкнутые контуры

Важной характеристикой поверхности является ее взаимодействие с граничным контуром. Различные типы такого взаимодействия изучаются методами топологии. Из физических свойств минимальных поверхностей следует, что в них не должно быть «дырок», проколов, не взаимодействующих с границей пленки. В противном случае такая «дырка» под действием сил поверхностного

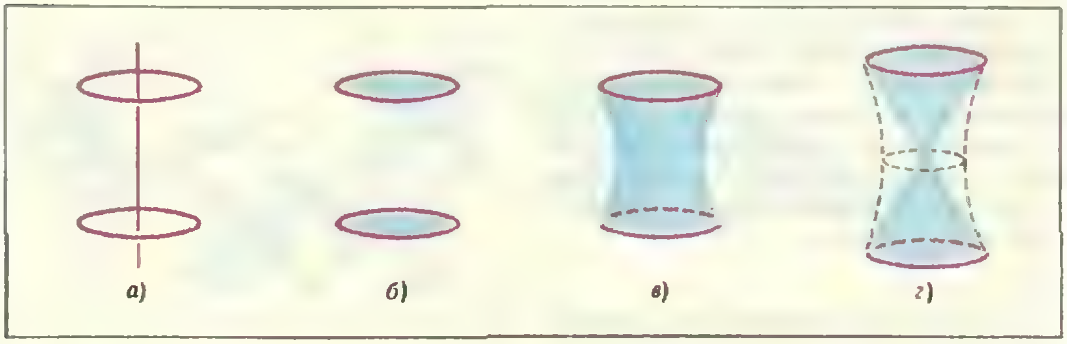


Рис. 10.

натяжения будет расширяться до тех пор, пока вся пленка (или ее часть) не стянется (схлопнется) на граничный контур. Это свойство легко проверить в реальном опыте, быстро проколов мыльную пленку достаточно толстой проволокой или стержнем. Указанное свойство мыльных пленок кладется в основу математического определения границы пленки и свойства пленки затягивать, заклеивать граничный контур.

Конечно, эта математическая идеализация — упрощение реальности, поскольку существуют (и устойчивы) физические минимальные поверхности, повисающие на проволочном контуре, однако оставляющие некоторые участки этого контура свободными. Другими словами, физическая пленка может быть устойчивой, и в то же время крепиться не ко всему контуру, а лишь к его части или же повисать на незамкнутом контуре. Это объясняется тем, что реальная проволока имеет конечную толщину, что стабилизирует (в некоторых случаях) математически невозможную ситуацию (рис. 11, *а*). Для этого проволока должна быть достаточно толстой по сравнению с размерами минимальной поверхности.

Другой пример показан на рисунке 11, *б* — здесь контур не является замкнутой кривой, поскольку имеет два конца и может быть распрямлен в отрезок. С математической точки зрения не существует минимальной поверхности, затягивающей отрезок, вложенный без самопересечений в трехмерное пространство. Это объясняется тем, что отрезок не создает «цикла», то есть не образует никакой «дырки», а именно дырки вызывают появление мыльных пленок, затягивающих их (при извлечении контура из воды).

Несколько контуров

Рассмотрим теперь свойства минимальных пленок, граница которых состоит из нескольких окружностей, например из двух. В качестве простейшего примера возьмем две окружности, расположенные в двух параллельных плоскостях, ортого-

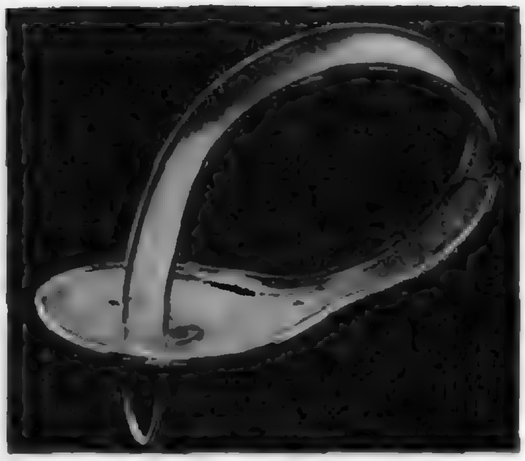


Рис. 11,а.

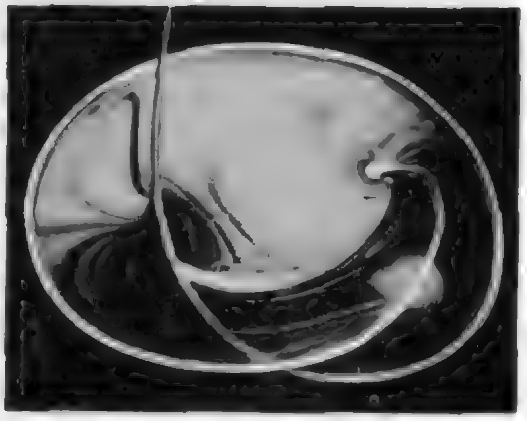


Рис. 11,б.

нальных вертикальной оси, и имеющие свои центры на оси (рис. 10, *а*). Если окружности значительно удалены друг от друга, то минимальная пленка, затягивающая их, совпадает с двумя плоскими дисками, расположенными в параллельных плоскостях (рис. 10, *б*). Если мы начнем сближать окружности (оставляя их в параллельных плоскостях), то, начиная с некоторого момента, появится еще одна минимальная поверхность, заклеивающая эти окружности и называемая *катеноидом* (рис. 10, *в*).

Эта поверхность имеет много интересных свойств, в частности, ее можно получить, рассматривая поверхность, образованную вращением вокруг вертикальной оси так называемой цепной линии. Для построения этой линии рассмотрим на вертикальной плоскости две точки; пусть в них закреплена тяжелая цепь, свободно провисающая под действием силы тяжести, направленной вниз.

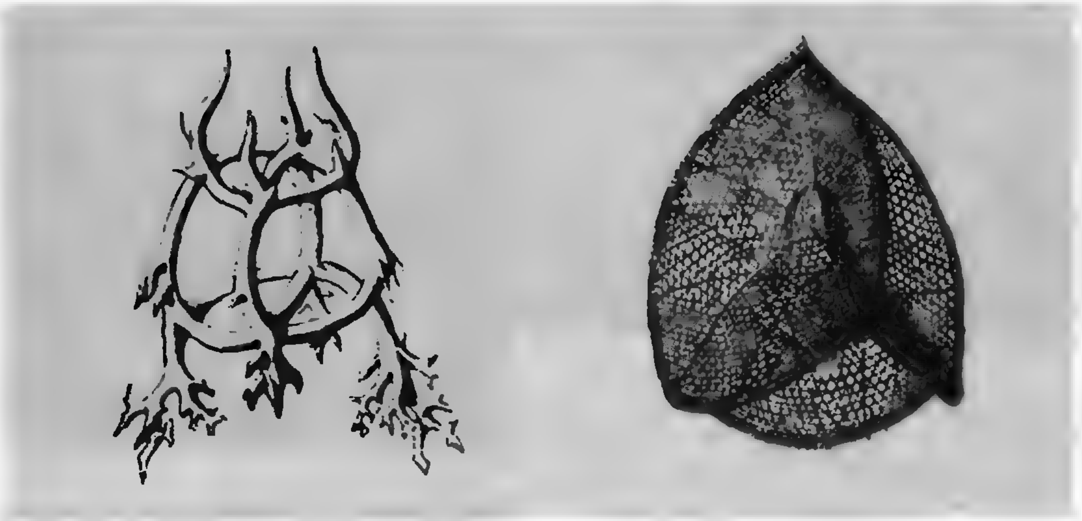


Рис. 12.

Провисшая цепь образует некоторую траекторию, соединяющую две точки подвеса и называемую *цепной линией*. Вращая ее вокруг горизонтальной оси, мы и получим катеноид. Чтобы совместить его с поверхностью, описанной выше, нужно просто развернуть его, направив раструбом вверх.

Отметим, что конус с вершиной в начале координат не будет минимальной поверхностью. На рисунке 10, *г* показано, как деформируется конус, стремясь занять положение с наименьшей площадью (при фиксированной границе). Конфигурация, соответствующая этому положению, и есть катеноид. Это обстоятельство связано с эффектами, с которыми мы уже познакомились при изучении распада четырехкратных точек в сумму трехкратных точек. В самом деле, рисунок 7 можно рассматривать как процесс превращения «одномерного конуса», образованного двумя пересекающимися отрезками (диаметрами пунктирной окружности), в более сложную кривую с двумя трехкратными особенностями. В принципе, аналогичное явление происходит и в случае обычного двумерного конуса, но только здесь его вершина (особая точка) раздувается в целую окружность — горловину катеноида. В обоих случаях процесс деформации пленки (одномерной кривой) уменьшает ее первоначальную площадь (или длину в одномерном случае) и заставляет поверхность (кривую) занять оптимальное положение, характеризующееся наименьшей площадью (длиной).

Минимальные поверхности в живой природе

Оказывается, минимальные пленки широко распространены в природе как наиболее экономные поверхности, формирующие скелеты некоторых живых организмов. Наиболее эффектный пример — скелеты радиолярий, микроскопических морских животных, имеющих самые разнообразные и экзотические формы. По-видимому, первым, кто обратил внимание на то, что поверхностное натяжение играет существенную роль в создании формы этих существ, был английский ученый D'Arcy Wentworth Tompson, автор книги «Рост и форма». Радиолярии состоят из небольших комочков протоплазмы, заключенных в пенообразные формы, наподобие мыльных пузырей и пленок. Поскольку эти организмы достаточно сложны, то минимальные поверхности, входящие в них, имеют, вообще говоря, много точек ветвления и ребер ветвления, на которых и концентрируется основная масса жидкости, входящей в состав организма. Эта концентрация жидкости вдоль ребер ветвления и около особых точек хорошо видна на реальных мыльных пленках: жидкость стекает с мыльной пленки свободно до тех пор, пока не

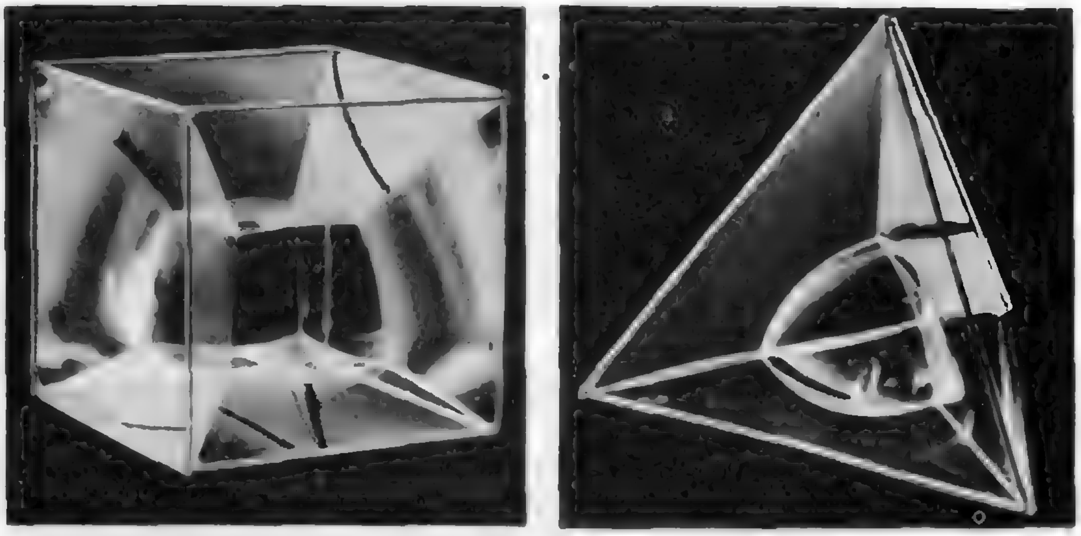


Рис. 13.

встречает ребро, на котором сходятся три листа пленки. Здесь жидкость тормозится и оседает, образуя водяные отрезки, зрительно выявляющие особые ребра минимальной поверхности. Этот же процесс фактически происходит и у радиолярий. Концентрация жидкости вдоль ребер ветвления приводит к тому, что твердые фракции морской воды и соли оседают вдоль этих ребер и постепенно образуют твердый скелет животного. Наглядно геометрию этого скелета можно представить, если в массе мыльной пены обратить внимание на ребра ветвления, то есть на отрезки, по которым стыкуются разные пузыри. Эти отрезки соединяются друг с другом (иногда сложным образом) и образуют «жидкостный костяк» пены. После гибели животного мягкие ткани постепенно исчезают и остается твердый скелет, образовавшийся описанным образом.

Итак, он представляет собой не что иное, как наглядное застывшее изображение системы ребер ветвления и особых точек, возникающих в сложной минимальной поверхности, включающей в себя и замкнутые объемы, ограниченные подобием мыльных пузырей. Кроме того, в формировании твердого скелета радиолярии определенную роль играют и стенки клеток, также аккумулирующие в себе соли морской воды. На рисунке 12 показаны два скелета радиолярий.

На рисунке 13 изображены две минимальные поверхности с мыльными пузырями, натянутые на контуры, образованные системой ребер обычного тетраэдра и куба. Сходство форм на рисунках 12*) и 13 поразительно. Отчетливо видно, что скелеты радиолярий довольно точно воспроизводят картину ребер ветвления минимальных поверхностей.

Важна роль минимальной поверхностей в химии, где поверхностные взаимодействия на границах различных сред определяют характер и скорость многих химических превращений. Примерами минимальных поверхностей могут служить всем нам хорошо известные мембраны — это и барабанная перепонка в нашем ухе; это мембраны, служащие границами живых клеток; это мембраны в живых организмах, отделяющие один орган от другого и т. п.

Эта интереснейшая тематика привлекает самых разных специалистов по биологии, химии, физики. Как мы видели, с минимальными поверхностями связан и целый ряд интересных математических проблем. Их корректная постановка и исследование позволяют лучше понять этот удивительный (хотя и простой с виду) природный феномен.

---

*) Рисунок взят из книги: Ernst Haeckel, "Report on the scientific Results of the Voyage of the HMS Challenger during the Years 1873—1876"

Очерк о цепных дробях

Кандидат физико-математических наук
Ю. В. НЕСТЕРЕНКО,

доктор физико-математических наук
Е. М. НИКИШИН

В первой части этой статьи мы научились раскладывать числа в цепные дроби:

$$\alpha = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_k} + \ldots,$$

познакомились с основами общей теории таких разложений и увидели, какую пользу можно извлечь из этого для практики. Приложения теории, однако, не исчерпываются календарем и зубчатыми передачами, о которых уже говорилось — вскоре мы в этом убедимся.

Раскладывая в цепную дробь квадратный корень $\sqrt{2}$ (пример 1), мы получили периодическую цепную дробь. С другой стороны, мы обнаружили (пример 2), что периодическая цепная дробь $[2; \overline{1, 1, 1, 4}]$ «сворачивается» в число, являющееся квадратным корнем: ее значение (то есть предел $\lim\limits_{k\to\infty} \pi_k$ ее подходящих дробей π_k) оказалось равным $\sqrt{7}$. Случайно ли это?

Квадратичные иррациональности

Иррациональные числа, являющиеся корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами, носят название *квадратичных иррациональностей.* Все они имеют вид

$$\pm \frac{P + \sqrt{D}}{Q},$$

где P, Q, D — целые числа и D не равно квадрату целого числа. Таковы, например, названные выше числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, а также $1 + \sqrt{2}$, $(5 - \sqrt{7})/2$. В 1770 году Лагранж доказал следующую теорему.

Теорема. *Квадратичные иррациональности, и только они, имеют периодические непрерывные дроби.*

При этом период может начинаться с некоторого места разложения.

Тот факт, что значение любой периодической непрерывной дроби есть квадратичная иррациональность, доказывается так же, как и в примере 2. Доказательство обратного утверждения, то есть теоремы Лагранжа, значительно сложнее.

Мы его установим только в одном важном частном случае — для приведенных иррациональностей. Квадратичная иррациональность α называется *приведенной,* если $\alpha > 1$, а второй корень α' квадратного уравнения для α (так называемое *сопряженное* с α число) удовлетворяет неравенствам

$$-1 < \alpha' < 0.$$

Задачи

10. *Если α — приведенная квадратичная иррациональность, то*

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}, \tag{3}$$

где

$$0 < P < \sqrt{D}. \tag{4}$$

При этом $P^2 - D$ делится на Q.

11. *Если α — приведенная квадратичная иррациональность и*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1},$$

где $a_0 = [\alpha]$, то α_1 — также приведенная квадратичная иррациональность.

Из задачи 11 следует, что если α — приведенное число, то все числа α_n в последовательности, определяемой равенствами

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}, \quad a_n = [\alpha_n],$$

также будут приведенными. При этом все они, как легко проверить, будут представляться в виде (3) с одним и тем же D. Из неравенств (4) теперь следует, что в последовательности будет только конечное число различных чисел, то есть для некоторых номеров n, m имеет

Окончание. Начало см. в «Кванте», 1983, № 5.

место равенство

$$\alpha_n=\alpha_m.$$

В силу этого можно утверждать, что $\alpha_{n+1}=\alpha_{m+1}$, $\alpha_{n+2}=\alpha_{m+2}$ и так далее. Последовательность $\{\alpha_n\}$ оказалась периодической. Для случая приведенных иррациональностей теорема доказана.

Если α — произвольная квадратичная иррациональность, то в последовательности $\{\alpha_n\}$ обязательно встретится приведенное число. Из этого факта доказательство теоремы в общем случае следует без труда. А для того чтобы доказать этот факт, нужно воспользоваться явным выражением α_n через α (задача 4[*])) и через числители и знаменатели подходящих дробей для α, а также тем фактом, что подходящие дроби числа α стремятся к α (задача 5)[*]). Заинтересованный читатель сможет довести доказательство до конца, пользуясь этими указаниями.

Можно доказать, что период в цепной дроби для приведенных квадратичных иррациональностей начинается с самого начала разложения, то есть цепные дроби в этом случае будут, как говорят, *чисто периодическими*. Верно и обратное утверждение. Этот факт впервые был доказан в 1828 году французским математиком (тогда еще школьником!) Эваристом Галуа.

Периоды цепных дробей квадратичных иррациональностей

Свойства периодов, которые мы сейчас установим, не только очень красивы сами по себе, но оказываются полезными для решения некоторых уравнений.

Рассмотрим число $\alpha=\frac{\sqrt{7}+2}{3}$. Легко видеть, что оно приведенное, а после коротких вычислений получается следующее разложение в чисто периодическую цепную дробь с периодом длины 4:

$$\alpha=[\overline{1;\ 1,\ 1,\ 4}].$$

Сопряженное с α число α' равно $\frac{-\sqrt{7}+2}{3}$. Разложим в цепную дробь число $-\frac{1}{\alpha'}=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\sqrt{7}+2$. Получится

$$-\frac{1}{\alpha'}=[\overline{4;\ 1,\ 1,\ 1}]$$

— период нашей дроби «перевернулся»! Случайно ли это?

Задача 12. *Если квадратичная иррациональность α представляется чисто периодической цепной дробью*

$$[\overline{a_0;\ a_1,\ \dots,\ a_n}],$$

то число $-\frac{1}{\alpha'}$, где α' сопряжено с α) представляется чисто периодической цепной дробью

$$[\overline{a_n;\ a_{n-1},\ \dots,\ a_0}]$$

с периодом, равным периоду для α, но записанным в обратном порядке.

Если D — натуральное число, не являющееся точным квадратом и $a_0=[\sqrt{D}]$, то $\alpha=a_0+\sqrt{D}$ будет числом приведенным ($\alpha'=a_0-\sqrt{D}$ и $-1<a_0-\sqrt{D}<0$). Следовательно,

$$\sqrt{D}+a_0=[\overline{2a_0;\ a_1,\ \dots,\ a_n}]$$

и

$$\sqrt{D}=[a_0;\ \overline{a_1,\ \dots,\ a_n,\ 2a_0}]\ . \qquad (5)$$

С помощью утверждения задачи 12 читатель легко докажет следующий факт.

Задача 13. *Если D не является точным квадратом, то цепная дробь числа D имеет вид (5), где $a_0=[\sqrt{D}]$ и часть $a_1, a_2, \dots, a_n$ периода симметрична.*

Уравнение Пелля

В V веке до нашей эры великий греческий ученый Архимед предложил свою знаменитую «задачу о быках». Ее формулировку он завершил следующими вескими словами:

> «Если ты это найдешь, чужестранец, умом пораскинув,
> И сможешь точно назвать каждого стада число,
> То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
> Что в этой мудрости ты все до конца превзошел.»

Мы не будем приводить здесь условие самой задачи (текст занимает больше страницы). Достаточно сказать, что для ее решения необходимо ввести 10 переменных, связанных 7 линейными уравнениями и двумя уравнениями второй степени. После преобразований и исключения переменных, задача сводится к решению в целых числах уравнения

$$x^2-4729494y^2=1. \qquad (*)$$

---

[*] См. первую часть статьи в «Кванте», 1983, № 5.

А это оказалось не под силу Архимеду и его современникам...

Вообще же уравнение вида

$$x^2-Dy^2=1, \qquad (6)$$

где D — натуральное число, не являющееся квадратом *), называется уравнением Пелля; разумеется, это *диофантово уравнение*, то есть алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами, решение которого ищется в области целых чисел.

Как решить уравнение Пелля?

Первое, что приходит в голову, это прямой перебор: поочередно подставлять числа $x=1$, 2, 3, ... в формулу $y=\sqrt{(x^2-1)/D}$, пока подкоренное выражение не окажется точным квадратом. Бесперспективность такого подхода показывает следующий замечательный пример. Уравнение

$$x^2-991y^2=1$$

имеет решение в целых числах, однако среди его решений (x_0, y_0) наименьшее (!) x_0 равно

379 516 400 906 811 930 638 014 896 080.

Даже на самой мощной ЭВМ до него не добраться простым перебором!

Оказывается, непрерывные дроби дают очень удобный инструмент для решения уравнения Пелля. Опишем алгоритм (без доказательства) решения.

При каждом натуральном D, отличном от квадрата целого числа, уравнение (6) имеет бесконечное число решений в целых положительных числах x, y. Все они могут быть найдены по формуле

$$x+y\sqrt{D} = (x_0+y_0\sqrt{D})^k, \quad k=1, 2, \ldots,$$

где x_0, y_0 — решение с наименьшим значением y. Для нахождения наименьшего решения (x_0, y_0) нужно разложить в цепную дробь число $\sqrt{D}$. Если

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_n, 2a_0}]$$

и $\frac{p_n}{q_n}$ — подходящая дробь числа $\sqrt{D}$ с номером n, то

$$p_n^2-Dq_n^2=(-1)^{n-1}, \qquad (7)$$

и если n — нечетно (длина периода четна), то

$$p_n=x_0, \quad q_n=y_0$$

будет наименьшим решением уравнения Пелля. Если же период нечетен (n — четно), то наименьшее решение находится по формуле

$$x_0+y_0\sqrt{D}=(p_n+q_n\sqrt{D})^2.$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$x^2-7y^2=1.$$

Из разложения $\sqrt{7}=[2; \overline{1, 1, 1, 4}]$ находим

$$\frac{p_3}{q_3} = 2+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}=\frac{8}{3}.$$

Так как длина периода четна, то наименьшее решение уравнения $x_0=8$, $y_0=3$, а любое решение в натуральных числах получается по формуле

$$x+y\sqrt{7}=(8+3\sqrt{7})^k, \quad k=1, 2, \ldots$$

При $k=2$ имеем $x=127$, $y=48$.

Пример 4. Решим уравнение

$$x^2-13y^2=1.$$

Раскладывая $\sqrt{13}$ в цепную дробь, получаем $\sqrt{13}=[3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$ и $\frac{p_4}{q_4}=3+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}=\frac{18}{5}$.

Длина периода нечетна, поэтому наименьшее решение находим по формуле

$$x_0+y_0\sqrt{13}= =(18+5\sqrt{13})^2=649+180\sqrt{13},$$

то есть $x_0=649$, $y_0=180$. Общее решение имеет вид

$$x+y\sqrt{13}=(649+180\sqrt{13})^k, \quad k=1, 2, \ldots$$

Задача 14. *Найти наименьшее решение уравнения*

$$x^2-61y^2=1.$$

Ответ: $y_0=226\,153\,980$.

Отметим, что имя английского математика Пелля (1610—1685) связывается с уравнением (6) по ошибке, с легкой руки Л. Эйлера. Раньше Пелля это уравнение рассматривали его соотечественники Дж. Валлис и У. Бронкер, а также француз П. Ферма. Что же касается архимедовской задачи о быках, ее решили лишь в 1880 году. Наименьшее решение y уравнения (*) содержит 41 цифру, а общее число быков в задаче Архимеда имеет порядок $10^{206\,545}$! *)

---

*) Если $D=m^2$, $m \in N$, то уравнение (6) не имеет целых решений — подумайте, почему.

*) Нет, это не факториал, а восклицательный знак.

Уравнение вида $x^2+y^2=p$

Можно доказать, что *если p — простое нечетное число вида $4k+1$, то период непрерывной дроби для $\sqrt{p}$ всегда нечетен.* Из задачи 13 тогда следует, что разложение имеет вид

$$\sqrt{p}=[a_0;\ \overline{a_1,\ \ldots,\ a_m\ .\ a_m,\ \ldots,\ a_1,\ 2a_0}].$$

Обозначим через α_{m+1} число, непрерывная дробь которого имеет вид

$$\alpha_{m+1}=[\overline{a_m;\ a_{m-1},\ \ldots,\ a_1,\ 2a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m}].$$

Так как дробь чисто периодическая, то α_{m+1} — приведенное число и в силу задачи 10

$$\alpha_{m+1}=\frac{A+\sqrt{p}}{B},$$

где $A>0$, $B>0$. Из утверждения задачи 3 следует, что $-\frac{1}{\alpha'_{m+1}}$ имеет в точности такое же разложение в цепную дробь, как и α_{m+1}. А из единственности цепной дроби следует, что

$$\alpha_{m+1}=-\frac{1}{\alpha'_{m+1}}$$

или $\alpha_{m+1}\cdot\alpha'_{m+1}=-1$. Так как $\alpha'_{m+1}=\frac{A-\sqrt{p}}{B}$, то $\frac{A^2-p}{B^2}=-1$ или $A^2+B^2=p$.

Указанные рассуждения дают алгоритм решения в натуральных числах уравнения

$$x^2+y^2=p. \qquad (8)$$

Можно доказать, что *это решение (с точностью до перестановки x и y) единственно и что для простых чисел p вида $4k+3$ уравнение (8) решений в целых числах не имеет.*

Пример 5. Решить в целых числах уравнение

$$x^2+y^2=1009.$$

Разложение числа $\sqrt{1009}$ в цепную дробь имеет вид $\sqrt{1009}=[31;\ \overline{1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 62}]$. При этом

$$\alpha_1=\frac{31+\sqrt{1009}}{48};\quad \alpha_2=\frac{17+\sqrt{1009}}{48};$$

$$\alpha_3=\frac{28+\sqrt{1009}}{15}.$$

Пара чисел $x=28$, $y=15$ есть искомое решение уравнения. Описанный здесь способ решения уравнения (8) принадлежит французскому математику А. Лежандру (1808 год).

Задача 15. *Решить в целых числах уравнение $x^2+y^2=1129$.*

Уравнение вида $x^2-Dy^2=-1$

Если длина периода $n+1$ цепной дроби для $\sqrt{D}$ нечетна, то из равенства (7) следует, что числа

$$x_0=p_n,\ y_0=q_n$$

будут решениями диофантова уравнения

$$x^2-Dy^2=-1. \qquad (9)$$

Все решения этого уравнения могут быть получены с помощью формулы

$$x+y\sqrt{D}=(x_0+y_0\sqrt{D})^{2k+1},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Например, все решения уравнения

$$x^2-13y^2=-1$$

задаются формулой

$$x+y\sqrt{13}=(18+5\sqrt{13})^{2k+1},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Можно доказать, что *если длина периода разложения $\sqrt{D}$ в цепную дробь четна, то уравнение (9) не имеет решений в целых числах.*

Длина периода цепной дроби числа $\sqrt{D}$

Скорость работы алгоритмов, описанных в последних разделах, зависит, естественно, от длины периода цепной дроби $\sqrt{D}$. О поведении этой величины в зависимости от D в настоящее время известно очень немного. Длина периода ведет себя очень причудливо. Так, например, для $D=986\,045=5\cdot199\cdot991$ разложение

$$\sqrt{986045}=$$

$$=[992,\ \overline{1,\ 495,\ 2,\ 495,\ 1,\ 1984}]$$

имеет период, длина которого равна 6. В то же время длина периода разложения $\sqrt{20\,989}$ равна 205.

Известно, что для всех чисел D длина периода не превосходит

$$4\sqrt{D}\ \ln D.$$

С другой стороны, можно доказать, что у чисел $D=5^{2k+1}$ период не меньше, чем

$$\frac{1}{3}\sqrt{D}\,(\ln D)^{-1},$$

и, значит, стремительно растет с ростом k. Наблюдения над большим численным материалом подтверждают гипотезу, что существует бесконечное множество чисел D, не делящихся на квадрат простого числа, у которых длина периода цепной дроби $\sqrt{D}$ превышает $D^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ для любого фиксированного положительного ε.

Использованный выше результат, что период цепной дроби $\sqrt{p}$ для простых p вида $4k+1$ имеет нечетную длину был доказан в 1785 году Лежандром. Позже немецкий математик Дирихле установил подобную теорему для чисел $D=p\cdot q$, где p, q — простые числа с определенными условиями. Лишь недавно, в 1980 году, американский математик Лагариас нашел алгоритм, позволяющий определять разрешимость в целых числах уравнения (9) или, что то же самое, нечетность длины периода цепной дроби для $\sqrt{D}$, примерно за $(\log D)^{5+\varepsilon}$ операций

Цепные дроби для конкретных чисел

Мы видели выше, что квадратичные иррациональности и только они раскладываются в периодические цепные дроби. Таким образом, имеется определенная ясность в структуре цепных дробей квадратических иррациональностей. Естественно спросить, какие классы других иррациональных чисел обладают столь же хорошо обозримыми разложениями в цепные дроби. Удовлетворительного ответа на этот вопрос нет.

Например, для числа $\sqrt[3]{2}$ до сих пор неизвестно, будут ли ограничены или нет неполные частные a_0, a_1, a_2, ..., a_k, ... его разложения в цепную дробь

$$\sqrt[3]{2}=a_0+\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\dots$$

На ЭВМ были расчитаны первые несколько тысяч чисел a_0, a_1, ... Вот самые первые из них:

$\sqrt[3]{2}=[1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, 1, 15, 3, 1, 4, 534, 1, 1, 5, 1, 1, 121, 1, 2, 2, 4, 10, 3, 2, 2, 41, 1, 1, 1, 3, 7, 2, 2, 9, 4, 1, 3, 7, 6, 1, 1, 2, 9, 2, 3, 3, 1, 1, 69, 1, 12, ...]$

Из этого разложения видно, что последовательность a_0, a_1, ... ведет себя как ограниченная последовательность и лишь «выбросы» (например, 534, 121) в отдельных местах нарушают эту картину.

Более того, до сих пор не известно ни одного алгебраического числа, не являющегося квадратичной иррациональностью, о цепной дроби которого имелась бы достаточная информация.

Особый интерес вызывают разложения в цепную дробь некоторых классических постоянных. Число таких постоянных, для которых известно разложение в цепную дробь, весьма невелико.

Л. Эйлер нашел разложение числа e в цепную дробь

$$e=2+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|4}+\dots \tag{10}$$

где закон образования неполных частных a_0, a_1, ... таков:

$$a_0=2,\ a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=1,\ a_4=1,\ a_5=4,\ \dots,$$

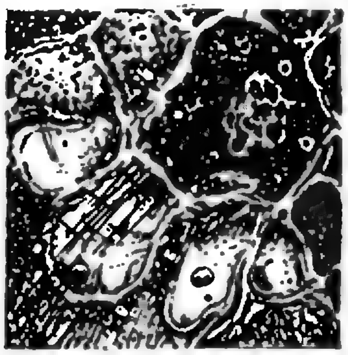
$$a_{3m}=a_{3m-2}=1,\ a_{3m-1}=2m,\quad m=1, 2, \dots$$

Напомним, что

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=2{,}718281828459045\dots$$

Вывод соотношения (10) хотя и нетруден, но не является элементарным. Отметим, что такое же «хорошее» разложение в цепную дробь для числа π никому не известно.

Мы рассказали здесь лишь о небольшой части задач, в которых встречаются цепные дроби. На самом деле круг их применения, в особенности когда оперируют аналогичным образом с функциональными дробями, весьма широк. Это богатая и сложная область математики, весьма далекая от своего завершения.



Левая спираль ДНК

Доктор физико-математических наук
М. Д. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ

Тридцать лет прошло с тех пор, когда в 1953 году Дж. Уотсон и Ф. Крик предложили свою модель строения молекулы ДНК. И все это время двойная спираль ДНК привлекала большое внимание физиков и математиков, химиков и биологов, медиков и фармацевтов. Такой интерес вполне понятен — ведь в полимерной молекуле ДНК в виде определенной последовательности мономерных звеньев (нуклеотидов) всего лишь четырех сортов заключена вся генетическая информация, содержится план строения целого живого организма.

Напомним, что, согласно модели Уотсона—Крика, молекула ДНК представляет собой две полимерные цепочки, закрученные в двойную спираль, вернее — в винтовую линию. Характерно, что закручивание цепочек — правое, то есть такое же, как у обычных шурупов или винтов.

В течение многих лет ученые были уверены в том, что лишь такую структуру может иметь ДНК и в клетке, и в пробирке при обычных условиях. Это подтверждалось многочисленными экспериментами, проводящимися самыми разными физическими методами. Однако в 1979 году группа американских ученых из Массачусетсского технологического института совершенно неожиданно обнаружила новую форму молекулы ДНК. По-видимому, это было наиболее важным открытием в области изучения структуры ДНК со времен работы Уотсона и Крика.

Ученые работали с очень короткими молекулами, состоящими всего из шести нуклеотидов (поэтому их называют гексануклеотидами) двух типов — цитозинового (Ц) и гуанинового (Г):

Ц Г Ц Г Ц Г
Г Ц Г Ц Г Ц,

и им удалось впервые получить из молекул ДНК настоящие кристаллы.

Известно, что сейчас самым точным методом исследования внутреннего строения кристаллов является рентгеноструктурный анализ. Метод основан на явлении дифракции волн. Анализируя дифракционную картину, полученную от кристалла, можно узнать о нем все — каково расположение молекул в кристалле и как «уложены» атомы внутри молекул.

Каким же было удивление американских ученых, когда после получения всех необходимых данных и проведения на ЭВМ громоздких расчетов они нашли, наконец, структуру гексануклеотида. Оказалось, что первая же структура, определенная методом рентгеноструктурного анализа, очень сильно отличается от модели Уотсона—Крика. И прежде всего — направлением закручивания цепочек в спираль. У гексануклеотида оно не правое, а левое! Есть и другие отличия этой новой формы, которую назвали Z-формой, от классической, называемой теперь В-формой.

Так что же, модель Уотсона—Крика неверна?! Нет, такого категоричного заявления из открытия американских ученых не последовало. Исследования других коротких молекул ДНК, проведенные в последние годы, показали, что в Z-форме могут находиться только такие молекулы, в каждой из комплементарных цепей которых строго чередуются нуклеотиды типа Ц и Г. Все остальные произвольные последователь-

(Окончание см. на с. 38)

Неоновая лампочка

Кандидат физико-математических наук А. А. БОРОВОЙ

Один из довольно распространенных элементов многих радиосхем — это неоновая лампочка. Она применяется, в основном, в качестве какого-либо индикатора, например индикатора настройки колебательного контура в резонанс.

На рисунке 1 изображены внешний вид и условное схематичное обозначение лампочки типа ТН-0,2-2*). В стеклянный баллон, заполненный неоном, впаяны два электрода — один в виде пластинки, другой в виде проволочки. Когда между электродами создается соответствующее напряжение, в газе возникает тлеющий разряд, который сопровождается свечением красно-оранжевого цвета.

Несмотря на простоту устройства, неоновая лампочка позволяет провести целый ряд интересных опытов и наблюдений. Лампочку можно приобрести в магазине радиотоваров или позаимствовать из пришедших в негодность приборов.

Немного о тлеющем разряде

Возьмите обычную пластмассовую расческу, несколько раз проведите ею по волосам, а затем прикоснитесь к цоколю лампочки. На короткое время между электродами вспыхнет огонек — это и есть тлеющий разряд. Так просто можно наблюдать явление, которое в свое время привлекло внимание многих физиков и немало их «помучило».

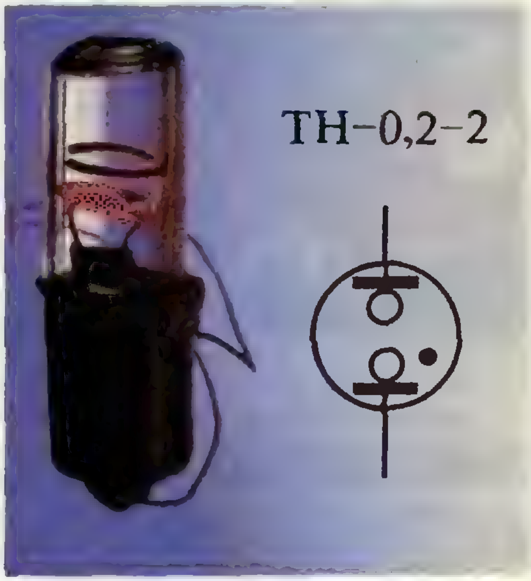


Рис. 1.

Его изучению помогло, в частности, изобретение в середине XIX века ртутного вакуумного насоса. На-

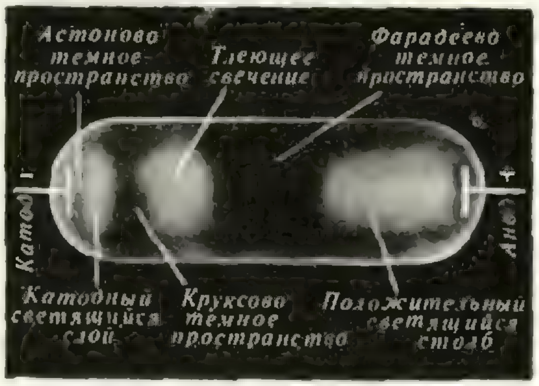

Астоново темное пространство
Тлеющее свечение
Фарадеево темное пространство
Катод
Анод
Катодный светящийся слой
Круксово темное пространство
Положительный светящийся столб

Рис. 2. Структура разряда довольно сложная. Если двигаться от катода к аноду, то на пути встретятся: небольшое по протяженности темное пространство Астона у самого катода; тонкий светящийся слой; более протяженное темное пространство Крукса; светящийся слой, то есть собственно тлеющий разряд; темное пространство Фарадея; положительно светящийся столб у анода. Из названий различных участков разряда следует, что его изучением занимались Фарадей, Крукс и Астон, а также Дж. Дж. Томсон, Ланжевен, Рентген и другие выдающиеся ученые. Изучение тлеющего разряда принесло немало открытий. Достаточно назвать открытие электрона, рентгеновских лучей, изотопов.

---

*) Буквы и цифры означают следующее: Т — тлеющий разряд; Н — неоновая лампочка; 0, 2 — наибольшее значение тока, измеренное в миллиамперах; 2 — конструктивный номер.

сос этот позволял понижать давление газа в откачиваемой трубке до нескольких миллиметров ртутного столба. Если при таком давлении к электродам, помещенным в газ, приложить напряжение порядка 1000 В, то в трубке вспыхнет тлеющий разряд (рис. 2).

Для того чтобы в газе протекал заметный электрический ток, необходимо, чтобы там существовало достаточное количество носителей тока — ионов и свободных электронов. Как они возникают?

Когда к электродам прикладывают напряжение, небольшое число заряженных частиц, всегда существующих в газе, ускоряются электрическим полем и образуют новые электроны и ионы. В основном, этот процесс идет двумя путями: во-первых, за счет ударов энергичных электронов по молекулам газа и их ионизации и, во-вторых, за счет того, что ускоренные ионы бомбардируют катод и выбивают из него новые свободные электроны.

Кроме ионизации молекул газа, в разряде происходят и другие процессы — возбуждение нейтральных молекул и рекомбинация ионов и электронов. Они и обусловливают свечение газа.

Тлеющий разряд может быть очень красивым. В этом легко убедиться, посмотрев на газосветные лампы реклам. В них неон горит ярким красно-оранжевым, а аргон синевато-зеленым светом.

Но вернемся к нашей лампочке. Оказывается, если начать сближать анод и катод в трубке, то сначала уменьшится, а затем и вовсе пропадет положительно светящийся столб. Именно в таком «укороченном» виде и существует разряд в лампочке.

Для того чтобы она зажигалась при не очень большом напряжении, электроды лампочки покрывают специальным составом, содержащим соли лития и бария. Под действием ионных ударов такой катод легко отдает электроны, и напряжение зажигания снижается. У лампочки ТН-0,2-2 оно составляет всего 80—90 В. Цвет ее свечения может быть красным или красновато-оранжевым, в зависимости от того, какие газы и в каком количестве добавлены к неону.

Не совсем обычные свойства неоновой лампочки

Теперь проведем опыт с целью исследования свойств самой лампочки. Для этого соберем схему, изображенную на рисунке 3. К точкам *A* и *B* подключим источник постоянного напряжения $U_{AB} \approx 100$ В. Это могут быть соединенные последовательно батарейки, промышленный или самодельный выпрямитель (последний можно собрать, например, по схеме, приведенной в книге В. О. Борисова «Юный радиолюбитель»). Вольтметр V имеет предел измерения 150 В, максимальное сопротивление резистора, выполняющего роль потенциометра, равно $R = 100$ кОм.

Будем постепенно увеличивать напряжение на лампочке. Сначала ток через нее практически не идет — мало носителей заряда. При некотором напряжении, называемом напряжением зажигания $U_{\text{зажиг}}$ (≈ 80 В), начинается активный процесс образования ионов и свободных электронов, и вспыхивает тлеющий разряд. В этот момент сопротивление лампочки уменьшается, а ток увеличивается. В результате напряжение на лампочке падает до так называемого рабочего напряжения $U_{\text{раб}}$ (≈ 60 В). Перемещая дальше ручку потенциометра, мы заметим, что показания вольтметра не изменяются, а ток увеличивается — все бо́льшая площадь электрода охватывается разрядом. При еще большем напряжении (больше 100 В) в лампочке вспыхнет дуговой разряд, и она выйдет из строя. Хорошо, что наша

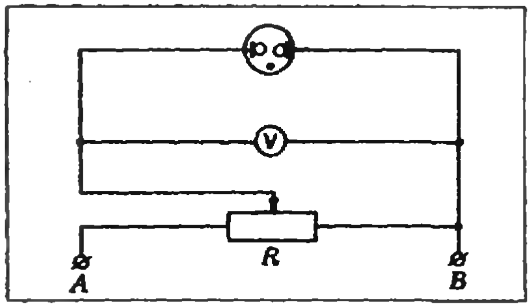


Рис. 3.

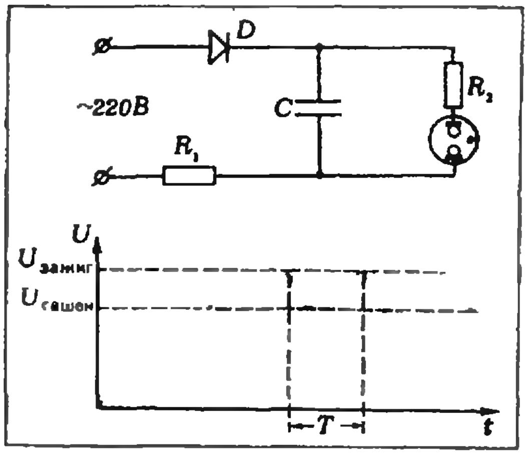


Рис. 4.

схема не позволяет продемонстрировать это.

Если проводить этот опыт в слабо освещенной комнате, а потом осветить лампочку ярким светом, например с помощью мощной лампы и линзы, фокусирующей световой пучок на лампочку, то напряжение зажигания заметно уменьшится. (Придется, правда, внимательно приглядываться, когда вспыхнет лампочка — на ярком свету ее свечение едва заметно.) Уменьшение напряжения происходит потому, что свет, падая на покрытые специальным составом электроды, выбивает из них электроны и тем самым способствует началу разряда. Таким образом, лампочка может работать как своеобразный светочувствительный элемент.

Читателям представляется возможность самостоятельно придумать схемы, использующие это свойство лампочки.

Мигающая лампочка

Тот факт, что напряжение зажигания разряда в неоновой лампочке выше рабочего напряжения горения, позволяет сделать с помощью лампочки простой генератор колебаний. Одна из возможных схем приведена на рисунке 4. В схеме используется конденсатор емкостью $C=1$ мкФ, рассчитанный на напряжение до 300 В; сопротивления резисторов равны соответственно $R_1=1$ кОм и $R_2=47$ кОм; диод D может быть любого типа, лишь бы его обратное напряжение было больше 350 В (в принципе, можно работать и с выпрямителем, упоминавшимся в предыдущем опыте).

Работает генератор следующим образом. В момент включения в сеть конденсатор начинает заряжаться через резистор с сопротивлением R_1. При этом лампочка не горит (ее сопротивление можно считать бесконечно большим). С течением времени напряжение на обкладках конденсатора увеличивается. Когда оно станет равным $U_{\text{зажиг}}$, лампочка вспыхнет, ее сопротивление резко уменьшится и конденсатор начнет разряжаться через лампочку и второй резистор. В нашей схеме процесс этот идет с бо́льшей скоростью, чем зарядка, и продолжается до тех пор, пока напряжение на лампочке не снизится до напряжения гашения разряда $U_{\text{гашен}}$ (≈ 60 В). Лампа потухнет, и цикл повторится снова. Если воспользоваться осциллографом, то на его экране мы сможем увидеть картину, подобную той, что изображена на рисунке 4.

Меняя величины емкости C и сопротивлений R_1 и R_2, можно получить разную продолжительность вспышки и разные значения периода колебаний T.

Описанный генератор (усовершенствованный самыми разными способами) можно использовать, скажем, для конструирования звукового генератора. Для этого параллельно лампочке через еще один конденсатор надо подключить телефон (например, ТОН-1). На таком приборе вы сможете, в частности, пронаблюдать и чувствительность неоновой лампочки к свету.

В заключение мы хотим посоветовать читателям, заинтересовавшимся опытами с неоновой лампочкой, познакомиться с книгой В. Ф. Шилова «Конструкции на неоновой лампе». В ней собраны десятки схем, доступных для выполнения школьникам-радиолюбителям.

Раскраска плоскости и теорема Ван дер Вардена о прогрессиях

С. Н. БЕСПАМЯТНЫХ

В этой заметке мы докажем следующее красивое обобщение результата задачи М750.

Теорема о раскраске. *Пусть каждая клетка бесконечного листа клетчатой бумаги окрашена в один из N цветов. Тогда для любого набора клеток $a_1, \dots, a_l$ найдется набор одинаково окрашенных клеток $b_1, \dots, b_l$, подобный первому в том смысле, что (см. рис. 1) $\overrightarrow{B_iB_j} = d\overrightarrow{A_iA_j}$ при всех $i, j = 1, \dots, l$, где $A_1, \dots, A_l$, $B_1, \dots, B_l$ — центры клеток $a_1, \dots, a_l$, $b_1, \dots, b_l$ соответственно, а d — некоторое натуральное число; иначе говоря, фигуры, образованные центрами клеток $b_1, \dots, b_l$ и $a_1, \dots, a_l$ гомотетичны с коэффициентом d.*

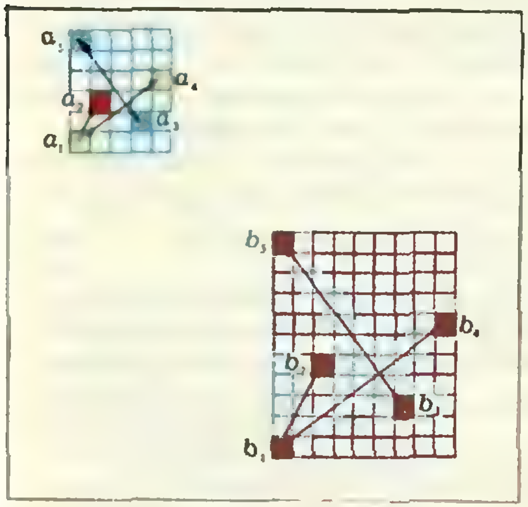


Рис. 1.

Более того, такой набор клеток можно найти в любом квадрате $m \times m$, где m — достаточно большое число, зависящее от количества цветов N и заданного набора $a_1, \dots, a_l$.

(Обратите внимание: «подобие наборов клеток» означает у нас не совсем то, что обычное понятие «подобия фигур»!).

Интересна история этой теоремы. В 1928 году один математик, работавший в крупном математическом центре — Геттингене, столкнулся с таким вопросом: можно ли утверждать, что при любом разбиении множества натуральных чисел на две части (или на конечное число частей), хотя бы в одной из них найдется арифметическая прогрессия сколь угодно большой заданной длины? Представлялось почти очевидным, что ответ здесь положительный. Однако доказать это, несмотря на кажущуюся простоту задачи, поначалу никому не удавалось, и вскоре она сделалась предметом всеобщего увлечения. Первым добился успеха молодой голландец Б. Л. Ван дер Варден, ставший впоследствии известным математиком. После нескольких недель работы он нашел не простое, но вполне элементарное доказательство, основанное на хитроумном применении математической индукции и «принципа Дирихле» (см. например, «Квант», 1977, № 2, с. 17). В 40-х годах теорема Ван дер Вардена была перенесена на n-мерный случай; теорема о раскраске — это случай размерности $n = 2$.

Вот одна из формулировок теоремы Ван дер Вардена, несколько обобщающая исходную задачу.

Для любых чисел N и l можно указать такое число $m = m\ (N, l)$, что при произвольном разбиении отрезка натурального ряда длины m на N классов по крайней мере в одном из них найдется арифметическая прогрессия длины l.

Покажем, как можно вывести эту теорему из теоремы о раскраске. Возьмем любые m последовательных натуральных чисел и занумеруем ими столбцы квадрата $m \times m$; разбиению этих чисел на N классов сопоставим

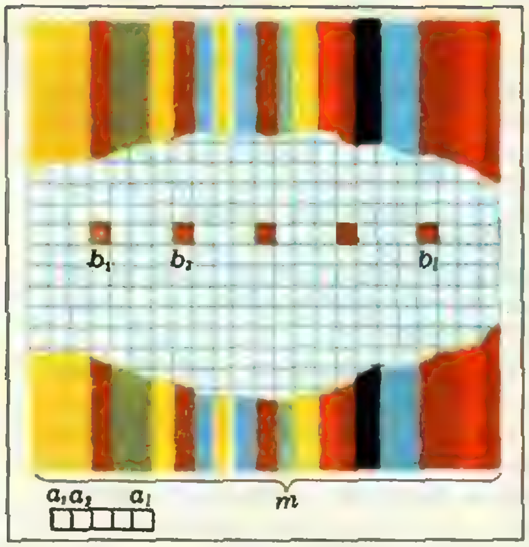


Рис. 2.

раскраску квадрата в N цветов, при которой все клетки всех столбцов, чьи номера входят в один и тот же класс, получают один и тот же цвет (рис. 2). Пусть теперь $a_1, \ldots, a_l$ — горизонтальный ряд из l последовательных клеток. Тогда по теореме о раскраске при достаточно большом m в нашем квадрате найдется набор одноцветных клеток $b_1, \ldots, b_l$, подобный набору $a_1, \ldots, a_l$, то есть горизонтальный ряд равностоящих друг от друга клеток. Очевидно, что номера столбцов, содержащих клетки $b_1, \ldots, b_l$, образуют искомую прогрессию (разность d этой прогрессии равна «коэффициенту подобия» наборов $a_1, \ldots, a_l$ и $b_1, \ldots, b_l$).

Переходя к доказательству теоремы о раскраске, условимся рассматривать не произвольные наборы клеток $a_1, \ldots, a_k$, а некоторые «стандартные» — такие, как на рисунке 3. Ясно, что от этого общность не пострадает, потому что любой набор клеток можно дополнить до «стандартного», причем если утверждение теоремы будет доказано для дополненного — «стандартного» — набора, то оно заведомо будет справедливо и для исходного. Наборы клеток, подобные «стандартным» наборам, назовем *сериями*, коэффициент подобия — *коэффициентом серии; серией квадратов* будет называться набор конгруэнтных квадратов, состоящих из клеток нашего бесконечного листа, левые нижние клетки которых образуют серию (очевидно, любые соответственные клетки таких квадратов тоже образуют серию). Наконец, два конгруэнтных раскрашенных квадрата назовем *однотипными*, если они раскрашены одинаково, то есть их раскраски совпадают при параллельном переносе, совмещающем квадраты.

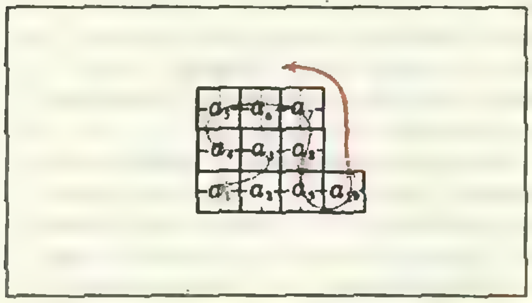


Рис. 3.

Таким образом, мы должны доказать, что, *каковы бы ни были числа N и l, при достаточно большом $m = m(N, l)$ в квадрате $m \times m$, произвольно раскрашенном в N цветов, всегда найдется одноцветная серия $b_1, \ldots, b_l$ длины l.*

Доказательство будем вести индукцией по l.

При $l = 1$, очевидно, можно взять $m(N, 1) = 1$, а при $l = 2$ — $m(N, 2) = N + 1$ (принцип Дирихле!). Допустим теперь, что утверждение теоремы верно для серий длины l при всех, сколь угодно больших N, и докажем его для серий длины $l+1$.

Поясним сначала идею доказательства. Пусть имеется серия из *$l+1$ квадратов $K_1, K_2, \ldots, K_{l+1}$* и в каждом из квадратов K_i выбрана серия из $l+1$ *клеток $b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots, b_{i,l+1}$*, причем эти серии *одинаково расположены в квадратах* (см. рис. 4, где $l = 4$). Тогда из клеток $b_{i,j}$ можно образовать еще $l+1$ серий вида $b_{1,j}, b_{2,j}, \ldots, b_{l+1,j}$ ($j = 1, \ldots, l+1$) — на рисунке 4 такая серия для $j = l+1$ показана розовым цветом — и еще одну серию $b_{1,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{l+1,l+1}$ с несколько бо́льшим коэффициентом — эти клетки на рисунке обведены рамками. Если известно, что квадраты $K_1, \ldots, K_l$ однотипны, а клетки $b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,l}$ (а вместе с ними все клетки $b_{i,j}$, где $i, j \leq l$) одноцветны, то в каждой из трех серий: $b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,l+1}$ (серия в квадрате K_1), $b_{1,1}$,

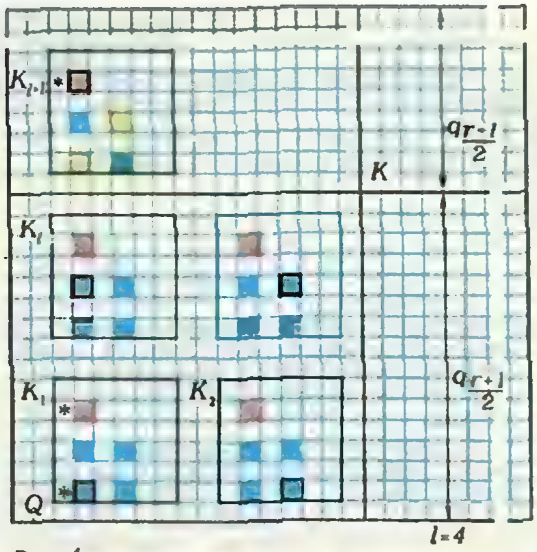


Рис. 4.

$b_{2,2}, \ldots, b_{l+1,l+1}$ (серия в рамках) и $b_{1,l+1}, b_{2,l+1}, \ldots, b_{l+1,l+1}$ («розовая» серия) все клетки, кроме, может быть, последней, одноцветны, а крайними клетками служат какие-то две из клеток $b_{1,1}$, $b_{1,l+1}$ и $b_{l+1,l+1}$ (на рисунке они помечены $*$). Поэтому, если среди этих трех клеток найдутся две одноцветные, мы получим одноцветную серию длины $l+1$. Так будет наверняка, по принципу Дирихле, в случае двух цветов. В случае же N цветов надо рассмотреть не двух-, а N-ступенчатую конструкцию (в больших квадратах выбирать серии квадратов поменьше, в тех — еще меньшие квадраты, и так N раз, пока не получатся клетки). При этом размер исходного квадрата должен позволить на каждой «ступени» выделять очередную серию $l+1$ квадратов, *среди которых первые l однотипны* — тут и должно помочь предположение индукции.

Приведем теперь формальное доказательство теоремы о раскраске. Определим последовательность (q_r), $r=0, 1, \ldots, N$, соотношениями

$$q_0=1,\quad q_{r+1}=2m(N^{q_r^2}, l)\cdot q_r$$

и положим $m(N, l+1)=q_N$ ($N^{q_r^2}$ — это число раскрасок квадрата $q_r \times q_r$ в N цветов; существование числа $m(N^{q_r^2}, l)$ обеспечено предположением индукции, $l=1, 2, \ldots$).

Квадрат $q_r \times q_r$ назовем *квадратом ранга r*. Покажем, что при любой раскраске квадрата K ранга $r+1$ в N цветов в нем можно выбрать серию квадратов $K_1, K_2, \ldots, K_{l+1}$ ранга r, в которой все квадраты, кроме, может быть, K_{l+1} однотипны. Представим, что квадрат K разбит на большие «клетки», каждая из которых — это квадрат ранга r; «цветом» такой клетки будем считать любой из $N'=N^{q_r^2}$ способов ее раскраски в N цветов. Разделим квадрат K на 4 равных квадрата и выберем из них левый нижний — Q (рис. 4). Он состоит из $m' \times m'$ «клеток», где $m'=m(N', l)$, раскрашенных в N' «цветов», и по определению числа m' в нем найдется серия из l «клеток» одного и того же «цвета», то есть серия однотипных квадратов $K_1, \ldots, K_l$ ранга r. Остается дополнить ее до серии из $l+1$ квадратов квадратом K_{l+1}, который может и не поместиться в Q, но заведомо поместится в квадрате K.

Докажем теперь, что в качестве числа $m(N, l+1)$ можно взять q_N. Пусть K — произвольный квадрат со стороной $m=q_N$, то есть ранга N, окрашенный в N цветов. Выделим в нем серию квадратов $K(1), \ldots, K(l+1)$ ранга $N-1$, первые l из которых однотипны. Пусть d_1 — коэффициент этой серии. Выделим в квадрате $K(1)$ серию квадратов $K(1, 1), K(1, 2), \ldots, K(1, l+1)$ ранга $N-2$, первые l из которых однотипны. Пусть d_2 — коэффициент этой серии и пусть $K(i, j)$ — это квадрат, который получается из $K(1, j)$ при переносе, совмещающем $K(1)$ и $K(i)$, $i=2, 3, \ldots, l+1$, то есть при переносе на вектор $d_1\overrightarrow{A_1A_i}$ (напомним, что $A_1, A_2, \ldots$ — центры клеток «стандартного» набора $a_1, a_2, \ldots$). Продолжим этот процесс, выделяя в квадрате $K(1, 1)$ серию $K(1, 1, 1)$, $K(1, 1, 2), \ldots, K(1, 1, l+1)$ квадратов ранга $N-3$ с коэффициентом d_3 и «разнося» ее по своим квадратам $K(i, j)$ и т. д. Через N шагов мы получим квадраты ранга 0, то есть клетки — $K(i_1, i_2, \ldots, i_N)$ ($i_k=1, \ldots, l+1$). Каждая из этих клеток является последним звеном в цепочке вложенных квадратов более высоких рангов: $K(i_1) \supset K(i_1, i_2) \supset \ldots \supset K(i_1, i_2, \ldots, i_N)$. С учетом правила построения серий квадратов отсюда легко вывести следующие свойства:

1) *квадраты* $K(i_1, i_2, \ldots, i_s, i_{s+1}, \ldots, i_r)$ и $K(i'_1, i'_2, \ldots, i'_s, i_{s+1}, \ldots, i_r)$, *у которых первые s индексов не превосходят l (а остальные совпадают), однотипны;* в частности, при заданных p и q ($p, q \geqslant 0$, $p+q<N$) клетки $b_i =$

$$=K(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p\ \text{раз}}, \underbrace{i, \ldots, i}_{N-p-q\ \text{раз}}, \underbrace{l+1, \ldots, l+1}_{q\ \text{раз}}) \quad (1)$$

имеют один и тот же цвет при всех $i=1, \ldots, l$;

2) *вектор, соединяющий центры квадратов* $K(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ *и* $K(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ *равен* $d_1\overrightarrow{A_{i1}A_{j1}}+d_2\overrightarrow{A_{i2}A_{j2}}+\ldots+d_r\overrightarrow{A_{ir}A_{jr}}$; в частности, для клеток b_i и b_j (см. (1)) он равен $(d_{p+1}+d_{p+2}+\ldots+d_{N-q})\overrightarrow{A_iA_j}$.

Теперь мы уже недалеки от цели. Рассмотрим следующие $N+1$ клеток: $K(l+1, l+1, l+1, \ldots, l+1)$, $K(1, l+1, l+1, \ldots, l+1)$, $K(1, 1, l+1, \ldots, l+1)$, …, $K(1, 1, 1, \ldots, 1)$. По принципу Дирихле хотя бы две из них одноцветны. Пусть для определенности это будут клетки $b_1=K(1, 1, 1, l+1, \ldots, l+1)$ и $b_{l+1}=K(1, l+1, l+1, l+1, \ldots, l+1)$ (ср. (1) при $p=1$, $q=N-3$). Тогда из свойств 1) и 2) вытекает, что клетки $b_1, b_2, \ldots, b_{l+1}$, где $b_i=K(1, i, i, l+1, \ldots, l+1)$, образуют искомую одноцветную серию (с коэффициентом d_2+d_3). Теорема о раскраске доказана.

Если эта тема вас заинтересовала, советуем обратиться к книжке А. Я. Хинчина «Три жемчужины теории чисел», где приводится подробное доказательство теоремы Ван дер Вардена о прогрессиях.

Упражнения

1. Показать, что теорема о раскраске позволяет решить все пункты задачи М750.

2. Доказать, что если в теореме Ван дер Вардена слово «арифметическая» заменить на «геометрическая», то она останется верной. (Кстати, сам Ван дер Варден доказывал свою теорему именно для геометрических прогрессий.)

3. Доказать, что при любом n и при любом разбиении натурального ряда на N классов хотя бы один из них содержит n арифметических прогрессий длины n, первые члены которых образуют геометрическую прогрессию.

4. Привести пример разбиения натурального ряда на два подмножества, ни одно из которых не содержит:

а) бесконечной арифметической прогрессии;

б) бесконечной геометрической прогрессии;

в) ни бесконечной арифметической прогрессии, ни бесконечной геометрической прогрессии.

5. Привести пример раскраски клеток в два цвета, при которой не найдется бесконечного множества вертикальных и бесконечного множества горизонтальных прямых, в пересечении которых получаются центры одноцветных клеток.

6. Доказать, что при любой раскраске клеток в k цветов найдется бесконечное множество вертикальных прямых $\{x_i\}$ и бесконечное множество горизонтальных прямых $\{y_i\}$ ($i=1, 2, 3, \ldots$) такие, что в пересечении прямых y_i и x_j, где $i>j$, получатся центры одноцветных клеток.

Левая спираль *ДНК*

(Начало см. на с. 31)

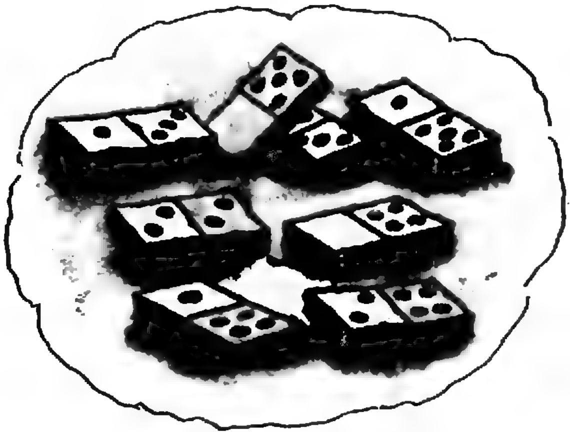
ности находятся, как это и считалось раньше, в B-форме.

Возникает вопрос, что будет, если в длинной молекуле ДНК (напомним, что обычная длинная молекула содержит десятки тысяч нуклеотидов) окажется участок, имеющий последовательность … ЦГЦГ …? Опыты показали, что при определенных условиях такой участок действительно находится в Z-форме, хотя вокруг него ДНК остается в обычной форме. Имеются доказательства того, что такое возможно и внутри клетки.

Открытие левой спирали и возможности ее существования в «работающей» ДНК вызвало огромный интерес. Во многих лабораториях мира сейчас интенсивно исследуются свойства новой формы, условия, при которых в нее переходят соответствующие участки ДНК. Ученые пытаются выяснить ту роль, которую Z-форма и вообще способность ДНК изменять свою структуру играют в работе этой молекулы в клетке.

Несомненно, ближайшие годы принесут еще много интересных открытий в этой области.

Квант для младших школьников



Задачи

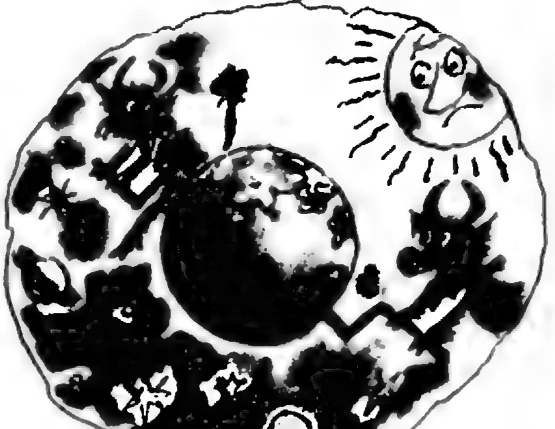
1. Восемь косточек домино лежат на столе так, как показано на рисунке. Какое значение имеет закрытая часть косточки домино, если эти косточки можно расположить в «магический квадрат» 4×4 (то есть так, чтобы сумма очков на косточках в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду и по каждой диагонали была одинаковой)? Добейтесь такого расположения.

2. Братья Алеша и Боря родились в августе. В школе начинают учиться с семи лет. Номер класса, в котором учится сейчас старший брат Борис, равен возрасту Алеши. В какой класс перейдет Алеша, когда Борис окончит среднюю школу?

3. На прямой расположили несколько точек. Затем между каждыми двумя соседними точками поставили еще по точке. И так несколько раз. Докажите, что после каждой такой операции общее количество точек будет нечетным.

4. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 минут. Однажды он по дороге в школу вспомнил, что забыл дома ручку. Петя знал, что если он продолжит путь в школу с той же скоростью, то придет туда за 8 минут до звонка, а если вернется домой за ручкой, то, двигаясь с той же скоростью, опоздает к началу урока на 10 минут. Какую часть пути он прошел?

5. Известно, что направление вращения Земли вокруг своей оси совпадает с направлением обращения Земли по орбите вокруг Солнца. На сколько бы изменилась продолжительность земных суток, если бы Земля вращалась вокруг своей оси с той же угловой скоростью в противоположном направлении?



Эти задачи нам предложили
В. Д. Вьюн, С. В. Дворянинов, В. В. Егоров, А. П. Савин, Е. Д. Сергиенко

Дом, который построил...

А. В. ТОКАРЕВ

Выдающийся итальянский архитектор XVI века Андреа Палладио считал, что в каждой постройке должны быть соблюдены три вещи, без которых ни одно здание не может заслужить одобрения. Это — польза (и удобство), красота и долговечность. Оставим в стороне соображения удобства и красоты и поговорим о долговечности, или, другими словами, о надежности постройки.

Наверное, каждый из вас знает, что строительство любого сооружения начинается с закладки фундамента. Хороший, прочный фундамент — залог дальнейшего успеха. Но что это значит — прочный фундамент?

Много вопросов приходится решать специалистам. Один из них — борьба с осадкой фундамента. Особые трудности, связанные с этой проблемой, возникают при возведении сооружений на вечной мерзлоте. Построенные там дома часто дают трещины из-за неравномерной осадки фундамента, вызванной подтаиванием грунта под ним.

Можно ли избежать подтаивания грунта под домами, построенными на вечной мерзлоте, или хотя бы уменьшить подтаивание?

Давайте попытаемся решить эту задачу, исходя только из знаний простейших физических законов и закономерностей.

Прежде всего, проанализируем условие задачи. Почему грунт под домом может начать подтаивать? Очевидно, потому, что фундамент передает ему некоторое количество теплоты. Значит, все дело в фундаменте. Тогда, первое, что напрашивается сделать, это уменьшить площадь соприкосновения фундамента с грунтом. Именно с этой целью здания стали строить на сваях, отказавшись от привычного сплошного фундамента. Но этого оказалось недостаточно.

Как еще можно уменьшить приток тепла к грунту? В данном случае тепло передается только теплопроводностью; следовательно, материал сваи должен проводить тепло как можно хуже. Из чего же нужно делать сваи?

Для количественной оценки теплопроводности различных веществ вводится специальная физическая величина — коэффициент теплопроводности. Для каждого вещества он свой. Самую большую теплопроводность имеют металлы, у жидкостей теплопроводность невелика, у газов — еще меньше. Для наших рассуждений не важно, как именно определяется коэффициент теплопроводности и в каких единицах он измеряется. Нам интересно лишь сравнить способности различных материалов проводить тепло. Поэтому воспользуемся справочником*) и составим небольшую таблицу относительных коэффициентов теплопроводности, выбрав теплопроводность воды за единицу:

Вещество	Относительный коэффициент теплопроводности	Вещество	Относительный коэффициент теплопроводности
Бензин	0,2	Железо	122
Вата	0,07	Керосин	0,2
Вода	1	Кирпич	1,1
Воздух	0,04	Лед	3,7
Войлок	0,1	Пробка	0,07
Дерево	0,2—0,6	Спирт	0,3

Посмотрим внимательно на эту таблицу. Из твердых материалов наименьшей теплопроводностью обладают вата и пробка, затем идут дерево и кирпич. Однако прежде всего свая должна быть прочной, так что все перечисленные материалы явно не подходят. А что, если сваю сделать из металла, например из железа, и внутрь ее поместить вату, войлок или какое-то другое пористое вещество, содержащее много воздуха? Это — выход!

Итак, свая должна быть изготовлена из прочного твердого материала и заполнена каким-либо пористым веществом.

Анализируя полученный результат, делаем вывод: благодаря малой теплопроводности, свая указанной конструкции действительно уменьшит приток тепла от окружающего воздуха к грунту (то есть сверху вниз) в теплое время года. А в холодное? Хорошо бы сделать так, чтобы зимой, во время сильных морозов, свая способствовала охлаждению грунта (то есть передавала бы тепло снизу вверх). Это увеличило бы прочность грунта и уменьшило степень его подтаивания летом.

Сформулируем более четко, какие же физические процессы происходят в свае и в грунте около нее летом и зимой. В теплое время года верхняя часть сваи, соприкасаясь с воздухом, нагревается. Постепенно будет нагреваться и та часть сваи, которая находится в земле. Чем меньше нагреется нижний конец сваи, а значит и прилегающий к ней грунт, тем лучше. Зимой верхняя часть сваи охлаждается от соприкосновения с холодным воздухом. Постепенно охлаждается и нижняя часть сваи, и грунт вокруг нее. Чем ниже температура, до которой охладится грунт, тем лучше.

Таким образом, свая должна обладать следующими свойствами:

а) если температура верхней части сваи выше, чем нижней, то свая должна проводить тепло плохо;

б) если верхний конец сваи холоднее нижнего, то свая должна проводить тепло хорошо.

Или, другими словами:

сверху вниз передача тепла должна происходить плохо, а снизу вверх — хорошо.

Как известно, в твердых телах теплообмен осуществляется только за счет теплопроводности, которая не зависит от направления. Это означает, что свая с перечисленными выше свойствами не может быть изготовлена из твердого тела. Наша предыдущая модель — металлическая свая, заполненная пористыми материалами, — не годится (пористая «внутренность» сваи будет плохо проводить тепло не только летом, но и зимой, когда желательно, чтобы грунт хорошенько охладился).

А что, если прочную оболочку сваи, способную выдержать большую нагрузку, заполнить жидкостью или газом? В этом случае передача тепла будет осуществляться не только теплопроводностью, но и конвекцией. К чему это приведет?

Зимой верхние слои жидкости или газа будут охлаждаться и, как более плотные, будут опускаться вниз. Их место займут менее плотные нижние слои, которые будут, в свою очередь, охлаждаться и опускаться вниз и т. д. В результате свая и грунт вокруг нее примут температуру окружающего воздуха, то есть охладятся за счет естественных морозов. В летнее время верхние слои жидкости или газа будут, конечно, нагреваться окружающим воздухом, но, как менее плотные, опускаться вниз они не будут. Передача тепла будет осуществляться только теплопроводностью, а она у жидкостей и газов очень мала.

---

*) А. С. Енохович. «Справочник по физике». (М., Просвещение, 1978.)

Значит, свая такой конструкции летом будет проводить тепло плохо, и грунт вокруг нее прогреется незначительно.

Итак, мы приходим к выводу: сваю, изготовленную из прочного материала, необходимо заполнить жидкостью или газом.

Остается последний вопрос — чем именно надо заполнить сваю? Зимой это все равно, так как в течение долгого холодного периода температура грунта успеет понизиться до температуры окружающего воздуха. Летом же важно, чтобы грунт прогрелся как можно меньше. Значит, надо подобрать такое тело, которое, получая тепло, нагревалось бы меньше всего. Из формулы

$$Q=cm(t_2-t_1)$$

получаем, что изменение температуры (t_2-t_1) зависит не только от полученного количества теплоты Q, но и от удельной теплоемкости c тела и от его массы m.

Масса жидкости всегда больше массы газа того же объема. Из этих соображений предпочтение следует отдать жидкости. Теперь сравним удельные теплоемкости, воспользовавшись уже упоминавшимся справочником:

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг · К)
Бензин	1,4
Вода	4,2
Воздух	1
Глицерин	2,4
Керосин	2,1
Масло машинное	1,9

Оказывается, и удельные теплоемкости больше у жидкостей, чем у газов.

Следовательно, сваю надо заполнять жидкостью. Но какой? Вода, хотя и самая дешевая и доступная, не подходит, поскольку она зимой замерзает. Глицерин и машинное масло при низких температурах густеют, что затрудняет конвекцию. Остаются бензин и керосин. Обе жидкости замерзают при температуре ниже —50°С, так что каждая из них могла бы «выдержать» суровые зимние морозы. Однако выбираем все же керосин, поскольку у него бо́льшая удельная теплоемкость и он дешевле бензина.

Наконец-то мы можем сформулировать окончательный ответ задачи.

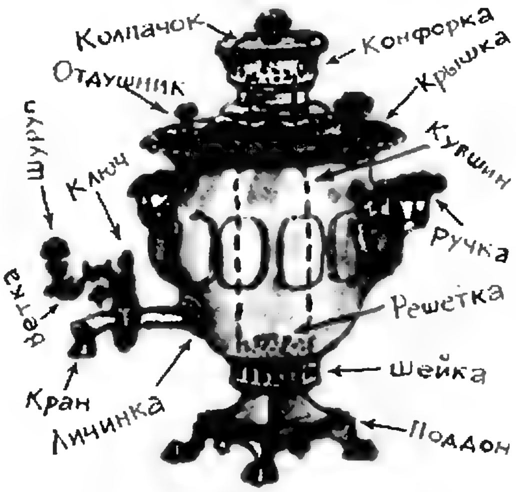
Итак, чтобы уменьшить подтаивание грунта под домами, построенными на вечной мерзлоте, здания надо строить на сваях; сваи, изготовленные из прочного твердого материала, внутри должны быть заполнены керосином.

Заметим, что такой способ укрепления мерзлых оснований (уменьшения подтаивания грунта под фундаментом) — не фантастика, а реальность. Он детально разработан теоретически и испытан в производственных условиях. При этом получено существенное снижение себестоимости строительства.

Теперь, когда вы убедились в том, что, зная основные физические закономерности, можно решать сложные практические задачи, попробуйте самостоятельно объяснить один интересный случай «нарушения» законов природы. Случай этот описан в книге А. П. Нечаева «Чудеса без чудес»:

«...Был подан самовар. Из-под крышки валил пар. Стали заваривать чай, и оказалось — вода холодная!».

Добавим только, что описанный случай произошел в конце XIX века, когда самовары, в отличие от современных электрических, были углевыми.



задачник Кванта

Задачи

М806—М810; Ф818—Ф822

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 августа 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М806, М807» или «Ф818». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М806. а) Докажите, что если

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} = 0,$$

то многочлен $a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1$ имеет корень между 0 и 1.

б) Докажите, что если для некоторого $p > 0$

$$\frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2} + \frac{a_3}{p+3} + \ldots + \frac{a_n}{p+n} = 0,$$

то этот многочлен также имеет корень между 0 и 1.

А. Гохберг, М. Овецкий, ученики 10 кл., Донецк

М807. а) Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3 на его стороны. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_2} + \overrightarrow{MK_3}$ равна $\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{MO}$, где O — центр треугольника.

б) Из произвольной точки M опущены перпендикуляры MK_1, ..., MK_n на все стороны правильного n-угольника (или их продолжения). Докажите, что

$$\overrightarrow{MK_1} + \ldots + \overrightarrow{MK_n} = \frac{n}{2} \overrightarrow{MO},$$

где O — центр n-угольника.

в) Из произвольной точки M внутри правильного тетраэдра опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3, MK_4 на его грани. Докажите, что

$$\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_2} + \overrightarrow{MK_3} + \overrightarrow{MK_4} = \frac{4}{3} \overrightarrow{MO},$$

где O — центр тетраэдра.

В. В. Прасолов

М808. На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает какую-нибудь клетку в красный цвет, второй — k (неокрашенных) клеток — в синий цвет, затем снова первый одну (неокрашенную) — в красный, второй — k клеток — в синий и т. д. Первый стремится к тому, чтобы какие-нибудь четыре красные клетки расположились в вершинах квадрата (со сторонами, параллельными линиям сетки). Сможет ли второй ему помешать а) при $k=1$; б)* при $k=2$; в)** при каком-либо $k>1$?

Д. Г. Азов

М809. Найдите сумму

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}$$

(через $k!$ обозначается произведение $1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$).

В. В. Произволов

М810*. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник M можно поместить прямоугольник, площадь которого не меньше $1/4$ площади многоугольника M.

Ф. В. Вайнштейн

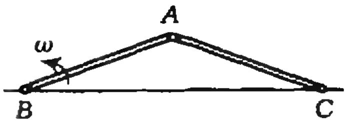


Рис. 1.

Ф818. Два жестких стержня длины l каждый шарнирно скреплены в точке A (рис. 1). Стержень BA жестко закреплен в точке B, а точка C стержня AC может скользить по направляющей BC. Стержень BA начинают вращать в плоскости рисунка вокруг точки B с постоянной угловой скоростью ω. Чему будут равны максимальная скорость и ускорение точки C, если в начальный момент стержни вытянуты вдоль направляющей BC $(\widehat{BAC}=\pi)$?

Л. Г. Маркович

Ф819. Три небольших тела, массы которых относятся как 3:4:5 (масса самого легкого тела равна m), удерживаются в трех различных точках на внутренней поверхности гладкой полусферической чаши радиуса R, которая в нижней точке прикреплена к горизонтальной поверхности. В некоторый момент тела отпускают и предоставляют самим себе. Какое максимальное количество тепла может выделиться в этой системе? При каком начальном положении тел это осуществится? Все соударения тел абсолютно неупругие.

С. К. Строков

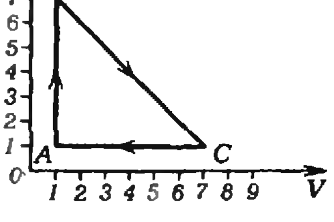


Рис. 2.

Ф820. Процесс $A—B—C—A$ производят над одним молем идеального одноатомного газа (рис. 2). Определить КПД цикла.

А. Г. Изергин, Ю. П. Малышев, В. Р. Саулит

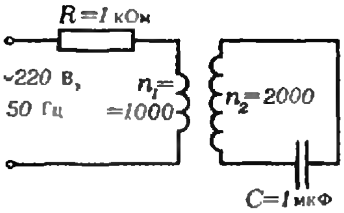


Рис. 3.

Ф821. В схеме, приведенной на рисунке 3, трансформатор идеальный. Параметры схемы указаны на рисунке. Найти амплитуду тока и сдвиг фаз в первичной цепи.

Р. З. Александров

Ф822. Ваш собеседник, сидящий напротив вас, носит очки. Сможете ли вы определить, каким дефектом зрения — близорукостью или дальнозоркостью — он обладает? (Естественно, вы не станете просить собеседника дать примерить его очки и не будете заводить о них разговор.)

М. В. Семенов

Problems

M806—M810; P818—P822

M806. a) Prove that if

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n}=0,$$

then the polynomial $a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_2x+a_1$ has a root between 0 and 1;
b) Prove that if, for some $b>0$,

$$\frac{a_1}{b+1}+\frac{a_2}{b+2}+\frac{a_3}{b+3}+\ldots+\frac{a_n}{b+n}=0,$$

then this polynomial also has a root between 0 and 1.

A. Gohberg, M. Ovetski, 10th grade students, Donetsk.

M807. a) Perpendiculars MK_1, MK_2, MK_3 to the sides of an equilateral triangle are drawn from an arbitrary point M inside it. Prove that the vector sum $\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}$ equals $(3/2)\cdot\overrightarrow{MO}$, where O is the triangle's centre.
b) Perpendiculars MK_1, ..., MK_n to all the n sides of a regular polygon are drawn from an arbitrary point inside it. Prove that

$$\overrightarrow{MK_1}+\ldots+\overrightarrow{MK_n}=\frac{n}{2}\overrightarrow{MO},$$

where O is the centre of the polygon.
c) Perpendiculars MK_1, ..., MK_4 to the faces of a regular tetrahedron are drawn from an arbitrary point inside it. Prove that

$$\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}+\overrightarrow{MK_4}=\frac{4}{3}\overrightarrow{MO},$$

where O is the centre of the tetrahedron.

V. V. Prasolov

M808. Two persons play the following game on an infinite plane square lattice: the first player colours one node in red, the second colours k (uncoloured) nodes in blue, then the first colours one more node in red, the second k more in blue, and so on. The first player's goal is to colour four nodes forming the vertices of a square with sides parallel to the lines of the lattice. Can the second player prevent him from doing this a) when $k=1$; b)* when $k=2$; c)** for some $k>1$?

D. G. Azov

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the every first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that August 31 st, 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover,

in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M809. Find the sum

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}$$

(here $k!$ denotes the product $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$).

V. V. Proizvolov

M810*. Prove that any convex polygon contains a rectangle whose area is no less than 1/4 the area of the polygon.

F. B. Vainstein

P818. Two rigid rods each of length l are linked by a hinge at point A (see figure Рис. 1). The rod BA is fixed at point B, while point C slides along the directing line BC. The rod BA begins to rotate with constant angular velocity ω around B in the plane of the figure. What maximal velocity and acceleration will C reach if the rods are in line with BC ($\widehat{BAC}=\pi$) at the initial moment?

L. G. Marcovich

P819. Three small solids, whose mass ratio is 3:4:5 (the mass of the lightest is m) are held at three distinct points on the inside of a smooth half-sphere, fixed in its lowest point to a horizontal surface. At some moment the solids are freed. What maximal amount of heat can be irradiated by this system? For what initial position of the solids will this occur? All collisions are absolutely non-elastic.

S. K. Strokov

P820. The process $A-B-C-A$ takes place for one mole of ideal monoatomic gas P (see figure Рис. 2). Find the efficiency of the cycle.

A. G. Isergin, Ju. P. Malishev, V. R. Saulit

P821. In the circuit shown on figure Рис. 3, the transformer is ideal. The parameters of the components are shown on the figure. Find the amplitude of the current and the phase shift in the primary circuit.

R. Z. Alexandrov

P822. You are talking to a person sitting opposite who wears glasses. Can you determine if he is nearsighted or farsighted? (Naturally, you neither want to ask the person to let you try on his glasses nor talk about his defective eye-sight.)

M. V. Semenov

Решения задач

M791, M792, M794, M795; Ф803—Ф807

M791. *Пете подарили микрокалькулятор, на котором можно выполнять следующие операции: по любым данным числам x и y вычислить $x+y$, $x-y$, $x+1$ и $1/x$ (при $x\neq 0$). Петя утверждает, что с помощью своего микрокалькулятора он может:*

а) возвести любое число в квадрат, проделав не более шести операций;

а) Приведем схему возведения любого числа x ($x\neq 0$) в квадрат за 6 операций. Промежуточные результаты будем обозначать x_1, x_2, …, x_6 ($x_6=x^2$); разумеется, их можно запоминать и неоднократно использовать в последующих вычислениях. Итак, надо последовательно вычислить: $x_1=1/x$, $x_2=x+1$, $x_3=1/x_2=1/(x+1)$, $x_4=x_1-x_3=1/x-1/(x+1)=1/(x^2+x)$, $x_5=1/x_4=x^2+x$, $x_6=x_5-x=x^2$.

б) Пусть надо перемножить числа x и y. Вычисления проводим в следующем порядке: сначала найдем $x+y$ и $x-y$ (2 операции), затем возведем эти числа в квадрат, как в пункте а) (еще 12 операций), затем вычисляем

б) перемножить любые два числа, проделав не более двадцати операций.*
Как он это делает?

$z=(x+y)^2-(x-y)^2$ и $1/z=1/4xy$ (2 операции), потом — последовательным сложением — $2/4xy=1/4xy+1/4xy$, $3/4xy=2/4xy+1/4xy$ и $1/xy=3/4xy+1/4xy$ (3 операции) и, *наконец,* $1/(1/xy)=xy$. *Итого нам потребовалось* $2+12+$ $+2+3+1=20$ операций.

С. Б. Гашков

◆

M792. *Решите в натуральных числах уравнения*
а) $3^x+1=2^y$;
б) $3^x-1=2^y$.
в) Найдите все натуральные* n, *при которых оба числа* $\frac{1}{n}$ *и* $\frac{1}{n+1}$ *выражаются конечными десятичными дробями.*
г) Докажите, что при любом простом* $p>3$ *и натуральном* $m>1$ *ни одно из чисел* p^m+1 *и* p^m-1 *не может быть степенью двойки.*

а), б) Приведем ответы к первым двум пунктам задачи: а) $x=1$, $y=2$; б) $x=1$, $y=1$ или $x=2$, $y=3$. Легко проверить, что эти числа удовлетворяют соответствующим уравнениям, а в пункте г) мы покажем, что других решений нет.

в) Ответ: $n=4$. Если $1/n$ — конечная десятичная дробь, то $1/n=m/10^s$, где m и s — натуральные числа, следовательно, 10^s делится нацело на n, то есть $n=2^a\cdot5^b$ и аналогично $n+1=2^c\cdot5^d$, где a, b, c, d — целые неотрицательные числа. Отсюда получаем равенство $2^a\cdot5^b+1=$ $=2^c\cdot5^d$, которое, очевидно, может выполняться только при $a=0$, $d=0$ или $b=0$, $c=0$; в первом случае $5^b+1=2^c$, во втором — $5^d-1=2^a$. В пункте г) мы покажем, что уравнение $5^x\pm1=2^y$ при $x>1$ решений не имеет. Остается заметить, что $5+1\neq2^y$, а $5-1=2^2$, откуда $a=2$, $b=0$ и $n=4$.

г) Мы должны доказать, что числа p^m+1 и p^m-1 *имеют хотя бы по одному нечетному делителю* (большему единицы).

Пусть m четно, $m=2n$. Поскольку p — простое число и $p>3$, $p^n=2s+1$, где $s>1$. Следовательно, $p^m=(p^n)^2=$ $=4s^2+4s+1$ и $p^m+1=2(2s^2+2s+1)$, а $p^m-1=4s(s+1)$. Но число $2s^2+2s+1$ и одно из чисел s и $s+1$ нечетные, что нам и требовалось.

Пусть m нечетно. Тогда $p^m-1=(p-1)(p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots$ $\ldots+1)$, а $p^m+1=(p+1)(p^{m-1}-p^{m-2}+\ldots+1)$. Вторые сомножители в этих двух разложениях являются суммами нечетного числа нечетных слагаемых, и поэтому нечетны.

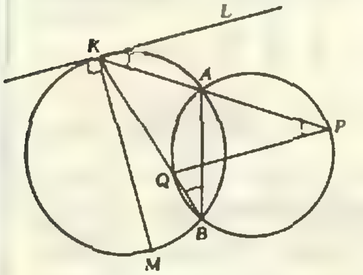
Легко видеть, что эти рассуждения годятся и для всех чисел вида $3^m\pm1$ $(m>1)$, за исключением $3^2-1=2^3$. Отсюда следует, что уравнения пунктов а) и б) не имеют решений, отличных от выписанных нами выше.

Заметим еще, что фактически мы доказали утверждение г) для всех *нечетных* (не обязательно *простых*) $p>3$.

С. Н. Бычков, В. В. Прасолов, Л. Д. Курляндчик

◆

M794. *Две окружности пересекаются в точках* A *и* B. *Через точку* K *первой окружности проводятся прямые* KA *и* KB, *пересекающие вторую окружность в точках* P *и* Q. *Докажите, что хорда* PQ *второй окружности перпендикулярна диаметру* KM *первой окружности.*



Очевидно, достаточно доказать, что прямая PQ параллельна касательной KL к первой окружности. Имеем (см. рисунок):

$$\widehat{LKA}=\frac{1}{2}\breve{KA}=\widehat{KBA}=\frac{1}{2}\breve{AQ}=\widehat{QPA},$$

а из равенства величин углов LKP и KPQ вытекает, что $KL\parallel PQ$. (Мы воспользовались тем, что величина вписанного угла, а также угла между касательной и хордой с вершиной на окружности равна половине величины заключенной внутри угла дуги.)

У нас на рисунке (и в доказательстве) точка Q лежит на *отрезке* KB. Если она лежит на *продолжении* отрезка за точку B, рассуждение нужно слегка изменить. Это мы оставляем читателю.

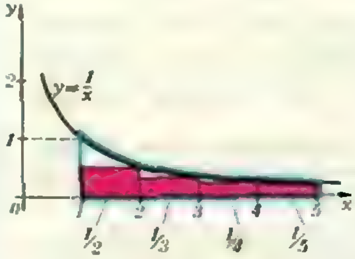
Отметим еще, что доказанная теорема равносильна предельному случаю такого утверждения: если прямые a и b, проходящие, соответственно, через точки A и B пересечения двух окружностей, пересекают первую окружность в точках A_1 и B_1, а вторую — в точках A_2 и B_2, то $A_1B_1\parallel A_2B_2$.

А. П. Ивченко

◆

M795. *Обозначим через* $\sigma(n)$ *сумму всех делителей натурального числа* n. *Докажите,*

Решение основано на следующем совершенно очевидном замечании: если d — делитель числа n, то $d=n/d'$, где d' — также некоторый делитель n, поэтому сумму всех *что существует бесконечно много n таких, что а) $\sigma(n)>2n$; б) $\sigma(n)>3n$. Докажите, что для любого n в)* $\sigma(n)<n(\log_2 n+2)$; г) $\sigma(n)<n(\ln n+1)$.*



Ф803. *Человек поднимается в гору с углом подъема α с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ и тянет за собой на легкой веревке длины l сани массы m, находящиеся на горизонтальном участке (рис. 1).*

делителей можно записать в виде

$$\sigma(n)=\frac{n}{d_1}+\frac{n}{d_2}+\ldots+\frac{n}{d_s}=n\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_s}\right), \quad (1)$$

где $d_1, \ldots, d_s$ — это все делители числа n. Таким образом, величина $\sigma(n)/n$ равна сумме нескольких чисел из конечной последовательности $1, 1/2, \ldots, 1/n$ и она будет тем больше, чем больше в эту сумму войдет чисел с небольшими знаменателями.

а) Докажем, что $\sigma(n)>2n$ для любого $n=6k$, где $k>1$ (таких чисел, разумеется, бесконечно много). Поскольку n делится на 1, 2, 3, 6 и k, из (1) получаем

$$\sigma(n)\geq n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{k}\right)>2n.$$

б) Пусть n — любое число, кратное произведению $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 16=16!$ Тогда n делится на все натуральные числа от 1 до 16 (этих делителей нам уже хватит) и в силу (1)

$$\sigma(n)\geq n\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)\right)>$$
$$>n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{16}\cdot 8\right)=3n.$$

Аналогично можно доказать, что при любом a неравенство $\sigma(n)>an$ выполняется для бесконечного множества чисел n. Заметим еще, что, как показывает более точная оценка, в нашем доказательстве для $a=3$ делитель 16! можно заменить на 7!.

в) Из формулы (1) вытекает, что

$$\sigma(n)\leq n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right). \quad (2)$$

Оценим сумму в правой части. Пусть $2^k\leq n<2^{k+1}$, тогда $k\leq\log_2 n$ и $1+\ldots+\frac{1}{n}<1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}<1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\ldots+\frac{1}{2^k}\cdot 2^k+1=k+2$, то есть $\sigma(n)<n\cdot(k+2)\leq n(\log_2 n+2)$.

г) Оценим сумму $\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ в неравенстве (2) иначе, чем в пункте в) — с помощью интеграла. Каждое слагаемое $1/k$ в ней можно представить как площадь прямоугольника, основанием которого является отрезок $[k-1; k]$ оси Ox (см. рисунок), причем этот прямоугольник расположен под гиперболой $y=1/x$. Поэтому суммарная площадь всех прямоугольников для $k=2, \ldots, n$ меньше площади криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=1/x$, осью Ox и прямыми $x=1$ и $x=n$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{dx}{x}=\ln n,$$

и, следовательно, $\sigma(n)<n(\ln n+1)$.

В. Ф. Лев

◆

Рассмотрим движение саней в тот момент времени, когда веревка составляет угол α с горизонтом.

В неподвижной системе отсчета, связанной с дорогой, сани движутся поступательно (рис. 2). В системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}_0$, сани движутся по окружности радиуса l (рис. 3). Пусть скорости саней в этих системах в данный момент равны соответственно $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$. Тогда

Найти натяжение веревки в тот момент, когда она составляет угол α с горизонтальной поверхностью. Силой трения саней о поверхность дороги пренебречь.

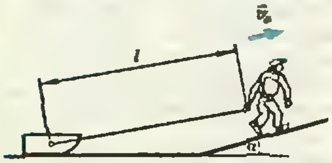


Рис. 1.

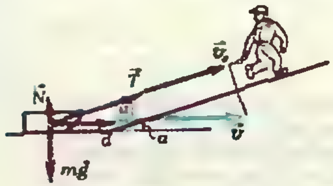


Рис. 2.

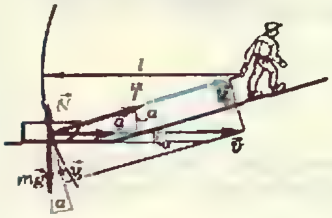
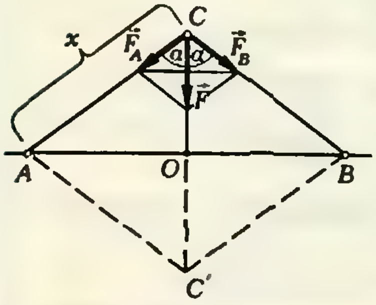


Рис. 3.

Ф804. *Две одинаковые звезды A и B вращаются под действием взаимного притяжения на неизменном расстоянии R друг от друга. На некотором неизвестном расстоянии x от звезд в плоскости их орбит движется легкая планета C, причем $|AC|=|BC|=x$, а треугольник ABC сохраняет свои размеры. Найти расстояние x.*



$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_0$, и

$$|\vec{v}_1|\equiv v_1=v_0\,\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (1)$$

Запишем уравнения движения саней. В неподвижной системе отсчета в проекциях на вертикальное направление (см. рис. 2)

$$T\sin\alpha+N-mg=0 \qquad (2)$$

($\vec{T}$ — сила натяжения веревки, $\vec{N}$ — сила нормальной реакции со стороны дороги). В системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}_0$, в проекциях на направление веревки (*см. рис.* 3)

$$T+N\sin\alpha-mg\sin\alpha=mv_1^2/l. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3) с учетом равенства (1), находим T:

$$T=m\,\frac{v_0^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{l\cos^2\alpha}.$$

Задачу можно решить короче, если заметить, что ускорение саней $\vec{a}$ во всех инерциальных системах отсчета одно и то же. Поэтому центростремительное ускорение саней в системе, движущейся со скоростью $\vec{v}_0$, равно по модулю проекции ускорения $\vec{a}$ на направление веревки:

$$\frac{v_1^2}{l}=\frac{v_0^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{l}=a\cos\alpha.$$

Отсюда находим a:

$$a=\frac{v_0^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{l\cos\alpha}.$$

Из уравнения движения саней в неподвижной системе отсчета в проекциях на горизонтальное направление (на направление $\vec{a}$) —

$$T\cos\alpha=ma=m\,\frac{v_0^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{l\cos\alpha}$$

— находим T:

$$T=m\,\frac{v_0^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{l\cos^2\alpha}.$$

В. И. Чивилёв

◆

Звезды A и B вращаются вокруг их центра масс, который находится в середине отрезка AB (в точке O). Центростремительное ускорение звездам сообщают силы их взаимного притяжения друг к другу:

$$M\,\frac{R}{2}\,\omega^2=G\,\frac{M^2}{R^2}.$$

Отсюда угловая скорость вращения звезд равна

$$\omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

По условию задачи треугольник ABC, в вершинах которого находятся звезды и планета, сохраняет свои размеры. Это возможно в том случае, когда планета движется по окружности с центром в точке O (см. рисунок) с угловой скоростью ω. Центростремительное ускорение планете сообщают силы притяжения ее к звездам:

$$m\vec{a}_{\text{ц}}=\vec{F}_A+\vec{F}_B,$$

где $|\vec{F}_A|=|\vec{F}_B|=G\,\frac{mM}{x^2}$. Как видно из рисунка,

$$|\vec{F}|=|\vec{F}_A+\vec{F}_B|=2|\vec{F}_A|\cos\alpha=$$
$$=2|\vec{F}_A|\cdot\frac{|CO|}{x}=2G\,\frac{mM}{x^3}\cdot|CO|.$$

Таким образом,

$$m\omega^2 \cdot |CO| = 2G\frac{mM}{x^3}\cdot|CO|, \text{ или}$$

$$m\frac{2GM}{R^3}\cdot|CO| = m\frac{2GM}{x^3}\cdot|CO|.$$

Это равенство выполняется либо при $|CO|=0$, либо при $x=R$. В первом случае планета находится в центре масс звезд — в точке O (треугольник ABC «вырождается» в отрезок AB). Во втором случае планета находится в вершине равностороннего треугольника (точка C или C' на рисунке), в двух других вершинах которого находятся звезды.

Замечательно, что и при различных массах звезд A и B «положениями равновесия» окажутся вершины C или C' равностороннего треугольника (этот факт вы можете проверить самостоятельно; но выкладки будут достаточно громоздкими).

Г. Л. Коткин

◆

Ф805. *Через плоский конденсатор, заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ, течет переменный ток $i(t)=I_0\cos\omega t$. Определить амплитуду напряжения на конденсаторе. Расстояние между пластинами d, площадь каждой пластины S.*

Как и все реальные конденсаторы, данный конденсатор может быть заменен эквивалентной схемой, показанной на рисунке 1. В этой схеме сопротивление R резистора равно омическому сопротивлению конденсатора, которое связано с наличием проводимости среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора. В нашем случае

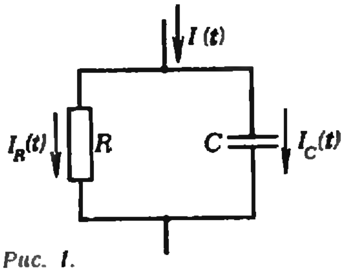


Рис. 1.

$$R=\varrho\frac{d}{S}.$$

Емкость C «идеального» конденсатора (без омического сопротивления) равна емкости реального конденсатора, то есть

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}.$$

Ток $I(t)$, текущий через реальный конденсатор, равен сумме тока $I_R(t)$, текущего через резистор, и тока $I_C(t)$, текущего через идеальный конденсатор.

Все эти три тока сдвинуты по фазе друг относительно друга. Построим векторную диаграмму амплитудных значений токов в цепи и напряжения. Отложим по горизонтали в виде вектора $\vec{I}_{0R}$ амплитуду тока $I_R(t)$ (рис. 2). Ток и напряжение на резисторе совпадают по фазе. Поэтому вектор $\vec{U}_0$ амплитуды напряжения на резисторе, а следовательно, и на реальном конденсаторе, совпадает по направлению с вектором $\vec{I}_{0R}$. Учитывая, что напряжение на конденсаторе отстает от тока по фазе на $\pi/2$, отложим вектор амплитуды тока $\vec{I}_{0C}$ по вертикали.

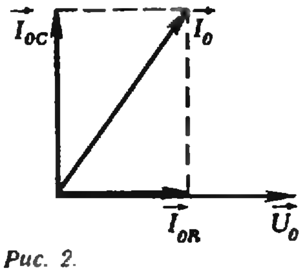


Рис. 2.

Из диаграммы видно, что амплитуда I_0 тока, текущего через реальный конденсатор, равна

$$|\vec{I}_0| = (|\vec{I}_{0R}|^2+|\vec{I}_{0C}|^2)^{1/2}.$$

Учитывая, что $I_{0R}=U_0/R$, $I_{0C}=U_0\,\omega C$, получаем

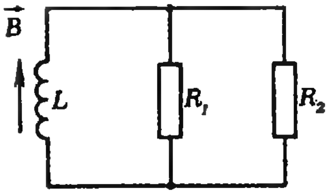
$$|\vec{I}_0| = \frac{|\vec{U}_0|}{R}(1+(\omega RC)^2)^{1/2}.$$

Отсюда находим амплитуду напряжения на конденсаторе:

$$U_0=\frac{I_0R}{(1+(\omega RC)^2)^{1/2}}=\frac{I_0\varrho d}{S(1+(\omega RC)^2)^{1/2}}.$$

В. В. Можаев

Ф806. *В схеме, показанной на рисунке, сразу после выключения внешнего магнитного поля, в котором находилась катушка с индуктивностью L, через резистор с сопротивлением R_1 течет ток I. Пренебрегая омическим сопротивлением катушки, определить, какое количество тепла выделяется на резисторе с сопротивлением R_1 и на резисторе с сопротивлением R_2. Магнитное поле было направлено перпендикулярно плоскости витков катушки.*



За время изменения внешнего магнитного поля в контуре будет действовать ЭДС индукции, которая вызвана, с одной стороны, изменением потока магнитной индукции внешнего магнитного поля, а с другой стороны — изменением потока магнитной индукции собственного магнитного поля катушки (ЭДС самоиндукции).

При параллельном соединении резисторов R_1 и R_2 в любой момент времени связь между токами, протекающими через резисторы, будет иметь вид $I_1(t)\cdot R_1 = I_2(t)\cdot R_2$. Следовательно, сразу после выключения внешнего поля ток через резистор R_2 равен

$$I_2 = IR_1/R_2.$$

Ток I_L, протекающий через катушку сразу после выключения внешнего магнитного поля, равен

$$I_L = I + I_2 = I\frac{R_1+R_2}{R_2}.$$

После выключения поля система изолирована. В первый момент вся энергия системы сосредоточена в магнитном поле катушки:

$$W = \frac{LI_L^2}{2} = \frac{LI^2}{2}\,\frac{(R_1+R_2)^2}{R_2^2}.$$

В дальнейшем эта энергия будет выделяться в виде тепла на резисторах. Поскольку падения напряжения на резисторах будут все время одинаковы, количества теплоты, выделившиеся на резисторах, будут обратно пропорциональны их сопротивлениям:

$$Q_1 \sim 1/R_1,\ Q_2 \sim 1/R_2.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = \dfrac{LI^2}{2}\,\dfrac{(R_1+R_2)^2}{R_2^2}, \\ Q_1/Q_2 = R_2/R_1, \end{cases}$$

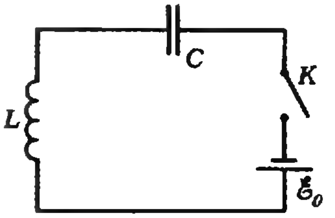
получим

$$Q_1 = \frac{LI^2}{2}\,\frac{(R_1+R_2)}{R_2},\quad Q_2 = \frac{LI^2}{2}\,\frac{(R_1+R_2)R_1}{R_2^2}.$$

В. В. Можаев

◆

Ф807. *Последовательно с катушкой индуктивности L и конденсатором емкости C через ключ K подключили батарею с постоянной ЭДС $\mathscr{E}_0$. В начальный момент времени ключ K разомкнут, конденсатор не заряжен. Определить максимальную величину тока в цепи после замыкания ключа. Омическим сопротивлением в цепи пренебречь.*



После замыкания ключа конденсатор начнет заряжаться. Ток в цепи будет нарастать до тех пор, пока напряжение на конденсаторе не станет равным $\mathscr{E}_0$. Следовательно, заряд, прошедший по цепи за время зарядки конденсатора, равен

$$q_0 = \mathscr{E}_0 C,$$

и ток за это время нарастает до максимального значения $I_{\max}$. Работа, совершенная источником за это время, равна

$$A = \mathscr{E}_0 q_0.$$

Эта работа равна сумме энергии, запасенной в конденсаторе за время зарядки, и энергии тока в катушке:

$$\mathscr{E}_0 q_0 = \frac{q_0^2}{2C} + L\frac{I_{\max}^2}{2}.$$

Подставив в это выражение значение $q_0 = \mathscr{E}_0 C$, найдем $I_{\max}$:

$$I_{\max} = \mathscr{E}_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М761—М775 и Ф768—Ф787, справились с задачами М761—М764, М766, М769, М771, М773 и Ф768, Ф776, Ф779, Ф780, Ф782, Ф787. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

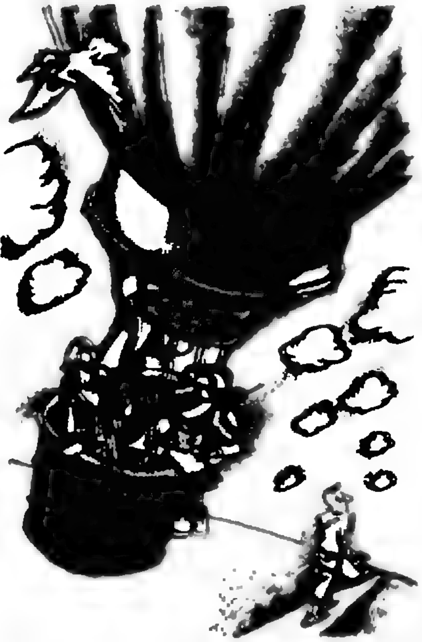
В. Арабидзе (Тбилиси) **70**; *Ю. Баркаган* (Пенза) **72, 75**; *С. Бахрюков* (Сумгаит) **72**; *А. Беренштейн* (Москва) **70**; *А. Биргер* (Иваново) **67, 72, 75**; *И. Богуславский* (Москва) **67, 68, 72, 74, 75**; *О. Бойко* (п. Кузьмоловский Ленинградской обл.) **72**; *В. Булавас* (Паневежис) **67, 68, 70, 72, 75**; *С. Веселько* (Минск) **67**; *Г. Виннер* (Свердловск) **67**; *М. Гаджибабаев* (Махачкала) **67**; *Г. Гальминас* (Таураге) **67, 72**; *М. Гараев* (Физули) **67, 68, 70**; *О. Гарифуллин* (Пенза) **67, 70, 72, 75**; *А. Гасников* (Пенза) **72, 74**; *Д. Гелев* (София, НРБ) **65**; *Д. Глек* (Воронеж) **72**; *Г. Гочев* (Дубна) **72**; *А. Громов* (Ленинград) **72, 74**; *А. Добрин* (Киев) **65**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **75**; *А. Зейфман* (Вологда) **74**; *К. Зыков* (Москва) **67, 68, 74**; *В. Ивлев* (Джезказган) **72**; *М. Йотов* (София, НРБ) **72, 75**; *Д. Каледин* (Москва) **70, 72**; *Д. Карасик* (Баку) **67, 68**; *Н. Карпенко* (Ленинград) **72**; *И. Карпов* (Казань) **72**; *А. Карпович* (Киев) **67, 68, 72, 75**; *А. Карташев* (Витебск) **72, 75**; *В. Кацман* (Ленинград) **72, 75**; *М. Кваша* (Москва) **72**; *Е. Ковальчук* (Киев) **72**; *М. Коган* (Донецк) **72**; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **72**; *Д. Коршунов* (Новосибирск) **67, 68, 70, 74**; *В. Кудряшов* (Пенза) **72, 75**; *А. Кушниренко* (Киев) **67**; *О. Леонтьева* (Ленинград) **65, 67, 68, 70, 72**; *А. Манита* (Бар) **72**; *М. Маринов* (Ямбол, НРБ) **72**; *А. Маслов* (Москва) **68, 74**; *Р. Мисявичюс* (д. Повилаускай Лит. ССР) **72**; *И. Михайлов* (София, НРБ) **65**; *А. Молотков* (Ленинград) **67, 72, 75**; *Ф. Назаров* (Ленинград) **72, 74**; *Л. Наймарк* (Ленинград) **72**; *Р. Нестеров* (В. Тырново, НРБ) **67, 70**; *А. Никольцев* (Севастополь) **67, 70, 72, 74**; *В. Новиков* (Коммунарск) **70**; *А. Новожилов* (Цимлянск) **72**; *О. Огурцова* (Ленинград) **72**; *С. Павлов* (Ленинград) **70**; *А. Перцовский* (Москва) **72**; *В. Петров* (Пловдив, НРБ) **67, 68, 70, 72**; *Д. Подкопаев* (Винница) **72**; *С. Портнов* (Ленинград) **67**; *Ю. Рубенко* (Киев) **72, 74**; *Е. Рычков* (Красноярск) **72**; *В. Сабадаш* (Киев) **70**; *Г. Самидашвили* (Тбилиси) **67, 68**; *И. Сандлер* (Москва) **72**; *А. Свиридов* (Москва) **68, 70**; *И. Степанов* (Ленинград) **68, 72**; *С. Струков* (Воронеж) **67, 70, 72, 74**; *Г. Сукоян* (Москва) **72**; *Ю. Таранников* (Новосибирск) **68, 72, 75**; *А. Тепляев* (Ленинград) **67, 72**; *С. Типцов* (Киев) **75**; *А. Трухан* (Минск) **72**; *О. Фатьянов* (Курск) **72**; *Н. Федин* (Омск) **70**; *Г. Фомин* (Алма-Ата) **72**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **72**; *В. Хрычиков* (Севастополь) **67, 68, 70, 72, 74**; *С. Цонев* (София, НРБ) **72, 75**; *Е. Шульман* (Вологда) **72**; *У. Эммус* (Валга) **67, 75**; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) **67, 68, 70, 72, 74, 75**; *П. Этингоф* (Киев) **67, 68, 72, 74**; *А. Юдаев* (Москва) **68**; *С. Юровский* (Мытищи) **68, 70.**

Физика

А. Абанов (Красноярск) **84, 85**; *Е. Антонян* (Ереван) **82, 83, 85**; *А. Бабаян* (Москва) **73—75, 85**; *Э. Багдасарян* (Баку) **73, 74, 77, 78, 81, 85**; *В. Барабанов* (Киев) **69, 84**; *Н. Барановская* (Винница) **84, 85**; *В. Базрыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **83—85**; *С. Бережной* (Кривой Рог) **73—75, 77**; *Е. Беспалов* (Курган) **84, 85**; *О. Богучаров* (Тула) **83, 85**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **75, 85**; *В. Булавас* (Паневежис) **69, 75, 78, 84, 85**; *И. Бущуев* (Кемерово) **83—86**; *О. Важеевский* (Москва) **81, 85**; *В. Вангелов* (Бургас, НРБ) **83, 85**; *М. Верховодов* (Киев) **69, 74, 77, 83, 84**; *И. Гайович* (Киев) **69—71, 75**; *Б. Галицкий* (Москва) **84, 85**; *М. Главач* (Йиглава, ЧССР) **75**; *С. Гребенщиков* (п. Черноголовка Московской обл.) **69, 70, 75**; *О. Гришин* (Тула) **74, 75, 81, 84**; *А. Данейко* (Минск) **75**; *Г. Данелиа* (Тбилиси) **69, 84, 85**; *А. Дворский* (Киев) **84**; *А. Дмитриев* (Куйбышев) **78**; *Л. Доросинский* (п. Черноголовка Московской обл.) **69, 71—75**; *А. Дунаевский* (Киев) **69, 73—75, 77, 78, 84, 85**; *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) **69, 71—75**; *А. Евтушенко* (Мытищи) **78**; *С. Ефимов* (Баку) **69—71, 74, 75, 84, 85**; *Д. Жакбарова* (Учкурган) **74**; *А. Жиленко* (Киев) **73**; *В. Житомирский* (Харьков) **68—75, 78, 81, 83—85**; *Р. Жямайтис* (Вильнюс) **73—75, 78, 81, 83—85**; *А. Зайцев* (Брежнев) **77, 78**; *Д. Зайцев* (Горький) **73, 74, 83—85**; *М. Заславский* (Харьков) **69**; *Ю. Звегинцев* (Харьков) **70, 74, 84, 85**; *М. Зиманов* (Алма-Ата) **74, 83—85**; *Е. Иошпе* (Киев) **84, 85**; *Б. Иричанин* (Белград, СФРЮ) **69—73, 75, 77, 83, 84**; *Т. Калатози* (Кутаиси) **85**; *Д. Каледин* (Москва) **69, 71, 75, 81, 83—86**; *И. Калиновский* (Киев) **71, 73—75**; *Е. Канцыпер* (Таллин) **75**; *А. Карнаухов* (Ижевск) **75, 77**; *С. Кастелли* (Болград) **71, 73—75, 78, 85**; *М. Кваша* (Москва) **84**; *Ю. Кившарь* (Харьков) **74, 75, 84—86**; *В. Кидысюк* (Рязань) **69—72**; *М. Коваль* (Киев) **84**; *В. Комов* (Александров) **71—75, 83, 84, 86**; *К. Кондратец* (Киев) **69**; *Е. Корнилова* (Ефремов) **69**; *Л. Король* (Киев) **83, 84**; *А. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) **69—71, 73—75, 77, 78, 81, 84, 85**; *Н. Косматов* (Москва) **84**; *Д. Кравчук* (Киев) **73**; *С. Кравчук* (Киев) **69, 85**; *А. Крапивин* (Киев) **83—85**; *В. Криман* (Винница) **71, 74, 75, 84, 85**; *В. Кубатин* (Ленинград) **84**; *Д. Купцов* (Москва) **69, 74, 75, 83—86**; *Н. Кухаркин* (Москва) **74, 75, 85**; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) **69, 75, 78, 81—86**; *А. Латыпов* (Уфа) **78**; *И. Линшиц* (Винница) **74, 75, 83—85**; *С. Лиханский* (Херсон) **78**; *О. Лопин* (Фрунзе) **69, 70, 73, 75, 78**; *С. Люлькович* (Брест) **77**; *Б. Мадрахимов* (колх. Хамза Хорезмской обл.) **73**; *Г. Мазманиди* (Чимкент) **69, 70**; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) **73—75, 81, 83—85**; *К. Макарчук* (Киев) **69, 74, 75, 78, 84, 85**; *К. Макогон* (Запорожье)

(Окончание см. на с. 61)

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ



Из научного фольклора

Двое на воздушном шаре пролетают в незнакомом месте.

— Послушайте! — кричат они случайному прохожему. — Где мы находимся?

Тот внимательно смотрит на них и кричит в ответ:

— Вы находитесь на воздушном шаре!

— Наверное, это математик, — говорит один аэронавт другому.

— С чего ты это взял?

— Во-первых, он подумал. Во-вторых, он абсолютно прав. И, в-третьих, совершенно непонятно, как его ответ вообще можно использовать.

Задача-шутка

Об этой задаче аспиранты физики МГУ узнали от аспирантов-математиков года три назад, более точно автора задачи установить не удалось. Похоже, что она специально создана для специалистов по теории гравитации, но читателям «Кванта» тоже полезно попробовать на ней свои силы, особенно ученикам 4—5 классов.

Итак, задача:

Два человека вышли на балконы разных этажей многоэтажного здания, расположенные один над другим на одной вертикали. Одновременно (например, по радиосигналу точного времени) они кричат друг другу: «А».

Кто из них услышит крик партнера раньше — нижний или верхний? Для того чтобы собственный крик не мешал слушать, длительность звукового сигнала можно считать очень малой.

С. С. Хилькевич

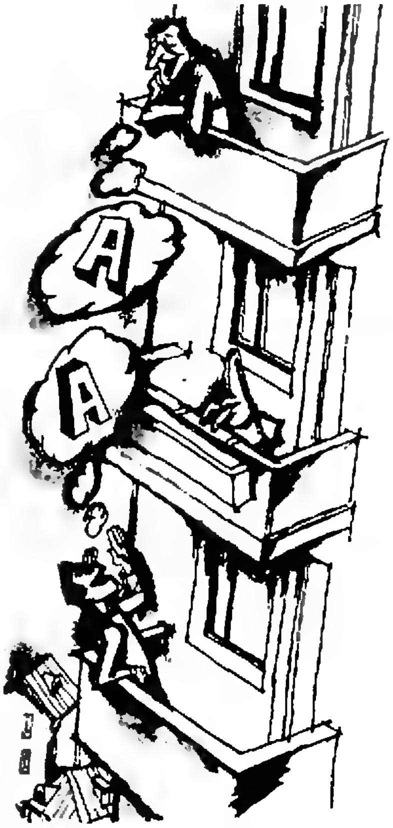
Фразы

Дуракам закон не писан... Так стоит ли набираться ума?

Действие равно противодействию... А бездействие?

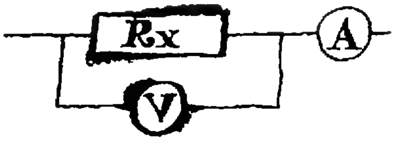
Я мыслю — и на это я существую.

О. Донской

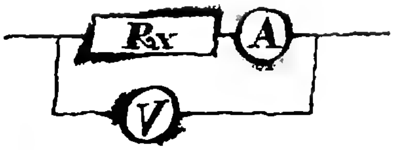


Маленькие хитрости

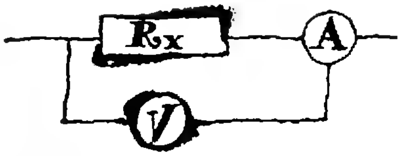
Если при измерении сопротивления резистора по схеме



измеренное значение меньше предполагаемого, а по схеме

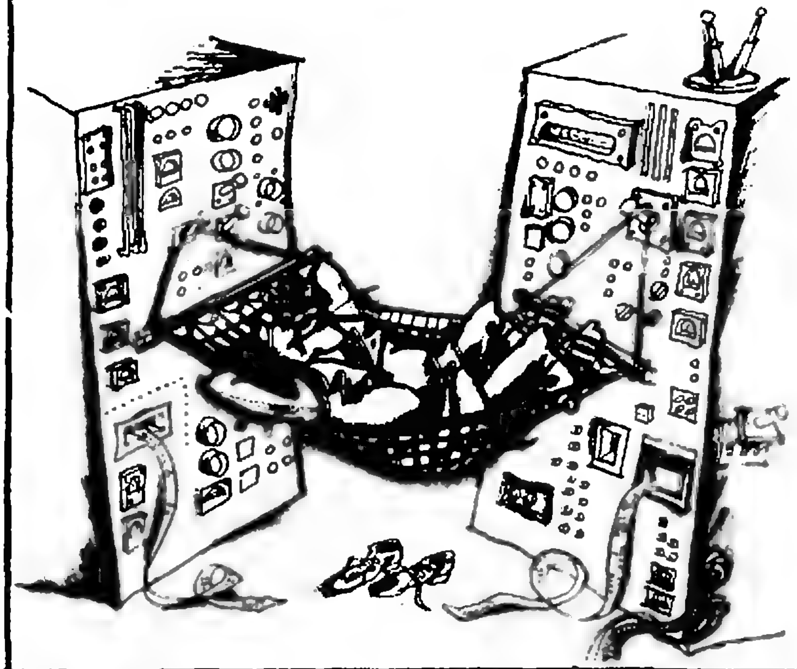


больше, то надо измерять по схеме



будет в самый раз.

Г. А. Зайдин



Рисунки В. М. Скрылева.

Задачи вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы в 1982 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в 1982 году в 6 университетов (Воронежский, Горьковский, Киевский, Тартуский, Ташкентский и Уральский), 4 педагогических института (Казанский, Одесский, Омский и Ярославский) и 3 политехнических института (Кишиневский, Рижский и Томский), а также в Московский архитектурный институт.

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. Смешали тридцатипроцентный раствор соляной кислоты с десятипроцентным и получили 600 г пятнадцатипроцентного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

2. Человек удаляется от подножья башни высотой 60 м со скоростью 8 км/ч. Какова его скорость удаления от вершины башни в момент, когда он находится на расстоянии 80 м от ее основания? Движение происходит в горизонтальной плоскости.

3. Найдите x из пропорции

$$\frac{x\cdot 34\frac{2}{5}}{0{,}4+8\cdot\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}=\frac{90}{1\frac{7}{8}\cdot 8-8{,}9+2{,}6:\frac{2}{3}}.$$

4. Упростите

а) $$\left(\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{5+\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{2}};$$

б) $$a^{\frac{1}{2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1+a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

5. Докажите, что значение выражения

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^{2}+\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^{2}}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^{-1}\cdot\left(a+(ab)^{\frac{1}{2}}\right)}:\frac{b-2\sqrt{ab}+a}{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}$$

не зависит от значений a и b.

6. Упростите и прологарифмируйте выражение

$$x=\left[\frac{4\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{(1-\cos 2\alpha)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\cos\alpha\left(\cos^{2}\frac{\alpha}{2}-\sin^{2}\frac{\alpha}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{5}}$$

7. Докажите, что

$$16\sin 10^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ\cdot\sin 90^\circ=1.$$

8. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$$

9. Сумма тридцати начальных членов геометрической прогрессии в 72 раза меньше, чем сумма ее следующих шестидесяти членов. Найдите отношение пятидесятого члена прогрессии к десятому ее члену.

10. Решите уравнение

а) $\frac{2}{x}-\frac{1}{1-x}=2;$

б) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x}\cdot 4^{\frac{x^2}{2}-1}=8^{-\frac{2}{3}x};$

в) $\frac{2^{x^2}\cdot 5^{x^2}-0{,}1^{3}\cdot\left(10^{3-x}\right)^{2}}{\sqrt{x+2}}=0;$

г) $5\cdot 4^{x}-3\cdot 10^{x}-2\cdot 25^{x}=0;$

д) $1-\lg(5x)=\lg(x-1);$

е) $\log_2^2 x+3=2\log_2 x^2;$

ж) $5\log_4 x+3\log_x 4=8;$

з) $\sin x(\sin x+\cos x)=1;$

и) $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4};$

к) $\cos^3 x+\cos^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}=0;$

л) $\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}3x-2\operatorname{tg}2x=0;$

м) $\sin 2x(2\sqrt{3}\sin x+2\cos x)+\sqrt{8}=\cos 2x(2\sqrt{3}\cos x-2\sin x).$

11. Найдите решения уравнения

$$\sin x-\cos x=\frac{3}{2},$$

которые удовлетворяют неравенству $|x|<3$.

12. Для какого из корней уравнения

$$4\cos x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sqrt{3}$$

выражение $2x^2+4x-3$ имеет наименьшее значение?

13. Найдите координаты точек пересечения графиков $y=\sin^2 x$ и $y=1+\cos x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

14. При каких значениях a уравнение

а) $|x^2+2ax|=1$ имеет 3 различных корня?

б) $a(x^2-x+1)=3x+5$ имеет 2 различных корня?

в) $\frac{a-1}{x+4}=\frac{2x+3}{x^2-x-20}$ имеет корень $x\leq 2$?

15. Решите систему

а) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(xy)+y+2=0 \\ 3^{2+y}+17=\frac{18}{xy} \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8\cdot(\sqrt{2})^{x-y}=0{,}5^{y-3} \\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3. \end{cases}$

16. Найдите числа x и y из равенства

$$2^x\vec{a}+y\vec{b}=40\cdot 5^y\vec{a}+(2-x)\vec{b},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы.

17. Решите неравенство

а) $\frac{|x-5|}{x+3}\geq 2$;

б) $\sqrt{x^2-4x-12}<x-1$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2-2x+4}$

г) $\frac{2^{4x}+4^{x+1}+3}{2^x-1-4^x}<0$;

д) $2\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x)>\log_{\frac{1}{3}}(6-\log_2 x)$;

е) $\log_{|x-1|}\left(\frac{7}{4}-x\right)>2$.

18. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств

а) $\begin{cases} x^2+y^2\leq 16 \\ 3y-6\leq 0 \\ 2y+6\geq 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x+y+1\geq 0 \\ x+y-2\leq 0 \\ 2x+8\geq 0. \end{cases}$

19. При каких значениях параметра a решения неравенства

$$\sqrt{9-x^2}\geq -a^2x$$

образуют промежуток длины $\frac{15}{4}$? Что это за промежуток?

20. Найдите область определения функции

а) $2^{3+\sqrt{x^2-25}}+\frac{x-4}{x-6}$;

б) $4\pi+\frac{1}{x\sqrt{x+1}}+\log_2(2-x)$;

в) $\log_{2x-3}\left(\frac{1-x}{x-3}\right)$;

г) $\frac{\lg\sin x}{\sqrt{15x-x^2-54}}$.

Анализ

1. Найдите $F''(0)$, если $F(x)=e^x\cdot\cos(x^2+x)$.

2. Найдите уравнение касательной, проведенной к кривой $y=-x^2+2x-1$ в точке с абсциссой $x=2$. Определите угол между этой касательной и прямой $y-x+1=0$.

3. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку A (3; 2) и касающейся параболы $y=x^2-2x$.

4. Из точки x оси Ox проводятся 2 негоризонтальные касательные — к графику функции $f(x)=-x^3$ и к графику функции $g(x)=\frac{2}{|x^3|+x^3}$. Для каких значений x угловой коэффициент первой касательной не меньше углового коэффициента второй касательной?

5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $6-3x^2+x^3$.

6. Докажите, что функция $-0{,}2x^5+0{,}5x^4-\frac{2}{3}x^3+x^2-x$ убывает на всей области определения.

7. Найдите критические точки функции $2\sin\frac{x}{2}+\sin x+x+3$.

8. Найдите точки максимума и точки минимума функции $2\ln x+x\left(\frac{x}{2}-3\right)$.

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3+3x^2+5$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

10. Движения первой и второй материальных точек вдоль одной прямой заданы, соответственно, уравнениями $s_1(t)=t^3-3t^2+3t+2$ и $s_2(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2$.

Найдите наименьшую скорость первой точки в промежутке убывания скорости второй точки.

11. Опишите свойства функции -2^x+1 и постройте ее график.

12. Исследуйте с помощью производной график функции $-x^4+2x^2$ и постройте ее график.

13. В плоскости xOy найдите треугольник ABC наименьшей площади, если A (—3; 0), B (3; 0) и вершина C лежит на графике функции $y=3+5^{2+(1-x)^4}$.

14. У прямоугольного треугольника ABC с прямым углом в вершине C $A(4;\ 0)$, $B(x_0,\ y_0)$ лежит на графике функции $y=x^3$, $1\leq x_0\leq 3$ и C лежит на оси Ox. Найдите абсциссу вершины B, при которой площадь треугольника будет наибольшей.

15. Из точки A окружности радиуса R проведены касательная и хорда AB. На касательной выбрана точка C так, что $|AB|=|BC|$. При каком значении $\widehat{BAC}$ площадь треугольника ABC будет наибольшей?

16. К кривой $y=x^2+bx+2$ в точках $x_1=-1$ и $x_2=-3$ проведены касательные. При каком значении b периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью Oy, будет наименьшим?

17. Основанием прямой призмы является квадрат. Призма вписана в полушар так, что ее нижнее основание лежит в плоскости большого круга полушара, а вершины верхнего основания лежат на шаровой поверхности. Найдите величину наибольшего объема призмы, если объем полушара равен Q.

18. При каком значении двугранного угла при основании правильной четырехугольной пирамиды отношение площади поверхности сферы, вписанной в пирамиду, к площади боковой поверхности пирамиды будет наибольшим?

Геометрия

1. Стороны треугольника ABC разделены точками M, K, P так, что $|AM|:|MB| = |BK|:|KC| = |CP|:|PA| = 1:2$. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми AK, BP и CM, если площадь треугольника ABC есть m.

2. Найдите угол треугольника, если известно, что стороны, заключающие этот угол, равны a и b, а биссектриса угла равна l.

3. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D так, что $|AD|:|DB| = 3:1$. Найдите периметр треугольника, если длина высоты, опущенной из вершины прямого угла, равна 3.

4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S. Пусть E — середина стороны AB, F — середина стороны BC, а P — точка пересечения отрезков EC и AF. Найдите площадь четырехугольника $BFPE$.

5. Около окружности описана трапеция, боковые стороны которой образуют с большей из параллельных сторон углы α и β. Определите радиус окружности, если площадь трапеции равна Q.

6. В окружности проведены радиусы OA, OB, OC. Найдите величину угла AOB, если $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$.

7. Плоские углы ASB, BSC, CSA тетраэдра $SABC$ равны 60°, 60°, 30°. Вычислите косинус угла между вектором $\vec{SB}$ и вектором, направленным по биссектрисе угла ASC, если $|SA| = |SB| = |SC| = a$.

8. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами вершин $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(-1;\ 3;\ 1)$, $C(-1;\ 7;\ 3)$, $D(-1;\ 6;\ 5)$. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

9. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро в точке S и наклоненная к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности образовавшейся при этом пирамиды с вершиной S, если длина стороны основания равна a.

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a. Через диагональ AC его грани $ABCD$ проведена плоскость параллельно прямой BO_1, где O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Определите площадь образовавшегося сечения.

11. Ромб $ABCD$ со стороной длины a и углом $\widehat{A} = \alpha$ лежит в основании пирамиды $SABCD$, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину A и точки M и N, которые делят ребра SB и SD в одном и том же отношении 2:1, считая от точки S.

Устный экзамен

Алгебра

1. Найдите $\log_{24}54$, если $\log_2 3 = a$.

2. Сравните значения выражений $\frac{1}{3}\lg 64 + \lg 0{,}25$ и $\lg 0{,}3$.

3. Расположите в порядке возрастания числа $\sin 3$, $\sin 1$ и $\sin 0$.

4. Вычислите без таблиц

а) $\cos\frac{191\pi}{3}$;

б) $16\sin 10° \cdot \sin 30° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° \cdot \sin 90°$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

5. Докажите тождество

а) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}(90° - \alpha) - \sin\alpha \cdot \cos\alpha} - 2\operatorname{tg}^2\alpha = 0$;

б) $\cos^6\alpha = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2\alpha + \frac{3}{16}\cos 4\alpha + \frac{1}{32}\cos 6\alpha$.

6. Произведение девяти начальных членов геометрической прогрессии равно $16\sqrt{2}$. Какой член геометрической прогрессии можно определить на основании этой информации? Чему он равен?

7. Решите уравнение

а) $|x^2 - x + 6| = x + 2$;

б) $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x$;

в) $\sqrt{8^{|x|-1}} = \sqrt[3]{4^{2-|x|}}$;

г) $2^{2x+2\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$;

д) $\log_3(3^x + 8) = 2 - x$;

е) $2\lg\lg x = \lg(3 - 2\lg x)$;

ж) $4^{\log_2(\lg x)} = \lg x - \lg^2 x + 1$;

з) $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6$;

и) $3 \cdot 2^{\log_x(3x-2)} + 2 \cdot 3^{\log_x(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 0$;

к) $\sin^2(\pi x) + \log_2^2(x^2 - 2x + 1) = 0$;

л) $\cos(5x) = \cos(5 + x)$;

м) $\sin 3x \cdot \cos 3x = \sin 2x$;

н) $\sin\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{-x}}{2}\right)^2 = \sin\frac{x}{2}$;

о) $|\sin x| + |\cos x| = 1{,}4$;

п) $\sqrt{3} \cdot \sin x = \sqrt{2 + \sin x}$;

р) $4^{\sin^2(\pi x)} + 3 \cdot 4^{\cos^2(\pi x)} = 8$;

с) $(a^2 - 1)x = a + 1$.

8. При каких значениях a уравнение $x^2 - 2(a-2)x + a^2 - 2a - 3 = 0$ имеет два различных положительных корня?

9. Решите систему

а) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2xy - z^2 = 16 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^x = 1{,}5 + y^{-x} \\ y^{2{,}5+x} = 64 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1. \end{cases}$

10. Решите неравенство

а) $3 - \frac{2x-17}{x-5} > \frac{x-5}{x+2}$;

б) $|x^3 - 1| > 1 - x$;

в) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$;

г) $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$;

д) $0{,}1^{\log_2\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)} < 10$;

е) $\log_x 17 > \log_x 11$;

ж) $\log_x \left(\frac{2x-1}{x-1}\right) > 1$;

з) $\sqrt{\lg \sin x} < x - 13\pi$;

и) $\frac{2x-1}{\log_2 x} < 0$;

к) $2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) < 1$;

л) $\sin x \cdot \cos x > 0$.

11. Изобразите на координатной плоскости множество решений

а) уравнения $|x| + x = |y| + y$;

б) неравенства $\log_{xy} y < 0$;

в) системы неравенств

$$\begin{cases} y - x \leqslant 0 \\ x + y \geqslant 0 \\ xy \leqslant 3. \end{cases}$$

12. При каких значениях параметра a множество решений неравенства

а) $x^2 + ax - 1 < 0$ будет интервалом длины 5?

б) $x^2 - ax - 6a < 0$ будет интервалом, длина которого превышает 5?

13. При каких значениях параметров a, b множество решений неравенства

$$\sqrt{x-a} > \sqrt{2x-b}$$

совпадает с промежутком $[1;\ 5[$?

14. При каких значениях параметра a имеет решения система неравенств

а) $\begin{cases} ax > -1 \\ x + a > 0 \end{cases}$?

б) $\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a < 0 \\ x^2 + (a+3)x + 3a < 0 \end{cases}$?

15. Найдите область определения функции

а) $\frac{\sqrt{x-2} - \lg(5x)}{\lg(5-x)}$;

б) $\sqrt{\cos x}$;

в) $\arccos \frac{x+1}{x-2}$.

16. Найдите область значений функции $\sqrt{x-1} + \sqrt{12-2x}$.

17. Постройте график функции

а) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + x$;

б) $\log_{0,5} |1 - 2x| + 2$;

в) $\log_2 \sin x$.

18. На прямой $y = 2x + 5$ и параболе $y = x^2 + 3x - 1$ найдите точки, симметричные относительно оси Ox.

Анализ

1. Вычислите

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}.$$

2. Найдите производную функции $2\sin(1{,}8x - 3\pi) + \cos x \cdot \sin x$.

3. Найдите уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 6$ в точке с абсциссой $x = 1$.

4. Найдите уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $M\,(2;\ -5)$.

5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

а) $x + \frac{4}{x}$;

б) $\cos x - 2x$.

6. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2\cos x - \sin^2 x$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

7. В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 32 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Какова должна быть длина сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Геометрия

1. Катеты прямоугольного треугольника равны b и c. Найдите биссектрису прямого угла.

2. Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведена секущая. Докажите, что отрезки этой секущей, заключенные внутри окружностей, относятся как радиусы.

3. В угол, равный α, вписаны две окружности, касающиеся друг друга. Найдите отношение их радиусов.

4. В полукруг вписаны две одинаковые окружности, касающиеся друг друга. Какой радиус имеют эти окружности, если радиус полукруга равен R?

5. Две стороны треугольника равны a и b $(a > b)$. В каких пределах может меняться

а) его периметр?

б) радиус описанной около него окружности?

6. Сторона треугольника равна a, противолежащий угол — α. В каких пределах может меняться его площадь?

7. Два конгруэнтных квадрата имеют общий центр. Стороны одного из них параллельны диагоналям другого. Вычислите площадь общей части этих квадратов, если площадь каждого из них равна S.

8. К окружности с центром O проведены две касательные, пересекающиеся в точке P. Разложите вектор $\vec{PO}$ по $\vec{PA}$ и $\vec{PB}$, если известно, что A и B — точки касания и $\widehat{APB} = 120°$.

9. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны и образуют попарно друг с другом углы $\frac{2\pi}{3}$. Разложите вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$.

10. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее объем на две равные части. В каком отношении эта плоскость делит ее высоту?

11. Если в каждый из двух многогранников можно вписать шар, причем радиусы обоих шаров одинаковы, то объемы этих многогранников относятся так же, как площади их поверхностей. Почему?

Физика

Письменный экзамен

Вариант I

Выберите один или несколько правильных ответов на следующие вопросы.

1. Ускорение математического маятника минимально: а) при прохождении точки равновесия; б) в момент остановки в наивысшей точке; в) при приближении к точке равновесия.

2. Инертность тела характеризуется: а) массой; б) весом; в) плотностью; г) объемом.

3. Соотношение между температурой, выраженной по шкале Кельвина (T), и температурой, выраженной по шкале Цельсия (t), следующее: а) $t=T+273$; б) $T=t+273$; в) $T=1/273+t$; г) $t=1/273+T$.

4. Какая из перечисленных единиц является единицей удельной теплоемкости: а) Н; б) К; в) Дж/кг; г) Дж/(кг · К); д) Вт?

5. Как изменится показание амперметра при замыкании ключа (рис. 1):

а) увеличится в 2 раза;
б) уменьшится в 2 раза;
в) увеличится в 4 раза;
г) уменьшится в 4 раза;
д) не изменится?

6. Работа трансформатора основана на: а) законе Ома; б) законе Кулона; в) законе электромагнитной индукции; г) законе Джоуля — Ленца.

7. Через p—n переход протекает обратный ток, если: а) потенциал полупроводника p-типа положительный, n-типа отрицательный; б) потенциал полупроводника p-типа отрицательный, n-типа положительный.

8. При помощи собирающей линзы получаем мнимое изображение, если предмет находится: а) между фокусом и линзой; б) между линзой и двойным фокусным расстоянием; в) дальше, чем двойное фокусное расстояние.

9. Луч света переходит из воздуха в воду. Какому условию удовлетворяет угол преломления β, если угол падения равен α: а) $\beta>\alpha$; б) $\beta<\alpha$; в) $\beta=\alpha$?

10. Какое из перечисленных физических явлений используется в счетчике Гейгера — Мюллера: а) фотоэффект; б) ионизация атомов при столкновениях частиц; в) конденсация пересыщенного пара?

II

1. Сформулируйте третий закон Ньютона.
2. Что такое круговая частота?
3. Сформулируйте законы фотоэффекта.
4. Сформулируйте закон Джоуля — Ленца.
5. Дайте определение единицы индуктивности — генри.
6. Сформулируйте постулаты Бора.

III

1. Тело массой $m=200$ г бросают вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=50$ м/с. Найдите потенциальную энергию тела в конце второй секунды.

2. На графике представлен процесс изотермического расширения идеального газа (рис. 2). Запишите для данного процесса уравнение $p=p(V)$.

3. Напряжение в цепи изменяется по закону $u=150 \sin \omega t$ (в единицах СИ). Какое количество теплоты выделится за $\tau=5$ мин, если в цепь включили электрическую плиту сопротивлением $R=50$ Ом?

4. Точечный источник света находится на глубине $h=2$ м под водой. Найдите радиус круга на поверхности воды ($n=1{,}33$), через который лучи света выходят в воздух?

Вариант 2

1. а) Кинетическая энергия, ее физический смысл.

б) Постулаты Бора.

в) Определите длину звуковой волны свистка локомотива если она соответствует частоте 600 колебаний в 1 секунду. Скорость звука $v=330$ м/с.

2. Понятие о спектральном анализе. Инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра. Спектры излучения и поглощения.

3. Электроннолучевая трубка.

4. Из одной точки над поверхностью Земли одновременно начинают двигаться два тела: одно вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=39{,}2$ м/с, другое — свободно падать. Через какое время расстояние между ними будет $l=117{,}6$ м?

5. Какой длины необходим нихромовый провод для нагревателя, в котором за $\tau=6$ мин можно нагреть $m=400$ г воды от $t_1=10\,^\circ$C до $t_2=100\,^\circ$C, если коэффициент полезного действия $\eta=90\%$, а напряжение $U=120$ В? Поперечное сечение провода $S=0{,}1$ мм^2. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}19\cdot10^3$ Дж/(кг · К), удельное сопротивление нихрома $\rho=1{,}1\cdot10^{-6}$ Ом · м.

Задачи устного экзамена

Механика

1. Под каким углом к горизонту следует бросить камень из точки A, сообщив ему скорость $v_0=2\sqrt{gl}$, чтобы камень упал в точке B (рис. 3)? Нарисуйте траекторию камня (сопротивлением воздуха пренебречь).

2. С вершины башни высотой $h=125$ м, стоящей на экваторе, свободно падает тело. Определите отклонение точки падения тела к востоку (от вертикали), связанное с суточным вращением Земли ($T=1$ суткам).

3. Две книги лежат горизонтально одна на другой. Если нижнюю книгу приподнять за край, то верхняя равномерно соскользнет с нижней при угле наклона к горизонту $\alpha=30°$. Чему равен коэффициент трения между книгами?

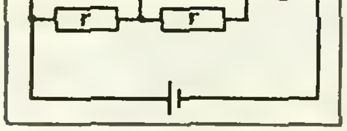


Рис. 1.

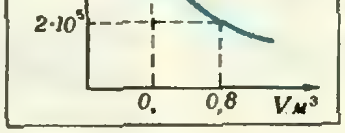


Рис. 2.

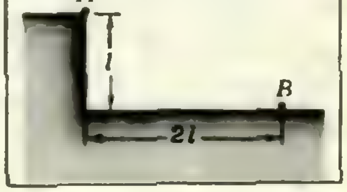


Рис. 3.

4. Два груза с массами m_1 и m_2, соединенные нитью, движутся по гладкой плоскости. Когда сила $F=100$ Н была приложена к правому грузу массы m_2, натяжение нити было равно $T=30$ Н. Каким будет натяжение нити, если эту силу приложить к левому грузу?

5. Однородная балка массой $m=60$ кг и длиной $l=4$ м опирается о гладкий пол и выступ B, находящийся на высоте $h=3$ м над полом (рис. 4). Балка образует угол $\alpha=30°$ с вертикалью и удерживается веревкой AC, протянутой у самого пола. Вычислите натяжение веревки, реакцию пола и реакцию выступа B.

6. Прямоугольная трапеция вырезана из однородного листового материала. Основание трапеции в два раза больше ее высоты и верхнего основания, равного единице длины. Определите графически положение центра масс трапеции.

7. Два пассажира одинаковой массы $m=70$ кг находятся на платформе, стоящей неподвижно на рельсах. Масса платформы $M=280$ кг. Каждый пассажир начинает бежать с одинаковой относительно платформы скоростью $u=6$ м/с. Какую скорость приобретет платформа, если они спрыгнут в одну сторону одновременно и последовательно? А если в разные стороны?

8. Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. В какой по счету доске пуля застрянет, если ее скорость после прохождения первой доски равна $v_1=0{,}8\ v_0$?

9. С какой высоты брошен шарик, если он погрузился в воду на глубину $h=0{,}1$ м? Плотность шарика $\varrho_ш=0{,}4\cdot10^3$ кг/м^3, плотность воды $\varrho_в=10^3$ кг/м^3. Сопротивлением воздуха и воды пренебречь.

10. Конькобежец массой $M=60$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m=2$ кг со скоростью $v=9$ м/с. Найдите, на какое расстояние откатится конькобежец, если известно, что коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}02$.

11. У основания наклонной плоскости, высота которой $H=1{,}2$ м и угол наклона к горизонту $\alpha=45°$, закреплена массивная стальная плита. С вершины наклонной плоскости начинает скользить без начальной скорости стальная шайба. На какую высоту поднимется шайба после упругого удара о плиту, если коэффициент трения между шайбой и наклонной плоскостью $\mu=0{,}2$?

12. На дощечке укреплен ствол пружинного пистолета, заряженного шариком массы $m=20$ г (рис. 5). Дощечка, имеющая вместе со стволом массу $M=200$ г, положена на гладкий горизонтальный стол. Легкая пружинка жесткости $k=2{,}2\cdot10^2$ Н/м сжата до длины $l=5$ см при свободной длине $l_0=10$ см. Определите относительную скорость разлета шарика и дощечки после выстрела. Оцените время выстрела (время выталкивания шарика пружинкой).

Жидкости и газы

1. Полый цинковый шар ($\varrho=7{,}1\cdot10^3$ кг/м^3), внешний объем которого $V=2\cdot10^{-4}$ м^3, плавает так, что половина его находится в воде. Найдите объем свободного пространства внутри шара.

2. Прямоугольный понтон, масса которого $M=700$ кг, имеет размеры: длину $l=5$ м, ширину $d=3$ м и высоту $h=0{,}7$ м. Найдите осадку понтона без нагрузки и предельную грузоподъемность при высоте бортов над ватерлинией $h'=0{,}2$ м.

3. В длинной вертикальной трубе с гладкими стенками, опущенной одним концом в воду, плавает легкий поршень (рис. 6). Площадь поршня $S=100$ см^2. Какую работу следует совершить, чтобы поршень медленно поднять до высоты $H=20$ м? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, плотность воды $\varrho=10^3$ кг/м^3, а ускорение земного тяготения считать равным $g=10$ м/с^2.

Молекулярная физика.
Тепловые явления

1. Определите плотность воздуха при давлении $p=3{,}8\cdot10^4$ Па и температуре $t=0°$C, если при нормальных условиях плотность воздуха $\varrho_0=1{,}29$ кг/м^3.

2. Объем комнаты $V=100$ м^3. Какова масса вышедшего из комнаты воздуха при повышении температуры от $t_1=10°$C до $t_2=25°$C, если атмосферное давление $p_a=102$ кПа? Плотность воздуха при нормальных условиях $\varrho_0=1{,}29$ кг/м^3.

3. Два сосуда одинакового объема $V=10^{-2}$ м^3 соединены узкой трубкой с краном. Кран закрыт. При одинаковой температуре $T=300$ К давление кислорода в одном сосуде равно $p_1=0{,}8\cdot10^5$ Па, во втором — $p_2=1{,}2\cdot10^5$ Па. Найдите массу газа, перешедшего из одного сосуда в другой при открытии крана, если температура осталась неизменной. Масса одного моля кислорода $\mu=0{,}032$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

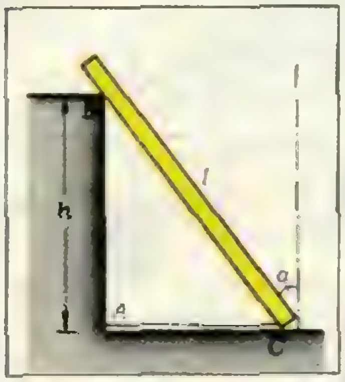


Рис. 4.

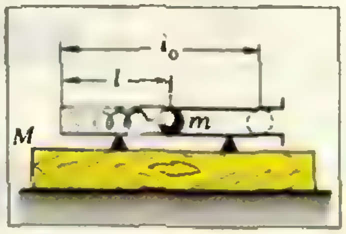


Рис. 5.

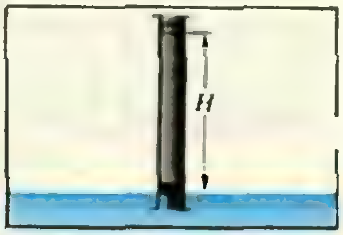


Рис. 6.

4. Оцените расстояние между ближайшими ионами кубической решетки поваренной соли, если ее плотность $\rho=2{,}18\cdot10^3$ кг/м³, а молярная масса $\mu=0{,}058$ кг/моль.

5. На нагреватель поставили открытый сосуд с водой. Через $\tau_1=40$ мин после начала кипения в сосуд добавили воду, масса которой равна массе выкипевшей за это время воды. При неизменных условиях нагрева вода в сосуде снова закипела спустя время $\tau_2=3$ мин. Какова была первоначальная температура добавленной воды? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $L=22{,}6\cdot10^5$ Дж/кг, атмосферное давление — нормальное.

6. При изготовлении дроби капли расплавленного свинца падают в воду с температурой $t_0=17$ °С. Определите массу свинца, которая доведет $m_0=1$ кг воды до температуры кипения $t_к=100$ °С. Температура плавления свинца $t_{пл}=327$ °С, удельная теплота плавления свинца $\lambda=25$ кДж/кг, удельная теплоемкость свинца $c=0{,}126$ кДж/(кг · К), удельная теплоемкость воды $c_0=4{,}18$ кДж / (кг · К).

Основы электродинамики

1. Одинаковые по модулю ($q=1{,}8\cdot10^{-8}$ Кл), но разные по знаку заряды расположены в двух вершинах равностороннего треугольника. Сторона треугольника $a=2$ м. Определите напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника.

2. Атом водорода состоит из ядра, вокруг которого вращается единственный электрон. С какой частотой вращается электрон вокруг ядра, если его орбита — окружность с радиусом $r=3\cdot10^{-10}$ м? Масса электрона $m=9\cdot10^{-31}$ кг, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, заряд ядра $q=e$, электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

3. Электрон со скоростью $v_0=13\,300$ км/с влетает в середину плоского конденсатора параллельно его пластинам и вылетает у края одной из пластин. Удельный заряд электрона $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг. Разность потенциалов между пластинами $U=1000$ В. Определите направление и модуль скорости вылета электрона из конденсатора.

4. Шарик массой $m=1$ г перемещается из точки A, потенциал которой $\varphi_A=600$ В, в точку B, потенциал которой $\varphi_B=0$. Определите скорость шарика в точке A, если в точке B его скорость $v_B=20$ см/с. Заряд шарика $q=10^{-8}$ Кл.

5. Источник с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r включен в схему, изображенную на рисунке 7. Найдите заряд конденсатора, если C, R_1 и R_2 известны.

6. Два источника тока соединены последовательно. ЭДС первого элемента $\mathscr{E}_1=2$ В и внутреннее сопротивление $r_1=0{,}5$ Ом, ЭДС второго элемента $\mathscr{E}_2=1{,}2$ В и внутреннее сопротивление $r_2=1{,}5$ Ом. Сопротивление внешней цепи $R=5$ Ом. Определите напряжение на внешнем участке цепи и напряжения на клеммах каждого источника.

7. Три электролитические ванны соединены так, как показано на рисунке 8. В двух из них имеется раствор $AgNO_3$, а третьей — раствор $CuSO_4$. Сколько серебра выделилось в первой ванне, если во второй выделилось $m_2=60{,}4$ мг серебра, а в третьей — $m_3=41{,}5$ мг меди? Электрохимический эквивалент серебра $k_с=1{,}118$ мг/Кл, меди — $k_м=0{,}329$ мг/Кл.

8. Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью $v=400$ км/с под углом $\alpha=60°$ к вектору магнитной индукции $\vec{B}$ ($B=10^{-3}$ Тл). Сколько витков опишет электрон вдоль магнитного поля на расстоянии $r=10\,000$ км? Удельный заряд электрона $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

9. Рамка, имеющая $r=100$ витков площадью $S=5$ см² каждый, замкнута на гальванометр с сопротивлением $R=10$ кОм. Рамка находится в однородном поле с индукцией $B=10^{-2}$ Тл, причем линии поля перпендикулярны к плоскости рамки. Какой заряд протечет по цепи гальванометра, если направление магнитного поля изменить на противоположное? Можно считать, что индукция магнитного поля с течением времени изменялась равномерно.

10. Над закрепленным проволочным кольцом с разрезом висит на нити магнит (рис. 9). Нить пережигают, и магнит пролетает сквозь кольцо. Определите отношение разности потенциалов между точками A и B в моменты прохождения плоскости кольца северного и южного концов магнита. Приведите качественный график зависимости разности потенциалов от времени, выбрав за начало отсчета момент пережигания нити.

Колебания и волны

1. Во сколько раз изменится период колебаний математического маятника при перенесении его с Земли на Луну? Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Земли в 3,7 раза больше радиуса Луны.

2. Ракета поднимается вверх с ускорением $a=3g$. Сколько полных колебаний совершит помещенный в ракете маятник длиной $l=1$ м за время, в течение которого ракета поднимется на высоту $H=1480$ м? Зависимостью

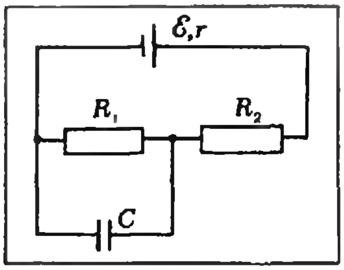


Рис. 7.

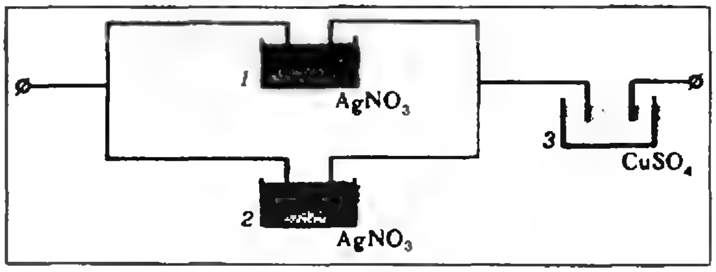


Рис. 8.

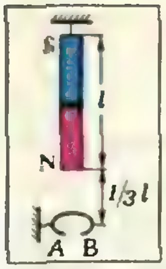


Рис. 9.

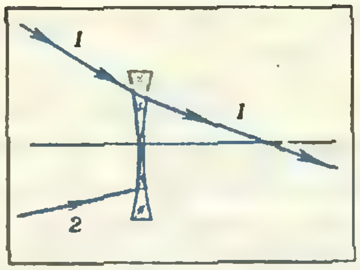


Рис. 10.

ускорения свободного падения от высоты пренебречь.

3. Шарик, имеющий массу $m=10$ г и заряд $q=2\cdot10^{-4}$ Кл, подвешен на нерастяжимой нити длиной $l=25$ см в поле плоского горизонтального конденсатора. Разность потенциалов между пластинами конденсатора равна $U=120$ В, расстояние между ними $d=30$ см. Чему равен период колебаний шарика на нити?

4. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и воздушного конденсатора, *настроен на длину волны* $\lambda_1=300$ *м.* При этом расстояние между пластинами конденсатора $d_1=4{,}8$ мм. Каким должно быть это расстояние, чтобы контур был настроен на длину волны $\lambda_2=240$ м?

Оптика

1. Два плоских зеркала образуют прямой двугранный угол. В плоскости, перпендикулярной ребру угла, на одно из зеркал падает луч света под углом $\alpha=60°$. Точка падения находится от ребра угла на расстоянии $d=10$ см. Определите угловое и линейное смещения двукратно отраженного луча по отношению к падающему.

2. На стеклянную пластину с показателем преломления $n=1{,}5$ падает луч света. Каков угол падения луча, если угол между отраженным и преломленным лучами $\gamma=90°$?

3. Предельный угол полного отражения стекла на границе с воздухом равен $\alpha_{01}=42°$ ($\sin 42°=0{,}669$), а на границе с водой — $\alpha_{02}=62°30'$ ($\sin 62°30'=0{,}887$). Найдите скорость света в воде.

4. На дне сосуда, наполненного жидкостью до высоты h, находится точечный источник света. На поверхности плавает круглая непрозрачная пластинка таким образом, что ее центр находится над источником света. Какой наименьший радиус должна иметь эта пластинка, чтобы ни один луч не мог выйти через поверхность жидкости? Показатель преломления жидкости n.

5. На горизонтальном дне водоема лежит плоское зеркало. Какова глубина водоема, если луч, отраженный от зеркала, выходит на поверхность воды на расстоянии $l=3$ м от места своего вхождения в воду? Угол падения луча на поверхность воды $\alpha=30°$, показатель преломления воды $n=1{,}33$.

6. Собирающая линза дает действительное и увеличенное в $\Gamma=2$ раза изображение предмета. Определите фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением предмета $f=24$ см.

7. Ход луча *1*, прошедшего рассеивающую линзу, изображен на рисунке 10. В каком направлении пойдет луч *2* после линзы?

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 52)

72, 74, 75, 78; *А. Малай* (Каушаны) 69, 74, 77, 78, 84; *А. Марков* (Москва) 85; *Л. Маркович* (Брест) 69, 70, 73—75, 85; *С. Марук* (Фрунзе) 70, 73—75; *И. Медков* (Москва) 74, 75, 77, 83—85; *А. Мишуров* (Железноводск) 84; *В. Мороз* (Минск) 73, 74, 77; *Х. Муртазаев* (Андижан) 75; *С. Мусаев* (Баку) 69, 70, 73, 74, 83, 85; *Д. Набутовский* (Новосибирск) 69, 71, 74, 77, 84, 85; *О. Ницора* (Горький) 85; *А. Носков* (Москва) 69; *Я. Олейник* (Москва) 69; *С. Орлов* (Москва) 69, 73, 75, 83, 86; *А. Охапкин* (Львов) 74; *А. Пивельев* (Фрязино) 85; *И. Пильников* (Тамбов) 74, 75, 84; *Р. Погосян* (Баку) 74; *О. Пузырко* (Пярну) 78, 83—85; *М. Пустильник* (Свердловск) 69—75, 83, 84; *Ш. Рзаев* (Баку) 73, 74; *С. Родионов* (п. Болшево Московской обл.) 69, 73, 74; *М. Розенберг* (Ленинград) 69, 70, 73, 77, 78, 85; *Н. Розенвайн* (Киев) 70, 74, 78, 84; *В. Ромашин* (Донецк) 69, 70, 74, 75, 77; *В. Рыбенков* (Махачкала) 69, 74, 75, 81, 84, 85; *А. Рыляков* (Саратов) 69—71, 73—75, 84, 85; *В. Сабодаш* (Киев) 85; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 73, 74, 78, 84, 85; *В. Семененко* (Киев) 69, 75, 84, 85; *В. Сергеев* (Караганда) 74, 75, 78; *Ф. Серженко* (Запорожье) 69, 72, 74, 75, 78, 83, 84; *С. Симанов* (Долгопрудный) 69, 71, 73—75, 78, 81, 83, 84; *М. Скорик* (Киев) 72, 74, 75, 78, 83, 85; *Я. Соболевский* (Киев) 84, 85; *Р. Сулейманов* (Янгиабад) 81; *А. Сурков* (Ленинград) 71; *Т. Терещенко* (Киев) 84; *О. Третьяков* (Омск) 83—86; *О. Фатьянов* (Курск) 69—75, 78—85; *Н. Федин* (Омск) 69, 70, 72—78, 83, 85; *В. Фельдман* (Саратов) 70, 74—76, 84; *Л. Фельдман* (Саратов) 74, 75, 81, 84; *О. Фирсов* (Сухуми) 75; *Ю. Чаплыгин* (Валуйки) 69—71, 74, 75, 78, 81, 83, 85; *О. Чернышев* (Тольятти) 73; *А. Чудновский* (Киев) 73, 74; *М. Шамонин* (Кемерово) 86; *Д. Шаповалов* (Джезказган) 85; *М. Шепетько* (Давид-Городок) 73, 75, 81; *Ю. Шефтель* (Киев) 73, 78; *М. Шнайдер* (Винница) 81; *И. Шойхет* (Ташкент) 73, 85; *Ю. Щербаков* (Запорожье) 69, 74, 78; *С. Юровский* (Мытищи) 75; *М. Яновский* (Киев) 85; *И. Яцун* (Днепропетровск) 74, 75.

Задачи вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы в 1982 году

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. 150 г и 450 г. **2.** 6,4 км/ч. **3.** 9 **4.** а) $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; б) $\frac{2\sqrt{a}}{a^2(a+1)}$. **6.** $x=\sqrt[4]{\frac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}$.

9. 16. **10.** а) $\left\{\frac{1}{2},\ 2\right\}$; б) $\{-1,\ 2\}$; в) $\{1\}$; г) $\{0\}$; д) $\{2\}$; е) $\{2,\ 8\}$; ж) $\{2\sqrt[5]{2},\ 4\}$; з) $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi l$ $(k, l\in \mathbf{Z})$; и) $x_1=\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$; к) $x=\pi+2\pi k\,(k\in\mathbf{Z})$; л) $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{8}l$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$; м) $x=-\frac{\pi}{18}\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k$ $(k\in\mathbf{Z})$. **11.** $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{11}{12}\pi$. **12.** $-\frac{\pi}{3}$.

13. $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$, $(\pi;\ 0)$. **14.** а) -1, 1; б) $]-\frac{1}{3};0\,[\,\cup\,]\,0;9\,[$; в) $]-\frac{4}{3};\frac{14}{9}\,[\,\cup\,]\,\frac{14}{9};3\,[$. **15.** а) $\left\{\left(-\frac{1}{2};\ -2\right)\right\}$; б) $\{(3;\ -3)\}$.

16. $x=3$, $y=-1$. **17.** а) $]-3;\ -\frac{1}{3}\,[$; б) $[6;+\infty\,[$; в) $]-\infty;0\,[\,\cup\,]\,0;+\infty\,[$; г) $\boldsymbol{R}$; д) $]\,1;4\,[$; е) $]-\frac{1}{2};0\,[\,\cup\,]\,\frac{3}{2};\frac{7}{4}\,[$. **19.** $a=\pm\sqrt[4]{15}$, $\left[-\frac{3}{4};\ 3\right]$. **20.** а) $]-\infty;-5\,]\cup[\,5;6\,[\,\cup\,]\,6;+\infty\,[$; б) $]-1;0\,[\,\cup\,]\,0;2\,[$; в) $]\,\frac{3}{2};2\,[\,\cup\,]\,2;3\,[$; г) $]\,2\pi;9\,[$.

Анализ

1. 0. **2.** $y=-2x+3$, $\operatorname{arctg}3$. **3.** $y=2x-4$ и $y=6x-16$. **4.** $]\,0;\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\,]$. **5.** Промежутки возрастания — $]-\infty;0]$, $[2;+\infty\,[$, промежуток убывания — $[0;\ 2]$. **7.** $x_1=\pi+2\pi k$, $x_2=\pm\frac{4}{3}\pi+4\pi l\,(k,\ l\in\mathbf{Z})$. **8.** $x=1$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума. **9.** $\max\limits_{[-1;\ 1]} f(x)=f(1)=9$, $\min\limits_{[-1;\ 1]} f(x)=f(0)=5$.

10. 0. **13.** $C(1;\ 28)$. **14.** $x_0=3$. **15.** $\frac{\pi}{3}$. **16.** 4.

17. $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}Q$. **18.** $\arccos(\sqrt{2}-1)$.

Геометрия

1. $\frac{m}{7}$. Указание. Через точку K проведите прямую, параллельную (CM). **2.** $2\arccos\frac{l(a+b)}{2ab}$. Указание. Пусть ABC — данный треугольник и CD — данная биссектриса. К треугольникам BCD, ACD и ABC примените теорему синусов. **3.** $6(1+\sqrt{3})$. **4.** $\frac{S}{6}$. Указание. Медианы треугольника разбивают его на 6 треугольничков одинаковой площади.

5. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}Q}$. **6.** 120°.

7. $\frac{1}{2\cos 15^\circ}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. Замечание. Искомая величина полностью определяется данными плоскими углами. **9.** $\frac{a^2\sqrt{3}\,(1+2\sin\alpha)}{4\cos\alpha}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

11. $\frac{a^2}{6}\sin\alpha\sqrt{9+\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\beta}$.

Устный экзамен

Алгебра

1. $\frac{3a+1}{a+3}$. **2.** $\frac{1}{3}\lg 64+\lg 0{,}25=0>\lg 0{,}3$. **3.** $\sin 0<\sin 3<\sin 1$. **4.** а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) 0.

6. $a_5=\sqrt{2}$ **7.** а) $\varnothing$; б) $\{7\}$; в) $\left\{-\frac{17}{13},\ \frac{17}{13}\right\}$; г) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; д) $\{0\}$; е) $\{10\}$; ж) $\{10\}$; з) $\{9\}$; и) $\{2\}$; к) $\{0,\ 2\}$; л) $x_1=-\frac{5}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $x_2=\frac{5}{4}+\frac{\pi}{2}l\,(k,\ l\in\mathbf{Z})$; м) $x_1=\frac{\pi}{2}k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}l\,(k,\ l\in\mathbf{Z})$; н) $\{0\}$; о) $x_1=\frac{(-1)^k}{2}\arcsin 0{,}96+\frac{\pi}{2}k$, $x_2=\frac{(-1)^{l+1}}{2}\times\arcsin 0{,}96+\frac{\pi}{2}l\,(k,\ l\in\mathbf{Z})$; п) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\,(k\in\mathbf{Z})$; р) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\,(k\in\mathbf{Z})$; с) $\varnothing$ при $a=1$, $\boldsymbol{R}$ при $a=-1$, $\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$ при $|a|\neq 1$. **8.** $]\,3;\ \frac{7}{2}\,[$. **9.** а) $\{(4;\ 4;\ -4)\}$; б) $\left\{\left(\frac{1}{2};\ 4\right)\right\}$; в) $\left\{\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3}\right),\ (3;\ 9)\right\}$.

10. а) $]-2;\ \frac{3}{2}\,[\,\cup\,]\,5;+\infty\,[$; б) $]-\infty;-1\,[\,\cup\,]\,0;1\,[\,\cup\,]\,1;+\infty\,[$; в) $]-\infty;-2\,]\cup]\,14;+\infty\,[$; г) $]\,0;\ 2-\log_2 3\,[\,\cup\,]\,1;+\infty\,[$; д) $]-\infty;-3\,[\,\cup\,]\,\frac{5}{3};+\infty\,[$;

е) $]1; +\infty[$; ж) $\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right[\cup]1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}[$; з) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\,(k=7, 8, 9, \ldots)$; и) $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$; к) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{7}{6}\pi+2\pi k\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$; л) $]\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k[\,(k \in \mathbf{Z})$. **11.** а) См. рис. 1; б) См. рис. 2; в) См. рис. 3. **12.** а) $-\sqrt{21}, \sqrt{21}$; б) $]-\infty; -25[\cup]1; +\infty[$. **13.** $a=-3, b=2$. **14.** а) $]-1; +\infty[$; б) $]-\infty; 0[$. **15.** а) $]2; 4[\cup]4; 5[$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$; в) $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **16.** $[\sqrt{5}; \sqrt{15}]$.

17. а) Указание. $\sqrt{x^2}=|x|$; б) Указание. В одной и той же системе координат постройте последовательно графики функций $\log_{0,5} x$, $\log_{0,5}|x|$, $\log_{0,5}|2x|$, $\log_{0,5}|2x-1|$, $\log_{0,5}|2x-1|+2$; **18.** $A\,(-1; 3)$ и $A'\,(-1; -3)$, $B\,(-4; -3)$ и $B'\,(-4; 3)$.

Анализ

1. -1. **2.** $-3{,}6\sin 1{,}8x+\cos 2x$. **3.** $y=4x-8$. **4.** $y=-4x+3$ и $y=4x-13$. **5.** а) Промежутки возрастания — $]-\infty; -2]$ и $[2; +\infty[$, промежутки убывания — $[-2; 0[$ и $]0; 2]$; б) Убывает на $\mathbf{R}$. **6.** $\max\limits_{[0;\, 2\pi]} f(x)=f(0)=2$.

7. 16 см и $4\sqrt{3}$ см

Геометрия

1. $\frac{bc}{b+c}\sqrt{2}$. **3.** $\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$. **4.** $(\sqrt{2}-1)R$.

5. а) $]2a; 2(a+b)[$; б) $]\frac{a}{2}; +\infty[$.

6. $]0; \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}]$. **7.** $2(\sqrt{2}-1)S$. **8.** $\vec{PO}=2\vec{PA}+2\vec{PB}$. **9.** $\vec{a}=-\frac{3}{2}\vec{b}-3\vec{c}$. **10.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

11. Потому что $V=1/3rS$ (V — объем многогранника, r — радиус вписанного в него шара, S — площадь его поверхности).

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 1а, 2а, 3б, 4г, 5д, 6в, 7б, 8а, 9б, 10б. **III.** **1.** $E=mg(v_0t-gt^2/2)=160$ Дж. **2.** $p=1{,}6\cdot 10^5/V$. **3.** $Q=U_м^2\tau/(2R)=67{,}5$ кДж. **4.** $r=h/\sqrt{n^2-1}\approx 2{,}28$ м.

Вариант 2

4. $t=l/v_0=3$ с. **5.** $l=U^2\tau\eta S/(cm\Delta t\varrho)\approx 2{,}8$ м.

Задачи устного экзамена

Механика

1. Возможны два случая: а) камень брошен вниз под углом $\alpha=1/2\operatorname{arctg}(1/2)$ к горизонту; б) камень брошен вверх под углом $\alpha=90°-1/2\operatorname{arctg}(1/2)$ к горизонту.

2. $x=\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\approx 4{,}5$ см.

3. $\mu=\operatorname{tg}\alpha\approx 0{,}58$.

4. $T'=F-T=70$ Н.

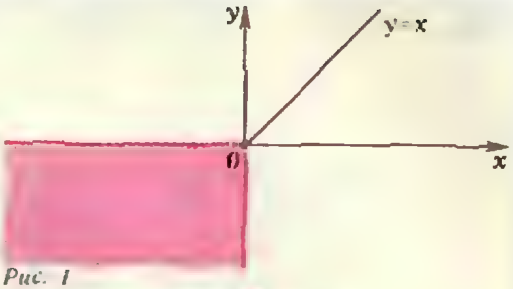


Рис. 1

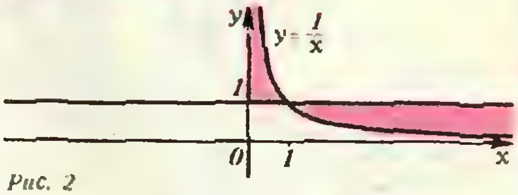


Рис. 2

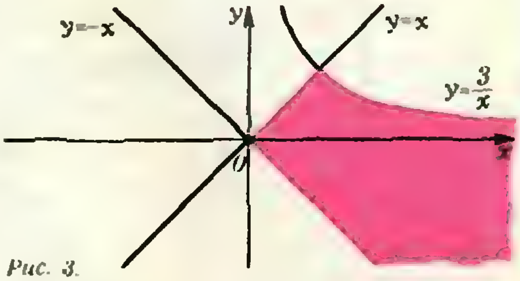


Рис. 3.

5. $T=150$ Н; $F_C\approx 513$ Н; $F_B\approx 173$ Н.

6. $x=7/9$; $y=4/9$.

7. При одновременном прыжке в одну сторону: $v=2mu/(M+m)=2$ м/с; в разные стороны: $v=0$; при последовательных прыжках в одну сторону: $v=u(m/(M+m)+m/(M+2m))=2{,}2$ м/с; в разные стороны: $v=um^2/(M(M+2m))=0{,}25$ м/с.

8. Пуля застрянет в третьей доске.

9. $H=h(\varrho_в-\varrho_ш)/\varrho_ш=0{,}15$ м.

10. $s=m^2v^2/(2\mu gM^2)\approx 0{,}23$ м.

11. $h=H(\operatorname{tg}\alpha-\mu)/(\operatorname{tg}\alpha+\mu)=0{,}8$ м.

12. $v_{отн}=(l_0-l)\sqrt{k(M+m)/(mM)}=5{,}5$ м/с; по расчету колебаний пружинного маятника $t=\pi/2\sqrt{mM/(k(M+m))}\approx 1{,}4$ с, а по расчету максимальной силы действия пружины $t=\sqrt{2}\sqrt{mM/(k(M+m))}\approx 1{,}3$ с.

Жидкости и газы

1. $V'=V(1-\varrho_в/(2\varrho))=1{,}86\cdot 10^{-4}$ м^3.

2. $h_0=M/(\varrho_в ld)\approx 5$ см; $m=\varrho_в ld(h-h')-M=6{,}8\cdot 10^3$ кг $=6{,}8$ т.

3. $A=p_0S(H-h)+p_0Sh/2=1{,}5\cdot 10^4$ Дж.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $\varrho=\varrho_0 p/p_0=0{,}48$ кг/м^3.

2. $m=\frac{p_а V\varrho_0 T_0}{p_0}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)=6{,}35$ кг.

3. $\Delta m=\mu(p_2-p_1)V/(2RT)\approx 2{,}6\cdot 10^{-3}$ кг.

4. $r=\sqrt[3]{\mu/(2\varrho N_A)}\approx 2{,}8\cdot 10^{-10}$ м, где $N_A=6\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро.

5. $T\approx T_к-L\tau_2/(c\tau_1)\approx 333$ К, или $t\approx 60$°C.

6. $m=\frac{c_0(t_к-t_0)}{\lambda+c(t_{пл}-t_к)}\approx 6{,}5$ кг.

Основы электродинамики

1. $E=2q\cos 60°/(4\pi\varepsilon_0 a^2)=40{,}5$ В/м.

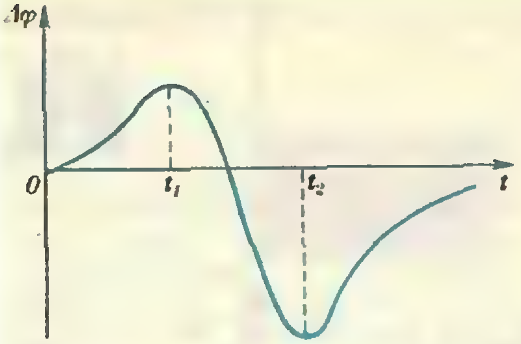


Рис. 4.

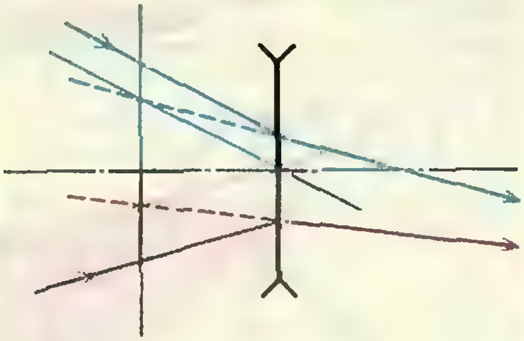


Рис. 5.

2. $\omega = e/(r\sqrt{4\pi\varepsilon_0 rm}) \approx 0{,}3 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$.

3. $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{eU/mv_0^2} = 45°$; $v = v_0/\sin\alpha \approx$ $\approx 18\,800$ км/с.

4. $v_A = \sqrt{v_B^2 - 2q\varphi_A/m} \approx 0{,}17$ м/с.

5. $q = C\mathscr{E}R_1/(r + R_1 + R_2)$.

6. $U = \dfrac{(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)R}{r_1 + r_2 + R} \approx 2{,}3$ В;

$U_1 = \dfrac{\mathscr{E}_1(r_2 + R) - \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 + r_2 + R} \approx 1{,}8$ В;

$U_2 = \dfrac{\mathscr{E}_2(r_1 + R) - \mathscr{E}_1 r_2}{r_1 + r_2 + R} \approx 0{,}5$ В.

7. $m_1 = m_3 k_c/k_м - m_2 \approx 80{,}6$ мг.

8. $n = \dfrac{reB}{2\pi mv\cos\alpha} \approx 1{,}4 \cdot 10^9$.

9. $q = 2BSn/R = 10^{-7}$ Кл.

10. $\Delta\varphi_1/\Delta\varphi_2 = 1/2$ (см. рис. 4).

Колебания и волны

1. $T_Л/T_З = \sqrt{81}/3{,}7 = 2{,}4$.

2. $N = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{H}{2l}\left(1 + \dfrac{g}{a}\right)} = 10$.

3. $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g + Uq/(rm)}} \approx 0{,}74$ с, если вектор напряженности поля направлен вниз;

$T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g - Uq/(rm)}} \approx 2{,}34$ с, если вектор напряженности поля направлен вверх.

4. $d_2 = d_1(\lambda_1/\lambda_2)^2 = 7{,}5$ мм.

Оптика

1. $\gamma = 180°$; $h = d = 10$ см.

2. $\alpha = \mathrm{arctg}\, n \approx 56°$.

3. $v_в = c\sin\alpha_{01}/\sin\alpha_{02} \approx 2{,}26 \cdot 10^8$ м/с.

4. $R = h/\sqrt{n^2 - 1}$.

5. $H = l\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}/(2\sin\alpha) \approx 3{,}7$ м.

6. $F = f/(\Gamma + 1) = 8$ см.

7. См. рис. 5.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант
Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев,С. Л. Соболев, А. Л.Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили: М. К. Гуров, М. Б. Дубах, Ю. П. Мартыненко, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, В. М. Скрылев, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Е. К. Чиликов Фото В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник Э. А. Смирнов
Художественные редакторы Т. М. Макарова, Е. В. Морозова
Корректор Е. В. Сидоркина

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 18.04.83
Подписано в печать 20.05.83. Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,09. Т-08400.
Тираж 172603 экз.
Цена 40 коп. Заказ 965.

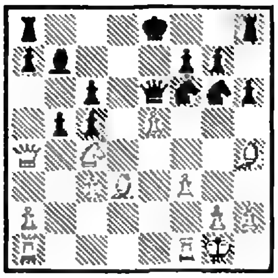
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ТРИ ЭПИЗОДА С ЖЕРТВОЙ ФЕРЗЯ

Самые красивые и яркие комбинации на шахматной доске — те, в которых одна из сторон приносит в жертву ферзя (см. «Квант», 1982, № 10). Сегодня мы вновь возвращаемся к этой теме.

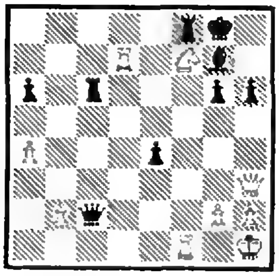
М. Таль — А. Хект
(Шахматная Олимпиада, 1962 г.)



19. ef! ba. Итак, с ферзем белые расстались, но это еще не конец. **20. fg Лg8 21. Сf5!!** В случае взятия на с4 (или f5) белые, не имея даже пешки за ферзя, быстро достигали цели, например: 21...Ф:с4 22. Лfе1+ Фе6 23. Л:е6+ fе 24. С:g6+ Крd7 25. Лd1+ Крс7 26. Сg3+ Крb6 27. Лb1+ Кра6 28. Сd3+ Кра5 29. Сс7×. Жаль, что этот симпатичный вариант не понравился черным. Избранное продолжение все равно их не спасло, и в эстетическом отношении поединок явно потерял. **21...К:h4 22. С:е6 Са6 23. Кd6+ Крe7 24. Сс4!** У белых решающий перевес, который они и довели до победы.

В следующем эпизоде, участником которого тоже был Михаил Таль, жертва ферзя осталась за кулисами. Дело происходило вновь на олимпиаде, но спустя ровно 20 лет.

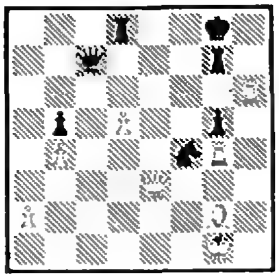
Л. Шнайдер — М. Таль
(Шахматная Олимпиада, 1982 г.)



Обнаружив, что 30. К:h6+ +С:h6 31. Л:f8+ Кр:f8 32. Ф:h6+ Крe8 черным не опасно, шведский шахматист сделал «форточку» — 30. g3. Однако последовало **30...h5!** и после **31. Кg5 Ф:b2 32. Ке6 Л:f1+ 33. Ф:f1 Сf6! 34. Лd8+ Крf7 35. Кg5+ Крe7 36. К:е4 Кр:d8** белые сдались. А между тем они могли создать «бессмертное произведение» — 30. Ф:h6!! Лf6 (30...С:h6 31. К:h6+ Крh8 32. Л:f8×, 30...Л:f7 31. Лd8+) 31. Фh8+!! Черные были бы вынуждены принять жертву и после 31...С:h8 получить эффектный «эполетный мат» — 32. Кh6× (эполеты — черная ладья и слон, из-за которых король не может сдвинуться с места).

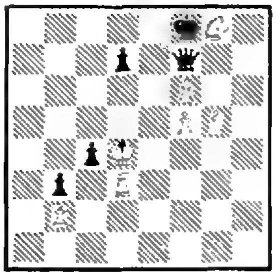
И еще один случай — из партии ведущего страничку.

Е. Гик — М. Мухин
(Москва, 1969 г.)

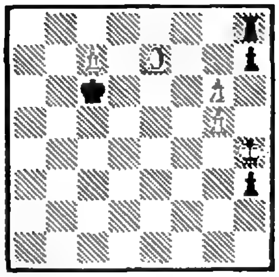


В этом положении партия была отложена, и когда судья вскрыл конверт, я едва сумел сдержать радость. Записанный ход **41...Фс2** позволял мне провести красивую домашнюю заготовку: 42. Л:f4! gf 43. Фе6+ Лf7 44. Лg6+ Крf8 45. Фg4 Фf5 46. Лg8+ Крe7 47. Фе2+ Крd7 48. Фе6+! и т. д. Но мой расчет был слишком далеким. Едва я взял коня **42. Л:f4**, как моментально последовало ошеломляющее **42...Ф:g2+!!** Когда сознание ко мне вернулось, я убедился, что остаюсь без чистой ладьи — 43. Кр:g2 gf+ и 44...fе. Ну кто мог ожидать от партнера такого коварного сюрприза! Пришлось немедленно сдаться. Кстати, когда каждый из нас показывал отложенную позицию своим товарищам, все они предлагали за белых «решающее» взятие ладьей на f4. Полезный материал для психологов! Мой партнер Михаил Мухин был чрезвычайно талантливым шахматистом. К сожалению, он не успел стать гроссмейстером, так как очень рано умер. В 1972 году в чемпионате страны он разделил третье — пятое места с гроссмейстерами В. Савоном и Г. Кузьминым (звание чемпиона СССР завоевал М. Таль). Почти все участники турнира, оказавшиеся ниже его, либо уже были гроссмейстерами, либо вскоре стали ими. В дополнительном двухкруговом матч-турнире Мухин не уступил Кузьмину и Савону, все трое набрали по 2 очка, и лишь худший коэффициент помешал Мухину выйти в межзональный турнир.

Конкурсные задания

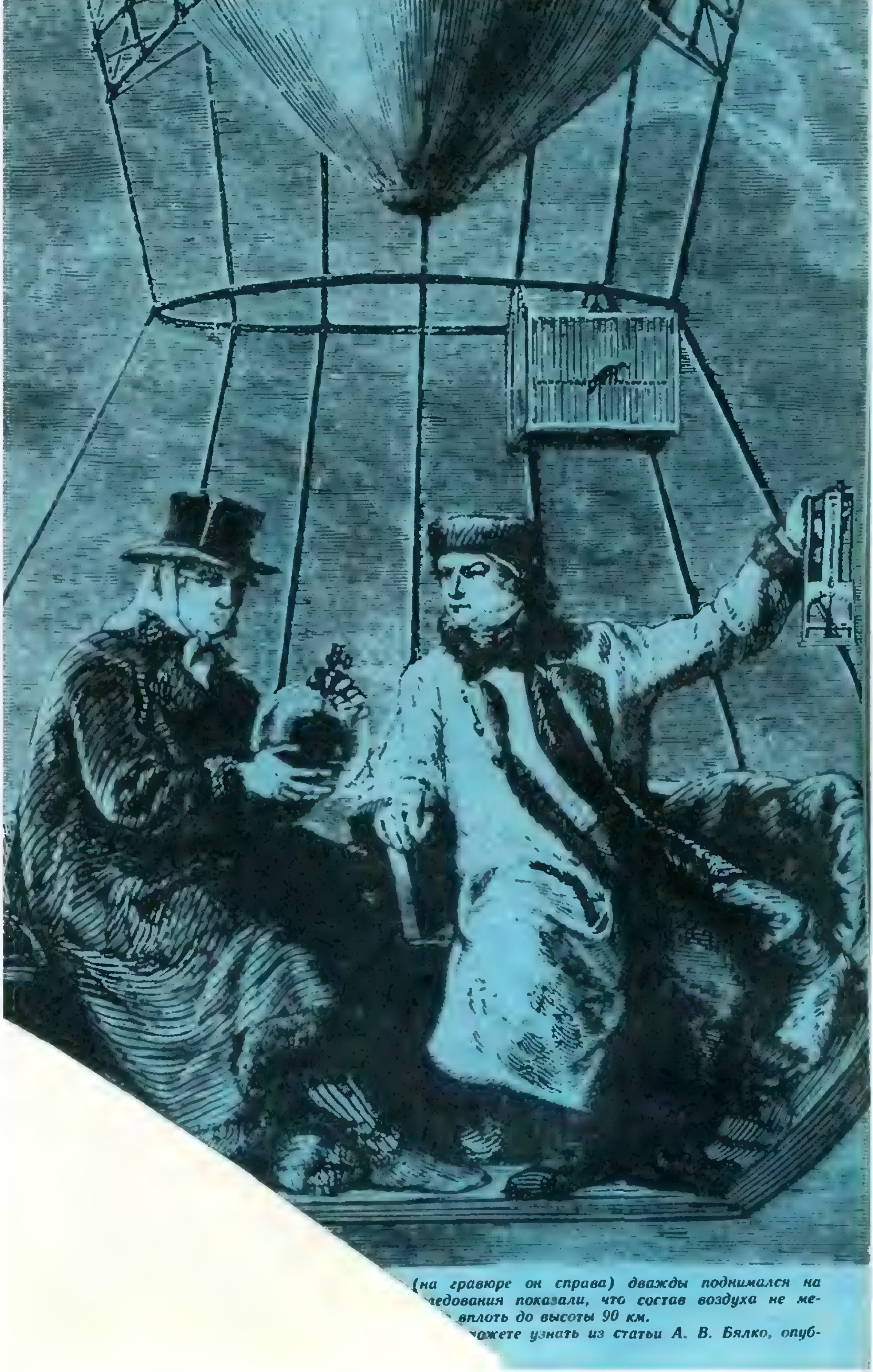


11. Выигрыш.



12. Выигрыш.

Срок отправки решений — 25 августа 1983 года (с пометкой на открытке: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12»).

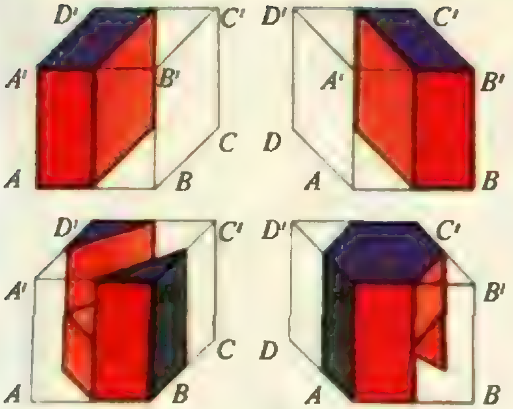


(на гравюре он справа) дважды поднимался на
ледования показали, что состав воздуха не ме-
вплоть до высоты 90 км.
ожете узнать из статьи А. В. Бялко, опуб-

Цена 40 коп.

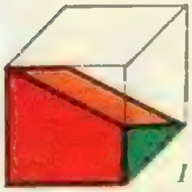
10 -31

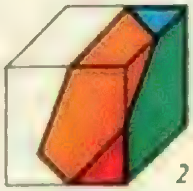
Индекс 70465

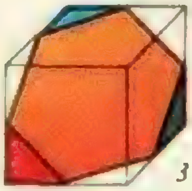


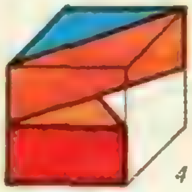
Предлагаем небольшой тест на проверку пространственного воображения. Слева показаны два куба: верхний разрезан на две одинаковые части, нижний — на две неконгруэнтные части. Ниже показаны пятнадцать кубов, каждый из которых разрезан на две части, причем все «первые половинки» обозначены числами 1—15, а все «вторые половинки» обозначены (в другом порядке) буквами а — п. Для каждой из половинок 1—15 найдите ее пару среди а — п.

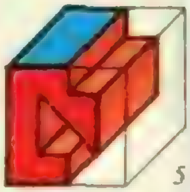
В. Ф. КАНЕВ

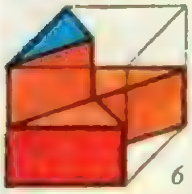

1

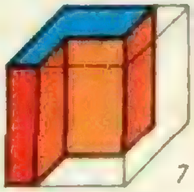

2

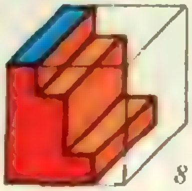

3

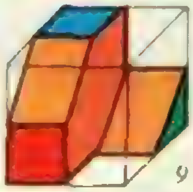

4

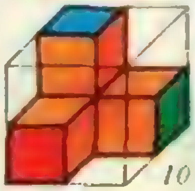

5

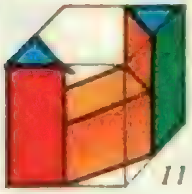

6

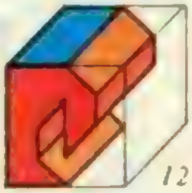

7

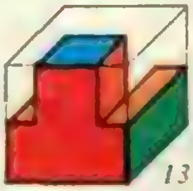

8

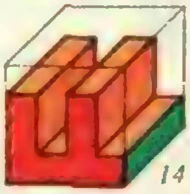

9

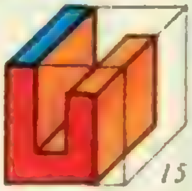

10

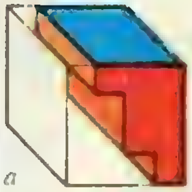

11

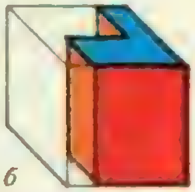

12

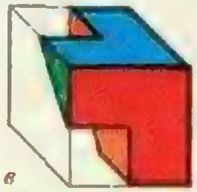

13

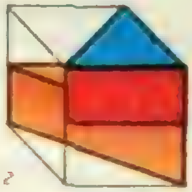

14

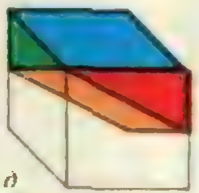

15

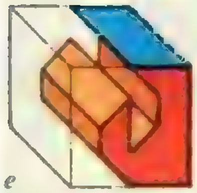

а

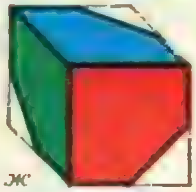

б

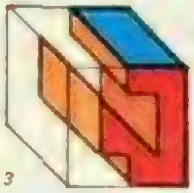

в

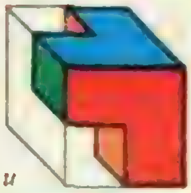

г

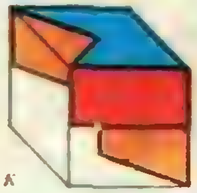

д

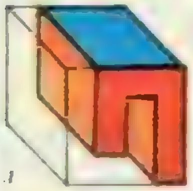

е

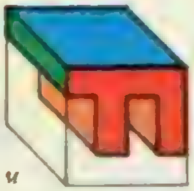

ж

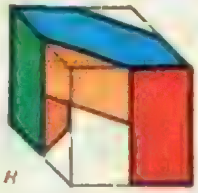

з

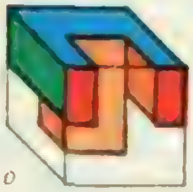

и

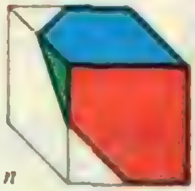

к


л


м


н


о


п

НОМЕР
7

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **7** 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	*Н. И. Фельдман.* Алгебраические и трансцендентные числа	*N. I. Feldman.* Algebraic and transcendental numbers
9	*В. А. Бронштэн.* Тунгусский метеорит — в лаборатории физика	*V. A. Bronshten.* The Tungus meteorite — in the physicist's laboratory
17	*В. П. Лишевский.* Революционер в науке и жизни	*V. P. Lishevski.* Revolutionary in science and life
	Новости науки	**Science news**
8	*Э. А. Свириденков.* Как увидели один ион	*E. A. Sviridenkov.* How a single ion was seen
	Математический кружок	**Mathematics circle**
23	*С. В. Фомин.* Разложение на множители	*S. V. Fomin.* Factorisation
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
26	*Г. В. Меледин.* Задачи-оценки	*G. V. Meledin.* Estimate problems
34	*В. Э. Матизен.* Равногранные и каркасные тетраэдры	*V. E. Matizen.* Special classes of tetrahedra
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
39	Задачи	Problems
40	*А. П. Савин.* О больших числах	*A. P. Savin.* About large numbers
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
43	Задачи М811—М815; Ф823—Ф827	Problems M811—M815; P823—P827
46	Решения задач М796—М798; Ф808—Ф812	Solutions M796—M798; P808—P812
52	*С. С. Валландер.* Постоянная становится переменной	*S. S. Vallander.* When constants become variables
53	*В. Н. Дубровский.* Что скрывается за превращениями тетраэдра	*V. N. Dubrovski.* What is hidden behind the tetrahedron's transformations
	Рецензии, библиография	**Book reviews**
59	*И. М. Яглом.* Мартин Гарднер и "The Mathematical Gardner"	*I. M. Yaglom.* Martin Gardner and "The Mathematical Gardner"
61	*Б. М. Болотовский.* И. Е. Тамм: человек и ученый	*B. M. Bolotovski.* I. E. Tamm: the man and the scientist
62	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка *(32)*	**Our cover** *(32)*
	Смесь *(16, 25, 33, 51, 55, 57, 58)*	**Miscellaneous** *(16, 25, 33, 51, 55, 57, 58)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Хроматические числа *(3-я с. обложки)*	Chromatic numbers *(3rd cover page)*

На первой странице обложки приведена фотография «гладкой» поверхности тщательно отшлифованного стекла, сделанная при помощи микроскопа с увеличением 2100. О физике поверхности будет рассказано в одном из следующих номеров журнала

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1983

Алгебраические и трансцендентные числа

Доктор физико-математических наук
Н. И. ФЕЛЬДМАН

Натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа — эта расширяющаяся цепочка

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$$

давно уже стала привычной для математиков.

Недавно «Квант» рассказывал о трудностях утверждения в математике отрицательных ($\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$) и комплексных чисел ($\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$) *). В этой статье речь пойдет о другом звене этой цепочки — о включении $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

Читателю, конечно, известно о существовании *иррациональных чисел* (то есть чисел, не представимых в виде дроби m/n, где $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$), найденных еще в древности. В те времена открытие несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны (означающее, в переводе на алгебраический язык, что число $\sqrt{2}$ иррационально) было одним из самых волнующих научных событий. В наши дни алгебраическое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$ (изящество и обманчивая простота которого не могут оставить равнодушным человека, склонного к математическому мышлению) излагается в учебнике 7-го класса**).

Но действительные числа подразделяются не только на рациональные и иррациональные. Менее известно, но тоже очень важно, их деление на «алгебраические» (таковы, например, $2/3$, $\sqrt{2}$, $5-\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{4}$) и «трансцендентные» числа (к ним относятся такие известные числа, как π, e, $\lg 2$). Именно об этих двух классах чисел, об их свойствах, об их истории (продолжающейся и в наши дни) мы здесь и расскажем.

Алгебраические числа

Каждое рациональное число $a=a/b$ ($a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{N}$) является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами (например, многочлена $bx-a$). Любое иррациональное число $\sqrt[n]{a}$ ($a\in\mathbf{Z}$) тоже является корнем такого многочлена (например, $x^n - a$). А что если рассмотреть только такие числа — корни многочленов с целыми коэффициентами?

---

*) См. статью С. Г. Гиндикина в предыдущем номере «Кванта».

**) «Алгебра 7», п. 28.

По определению, действительное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами, не равного тождественно нулевому многочлену *). Множество всех алгебраических чисел мы будем обозначать через **A**. Как мы видели выше, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{R}$. Чтобы немного прочувствовать понятие алгебраического числа, докажите, что

1. *Если* $\alpha \in \mathbf{A}$ $(\alpha \neq 0)$, *то и* $1/\alpha \in \mathbf{A}$.

2. *Если* α *— корень многочлена с рациональными коэффициентами, то* $\alpha \in \mathbf{A}$.

3. *Если* $\alpha \in \mathbf{A}$ *и* $a \in \mathbf{Q}$, *то* $a\alpha \in \mathbf{A}$ *и* $a+\alpha \in \mathbf{A}$.

Можно доказать, что из $\alpha \in \mathbf{A}$ и $\beta \in \mathbf{A}$ следует $\alpha+\beta \in \mathbf{A}$, $\alpha-\beta \in \mathbf{A}$, $\alpha \cdot \beta \in \mathbf{A}$, $\alpha/\beta \in \mathbf{A}$ (последнее при $\beta \neq 0$). Другими словами, *арифметические действия не выводят за пределы алгебраических чисел* (доказательство этого факта, более сложное, чем решение первых трех задач, мы опускаем). Таким образом, множество **A** с операциями + и ×, так же как множество **Q** с теми же операциями, образует *числовое поле*, то есть числовое множество, в пределах которого возможны все четыре арифметических действия (кроме деления на 0, конечно!).

Естественно спросить, существуют ли действительные числа, не являющиеся алгебраическими. Чтобы ответить на этот вопрос, нам потребуется следующее понятие.

Степень алгебраического числа

Если α — корень многочлена $P(x)$, то α — корень и многочлена $P(x)Q(x)$, где $Q(x)$ — любой многочлен. Поэтому каждое алгебраическое число α является корнем бесконечного множества многочленов из $\mathbf{Z}[x]$. Среди них, очевидно, есть многочлены наименьшей степени. Если она равна n, мы будем говорить, что α — алгебраическое число *степени* n, и писать $\deg \alpha = n$. Очевидно, $\deg \alpha = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbf{Q}$. Для иррационального числа $\sqrt{a}$ $(a \in \mathbf{Z})$, очевидно, $\deg \sqrt{a} = 2$.

Для дальнейшего нам потребуется следующая простая, но важная теорема.

Теорема Безу (1779 г.). *Остаток от деления многочлена* $P(x)$ *на* $x-\gamma$ *равен* $P(\gamma)$.

Доказательство. Разделим $P(x)$ на $x-\gamma$. Остатком будет постоянная, которую мы обозначим c:

$$P(x) = (x-\gamma) P_0(x) + c;$$

здесь $P_0(x)$ также многочлен. Подставляя $x = \gamma$, находим $c = P(\gamma)$.

При помощи этой теоремы легко доказывается

Лемма. *Если алгебраическое число* α *степени* $n \geqslant 2$ *является корнем многочлена* $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ *степени* n, *то* $P(x)$ *не имеет рациональных корней.*

Доказательство. Предположим противное: $P(a/b) = 0$ $(a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{N})$. По теореме Безу остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a/b$ равен 0, то есть $P(x)$ делится на $x - a/b$:

$$P(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) P_0(x),$$

где многочлен $P_0(x)$, очевидно, имеет рациональные коэффициенты. Если M — общее кратное знаменателей его коэффициентов, то $P_1(x) = MP_0(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Из $P(\alpha) = 0$ и $\alpha \neq a/b$ (ведь $n > 1$) следует $P_0(\alpha) = 0$. Значит, $P_1(\alpha) = 0$. Но степень многочлена $P_1(x)$ равна $n-1 < n = \deg \alpha$. Мы пришли к противоречию.

Решающим шагом в поиске чисел, не являющихся алгебраическими, стала

Теорема Лиувилля

Ее формулировка, на первый взгляд, никак не связана с существованием «не алгебраических» чисел.

---

*) Множество многочленов с целыми коэффициентами мы будем обозначать через $\mathbf{Z}[x]$. В дальнейшем мы будем рассматривать только многочлены, отличные от тождественно нулевого многочлена, не оговаривая это дополнительно. Для читателей, знакомых с понятием комплексного числа, заметим, что можно также рассматривать и *комплексные алгебраические числа*.

Жозеф Лиувилль (1809—1882)

Теорема Лиувилля (1844 г.). *Если α — алгебраическое число степени $n \geqslant 2$, то существует такое число $c > 0$, что для любых $p \in \mathbf{Z}$ и $q \in \mathbf{N}$*

$$\boxed{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^n}}$$

(Смысл теоремы состоит в том, что иррациональное алгебраическое число α нельзя «слишком хорошо» приблизить рациональными дробями*). Поэтому, если мы найдем иррациональное число, которое **можно** «слишком хорошо» приблизить, оно будет не алгебраическим.)

Доказательство. Пусть α — алгебраическое число степени $n \geqslant 2$. Тогда существует такой многочлен с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0),$$

что $P(\alpha) = 0$. Обозначим через H наибольший из модулей чисел $|a_1|$, $|a_2|$, …, $|a_n|$. Покажем, что число

$$c = \frac{1}{n^2 H (1 + |\alpha|)^{n-1}}$$

обладает нужным свойством. Заметим для дальнейшего, что $c < 1$. Возьмем произвольные $p \in \mathbf{Z}$ и $q \in \mathbf{N}$. Тогда

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n} = \frac{a}{q^n}.$$

По лемме $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$. Значит, $a \neq 0$. Поскольку $a \in \mathbf{Z}$, мы имеем $|a| \geqslant 1$. Следовательно,

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant \frac{1}{q^n}.$$

Так как $P(\alpha) = 0$, получаем

$$\frac{1}{q^n} < \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| =$$

$$= \left| a_n\left(\alpha^n - \left(\frac{p}{q}\right)^n\right) + a_{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right) + \dots + a_1\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)\right|.$$

Если $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1$, то

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{q^n} > \frac{c}{q^n}.$$

Если же $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$, то $\left|\frac{p}{q}\right| < |\alpha| + 1$. Тогда для любого $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \in \mathbf{N}$, получаем

$$\left|\alpha^k - \left(\frac{p}{q}\right)^k\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot \left|\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} \cdot \frac{p}{q} + \dots + \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| k(|\alpha| + 1)^{k-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| n(|\alpha| + 1)^{n-1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{q^n} \leqslant \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| n^2 (|\alpha| + 1)^{n-1} H =$$

$$= \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot \frac{1}{c}, \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^n}.$$

Теорема доказана.

Теореме Лиувилля можно придать следующую форму, в которой уже не требуется условие $\deg \alpha \geqslant 2$.

---

*) О том, как **можно** приблизить числа α с помощью рациональных дробей, см. статью «Очерк о цепных дробях» («Квант», 1983, № 5).

Теорема. *Если α — алгебраическое число степени n, то существует такое число $c_0>0$, что для любых $p\in\mathbf{Z}$ и $q\in\mathbf{N}$, для которых $\alpha\neq p/q$, имеем*

$$\boxed{\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{c_0}{q^n}}. \qquad (1)$$

Доказательство. Случай $\deg(\alpha)\geqslant2$ рассмотрен выше. Пусть теперь $\deg(\alpha)=1$, то есть $\alpha=a/b$ ($a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{N}$). Тогда число $c'=1/b$ обладает нужным свойством. В самом деле, если $a/b\neq p/q$, то $|pb-qa|\geqslant1$. Следовательно,

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|pb-qa|}{bq}\geqslant\frac{1}{bq}=\frac{c'}{q}.$$

Выбрав в качестве c_0 наименьшее из чисел c и c', получим искомое неравенство.

Теорему Лиувилля можно доказать также, изучив разность $P(\alpha)-P(p/q)$ с помощью теоремы Лагранжа («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 25). Попробуйте проделать это!

Приближение алгебраических чисел рациональными

Будем говорить, что число α допускает *приближения порядка m*, если для некоторой постоянной γ существует бесконечно много рациональных дробей p/q, удовлетворяющих неравенству

$$0<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{\gamma}{q^m}. \qquad (2)$$

Теорема Лиувилля показывает, что *алгебраическое число степени n не допускает приближений большего порядка, чем n*. Действительно, если α допускает приближения порядка m, то из (1) и (2) получаем, что для бесконечной последовательности натуральных q

$$\frac{c}{q^n}<\frac{\gamma}{q^m},\quad \frac{1}{q^{m-n}}>\frac{c}{\gamma},$$

а это неравенство при $m>n$ и достаточно больших q невозможно.

Пример трансцендентного числа *)

Теперь у нас есть средство для построения действительных чисел, не являющихся алгебраическими. (Такие числа называются *трансцендентными*.) Нужно построить число, допускающее приближения сколь угодно высокого порядка. Мы зададим такое число в виде бесконечной десятичной дроби: $\alpha=0{,}\ a_1a_2a_3\ldots$, где

$$a_t=\begin{cases}1,\ \text{если}\ t=m!\ (m=1,2,\ldots),\\ 0,\ \text{если}\ t\neq m!.\end{cases} \qquad (3)$$

В частности,

$$a_1=a_2=a_6=a_{24}=a_{120}=a_{720}=\ldots=1,$$
$$a_3=a_4=a_5=a_7=\ldots=a_{23}=a_{25}=\ldots=a_{119}=a_{121}=\ldots=0.$$

Тогда для любого $m>1$

$$\alpha=0{,}\ a_1\ldots a_{(m-1)!}+0{,}\ 0\ldots0_{a_{m!}}=\frac{p_m}{q_m}+\beta_m,$$

где

$$p_m=a_1a_2\ldots a_{(m-1)!},\quad q_m=10^{(m-1)!},\quad \beta_m=0{,}\ 0\ldots0a_{m!}\ldots,$$
$$0<\beta_m=10^{-m!}\cdot a_{m!},\ldots=$$
$$=10^{-m'}\cdot1,\ldots<2\cdot10^{-m'}=\frac{2}{q_m^m}$$

Таким образом,

$$0<\left|\alpha-\frac{p_m}{q_m}\right|<\frac{2}{q_m^m},\qquad m=1,2,\ldots,$$

а это означает, что α допускает приближения сколь угодно высокого порядка и поэтому не может быть алгебраическим.

4. *Покажите, что α будет трансцендентным, если в* (3)

$$a_t=\begin{cases}1\ \textit{при}\ t=m^m\ (m=1,2,\ldots),\\ 0\ \textit{при}\ t\neq m^m.\end{cases}$$

5. *Пользуясь теоремой Лиувилля, постройте еще несколько трансцендентных чисел.*

Теорема Дирихле

В 1955 г. английскому математику К. Роту удалось доказать, что *любое алгебраическое число не допускает*

---

*) Читатель, знакомый с понятием счетности, легко докажет, что множество алгебраических чисел счетно. Если он знает, что множество всех действительных чисел несчетно (красивое доказательство этого факта излагается в «Кванте», 1973, № 12, с. 7), он сразу заключит, что трансцендентные числа существуют. Это рассуждение, однако, не дает ни одного конкретного примера трансцендентного числа.

приближений большего порядка, чем 2.

В то же время каждое иррациональное число допускает приближения второго порядка. Это доказал немецкий математик П. Дирихле с помощью носящего его имя очень простого и в то же время очень плодотворного принципа: *если n предметов разложить по n—1 ящикам, то хотя бы в одном ящике окажется не менее двух предметов.*

6. *Постройте несколько трансцендентных чисел с помощью теоремы Рота.*

Теорема Дирихле (1842 г.). *Для любых действительного числа α и натурального числа m существуют такие $p \in \mathbf{Z}$ и $q \in \mathbf{N}$, что $q \leqslant m$ и*

$$\boxed{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{m}}.} \qquad (4)$$

Доказательство. Промежуток $[0, 1[$ является объединением m промежутков

$$\left[0, \frac{1}{m}\right[, \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right[, \ldots, \\ \ldots, \left[\frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m}\right[, \left[\frac{m-1}{m}, 1\right[\qquad (5)$$

Рассмотрим числа $\{k\alpha\}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ (здесь $\{x\}$ — дробная часть; напомним, что, по определению, $\{x\} = x - [x]$). Каждое из них принадлежит одному из промежутков (5). Но наших чисел $m+1$, а промежутков m. Следовательно, хотя бы одному из промежутков (5) принадлежит по крайней мере два наших чнсла (принцип Дирихле!). Пусть это $\{k_1\alpha\}$ и $\{k_2\alpha\}$ $(k_1 > k_2)$. Тогда

$$\frac{1}{n} > |\{k_1\alpha\} - \{k_2\alpha\}| = \\ = |k_1\alpha - [k_1\alpha] - k_2\alpha + [k_2\alpha]| = \\ = |(k_1 - k_2)\alpha - ([k_1\alpha] - [k_2\alpha])|.$$

Если мы теперь положим $q = k_1 - k_2$, $p = [k_1\alpha] - [k_2\alpha]$, то, разделив на q и учитывая неравенства $0 \leqslant k_2 < k_1 \leqslant n$, получим требуемое.

Следствие. *Каждое иррациональное число α допускает приближения второго порядка.*

Доказательство. Для любого $m \in \mathbf{N}$ существуют такие $p \in \mathbf{Z}$ и $q \in \mathbf{N}$, что $q \leqslant m$ и выполняется (4). Поскольку $q \leqslant m$ и α — иррациональное, из (4) получаем

Петер Густав Лежён Дирихле (1805—1859).

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \qquad (6)$$

Из (4) следует, что при неограниченном возрастании m величина $|\alpha - p/q|$ становится сколь угодно малой. Она отлична от нуля, поэтому с увеличением m дробь p/q должна принимать все более близкие к α значения, так что (6) выполняется для бесконечного числа дробей p/q.

Знаменитые трансцендентные числа

Хотя, пользуясь теоремами Лиувилля и Рота, можно построить бесконечное множество трансцендентных чисел, непосредственно доказать с их помощью трансцендентность таких известных чисел, как, например, π, e, $\ln 2$, $\lg 2$, до сих пор не удавалось. В то же время интерес к этим числам существует уже давно.

Особенно знаменитым в этом смысле является число π. Дело в том, что еще математики Древней Греции поставили ставшую знаменитой *задачу о квадратуре круга:* с помощью циркуля и линейки построить квадрат, площадь которого равна площади круга с заданным радиусом. Эта задача сводится к построению отрезка длины π, если задан отрезок единичной длины. Решить задачу не удавалось в течение двух тысячелетий. Со временем было установлено, что для доказательства невозможности решения этой задачи достаточно доказать трансцендентность числа π (в действительности достаточно меньшего — доказать, что π не является алгебраическим числом некоторого вида).

Иррациональность чисел e и π в 1766 г. доказал И. Ламберт. В 1873 г. Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа e. Созданный им для этого метод до сих пор играет важную роль в теории чисел. Усилив метод Эрмита, Ф. Линдеман в 1882 г. доказал трансцендентность числа π. Линдеман доказал также, что при $\alpha \in \mathbf{A}$, $\alpha \neq 0$, число e^{α} — трансцендентное. Отсюда следует, что *натуральные логарифмы всех отличных от единицы алгебраических чисел трансцендентны* (докажите это).

В 1748 г. Л. Эйлер высказал такое предположение: *если* a, $b \in \mathbf{Q}$ *и* $\log_a b$ *— иррациональное число, то оно — трансцендентное.* Конечно, число $\log_a b$ может быть рациональным, например $\log_4 8 = 3/2$. Предположение Эйлера не удалось доказать ни в восемнадцатом, ни в девятнадцатом веке.

В 1900 г. на Всемирном конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт сформулировал 23 проблемы, решение которых, по его мнению, должно было бы содействовать дальнейшему существенному развитию математики. Седьмая проблема — это предложение доказать, что если α и β — алгебраические числа, α отлично от чисел 0 и 1, а β — иррациональное, то число α^{β} — трансцендентное. В частности, предлагалось доказать трансцендентность чисел $2^{\sqrt{2}}$ и e^{π} — последнее число также приводится к виду α^{β} ($\alpha, \beta \in \mathbf{A}$), однако для этого нужна некоторая информация о функциях комплексного аргумента.

7. *Докажите, что из утверждения Гильберта следует справедливость предположения Эйлера.*

Первое частичное решение седьмой проблемы Гильберта нашел в 1929 г. аспирант Московского университета А. О. Гельфонд. В частности, он доказал трансцендентность числа e^{π}. В следующем году ленинградский математик Р. О. Кузьмин показал, что метод Гельфонда с соответствующими изменениями позволяет доказать трансцендентность чисел вида α^{β} в случае, когда α — алгебраическое, отличное от 0 и 1, а $\beta = \sqrt{d}$, где натуральное число d не является полным квадратом. В частности, он доказал трансцендентность числа $2^{\sqrt{2}}$.

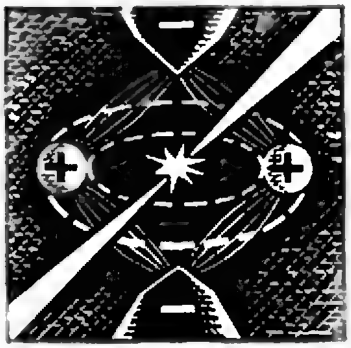
Александр Осипович Гельфонд (1906—1968).

Полное решение седьмой проблемы Гильберта с помощью уже нового метода (второй метод Гельфонда) получил в 1934 г. А. О. Гельфонд.

Теорема Гельфонда. *Пусть* α, $\beta \in \mathbf{A}$. *α отлично от* 0 *и* 1, β *иррационально. Тогда число* α^{β} *— трансцендентное.*

8. *Докажите, что если числа* α, β, ϱ *— такие, что выражение* $\log_{\varrho}\alpha/\log_{\varrho}\beta$ *имеет смысл и* α, $\beta \in \mathbf{A}$, *то число* $\log_{\varrho}\alpha/\log_{\varrho}\beta$ *— трансцендентное или рациональное.*

Второй метод Гельфонда позволил доказать и многие другие теоремы. Усиление этого метода, найденное в 1966 г. А. Бейкером, привело к новым значительным успехам теории чисел. Работа здесь продолжается и в настоящее время.



Как увидели один ион

Доктор физико-математических наук
Э. А. СВИРИДЕНКОВ

Сегодня известно каждому, что все тела состоят из атомов (или молекул) и что атомы имеют очень малые размеры. Однако мы привыкли иметь дело с количеством вещества, содержащим громадное число атомов (например, в 1 см^3 воздуха при нормальных условиях содержится $2{,}7 \cdot 10^{19}$ молекул), поэтому увидеть один атом — не так просто.

Совсем недавно физикам удалось провести эксперимент, который позволил все-таки увидеть атом. Опыт основан на способности атома поглощать и затем испускать (или, как говорят физики, переизлучать) свет, частота которого совпадает с одной из собственных частот излучения данного атома. Если интенсивность излучаемого света окажется достаточно большой, свет (а значит, и атом) можно будет зарегистрировать соответствующим прибором или даже невооруженным глазом. В первых экспериментах удавалось обнаружить свечение сотен тысяч атомов, а теперь — одного-единственного атома.

В возбужденном состоянии (поглотив, но еще не излучив свет) атом может находиться в течение 10^{-8} с. Это означает, что он может в одну секунду поглотить и переизлучить 10^8 фотонов. Если из этих фотонов 10^5 попадут в глаз, этого будет вполне достаточно, чтобы увидеть светящуюся точку, то есть увидеть атом. Такое большое количество фотонов атом может получить, только если он находится в фокусе лазерного луча. Сфокусировать луч практически в точку и ввести туда атом нетрудно, но как его удержать в этой точке?

Сразу приходит мысль, что это следует сделать с помощью электрического поля. Но полем проще удерживать в равновесии заряженные частицы, вот почему эксперимент проводился не с нейтральными, а с ионизированными атомами. Остается вопрос, какое поле надо создать.

Начнем с простейшего случая — электростатического поля. Представим себе, что отрицательный ион помещают точно посередине между двумя положительными зарядами. Ион находится в равновесии, но это равновесие неустойчиво: при малейшем отклонении в сторону одного или другого заряда ион полетит к ближайшему заряду. Такая неустойчивость — общее свойство всех электростатических полей, так что с их помощью невозможно обеспечить устойчивое равновесие заряда. Остается рассмотреть переменное поле.

Попав в переменное электрическое поле, ион начинает колебаться, то есть приобретает энергию колебательного движения, пропорциональную напряженности поля. Если создать такую конфигурацию поля, в которой есть область минимума напряженности, в этом месте ион будет обладать минимальным запасом этой колебательной энергии, то есть пребывать в состоянии устойчивого равновесия.

В опыте, о котором мы рассказываем, необходимая конфигурация поля создается так (см. рисунок). Между двумя электродами, каждый из которых сделан в форме острия, помещается кольцо. На электроды и кольцо подается переменное напряжение таким образом, что острия всегда заряжены одноименно. Силовые линии поля идут от кольца к остриям (или наоборот), а в центре кольца поле минимально. Говорят, что область в центре представляет собой ловушку для заряженных частиц. Именно сюда и фокусируется свет от лазера. Такая ловушка позволяет удерживать ион в течение нескольких десятков минут. Как только ион попадает строго в центр кольца, можно увидеть светящуюся точку. Это светится один ион.

Тунгусский метеорит — в лаборатории физика

Кандидат физико-математических наук
В. А. БРОНШТЭН

Как? — спросите вы, — неужели этот загадочный метеорит все-таки нашли и привезли в лабораторию? На этот вопрос нельзя ответить ни да, ни нет. Нельзя сказать «нет», потому что в результате многолетних усилий вещество Тунгусского метеорита удалось выявить, доставить в лабораторию, датировать, подвергнуть всем тончайшим методам анализа. Но нельзя сказать и «да», потому что эти крупинки и шарики вещества размером в микроны мало похожи на тяжелые железные и каменные метеориты, хранящиеся в музеях или изучаемые в лабораториях геохимиков.

Мы постараемся рассказать в этой статье о Тунгусском метеорите с несколько иной точки зрения. Влет в атмосферу, разрушение и гибель Тунгусского метеорита сопровождались целым комплексом необычных явлений и поставили перед учеными так много трудных вопросов и загадок, что решать их пришлось во всеоружии современной физики и математики. Да, и математики, ибо в физике без нее нельзя сделать ни шагу. А что касается лаборатории, то теперь в научных институтах лабораториями называют не только специально оборудованные помещения, со множеством установленных в них приборов, но и группы ученых, занятых разработкой одной проблемы или научного направления. Именно о таких группах ученых и об их исследованиях мы не раз будем говорить в этой статье.

Немного истории

Метеорит, получивший впоследствии название Тунгусского, упал ранним утром 30 июня 1908 года в бассейне реки Подкаменная Тунгуска (от которой он и получил свое название), в 70 км к северу от поселка (фактории, как тогда говорили) Ванавара Красноярского края. В те годы сведения о нем не достигли ученого мира. Дело ограничилось тем, что уездный исправник (чиновник, управлявший делами уезда) доложил о событии енисейскому губернатору, а делопроизводитель последнего переслал копию рапорта в Красноярское отделение Русского географического общества. Оттуда она попала в Иркутскую магнитную обсерваторию, где пролежала вместе с многочисленными сообщениями очевидцев пролета и падения метеорита до... 1925 года, когда все эти материалы были обработаны и опубликованы. Это произошло уже при Советской власти, когда крупные ученые С. В. Обручев, Л. А. Кулик, А. В. Вознесенский, председатель Комитета помощи народам Севера И. М. Суслов собрали и опубликовали ценные сведения об этом явлении.

В 1927—1930 годах в район падения метеорита были направлены одна за другой три экспедиции под руководством неутомимого исследователя Леонида Алексеевича Кулика. Уже первая экспедиция установила, что явление носило катастрофический характер. Был обнаружен сплошной лесовал на площади свыше 2000 квадратных километров. Вековые деревья были повалены, как тростинки. Они лежали рядами, все в одном направлении. Но аэрофотосъемка области вывала, проведенная в 1938 году, отчетливо показала, что вывал имеет радиальную симметрию, то есть стволы деревьев обращены корнями как бы в одну точку. Значение этого обстоятельства ученые поняли лишь спустя тридцать лет.

Между тем Л. А. Кулик с немногочисленной группой помощников-добровольцев пробрался к эпицентру области лесовала и там, в болотистой местности, обнаружил несколько округлых воронок.

— Эти воронки образованы падением осколков метеорита. Мы должны непременно раскопать их и достать метеорит, — сказал ученый. — За работу, друзья.

И пять-шесть человек принялись раскапывать воронки. Одна из них была заполнена водой. Прорыли траншею, спустили воду. Но на дне воронки нашли... старый пень. Это значило, что воронка не метеоритного происхождения: удар метеорита не оставил бы и трухи от этого пня.

Неудача обескуражила молодых помощников Кулика: один бросил работу и уехал, другой серьезно поспорил с руководителем и за это был уволен из экспедиции; третий тяжело заболел и его пришлось эвакуировать. Длительное время Кулик оставался в тайге один. Но гипотезу о метеоритном происхождении воронок пришлось оставить *).

В 30-х годах выяснились новые сведения о Тунгусской катастрофе и ее последствиях. Оказалось, что ночь с 30 июня на 1 июля 1908 года была необычайно светлой, так что астрономы во многих обсерваториях Европы, на расстоянии многих тысяч километров от места падения метеорита, не могли вести астрономические наблюдения, и в Сибири ночью можно было свободно фотографировать (с техникой того времени). Английский метеоролог Ф. Уиппл обнаружил записи микробарографов на шести английских станциях, зафиксировавших прохождение воздушной волны над Англией. Советский астроном И. С. Астапович обнаружил записи этой волны барографами восемнадцати метеорологических станций Сибири, а также в Слуцке и в Петербурге. А. В. Вознесенский еще в 1925 году обнаружил сделанную в 1908 году запись сейсмической волны на сейсмографах Иркутской обсерватории. Все это говорило о том, что удар метеорита вызвал небольшое землетрясение. Сейсмическая волна Тунгусского метеорита была затем обнаружена на записях сейсмографов в Ташкенте, Тифлисе, Йене; воздушная волна (прямая и обратная) была зарегистрирована в Потсдаме и в ряде других городов. По этим записям был уточнен момент удара, его энергия, а позднее — и высота взрыва. Наиболее тщательную обработку сейсмических данных выполнил (уже в 70-х годах) советский сейсмолог И. П. Пасечник.

Проведением аэрофотосъемки и последней экспедиции в 1939 году закончился довоенный этап исследований. Началась Великая Отечественная война. Профессор Л. А. Кулик пошел на фронт добровольцем, был

---

*) Как это ни странно, но в зарубежной печати еще долго приводились фотографии этих воронок с указанием, что они образованы осколками Тунгусского метеорита.

Поваленный лес в районе Тунгусской катастрофы (фотография 1930 года). Часть деревьев устояла на корню, но ветви и кроны сорваны воздушной волной.

ранен, захвачен в плен и умер в гитлеровском концлагере.

Падение Сихотэ-Алинского железного метеоритного дождя на Дальнем Востоке 12 февраля 1947 года надолго отвлекло внимание ученых от Тунгусского метеорита. Здесь не было никаких загадок: множество осколков метеорита массой от долей грамма до двух тонн лежали на обширной площади. Уже в первые годы исследований участники экспедиций привезли в Москву свыше двадцати тонн осколков.

Но тайна Тунгусского метеорита не давала покоя исследователям. Ее разрешение еще ждало своего часа.

Новый этап поисков

В конце сороковых годов на проводившихся ежегодно метеоритных конференциях не раз и не два обсуждался вопрос о судьбе Тунгусского метеорита. Энергия его взрыва несомненно превышала энергию взрыва атомных бомб, сброшенных в августе 1945 года американцами на японские города Хиросиму и Нагасаки. Но куда же девался метеорит?

В 1947 году советские ученые К. П. Станюкович и В. В. Федынский разработали теорию образования кратеров при ударе крупных метеоритов о поверхность планеты (именно такими ударами образована бо́льшая часть кратеров на Луне). Теория предсказывала существование ударных кратеров на Марсе, Меркурии, на спутниках планет. В 1964 году, когда были сфотографированы кратеры на Марсе, эти предсказания подтвердились. На Земле тоже было известно немало метеоритных кратеров: знаменитый Аризонский кратер в Северной Америке, Каалиярвский на острове Сааремаа (Эстонская ССР); позже были обнаружены и другие. Если бы Тунгусский метеорит летел с космической скоростью, то при ударе о Землю он бы не уцелел. Кинетическая энергия метеорита, летящего, например, со скоростью 30 км/с, в расчете на единицу массы составляет $4{,}5 \times \times 10^8$ Дж/кг. Между тем удельная теплота испарения железа равна лишь $8 \cdot 10^6$ Дж/кг, для каменных пород — почти столько же. Поэтому при ударе о Землю метеорит должен был испариться и превратить в пар часть окружающей породы. Значит, искать метеорит бесполезно: он не мог сохраниться. Надо искать кратер Примерно так говорилось на метеоритной конференции в 1950 году.

Но где может быть кратер? Может быть, падение произошло в Южное болото и кратер «похоронен» в болоте? Нужна была новая экспедиция.

Такая экспедиция была организована Комитетом по метеоритам Ака-

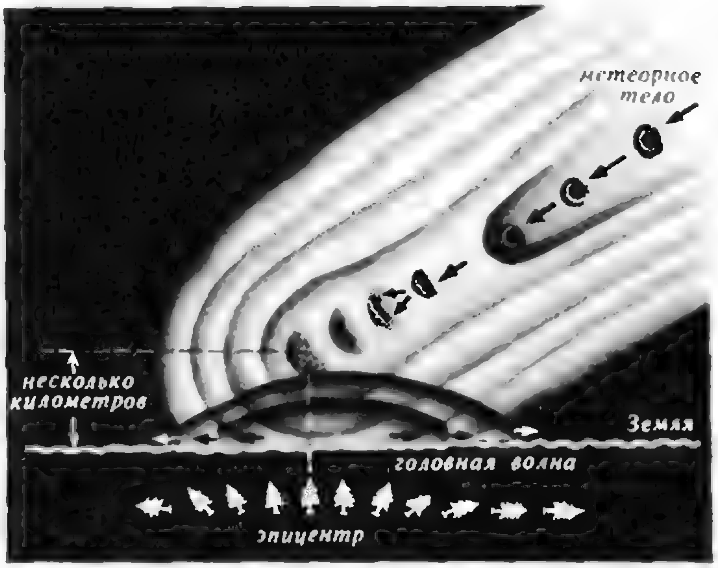


Схема влета в атмосферу и взрыва Тунгусского тела. Образовавшаяся у поверхности Земли головная волна и явилась причиной повала деревьев.

демии наук СССР в 1958 году. Она установила два важных факта. Во-первых, Южное болото не может быть метеоритным кратером или скрывать его (дно болота не нарушено). Во-вторых, взрыв метеорита произошел не при ударе о Землю, а в воздухе. Об этом свидетельствовали «мертвые» деревья в центре области вывала леса, стоявшие на корню, но без ветвей, а подчас и с повреждениями коры. Радиус этой «мертвой зоны» составлял около семи километров. Отсюда можно было оценить, что и высота взрыва такого же порядка.

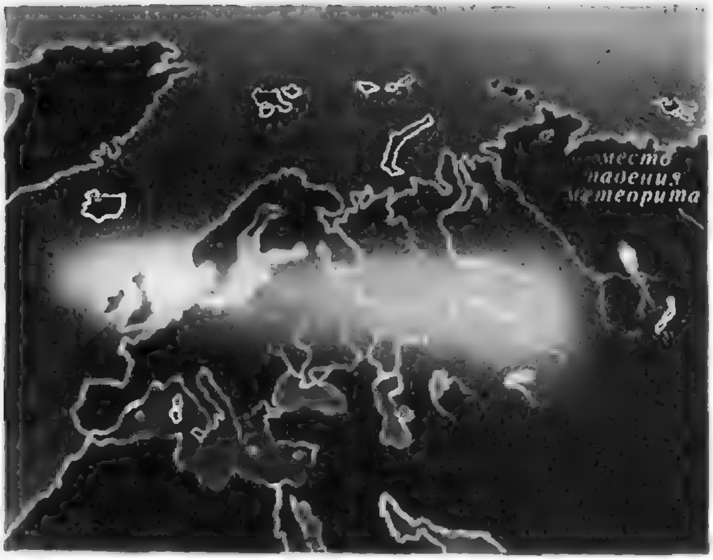
Предположения о взрыве метеорита в воздухе делались и раньше. Одним из первых его высказал в конце 40-х годов писатель-фантаст А. П. Казанцев. Но исходя из вполне здравой идеи, он облек ее затем в совершенно фантастическую форму, утверждая (не только в художественных произведениях, но и в полемике с учеными), что это потерпел аварию марсианский корабль с атомным двигателем.

Оставим корабль и подумаем, что же могло взорваться? Железный Сихотэ-Алинский метеорит раздробился в воздухе на тысячи осколков под действием аэродинамического давления. Еще чаще дробятся в воздухе каменные метеориты. Но одно дело дробление, а другое дело взрыв. Это разные процессы.

И тут ученые вспомнили, что еще в тридцатые годы уже упоминавшийся английский метеоролог Ф. Уиппл высказал гипотезу, что Тунгусский метеорит представлял собой ядро небольшой кометы. Эту точку зрения продолжил и развил советский астроном И. С. Астапович. После окончания работ экспедиции 1958 года кометную гипотезу решительно поддержал известный астрофизик и исследователь метеоритов академик В. Г. Фесенков. Он вспомнил о необычном свечении ночного неба в течение трех ночей после падения Тунгусского тела. Изучили расположение области свечения над Землей. Оказалось, что она имеет форму широкого шлейфа, идущего от района падения на запад до Британских островов. Но ни в Америке, ни в Японии свечение не наблюдалось. Дальше последовало короткое рассуждение ученого: Тунгусский метеорит упал рано утром. Солнце было на востоке. Но хвосты комет всегда направлены прочь от Солнца. Значит, хвост кометы должен был быть направлен на запад. Именно он и произвел наблюдавшееся свечение.

Забегая вперед, отметим, что в этой стройной гипотезе не все так гладко, как кажется. Хвосты комет очень разрежены, и даже если предположить, что светился не хвост, а близкие к ядру части комы (оболочки кометы), нужной интенсивности све-

Область аномального свечения неба в ночи, последовавшие за Тунгусским явлением.



чения получить не удастся. И потом, что именно светилось? Астрономы, наблюдавшие странное свечение, пытались изучить его спектр, но никаких линий излучения, как в спектрах полярных сияний, они не нашли. Значит, это было рассеянное свечение пылевых частиц. На этом и остановились.

Томские исследователи Н. В. Васильев, В. К. Журавлев и другие провели тщательное исследование оптических аномалий, связанных с падением Тунгусского метеорита, изучили обширную литературу. В те же ночи наблюдались яркие серебристые облака, плавающие на высоте 80—85 км. По мнению томских исследователей, частицы космической пыли, влетевшие в земную атмосферу вместе с Тунгусской кометой, явились ядрами конденсации для образования ледяных кристалликов, из которых состоят серебристые облака. Они же вызвали все оптические аномалии.

Но если Тунгусский метеорит представлял собой ядро кометы, то почему он взорвался в воздухе, не долетев до Земли? В чем была причина взрыва?

Как произошел взрыв?

Прежде чем объяснить какое-то явление, надо знать, как оно произошло. Показания очевидцев пролета метеорита, собранные в разные годы — вскоре после катастрофы, в конце двадцатых годов и в последующие годы, — не проясняли этого вопроса. По ним нельзя было даже восстановить точную траекторию метеорита. Записи сейсмографов и барографов давали только координаты эпицентра и энергию взрыва, но не направление полета тела. Оставался еще один «свидетель» катастрофы — поваленный лес. И «свидетель» этот оказался очень важным. Он много дал для прояснения картины взрыва. Вот как это произошло.

Начиная с 1959 года, в Тунгусскую тайгу двинулись, помимо профессиональных, еще и самодеятельные экспедиции. Бóльшая часть их ничего не дала науке. Но одна из них, состоявшая из молодых научных работников и студентов Томска, оказала решающее влияние на ход дальнейших исследований. Руководил этой экспедицией физик и врач Г. Ф. Плеханов. Прежде всего, проведенные этой группой анализ медицинских архивов, расспросы старейших жителей и врачей, исследование тел захороненных эвенков навсегда похоронили идею о якобы ядерном характере Тунгусского взрыва. Участники Комплексной самодеятельной экспедиции (КСЭ), как они себя называли, начали планомерное изучение вывала леса и других явлений, например, лучистого ожога деревьев и последствий лесного пожара. Шли годы, шли в тайгу участники КСЭ. Ученые-специалисты сначала смотрели на них снисходительно, потом добродушно, потом с уважением. По результатам исследований защищались диссертации, публиковались толстые тома трудов. Теперь это уже не КСЭ, а постоянно действующая группа исследователей, руководимая Комиссией по метеоритам и космической пыли Сибирского отделения Академии наук СССР и Томским отделением Всесоюзного астрономо-геодезического общества.

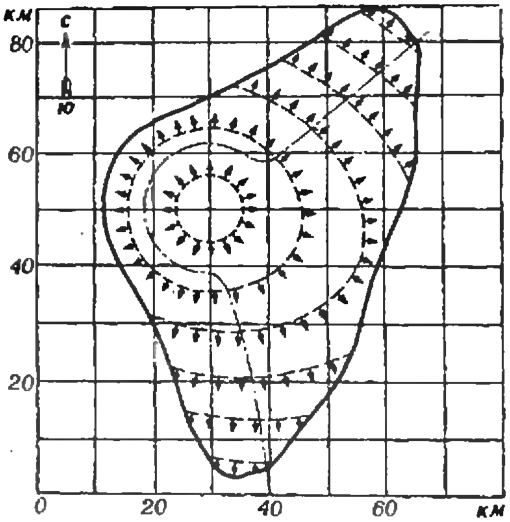
Участники КСЭ поставили задачу: построить математическую модель поля вывала леса. Для этого они планомерно, разбив тайгу на квадраты, измеряли азимуты поваленных деревьев. Азимуты 100 деревьев усреднялись. Каждой точке поля вывала соответствовал определенный средний азимут. Потом математики В. Г. Фаст и А. П. Бояркина обработали результаты на ЭВМ. Получилось следующее: в среднем вывал радиальный (значит, взрыв был!), но наблюдаются следы и осевой симметрии. Ось симметрии проходит с востока — юго-востока на запад — северо-запад. Можно полагать, что это направление и соответствует азимуту траектории Тунгусского тела. Вывал в целом по форме напоминал бабочку. Так его и прозвали — бабочкой.

Изучение области «мертвого» леса в центре бабочки позволило оценить высоту взрыва в 5—10 км.

Построение модели вывала леса заняло почти 10 лет напряженной работы. Теперь предстояло по этой модели попытаться восстановить картину взрыва — определить наклон траектории, интенсивность выделения энергии вдоль нее, наконец, высоту взрыва и его энергию, а по ней — массу и скорость Тунгусского тела.

Эта задача была решена.

Расчеты, проведенные на ЭВМ, дали следующие результаты: энергия взрыва — 4 · 10^{16} Дж; скорость Тунгусского тела — 40 км/с; высота взрыва была оценена в 5 — 10 км, что хорошо согласовалось с данными, определенными по радиусу «мертвого» леса и по данным обработки сейсмограмм.



Граница области поваленного леса по форме напоминает бабочку. Стрелки показывают направления поваленных деревьев.

Оценка массы Тунгусского тела была сделана еще в 1961 году независимо двумя методами. Академик В. Г. Фесенков обратил внимание на наблюдения американского астронома Ч. Аббота, который две недели спустя после падения Тунгусского метеорита зафиксировал ослабление солнечного излучения над Калифорнией. Полагая, что за это время туда дошло облако пыли, образовавшееся при взрыве, В. Г. Фесенков сумел по ослаблению солнечного света рассчитать массу взорвавшегося тела. Получилось около миллиона тонн.

В том же году автор этой статьи рассчитал вход в атмосферу семейства тел различной массы с различными скоростями (в пределах скоростей, характерных для метеоритов, — от 15 до 60 км/с). Оказалось, что только тело с начальной массой в один миллион тонн, летя со скоростью около 25 км/с, могло достигнуть высоты 5 — 10 км над Землей и произвести взрыв той энергии, которая соответствовала вывалу леса: 10^{16} Дж. Как видно, обе оценки совпали с результатами расчетов по модели взрыва: при энергии взрыва 4 · 10^{16} Дж и скорости 4 · 10^{3} м/с масса тела должна была быть $\sim 10^{9}$ кг.

Итак, механика взрыва была выяснена. Но его физика все же была неясна. Что заставило ядро кометы взорваться?

Вспомним, что говорит нам астрономия о строении и составе ядер комет. Они — ледяные, хотя лед этот включает не только водяной лед, но также и углекислый (из CO_2), с добавками метана и аммиака. Кроме того, этот лед загрязнен примесями металлов. Как показывают спектры продуктов разрушения комет — метеоров, а иногда и самих комет, в их состав входят железо, магний, кальций, натрий, алюминий и другие металлы, а также кремний. Средняя плотность ядер комет — порядка 1 г/см^3 или немного меньше. Их вещество непрочно, и при входе в земную атмосферу начнет интенсивно испаряться и дробиться. А дробление только увеличивает скорость испарения. Ведь при этом растет поверхность испарения. В самом деле, пусть у нас было тело радиуса R. Площадь его поверхности равнялась $4\pi R^2$. Если тело раздробилось на n осколков, то, как нетрудно подсчитать, их общая поверхность будет в $n^{1/3}$ раз больше первоначальной. Усиление интенсивности испарения происходит и за счет входа тела во все более плотные слои атмосферы.

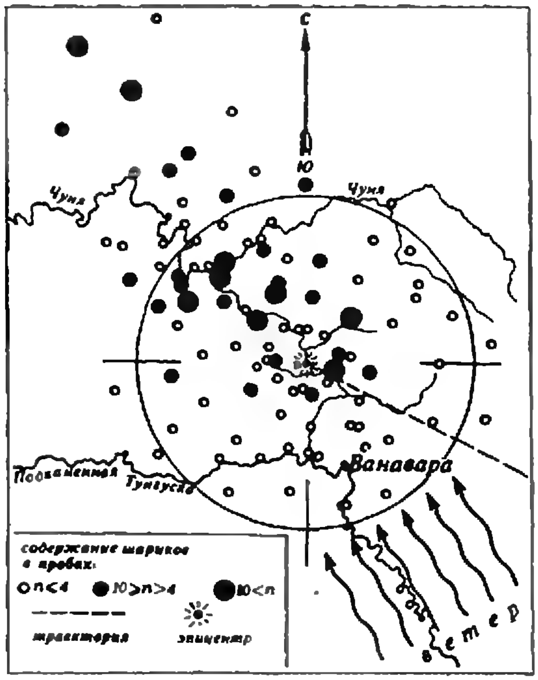
В 1979 году количественную теорию дробления гигантских тел, входящих в атмосферу Земли, разработал С. С. Григорян. Его расчеты показали, что интенсивность дробления должна нарастать прогрессивно, завершаясь почти мгновенным переходом вещества в пар. Много раньше такую же картину чисто качественно нарисовал известный аэродинамик профессор Г. И. Покровский.

Итак: прогрессивное дробление, ускоряющееся испарение и в конце — почти мгновенный переход всего вещества в пар, напоминающий взрыв. Именно так представляют себе взрыв Тунгусской кометы исследователи этого явления.

Тунгусские метеориты падают каждый год

Да, да, не удивляйтесь. Каждый год и даже чаще. И тоже не достигают поверхности Земли. Только они не так эффектны и не валят деревья. Речь идет об очень ярких метеорах — болидах. В начале 60-х годов ученые полагали, что большинство болидов заканчивается выпадением на Землю метеоритов. В Соединенных Штатах Америки, среди прерий центральной части страны, американские астрономы организовали сеть станций для фотографирования болидов (ее назвали Прерийной сетью). Еще раньше такая же сеть была развернута на территории Чехословакии (сейчас она продолжена на часть территории ГДР и ФРГ). Через несколько лет астрономы Р. Мак-Кроски и А. Позен опубликовали каталог траекторий, скоростей и начальных масс наблюдавшихся болидов. Первоначальный замысел — по траекториям болидов искать на земле метеориты — не оправдался. Только один болид, сфотографированный Прерийной сетью, закончился выпадением метеорита Лост Сити. Чехословацкие астрономы в 1959 году сняли полет метеорита Пршибрам, а канадцы в 1976 году — полет метеорита Инисфри. И всё. Большинство болидов разрушалось в атмосфере, причем многие — с концевой вспышкой, напоминающей взрыв. Это и дало основание И. Т. Зоткину в статье в журнале «Природа» заявить, что «тунгусские метеориты падают каждый год».

Проверить это заявление решил автор этой статьи. Используя некоторые выведенные ранее закономерности движения метеорных тел в атмосфере Земли, можно было рассчитать высоты разрушения тел при заданных массе, скорости влета и угле наклона траектории. Но надо было еще знать плотность тел. И тут автор предположил, что она одинакова для большинства болидов и Тунгусского метеорита. Расчеты были сравнены с данными наблюдений болидов и теми данными о траектории, массе и скорости Тунгусского метеорита, которые были в нашем распоряжении. Предположение о родстве природы всех этих тел подтвердилось. Очевидно, они ледяные и напоминают ядра комет. Эти тела автор назвал «микрокометами». Тунгусский метеорит как бы крупнейший из этой группы тел, но в принципе ничем от них не отличается.



Шарики и частицы вещества Тунгусского тела в почве и торфяном слое в районе катастрофы. Размер наибольших частиц — около 50 мкм.

Гипотеза о микрокометах тоже имеет свои трудности. Небольшие ледяные тела быстро испаряются от нагрева прямыми лучами Солнца в космическом пространстве. Срок их жизни невелик. Поэтому приходится допустить, что они состоят не из чистого льда, а имеют снаружи своеобразную корку из твердых пород, предохраняющую их от солнечных лучей. По мере таяния льда содержащиеся в этих телах твердые частички медленно оседают (как весной на тающем снеге), и постепенно образуется корка.

Тщательный химический анализ шариков и неправильных по форме частичек вещества Тунгусского тела, собранных на месте катастрофы в торфяном слое 1908 года, дал весьма интересные результаты. Эти шарики по сравнению с «обычными» метеоритами обогащены цинком, натрием, в них присутствуют следы серебра, селена и редких земель. Металлическая фракция пыли характерна повышенным содержанием никеля и кобальта.

В шариках, представляющих собой остатки Тунгусского космического тела, обнаружены газовые включения (вакуоли). Состав этих газов тоже был исследован. В газовых смесях отсутствует примесь воздуха, зато налицо водород. А ведь водород — одна из основных составных частей вещества комет. Так что и химический анализ вещества остатков Тунгусского тела подтверждает гипотезу о его кометной природе.

Вот насколько разнообразны проблемы, которые поставил перед учеными Тунгусский метеорит.

Новое простое число

Возможности вычислительной техники нередко демонстрируются на рекордных арифметических вычислениях. Одно из самых популярных направлений — поиски больших простых чисел (с. 25). Речь обычно идет о простых числах Мерсенна $M_p = 2^p - 1$ (см. заметку «О десятичной записи некоторых чисел»). Причина, по которой простые числа чаще ищут среди простых чисел Мерсенна, заключается в том, что, начиная с результатов Ферма и Эйлера, известны многочисленные ограничения на возможные делители M_p. Это актуально, поскольку при доказательстве простоты очень больших чисел требуется колоссальный перебор возможных делителей.

Предыдущий рекорд в поисках простых чисел был установлен в апреле 1979 г. Дэвидом Славинским. Он доказал простоту числа $M_{44497} = 2^{44497} - 1$. Это 27-е по счету простое число Мерсенна. В январе 1983 г. появилось сообщение Славинского о том, что простым является число $M_{86243} = 2^{86243} - 1$. Это число записывается 25962 десятичными знаками. Вычисления проводились на известной своим быстродействием многопроцессорной машине *Крей-1* в исследовательских лабораториях Крея (и, разумеется, служили рекламой этой машине). Непосредственная проверка простоты M_{86243} заняла 1 час 3 м. 22 с. машинного времени. Несмотря на быстродействие машины, автору пришлось потратить много сил на то, чтобы выполнять арифметические вычисления больших чисел самым экономным образом.

Не известно, является ли M_{86243} 28-м простым числом Мерсенна. Дело в том, что Славинский исследовал M_p для p из интервала (44477, 62000) и, не найдя там простых, «перескочил» на интервал (75000, 100000), где ему удалось найти простое число. Он обещает исследовать интервал (62000, 75000).

С. Г. Гиндикин

Революционер в науке и жизни

В. П. ЛИШЕВСКИЙ

Многие ученые — люди удивительной судьбы, но мало кто прожил такую захватывающе интересную, полную приключений жизнь, как Гаспар Монж. Замечательный ученый (математик, механик, химик и металлург) был также активным участником Великой французской буржуазной революции: именно он своей подписью утвердил смертный приговор Людовику XVI. Сын бедных родителей, революционер и якобинец Монж, боровшийся против привилегий знати, становится графом и личным другом императора Наполеона. После реставрации монархии ученый был исключен из французской Академии наук и кончил свои дни в изгнании.

Гаспар Монж родился 10 мая 1746 г. в небольшом городке Бон, расположенном на востоке Франции. Его отец был малограмотным уличным торговцем, но своим детям он постарался дать наилучшее образование, доступное в то время представителям третьего сословия. Два брата Гаспара тоже стали профессорами: младший, Жан, — математики, гидрографии и навигации, средний, Луи, — математики и астрономии. Интересно, что Луи Монж был участником экспедиции Лаперуза — одним из трех, оставшихся в живых после нее.

Учиться Гаспар начал в шесть лет и вскоре стал лучшим учеником школы, ее гордостью. Окончив в 1762 г. школу, он поступает в коллеж Святой Троицы в Лионе, где одновременно учится и преподает физику. Лето 1764 г. будущий ученый, как всегда, проводит дома. И здесь в его судьбу вмешивается

Его Величество Случай

В дни отдыха Гаспар вместе с одним из друзей начертил план своего родного города Бона. Этот план увидел подполковник инженерной службы дю Винько и предложил Монжу поступить в возглавляемую им Мезьерскую школу на отделение, готовившее мастеров и производителей инженерных работ. Другое отделение готовило военных инженеров, но на него принимали только детей дворян.

Занимаясь в школе, Монж заинтересовался задачей, которая всегда стояла перед военными инженерами: как разместить на местности укрепления, чтобы они были наименее подвержены разрушению артиллерией противника, находящейся в определенной точке. Монж быстро решил задачу, но преподаватели школы не стали смотреть его решение, полагая, что ученик не мог справиться с необходимыми сложными вычислениями. Монж все же настоял на своем. Когда преподаватели ознакомились с простым и совершенно необычным способом решения задачи, предложенным Монжем, они пришли в восторг. Работа, как представляющая ценность для военного дела, сразу была засекречена. Вот почему не скоро увидела свет

Начертательная геометрия Монжа

Теория проектирования и элементы начертательной геометрии существовали и до Монжа. Заслуга ученого в том, что он из разрозненных сведений, решений отдельных задач и не всегда корректных способов изображения создал новую область знания. В этом смысле Монжа можно считать основоположником начертательной геометрии, которую он определял как «искусство представлять на листе бумаги, имеющем только два измерения, предметы, имеющие три размера, которые подчинены точному определению».

Как многие великие идеи, идея Монжа была проста. Геометрические тела составлены из точек,— рассуждал ученый,— поэтому, чтобы изобразить тело в пространстве, надо найти способ изображения точек в пространстве. Возьмем точку и опустим из нее перпендикуляр на горизонтальную плоскость. Получим проекцию точки. Но такую проекцию будут иметь все точки, лежащие на этом перпендикуляре к плоскости. Чтобы точка в пространстве определялась однозначно, введем вторую плоскость — вертикальную. Тогда две проекции (на горизонтальную и вертикальную плоскости) однозначно определят положение точки в пространстве (рис. 1).

Итак,— резюмирует Монж,— если принять прямоугольное (ортогональное) проектирование и на каждой плоскости задать проекции точки, точка будет вполне определена.

Далее Монж делает следующее. Он поворачивает вертикальную плоскость вокруг прямой пересечения ее с горизонтальной плоскостью, чтобы можно было изображать обе проекции на одном листе бумаги. Теперь все построения можно вести на одном чертеже — «эпюре», как стали затем называть такой комплексный чертеж. А по эпюре можно затем воссоздать пространственную фигуру, определить расстояние между точками и т. п. (рис. 2).

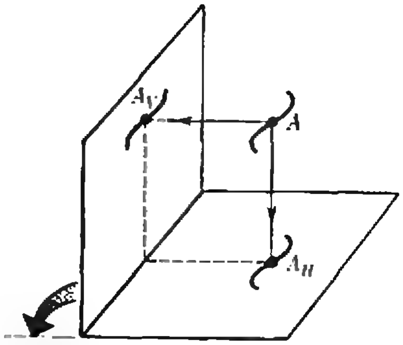


Рис. 1.

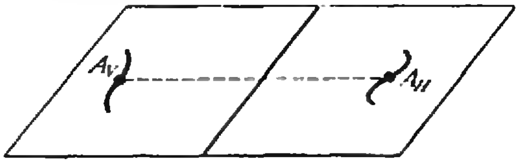


Рис. 2.

Конечно, впоследствии начертательная геометрия претерпела некоторые изменения, но основы, заложенные Монжем, остались незыблемыми. «Подобно тому, как элементарная геометрия и посейчас излагается почти как у Евклида, или аналитическая геометрия — близко к тому, как ее изложил Декарт, начертательная геометрия рассматривается и сейчас весьма близко к тому, как ее изложил Монж». Эти слова принадлежат известному советскому геометру Б. Н. Делоне. «Начертательная геометрия» Монжа была издана только в 1799 г., когда идеи, заложенные в ней, перестали быть тайной.

Педагог и ученый

В 23 года Монж — профессор Мезьерской школы. В 1770 году ему поручают возглавить кафедру физики, а вскоре — и математики. Одновременно с преподаванием ученый ведет большую научную работу, но о начертательной геометрии он не пишет — она еще долго будет находиться под запретом.

В это время появляются его первые математические мемуары — по теории разверток, по вариационному исчислению и по интегрированию некоторых функций. 31 августа 1771 г. на заседании Парижской Академии наук Монж делает доклад о развертках кривых двоякой кривизны, а 27 ноября того же года — об интегрировании некоторых дифференциалов. В результате 8 апреля 1772 г. Монж, которому нет еще полных 26 лет, избирается членом-корреспондентом Парижской Академии наук.

Очень много времени Монж уделяет преподаванию. Он читает курсы теоретической и экспериментальной физики, курсы химии, математики, резки камней, теории перспективы и теней.

При чтении лекций Монж сильно жестикулировал. Когда в старости Монжу стало трудно изображать руками различные геометрические поверхности, он перестал читать лекции. «Я потерял свой жест», — объяснял Монж свое решение.

Слушатели обожают молодого профессора. Он совершает с ними экскурсии в мастерские и на заводы, прогулки по окрестностям Мезьера, рассказывает много поучительного и интересного. «Случалось иногда, чтобы поскорее попасть с учениками на какой-либо завод, Монж, не тратя времени на разыскивание дорог и мостов, переходил вброд широкий ручей, не прерывая при этом своих объяснений. Молодые люди, окружавшие его, также не замечая препятствий на своем пути, продолжали внимательно слушать: так велика была магия его влияния на их умы!» — вспоминал впоследствии один из его учеников.

В 1777 г. Монж женился на молодой вдове Марии Катерине Орбон — спокойной и доброй женщине, которая родила Монжу трех дочерей. Супруги прожили счастливо всю жизнь.

Мадам Орбон унаследовала от первого мужа металлургическую мастерскую, и в круг интересов Монжа входят работа с металлами и химия. Последней ученый увлекается настолько, что открывает в Мезьерской школе химическую лабораторию.

О его успехах в занятиях химией свидетельствует, например, такой факт. Монж раньше Лавуазье доказал, что вода состоит из кислорода и водорода, и осуществил синтез воды из этих газов. (Лавуазье признавал приоритет Монжа в данном вопросе.)

Но основное внимание ученый попрежнему уделяет математике. Он разрабатывает различные приложения начертательной геометрии к практическим задачам, интересуется уравнениями в частных производных, исследует некоторые аспекты дифференциальной геометрии.

Монж активно участвует в многогранной деятельности Академии. Присутствует на ее заседаниях, работает в различных комиссиях, дает заключения на всевозможные изобретения и научные труды. Одновременно он не прекращает преподавательскую деятельность. В 1783 г. Монжа назначают экзаменатором морской и артиллерийской гвардий. Экзаменуя кадетов, он убеждается, что те плохо знают теоретическую механику, и пишет для них учебник по статике (1788 г.).

Революционер

Во Франции начинается революция. 14 июля 1789 г. восставший народ захватывает Бастилию. За Парижем поднимается на борьбу вся страна. Создаются новые органы власти, новая вооруженная сила — Национальная гвардия; 26 августа Учредительное собрание принимает Декларацию прав человека и гражданина.

«У науки нет отечества, но ученый не бывает без отечества»,— говорил Луи Пастер. Эти слова как нельзя более относятся к Гаспару Монжу. Он не может находиться вне происходящих событий. Ученый горячо приветствует революцию. Он вступает в Патриотическое общество, затем — в Народное общество и, наконец,— в Якобинский клуб.

Против страны, охваченной революционным пожаром, организуется блок контрреволюционных государств. Законодательное собрание Франции объявляет: «Отечество в опасности!». 10 августа 1792 г. начинается новый этап революции — король свергнут и к власти приходит Временный исполнительный совет, состоящий из министров, избранных Законодательным собранием. В этот совет в качестве морского министра входит Гаспар Монж.

21 сентября 1792 г. на своем первом заседании вновь избранный Конвент принял решение об упразднении монархии и провозглашении республики. Король был предан суду и приговорен к смертной казни. Приговор был утвержден Монжем, который в то время исполнял обязанности председателя Временного исполнительного совета (должность председателя Совета министры занимали по очереди).

Французская республика находилась в тяжелом положении. Не хватало оружия и продовольствия. Плохо обученные, недостаточно вооруженные и голодные солдаты сражались на многочисленных фронтах с превосходящими силами противника. По поручению революционного правительства Монж организует производство пороха, ружей, сабель, пушек. Он разыскивает запасы селитры, необходимой для производства пороха, под его руководством железоделательные фабрики и заводы переходят на изготовление оружия (производство ружей в одном только Париже доходит до 1000 штук в день); Монж создает литейные мастерские для отливки пушечных стволов. Он обучает рабочих, заботится об их питании, сам же живет впроголодь. Когда жена ученого к куску хлеба — обычному обеду его в то время — добавила сыр, Монж отказался: «Право же, ты ввязываешь меня в скверную историю; ведь я рассказывал тебе, что, когда на прошлой неделе я проявил некоторое чревоугодие, мне пришлось с горечью услышать, как депутат Ниу с загадочным видом говорил окружающим: "Монж перестает стесняться; глядите — он ест редиску"».

9 термидора (27 июля) 1794 г. произошел контрреволюционный переворот. Руководители якобинской диктатуры — Робеспьер, Сен-Жюст и другие — были казнены. Монжу, как активному якобинцу, пришлось некоторое время скрываться.

Конвент закрыл Академию наук, высшие и средние специальные школы. Сокращается производство оружия, перестают работать многие мастерские и мануфактуры — теперь Монж только преподает.

Политехническая школа

При активном участии Монжа создается Центральная школа общественных работ, преобразованная позже (1 сентября 1795 г.) в Ecole Polytechnique — знаменитую Политехническую школу, директором которой Монж был долгие годы. Это его любимое детище. Политехнической школе Монж отдает все свое свободное время и даже деньги (на степендии нуждающимся студентам). И школа оправдала его надежды. Из нее в разные годы вышли такие выдающиеся ученые, как Ампер, Кориолис, Гей-Люссак, Беккерель, Араго, Френель, Пуансо, Пуассон, многие поколения инженеров высшего класса.

«Никто не преподавал так хорошо, как он,— вспоминал впоследствии ученик Монжа известный инженер Бриссон. — Жесты, поза, модуляция голоса — все служило ему для развития мыслей. Он всегда следил за глазами слушателей и знал, как угадать степень понимания каждого из них... Мы узнали Монжа, этого добрейшего человека, привязанного к юношеству и преданного наукам. Он всегда был среди нас; после лекций по геометрии, анализу и физике начинались частные беседы, которые еще расширяли и укрепляли наши способности. Он был другом каждого воспитанника, побуждал нас к труду, всегда помогал и всегда радовался нашим успехам».

Другой ученик, Дюпен, так описывает внешность Монжа: «Высокий, сильный, мускулистый. Лицо, широкое и короткое, напоминает льва. Глаза, большие и живые, сверкают из-под густых черных бровей, которые подчеркивают широкий и высокий лоб, оттененный глубокими морщинами, свидетельствующий о большом уме. Это замечательное лицо обычно бывало спокойным — лицом человека, погруженного в размышления».

Для своих слушателей Монж написал несколько учебников по геометрии (начертательной, аналитической и дифференциальной), по которым училось несколько поколений инженеров.

Монж и Наполеон

События в стране тем временем шли своим чередом. В феврале 1796 г. Директория назначает 26-летнего генерала Бонапарта главнокомандующим французскими войсками, сражающимися в Италии. В мае того же года по заданию Директории в Италию выехал Монж. Здесь и произошла его встреча с будущим императором, которая сыграла такую большую роль в жизни ученого.

Бонапарт и Монж один раз встречались ранее (в бытность последнего морским министром), но ученый не запомнил очередного посетителя. Теперь Бонапарт, улыбаясь, напомнил о том свидании: «Один молодой артиллерийский офицер... обращался в 1792 году с просьбой к морскому министру. Может быть, министр и не запомнил этого случая — мало ли просителей у него тогда перебывало... Что же касается безвестного офицера, то он никогда не забудет его внимания».

Между полководцем и ученым сразу же установились доверительные отношения. Это была взаимная симпатия двух умных людей, перешедшая затем в искреннюю дружбу. Бонапарт не отпускал Монжа от себя ни на шаг. И хотя их отношения не всегда были безоблачными, в лице Монжа — этого бескорыстного, простодушного ученого, не способного на малейшую фальшь, неискренность, интригу, Наполеон Бонапарт нашел настоящего друга. Будущий император не ошибся в своем выборе. Монж остался верен этой дружбе до самой смерти.

Когда Бонапарт затеял свой Египетский поход (1798—1799 гг.), Монж принял в нем участие. Этот поход едва не стоил ему жизни: он чуть не умер во время эпидемии чумы. Только благодаря химику Бертоле, самоотверженно ухаживавшему за больным Монжем, тот поправился.

Именно к Египетскому походу относятся слова Наполеона, сказанные им в минуту опасности: «Ослов и ученых в середину!» Эту фразу некоторые пытаются трактовать как неуважение к ученым. Отдавая дань юмору будущего императора, все же отметим, что он приказал поместить в середину каре тех, кем более всего дорожил: ученых и животных, которые перевозили оружие, продовольствие и воду.

В Египте Монж и другие ученые, входившие в экспедицию Бонапарта, вели научную работу. Их целью было, по определению Монжа,— содействовать прогрессу и просвещению Египта. Для этой цели создается Каирский институт, президентом которого избирается Монж, вице-президентом — Бонапарт. Французские ученые составляли «Описание Египта», изучали древние памятники и сельское хозяйство, работали над проектом канала, который соединил бы Средиземное и Красное моря.

Положение французских войск ухудшается. И не только в Египте. Суворов освобождает от французов Италию. Тяжелое положение на других фронтах. В этих условиях Наполеон принимает решение вернуться в Париж. В августе 1799 г. он покидает армию и отплывает во Францию. Вместе с ним — Монж, Бертоле, Мюрат и другие приближенные люди. 16 октября Бонапарт вместе со своими спутниками въезжает в Париж. Его приветствуют восторженные толпы народа.

18 брюмера (9 ноября) 1799 г. была упразднена Директория, а на следующий день — парламент. К власти пришли три консула, но вся полнота власти сосредоточилась в руках первого консула — Наполеона Бонапарта. 24 декабря 1799 г. пер-

вый консул назначает Гаспара Монжа пожизненным сенатором.

Монж уходит с поста директора Политехнической школы, оставаясь в ней профессором. Он продолжает свои исследования приложений алгебры и анализа к геометрии, начинает заниматься наукой о машинах и механизмах, в становлении которой он сыграл заметную роль.

21 августа 1803 г. Монж был назначен вице-президентом Сената, а 28 сентября — сенатором города Льежа. В задачи сенатской администрации входило, в основном, выполнение специальных поручений первого консула. Монж должен был наладить в Льеже производство пушек.

В конце 1803 года Наполеон восстанавливает статус личных наград, отмененных революцией. Первым по списку гражданских лиц орден Почетного легиона получает математик Монж. «Завидую я вам, ученым,— говорит Наполеон Монжу.— Как вы должны быть счастливы тем, что прославились, не запятнав кровью своего бессмертия!»

18 мая 1804 г. во Франции провозглашается новая конституция, по которой Наполеон — пожизненный император. В это время Монж выполняет различные поручения главы государства. Он изучает возможность проведения канала от реки Урк к Парижу, работает над проектом высадки десанта в Англии при помощи 100 воздушных шаров диаметром 100 м каждый и т. д.

20 мая 1806 г. Наполеон назначает Монжа президентом Сената. Вскоре Монж получает звание графа и 100 000 франков на покупку имения. Он в апогее своей славы, но здоровье ученого начинает сдавать. В начале 1809 г. у него отнимается рука. Монж вынужден оставить преподавание в Политехнической школе. Но он по-прежнему консультирует императора по различным научным вопросам. В 1810 г. Монж по распоряжению Наполеона председательствует в комиссии по изучению ракет, дает заключение на мемуар о скафандре, на монографию по металлургии чугуна, железа и стали. Император спрашивает его мнение о тосканской железной промышленности, о рудах острова Эльбы, о производстве пушек и т. д. и т. п.

Империя Наполеона идет к закату. Разгром «Великой армии» в России, поражение в «Битве народов» под Лейпцигом повлекли за собой отречение и ссылку Наполеона.

Когда Наполеон вернулся с Эльбы, Монж прибыл во дворец Тюильри в первый же день воцарения там императора и все время находился при нем. После второго отречения Монж был вынужден уехать в Бельгию, где и умер 28 июля 1818 г.

После смерти его тело перевезено в Париж и похоронено на кладбище Пер-Лашез. Официальной церемонии не было, но многие академики, товарищи, друзья и ученики Монжа пришли проводить его в последний путь.

* * *

Монж вошел в историю науки как создатель начертательной геометрии, как человек, который сделал чертеж рабочим инструментом инженеров и техников всех стран и народов. «Если чертеж является языком техники, то начертательная геометрия служит грамматикой этого всемирного языка, так как она учит нас правильно читать чужие и излагать на нем наши собственные мысли»,— говорил известный русский ученый В. И. Курдюмов. Создатель этого всемирного языка — Гаспар Монж. Но не надо забывать другие его работы по математике (анализу и дифференциальной геометрии), а также по химии, металлургии, метеорологии, оптике, гидравлике, оружейному и стекольному производствам; Монж даже выдвинул гипотезу о происхождении жизни на Земле. А его собственная жизнь остается ярким примером служения науке.

Разложение на множители

Кандидат физико-математических наук С. В. ФОМИН

В школе часто приходится сталкиваться с алгебраическими уравнениями. Линейные уравнения умеют решать уже шестиклассники. В седьмом классе школьники узнают формулы для решения квадратных уравнений. Довольно громоздкие формулы для решения кубических уравнений и уравнений четвертой степени, найденные в XVI веке, оказываются мало полезными на практике (см. книгу С. Г. Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» (М., «Наука», 1981)). Уравнения же пятой степени и выше в общем случае не разрешимы в радикалах.

И тем не менее, во многих случаях уравнение степени $n>2$ удается легко решить. Чаще всего помогает разложение на множители. Из утверждения «число a тогда и только тогда является корнем многочлена $P(x)$, когда $P(x)$ делится на $x-a$» и Основной теоремы алгебры («Квант», 1982, № 4) вытекает, что *всякий многочлен с действительными коэффициентами степени $n>2$ разлагается в произведение множителей первой степени и неразложимых квадратных трехчленов.*

Решим несколько уравнений.

$$2x^3-x^2-7x+2=0. \qquad (1)$$

У многочлена в левой части уравнения (1) — целые коэффициенты. Легко доказать, что если такое уравнение имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена (докажите это!). Число 2 — корень уравнения (1). Значит, многочлен $2x^3-x^2-7x+2$ делится на $x-2$. Очевидно, частным является квадратный трехчлен со старшим коэффициентом 2, так что

$$2x^3-x^2-7x+2=$$
$$=(x-2)(2x^2+Bx+C),$$

где B и C — неизвестные пока коэффициенты. Это равенство верно при всех x. Полагая $x=0$, получаем $-2C=2$, $C=-1$. Полагая, далее например, $x=1$ получаем $-(B+1)=-4$, $B=3$.

Таким образом, уравнение (1) переписывается в виде

$$(x-2)(2x^2+3x-1)=0.$$

Ответ. $\left\{2, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}, \frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right\}$.

$$\frac{x^4-3x^3+x^2-2}{x^3+1}=\frac{2}{3x-1} \qquad (2)$$

Если сразу освободиться от знаменателей, мы получим уравнение 5-й степени. Поэтому «попытаем счастья» — попробуем выяснить, нельзя ли сократить дробь, стоящую в левой части. Ее знаменатель раскладывается на множители:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

На первый множитель числитель не делится (ведь число -1 не является корнем многочлена $x^4-3x^3+x^2-2$). Попробуем разделить его на x^2-x+1. Можно, конечно, опять применить «метод неопределенных коэффициентов»:

$$x^4-3x^3+x^2-2=$$
$$=(x^2-x+1)(x^2+Ax+B)+C.$$

Проще, пожалуй, разделить «уголком» — так, как мы делим многозначное число на многозначное:

$$\begin{array}{r|l} x^4-3x^3+x^2-2 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^4-x^3+x^2} & x^2-2x-2 \\ -2x^3-2 & \\ -\underline{-2x^3+2x^2-2x} & \\ -2x^2+2x-2 & \\ -\underline{-2x^2+2x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

(Мы делим старший член делимого на старший член делителя: $\frac{x^4}{x^2}=x^2$ — это будет старший член частного. Затем умножаем полученный член частного на делитель и вычитаем произведение из делимого. Далее старший член разности снова делим на старший член делителя: $\frac{-2x^3}{x^2} = -2x$ — получаем следующий член частного и т. д.)

Нам «повезло» — разделилось без остатка. Таким образом, уравнение (2) переписывается в виде

$$\frac{(x^2-x+1)(x^4-2x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{2}{3x-1},$$

$$\frac{x^2-2x-2}{x+1} = \frac{2}{3x-1}$$

и легко сводится к уравнению

$$x(x-3)(3x+2)=0.$$

Ответ. $\left\{0,\ 3,\ -\frac{2}{3}\right\}$.

$$\frac{2}{x+1} + \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x} + x+4=0. \quad (3)$$

Можно сразу освободиться от знаменателей и раскладывать левую часть полученного уравнения четвертой степени на множители. Проще, однако, раскладывать на множители непосредственно левую часть уравнения (3). Заметим, что число 1 является его корнем. При $x=1$ пять слагаемых, стоящих в левой части, принимают значения 1, —4, —2, 1 и 4. Преобразуем данное уравнение, вычтя из каждого слагаемого его значение при $x=1$:

$$\left(\frac{2}{x+1}-1\right) + \left(\frac{4}{x-2}+4\right) + \left(-\frac{2}{x}+2\right) + (x-1) + (4-4)=0$$

(сумма добавленных слагаемых равна нулю): Произведем действия в каждой из скобок:

$$-\frac{x-1}{x+1} + \frac{4(x-1)}{x-2} + \frac{2(x-1)}{x} + (x-1)=0.$$

В каждом слагаемом появился множитель $x-1$. Это и не удивительно — ведь значение каждого слагаемого при $x=1$ должно быть нулевым! Теперь задача свелась к решению уравнения

$$-\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x-2} + \frac{2}{x} + 1=0.$$

Нетрудно угадать один из его корней: $x=-2$ — и еще раз применить тот же прием:

$$\left(-\frac{1}{x+1}-1\right) + \left(\frac{4}{x-2}+1\right) + \left(\frac{2}{x}+1\right) + (1-1)=0,$$

или

$$-\frac{x+2}{x+1} + \frac{x+2}{x-2} + \frac{x+2}{x} = 0,$$

откуда $x=-2$ или

$$-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} = 0,$$

$$\frac{x^2+2x-2}{x(x+1)(x-2)} = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим оставшиеся корни.

Ответ. $\{1,\ -2,\ -1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}\}$.

$$(x^2+3x-2)^2 + 3(x^2+3x-2)-2=x. \quad (4)$$

Заметим, что если число x является решением уравнения

$$x^2+3x-2=x,$$

то оно удовлетворяет и уравнению (4). Следовательно, два корня уравнения (4) нам известны: $x_1=-1-\sqrt{3}$ и $x_2=-1+\sqrt{3}$. Раскрывая скобки и перенося x в левую часть, получим уравнение

$$x^4+6x^3+8x^2-4x-4=0.$$

Его левая часть делится на $x-x_1$ и на $x-x_2$, а значит, и на $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+2x-2$. Разделив тем или иным способом, получаем

$$(x^2+2x-2)(x^2+4x+2)=0.$$

Ответ. $\{-1+\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2}\}$.

В заключение решим систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)(13x-2y-15)-\\ \qquad -2(y-1)(3y+2)=0,\\ (x+1)(x+4y-15)-\\ \qquad -28(y-1)=0. \end{cases} \quad (5)$$

Легко заметить, что пара $(-1;\ 1)$ удовлетворяет ей. Нетрудно найти еще одну пару $(1;\ 0)$.

А теперь — нестандартный ход. Проведем через точки $(-1;\ 1)$ и $(1;\ 0)$ прямую (ее уравнение $y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$) и возьмем на ней еще какую-нибудь точку, например $(3;\ -1)$. При $x=3$; $y=-1$ левая часть первого уравнения системы (5) равна 100, а второго равна —8. Следовательно, если первое уравнение системы (5) умножить на 2, второе — на 25 и сложить их, то пара (3; —1) будет удовлетворять полученному уравнению (обозначим его (*)). Пары (—1; 1) и (1; 0), очевидно, также удовлетворяют уравнению (*). Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} (*) \\ y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (6)$$

имеет, по крайней мере, три различных решения. С другой стороны, подставляя выражение для y через x из второго уравнения системы (6) в первое, мы получим для x уравнение не выше второй степени. Значит, уравнение (*) после подстановки $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ превращается в тождество (ведь уравнение степени $n \leqslant 2$ не может иметь более двух корней). Таким образом, любое решение уравнения $y + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$ является решением уравнения (*). Поэтому естественно предположить, что левая часть уравнения (*) раскладывается на множители, одним из которых является $y + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ или пропорциональный ему множитель $2y + x - 1$.

Приступим к реализации нашего плана. Уравнение (*) имеет вид

$$17x^2 + 32xy - 4y^2 - 118x - 200y + 101 = 0;$$

в левой части его можно (например, методом неопределенных коэффициентов) выделить множитель $x + 2y - 1$:

$$(x + 2y - 1)(17x - 2y - 101) = 0;$$

Приравнивая каждый из множителей к нулю, выражая затем y через x и подставляя в одно из уравнений системы (5), получаем в случае $x + 2y - 1 = 0$ уже известные нам решения (—1; 1) и (1; 0) (вспомните, откуда возник множитель $x + 2y - 1$) и в случае $17x - 2y - 101 = 0$ решения (5; —8) и (7; 9).

Ответ. {(—1; 1), (1; 0), (5; —8), (7; 9)}.

Упражнения

1. Решите уравнение

а) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 = 0$,

б) $\dfrac{x^6 + 1}{x(x^4 + 1)} = \dfrac{65}{34}$.

2. Решите систему уравнений

$$x = \frac{y^2 + 2}{2y + 1}, \quad y = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}.$$

О десятичной записи некоторых чисел

В двух книгах, выпущенных издательством «Просвещение» в 1980 г., о значениях чисел π и e сказано, что для π найдено 707 десятичных знаков, а для e — более двух тысяч. Приведем более полные данные об этих и некоторых других числах, полученные с помощью ЭВМ.

В 1961 г. найдено 100 625 десятичных знаков числа π и 100 265 десятичных знаков числа e. В 1964 г. вычислено более миллиона цифр числа e, а в 1967 г. — 500 000 цифр числа π, однако эти результаты не были опубликованы.

Для знаменитого числа $1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ («золотое сечение») вычислено 2 878 знаков.

В 1970—71 гг. был получен миллион цифр числа $\sqrt{2}$. При проверке результата возведением в квадрат получилась единица, за которой следует десятичная запятая и 1 000 082 девятки.

О больших простых числах. В 1963 г. было найдено 23-е простое число Мерсенна *) $2^{11\,213} - 1$. Оно содержит 3 376 цифр и полностью приведено в книге М. Гарднера «Математические новеллы», 1974, с. 349.

В 1971 г. было найдено 24-е число $2^{19\,937} - 1$, в 1978 г. — 25-е число $2^{21\,701} - 1$, а в 1979 г. — 26-е число $2^{23\,209} - 1$ и 27-е число $2^{44\,497} - 1$.

Найдем число цифр, а также несколько первых и последних цифр последнего из перечисленных чисел Мерсенна. Числа $2^p - 1$ и 2^p имеют одинаковое число цифр. Действительно, если бы 2^p имело на одну цифру больше, то оно оканчивалось бы нулем. Но это невозможно, так как ни одна степень числа 2 на нуль не оканчивается. Итак, число цифр 27-го простого числа Мерсенна равно числу цифр числа $2^{44\,497}$. Имеем:

$$\lg 2^{44497} = 44\,497 \cdot \lg 2 = 44497 \cdot 0{,}3010\,2999\,57 = 13394{,}93172.$$

Характеристика логарифма равна 13394, следовательно, само число содержит 13 395 цифр. Мантисса логарифма равна 93 172, поэтому число начинается с цифр 8545.

Можно доказать, что последними тремя цифрами будут 6, 7 и 1. Итак:

$$2^{44\,497} - 1 = 8545\ldots671.$$

М. С. Гельфанд

---

*) То есть простое число вида $2^p - 1$; об этих числах и связанных с ними *совершенными* числами см. «Квант», 1982, № 11, с. 50 и 1971, № 8, с. 1.

Задачи-оценки

Кандидат физико-математических наук
Г. В. МЕЛЕДИН

В жизни каждому нередко приходится делать прикидки, оценки: успею ли добраться, хватит ли денег, намного ли надо подвести регулятор часов, сумею ли удержать груз и т. п.

В деятельности исследователей оценки необходимы профессионально. Грубая прикидка, оценка по порядку величины — почти обязательный этап подготовки эксперимента, проектирования установки, теоретической разработки. Они незаменимы в процессе обсуждения новых идей и проектов. Иногда оценки подсказывают путь точного решения задачи, дают возможность установить границы области применимости точного решения и понять, какие изменения потребуются при постановке и решении задачи вне пределов этой области.

Умение делать прикидки, наряду с интуицией, весьма существенно в творческой работе. Неслучайно поэтому, что в последнее время задачи-оценки стали встречаться и на вступительных экзаменах в вузы. Например, уже несколько лет в каждом варианте письменного экзамена по физике для поступающих на физический факультет Новосибирского государственного университета есть задача-оценка. В формулировке такой задачи нет или почти нет необходимых для решения численных значений физических величин; предполагается, что каждый сам сможет их выбрать и задать.

Физическая постановка задачи, выбор и построение простейшей физической модели явления — наиболее важный и вместе с тем трудный этап решения задач-оценок. Нужно правильно отобрать физические параметры, наиболее существенные для задачи, определяющие ее физику, и пренебречь параметрами, слабо влияющими на интересующее нас явление. Для установления связей между различными параметрами существенно правильное использование основных физических законов и определений. Иногда можно ограничиться не очень строгими определениями или качественной трактовкой физических законов.

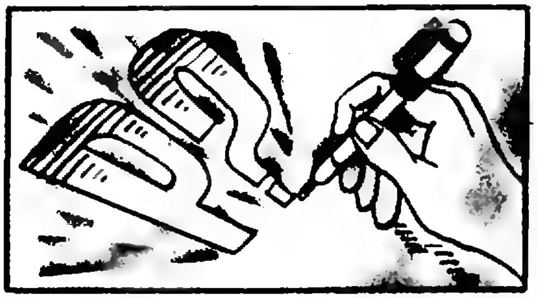
Прежде чем перейти к конкретным задачам, сделаем два небольших замечания. Во-первых, договоримся, что́ именно мы будем понимать под словами «оценка по порядку величины». Два численных значения какой-либо физической величины считаются отличающимися на порядок, если их отношение примерно равно 10, на два порядка, если оно равно 10^2, и т. д. С этой точки зрения число 89 должно считаться числом порядка 10^2, а число 15 — порядка 10. Если же два значения отличаются, например, в 1,3 раза, их нужно считать величинами одного порядка. То же самое относится к случаю, когда имеется отличие в 2,3 или даже в 5 раз. При грубых оценках такие отличия от точного результата не существенны.

Во-вторых, условимся об обозначениях. Наряду со знаком равенства «$=$» или знака приближенного равенства «$\approx$» мы будем употреблять значок «$\sim$». Обычно он используется для записи факта пропорциональности двух величин. Мы же этим значком будем обозначать равенство по порядку величины, подчеркивая, тем самым, что безразмерные коэффициенты пропорциональности в наших формулах — числа порядка единицы. Еще раз подчеркнем, что отличие коэффициентов «истинных» и «оценочных» в несколько раз для наших целей несущественно.

Теперь рассмотрим несколько сравнительно несложных задач-оценок. Почти все они взяты из вариантов вступительных экзаменов на физический факультет НГУ.

Начнем с задач, в которых физика явления предельно ясна и нужно лишь разумно выбрать конкретные значения соответствующих физических величин.

Задача 1. *Оцените давление шариковой ручки на бумагу при письме.*

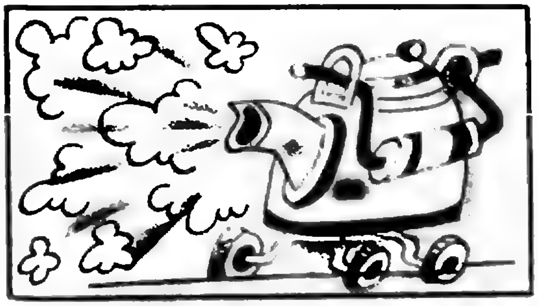


Чтобы сделать такую оценку, воспользуемся непосредственно определением давления: $p=F/S$. Теперь надо подумать о том, каковы численные значения силы и площади, входящих в это определение. Каждая линия, которую мы рисуем на бумаге во время письма, состоит из отдельных точек. Точку можно считать кружком, диаметр которого равен ширине следа d, оставляемого на бумаге: $S=\pi d^2/4$. Примем $d\sim 0{,}2$ мм (что достаточно правдоподобно). Усилие F, прилагаемое к ручке, тоже оценим «на глазок»: оно не превышает веса кисти руки, но заведомо больше веса ручки. Возьмем $F\sim 1$ Н. Тогда

$$p=\frac{F}{S}\sim\frac{4F}{\pi d^2}\sim 3\cdot 10^7\ \text{Па}.$$

Для того чтобы почувствовать, много это или мало, полезно сравнить полученное значение с каким-либо другим. Представьте себе, что на столе стоит гиря массой 1 кг. Ее диаметр в нижней части порядка 4 см, так что гиря оказывает на стол давление порядка $8\cdot 10^3$ Па. Значит, при письме шариковой ручкой давление на бумагу в несколько тысяч раз превышает давление килограммовой гири, стоящей на столе.

Задача 2. *Оцените скорость струи пара, выходящего из носика кипящего чайника.*



Пусть мощность нагревателя W, а удельная теплота парообразования воды L. Введем еще один параметр — долю мощности η, идущую на образование пара. Тогда $\eta W/L$ — это масса пара, образующегося в каждую единицу времени. Очевидно, сколько пара образовалось, столько же и выходит из чайника:

$$\frac{\eta W}{L}=\varrho v S.$$

Здесь ϱ — плотность пара при кипении, v — скорость вытекания пара, S — площадь сечения носика чайника. По закону Менделеева—Клапейрона плотность пара $\varrho=p\mu/(RT)$, где p — давление, μ — молярная масса воды, R — универсальная газовая постоянная, T — температура пара. Окончательно получаем

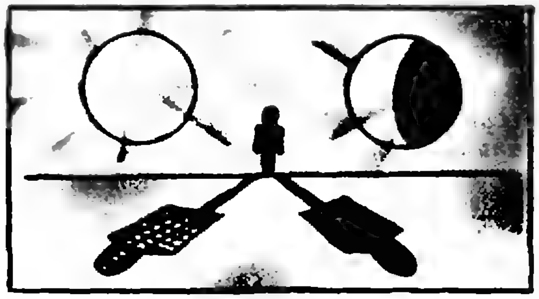
$$v=\frac{\eta W}{L\varrho S}=\frac{\eta WRT}{Lp\mu S}.$$

Если мощность нагревателя $W\sim 1$ кВт, $\eta\sim 0{,}5$, $S\sim 1$ см^2, $T\sim 373$ К, $p\sim 10^5$ Па (так как давление насыщенного пара при температуре кипения равно атмосферному давлению), а постоянные величины равны, соответственно, $R=8{,}3$ Дж/(кг · К), $L=4{,}2$ кДж/кг и $\mu=18\cdot 10^{-3}$ кг/моль, то

$$v\sim 2\ \text{м/с}.$$

Задача 3. *Оцените, во сколько раз в погожий солнечный день светлее, чем ночью в полнолуние.*

Прежде всего заметим, что Луна лишь отражает свет, падающий на нее от Солнца. Будем считать,



что освещенность, создаваемая Солнцем на Земле и на Луне, примерно одна и та же и равна $E_{\text{С}}$. На Луну попадает световая мощность $E_{\text{С}}\pi R^2$ (здесь R — радиус Луны). Луна создает на Земле освещенность $E_{\text{Л}} = E_{\text{С}}\pi R^2 k/(2\pi l^2)$, где k — коэффициент отражения света от поверхности Луны, l — расстояние от Луны до Земли (считаем, что Луна равномерно «отбрасывает» отраженный свет внутри телесного угла, равного половине максимального). Теперь найдем отношение освещенностей:

$$\frac{E_{\text{С}}}{E_{\text{Л}}} = \frac{2}{k}\left(\frac{l}{R}\right)^2 = \frac{8}{k}\left(\frac{2R}{l}\right)^{-2},$$

где $2R/l$ — угловой размер Луны, равный по порядку величины 0,01 радиана.

Возьмем $k \sim 0{,}2$, тогда окончательно

$$E_{\text{С}}/E_{\text{Л}} \sim 4 \cdot 10^5.$$

Задача 4. *Оцените, на сколько дальше упадет граната, если спортсмен будет бросать ее с разбега.*

Предположим, что при полете гранаты она поднимается на максимальную высоту H. Тогда время полета гранаты равно $2\sqrt{2H/g}$. Если в начальный момент горизонтальная проекция скорости гранаты увеличится на v, а вертикальная проекция останется практически без изменения, то время полета не изменится, а дальность полета возрастет на

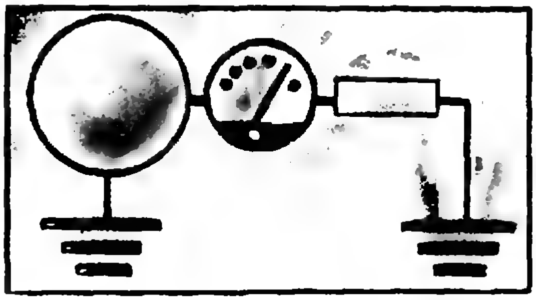
$$l = 2v\sqrt{2H/g}.$$

Разумно считать $H \sim 5$ м, а $v \sim 8$ м/с (вспомните, например, что спринтеры пробегают стометровку за время порядка 10—12 с); следовательно,

$$l \sim 20 \text{ м}.$$

Полученная оценка достаточно разумна.

Задача 5. *Оцените время разрядки металлического заряженного шара, соединенного с Землей через резистор с известным сопротивлением.*



Пусть потенциал заряженного шара φ, а заряд $Q = C\varphi$, где $C = 4\pi\varepsilon_0 a$ — емкость шара (a — радиус шара). После соединения с Землей и потенциал шара, и его заряд станут равными нулю. Во время разрядки по цепи пойдет ток I, который с течением времени будет, конечно, изменяться, но для оценки этим фактором мы пренебрежем. Тогда получаем

$$I \sim \frac{Q}{t} \sim \frac{\varphi}{R},$$

где R — сопротивление резистора, t — время разрядки. Отсюда

$$t \sim \frac{QR}{\varphi} = CR = 4\pi\varepsilon_0 aR.$$

При $a \sim 1$ м, $R \sim 1$ МОм и $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

$$t \sim 10^{-4} \text{ с}.$$

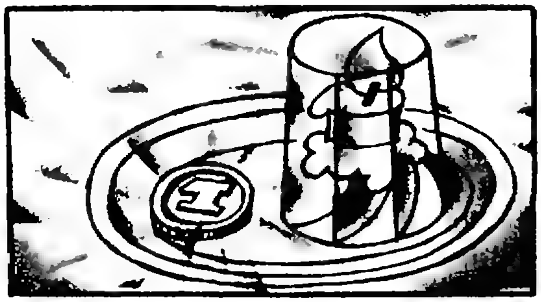
* * *

В «Занимательной физике» Я. И. Перельмана есть рассказ, который называется «Сухим из воды». Он начинается так: «Положите монету на большую плоскую тарелку, налейте столько воды, чтобы она покрыла монету, и предложите гостям взять ее прямо руками, не замочив пальцев.

Эта, казалось бы, невозможная задача довольна просто решается с помощью стакана и горящей бумажки. Зажгите бумажку, положите ее горящей внутрь стакана и быстро поставьте стакан на тарелку вблизи монеты вверх дном. Бумажка погаснет, стакан наполнится белым дымом, а затем под ним сама собой соберется вся вода с тарелки. Монета же, конечно, останется на месте, и через минуту, когда она обсохнет, вы сможете взять ее, не замочив пальцев».

Давайте в связи с этим рассказом решим такую задачу.

Задача 6. *Оцените минимальную температуру, до которой должен нагреться стакан, чтобы в него после остывания оказалась втянутой вся вода из тарелки.*



Решим сначала задачу точно (конечно, в рамках некоторых предположений, о которых позже скажем). Когда стакан подносят к поверхности воды, давление воздуха в нем равно атмосферному давлению p_a, а его температура T_x не известна. Когда стакан остынет и в него окажется втянутой масса воды m, давление воздуха в нем будет p, температура станет равной температуре T окружающего воздуха, а объем уменьшится на величину объема вошедшей воды, то есть станет равным $(Sl - m/\rho)$, где S и l — площадь сечения стакана и его высота, ρ — плотность воды. Согласно закону Менделеева—Клапейрона,

$$\frac{p_a Sl}{T_x} = \frac{pS(l - m/(\rho S))}{T}.$$

Из условия равновесия столбика воды следует, что $pS + mg = p_a S$, тогда

$$T_x = T \frac{1}{1 - \frac{mg}{p_a S}} \, \frac{1}{1 - \frac{m}{\rho l S}}.$$

Укажем теперь те неявные допущения, которые мы сделали при решении. Мы считали, что температура воздуха в стакане совпадает с температурой его стенок; что стакан ставится на воду медленно, так что начальное давление в нем совпадает с атмосферным; что давлением водяных паров в стакане можно пренебречь; что капиллярные эффекты пренебрежимо малы.

Интересно, что в полученную формулу для T_x учет изменения давления (обусловленного вошедшим в стакан водяным столбиком) и учет изменения объема воздуха в стакане вошли в виде независимых сомножителей. Поэтому их влияние можно исследовать раздельно.

Преобразуем первый сомножитель из правой части указанной формулы:

$$\frac{1}{1 - \frac{mg}{p_a S}} = \frac{1}{1 - \frac{p_{\text{вод}}}{p_{\text{в}}}} \approx 1 + \frac{p_{\text{вод}}}{p_{\text{в}}}.$$

Атмосферное давление соответствует давлению водяного столба высотой 10 м, а в нашем случае ясно, что высота вошедшего в стакан столбика воды не может превышать высоту стакана, то есть приблизительно 10 см, поэтому разумно давлением водяного столбика пренебречь и считать этот множитель приближенно равным единице:

$$\frac{1}{1 - \frac{mg}{p_a S}} \approx 1.$$

Второй сомножитель связан с изменением объема воздуха в стакане. Объем воды и объем стакана уже не различаются столь сильно, как давления, поэтому объемом воды пренебречь нельзя.

Таким образом,

$$T_x \approx \frac{T}{1 - \frac{m}{\rho l S}}.$$

Выберем численные значения параметров такими: $T\sim300$ К, $m\sim30$ г, $l\sim10$ см и $S\sim20$ см^2 (поскольку объем стакана равен 200 см^3, а его высота $l\sim10$ см). Тогда

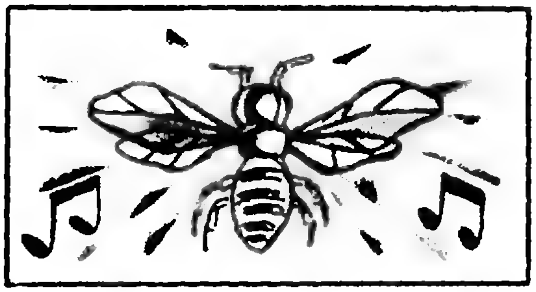
$$T_x\sim353 \text{ К, или } t\sim80°\text{C}.$$

Поправка из-за учета изменения давления равна $\Delta T_x\approx T_x\frac{mg}{p_aS}\sim0{,}1$ К, что, конечно же, мало по сравнению с найденным значением T_x. Получилось довольно забавно, что в результате мы пренебрегли эффектом изменения давления воздуха при остывании — эффектом, который, собственно, и создал задачу.

* * *

Иногда в задаче встречается значительно более сложная ситуация, и подход к получению оценок соответственно усложняется. Вот пример.

Задача 7. *Оцените частоту звука, генерируемого летящим комаром.*



Естественно предположить, что звук здесь возникает от периодического взмахивания крылышек комара. На самом деле физика явлений при полете комара очень непроста. Мы будем пользоваться самой грубой моделью, считая, что взмахами крылышек создается такое изменение импульса воздуха в единицу времени, которое обеспечивает компенсацию действующей на комара силы тяжести:

$$\Delta P/\Delta t=mg.$$

За время Δt движения крылышек площадью S со скоростью v отбрасывается вниз масса воздуха $\Delta m=\varrho_в v\Delta tS$, при этом ей сообщается импульс $\Delta P=\Delta mv=\varrho_в v^2\Delta tS$. Это создает силу F, действующую на крылышко вверх:

$$F\sim\Delta P/\Delta t\sim\varrho_в v^2S,$$

где $\varrho_в$ — плотность воздуха. Введем характерный размер комара, например его длину $l\sim4$ мм. Площадь пары крыльев $S\sim l^2$ (мы считаем, что длина комара того же порядка, что и размах его крыльев). Объем же комара разумно оценить как $\frac{1}{10}l^3$, поскольку поперечные размеры комара без крылышек заметно меньше его длины. Плотность комара примем равной плотности воды $\varrho_{вод}$. Введем частоту взмахов крылышек ν, тогда скорость крыла $v\sim l\nu$. Записав условие равновесия комара

$$F\sim\varrho_в v^2l^2\sim\varrho_в\nu^2l^4=mg\sim\varrho_{вод}l^3g/10,$$

получаем

$$\nu_{зв}\sim\nu\sim\left(\frac{\varrho_{вод}}{10\varrho_в}\frac{g}{l}\right)^{1/2}\sim400 \text{ Гц}.$$

Разумеется, цифре «4» верить нельзя, но в целом результат дает для частоты разумный порядок величины.

Заметим, что из полученной формулы следует, что частота обратно пропорциональна $\sqrt{l}$. Другими словами, чем крупнее насекомое, тем ниже издаваемый им звук. Действительно, сравните басовитое гудение шмеля (или жужжание пчелы) с тонким, звенящим звуком комара.

* * *

Довольно часто при решении задач-оценок применяется метод размерностей[*]). В этом методе явно используется предположение о том, что параметры задачи входят в результат в виде сомножителей. Численные коэффициенты только из соображений размерностей получить нельзя. Иногда их можно определить из какого-нибудь частного случая, чаще эти коэффициенты условно полагают равными единице. Последнее может быть допустимо, если речь идет об оценке лишь по порядку величины. Проиллюстрируем применение метода размерностей на конкретной задаче.

---

*) См., например, статью Ю. Брука и А. Стасенко «Метод размерностей помогает решать задачи» («Квант», 1981, № 6).

Задача 8. *Оцените время, через которое вы услышите гром после вспышки молнии, если известно, что молния ударила в дерево, находящееся от вас на расстоянии около 3 км.*

Поскольку свет распространяется со скоростью $\approx 3 \cdot 10^5$ км/с, вспышку молнии можно будет увидеть через время $\sim 10^{-5}$ с. Звук же идет гораздо дольше. Попробуем оценить скорость распространения звуковых колебаний в воздухе. Воспользуемся для этого методом размерностей.

Очевидно, что скорость v звука зависит от параметров, характеризующих эту среду. Пусть для воздуха это будут давление p и плотность ϱ. Предположим теперь, что

$$v \sim p^x \varrho^y,$$

где x и y — неизвестные пока числа. Если подобная формула действительно существует, то размерности ее левой и правой частей должны быть, конечно, одинаковы.

Условимся размерность физической величины A обозначать $[A]$. Тогда

$$[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1},$$
$$[p] = \text{Па} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2},$$
$$[\varrho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3},$$

и можно записать

$$\text{м} \cdot \text{с}^{-1} = (\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2})^x (\text{кг} \cdot \text{м}^{-3})^y.$$

Это равенство выполняется при условии, что

$$x + y = 0,$$
$$-x - 3y = 1,$$
$$-2x = -1.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{2} \text{ и } y = -\frac{1}{2},$$

поэтому получаем

$$v \sim \sqrt{\frac{p}{\varrho}}.$$

Численный коэффициент в этой формуле из соображений размерностей определить нельзя. Предположим, что он порядка единицы (вообще говоря, это нужно было бы как-то проверить).

Для оценки скорости звука давление воздуха примем равным нормальному атмосферному давлению: $p \sim 1$ атм $\sim 10^5$ Па, а плотность воздуха будем считать равной плотности при нормальных условиях: $\varrho \sim 1{,}3$ кг/м^3. Тогда скорость звука

$$v \sim \sqrt{\frac{p}{\varrho}} \sim 300 \text{ м/с},$$

и время, через которое наблюдатель услышит гром,

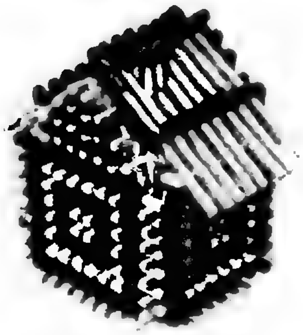
$$t \sim \frac{3 \cdot 10^3 \text{ м}}{300 \text{ м/с}} \sim 10 \text{ с}.$$

Это время на шесть порядков больше времени распространения света, что вполне разумно с точки зрения нашего жизненного опыта.

В заключение предлагается еще несколько задач-оценок. Попробуйте, не заглядывая в ответ, получить необходимые оценки самостоятельно.

Задачи для размышлений

1. Оцените, как изменится давление атмосферы, если вся вода в океанах испарится.
2. Оцените скорость опускания парашютиста с раскрытым парашютом.
3. Оцените среднюю плотность Солнца.
4. Оцените, сколько оборотов (кувырков) совершит автомобиль, на полной скорости свободно упавший в километровую пропасть.
5. Оцените усилие спортсмена при толкании ядра.
6. Оцените силу натяжения цепи велосипеда при езде в гору.
7. Оцените, с какой скоростью летела капля воды, если при ударе о неподвижную стенку она оказывает на нее среднее давление порядка 10^6 Па.
8. Оцените силу натяжения ремней безопасности, удерживающих человека в автомобиле, если автомобиль, движущийся со скоростью порядка 30 км/ч, столкнулся со столбом, в результате чего у автомобиля получилась вмятина глубиной порядка 30 см.
9. Оцените, на сколько отличаются расстояния уровней мирового океана до центра Земли на полюсе и на экваторе.
10. Оцените, на каком расстоянии человек в яркой одежде, уходя в сосновый лес, потеряется из виду. (Подлеска нет.)



Избушка на курьих ножках

Чтобы построить «избушку на курьих ножках», фотография которой помещена на четвертой странице обложки, вам не потребуется ничего, кроме нескольких коробок спичек. Спички в избушке держатся «сами по себе», без помощи клея или каких-либо других крепежных приспособлений. Поняв идею построения этой избушки, вы сможете в дальнейшем построить много других аналогичных конструкций, может быть — более рациональным способом. Пока же рекомендуем строго придерживаться приводимого ниже описания.

Начнем с выбора стройматериала. Для строительства лучше всего подходят наиболее тонкие спички. Чем тоньше спички, тем больше их потребуется, но тем прочнее будет избушка. В процессе строительства нужно отбрасывать спички, заметно отличающиеся от других по толщине, а также гнутые.

Затем подготовим стройплощадку. Возьмите для нее какое-нибудь твердое основание, например книгу, на которой вы будете при необходимости поворачивать недостроенную конструкцию.

Наконец, можно приступать к строительству. Положите на основание в направлении от себя 5—6 спичек параллельно друг другу, оставляя между ними промежуток, примерно равный толщине спички. (В дальнейшем направление от себя будем называть *продольным*, а перпендикулярное ему, то есть слева направо, — *поперечным*.) На первый слой положите такой же второй в поперечном направлении. Эти два слоя образуют пол избушки. Теперь кладите стены в виде колодца (две спички справа и слева в продольном направлении, на них две — в поперечном и т. д.). Ширина колодца должна быть больше ширины пола: между стенами и крайними спичками пола при взгляде сверху должен оставаться просвет в одну спичку. Всего колодец должен содержать 4—5 продольных пар спичек и столько же — поперечных. Последняя пара спичек должна идти в поперечном направлении. Сверху положите два слоя потолка: продольный и, над ним, поперечный.

Теперь наступает черед самой тонкой работы — установки в стены вертикальных спичек. Положите на избушку монету подходящего размера (обычно подходит трехкопеечная монета). Нажимая на монету для придания конструкции жесткости, устанавливайте вертикальные спички стен головками вверх. Начинать следует с правой (или с левой) стены, поскольку спички передней и задней стен будут держаться за спички пола самыми кончиками, которые обычно имеют какие-либо неровности, ухудшающие сцепление. Первую спичку поставьте в правый передний угол — внутри колодца, но вне слоев пола и потолка (можно временно сдвинуть продольные слои пола и потолка к центру, чтобы они не мешали). Следующие спички ставьте вдоль правой стены, чередуя их с поперечными спичками пола и потолка. Раздвигать спички поперечных слоев можно с помощью еще одной спички. Все вертикальные спички следует продвигать вниз до основания. Закончив установку вертикальных спичек правой стены (их должно быть на одну больше, чем в поперечных слоях), установите аналогично левую стену (вот тут вам и пригодится возможность вращать стройплощадку).

Хоть передняя и задняя стены еще не достроены, однако и того, что есть, хватает для получения устойчивой конструкции! Надавливая на крышу сверху с помощью монеты, одновременно сожмите пальцами переднюю и заднюю стены так, чтобы сдвинуть эти стены до упора. Проследите, чтобы все спички стен сдвинулись. Теперь можно приподнять полученный каркас (лучше при этом продолжать сжимать переднюю и заднюю стены). Спички самого нижнего слоя останутся лежать на основании, но остальные спички будут держаться! Ни в коем случае не следует сжимать правую и левую стены; их, напротив, желательно раздвинуть насколько возможно, чтобы хватило места для передней и задней стен.

Установку вертикальных спичек передней и задней стен можно, в принципе, выполнять «в воздухе», однако, если вы сделаете так, то рискуете увидеть, как ваша конструкция в один миг превратится в груду спичек. Поэтому сожмите переднюю и заднюю стены, как описано выше, и устанавливайте вертикальные спички этих стен на основании. Крайние спички этих стен уже установлены в составе правой и левой стен. Устанавливаемые спички должны проходить внутри колодца, но вне поперечных слоев пола и потолка.

Убедившись, что все спички вошли в предназначенные для них промежутки, сжимайте поочередно правую стену с левой и переднюю с задней, давя одновременно на потолок. Необходимо сблизить все спички до упора. Возможно, для этого придется надавливать на некоторые спички отдельно. После этой операции получается весьма прочный каркас куба (фото 1).

(После того как самая трудная часть работы осталась позади, можно немного расслабиться и повнимательнее рассмотреть то, что получилось. Обратите внимание: построенный «куб» — не совсем куб, его грани различаются по размеру. Подумайте, как сделать настоящий куб.)

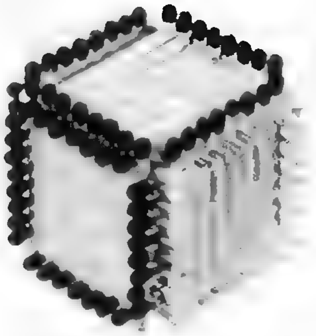


Фото 1.

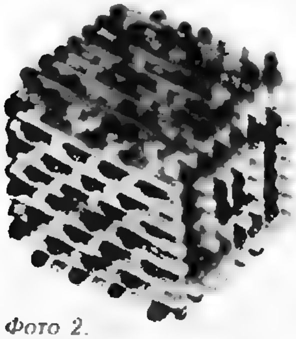


Фото 2.

Теперь смело поднимите куб в воздух и дальнейшую постройку проводите на весу, но не забывайте время от времени сжимать противоположные стены куба, чтобы он не развалился.

Вопрос 1 (для тех, кто любит физику). А почему он все-таки держится? Оцените минимальное число спичек в слое, необходимое для устойчивости каркаса куба.

Продвиньте вертикальные спички вниз, чтобы они выступали сверху и снизу примерно поровну. Затем добавьте к каждой грани куба еще два слоя спичек, направив их головки в противоположную сторону по отношению к уже имеющимся слоям (новые слои удобнее добавлять снаружи, но, если снаружи не хватает места, можно добавить слой и внутри уже имеющегося). Если теперь спички утопить так, чтобы они своими головками прижали спички лежащих ниже слоев, прочность каркаса существенно возрастет

Достроить каркас можно любым способом. Просовывая спички сквозь отверстия внутрь куба и, если есть место, добавляя их снаружи, можно превратить каркас в полный куб (фото 2, спички пропущены сквозь все отверстия) или в избушку (фото на обложке).

Для построения крыши избушки найдите противоположные грани, в которых внешние слои спичек смотрят головками в одну сторону (или сделайте такие грани, переложив какие-либо слои по-другому). Поставьте куб так, чтобы эти слои стали правой и левой стенами, и их головки были направлены вверх. Выдвиньте вверх вертикальные спички передней и задней стен (из тех слоев, где головки смотрят вверх), чтобы образовать треугольные передние и задние фронтоны крыши, затем заполните пространство под будущей крышей продольными спичками и устанавливайте спички скатов крыши. Для этого слегка выдвиньте вверх спички самых крайних слоев боковых стен и устанавливайте наклонные спички между ними, зацепляя между собой спички правого и левого скатов. После завершения крыши утопите выдвинутые спички боковых стен — они головками прижмут крышу к избушке.

Теперь осталось только сделать архитектурные украшения. Вставьте спички в оставшиеся отверстия внутрь избушки и изобразите окна, двери, ножки, трубу.

Вопрос 2 (для тех, кто любит математику). Какую часть объема занимают спички в полном кубе (фото 2)? Считайте, что спички очень длинные и куб очень большой, так что «краевыми эффектами» можно пренебречь.

Попробуйте разработать способ построения аналогичных домов, длина, ширина и высота которых превышают длину спички. Может быть, вам также удастся построить дворец, имеющий в сечении не прямоугольную форму, а, скажем, форму правильного шестиугольника.

Ф. А. Хайкин,

А. Б. Ходулев

Задача для исследования

Целая точка, ближайшая к вершине угла

Ваня узнал, что на последнем заседании математического кружка, где он не присутствовал, его выбрали старостой, причем за него голосовало более 68%, но менее 69% присутствовавших. Ваня, знаток арифметики, решил выяснить: какое наименьшее число людей при этих условиях могло участвовать в голосовании? Другими словами, каков наименьший знаменатель дроби m/n, лежащей между 0,68 и 0,69? Вот запись из Ваниной тетрадки:

$$«\frac{17}{25} < \frac{m}{n} < \frac{69}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\frac{8}{17} > \frac{n}{m} > 1\frac{31}{69},$$

$$\frac{8}{17} > \frac{n-m}{m} > \frac{31}{69} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{1}{8} < \frac{m}{n-m} < 2\frac{7}{31},$$

$$\frac{1}{8} < \frac{m-2(n-m)}{n-m} =$$

$$= \frac{3m-2n}{n-m} < \frac{7}{31} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 > \frac{n-m}{3m-2n} > 4\frac{3}{7}.$$

$$|3m-2n| \geqslant 1 \Rightarrow |n-m| \geqslant 5.$$

Наименьшее целое число, лежащее между $4\frac{3}{7}$ и 8,— это 5.

$$\begin{cases} n-m=5, \\ 3m-2n=1 \end{cases} \quad m=11,\ n=16.$$

Ответ: 16 человек.»

а) Как рассуждал Ваня? Сформулируйте его алгоритм в общем виде для произвольных α и β, $\alpha>\beta>0$ (у Вани $\alpha=0{,}69$, $\beta=0{,}68$).

б) Докажите, что система уравнений, получаемая на последнем шагу, имеет целочисленное решение (m, n) и точка с координатами (m, n) является ближайшей к вершине угла $\{(x, y)\,|\,\beta y<x<\alpha y,\ x>0\}$ среди всех лежащих внутри него целых точек.

в) Как можно объяснить Ванин алгоритм с помощью цепных дробей (см. статью Ю. В. Нестеренко и Е. М. Никишина в предыдущем номере)?

В. Муцениекс

Равногранные и каркасные тетраэдры

В. Э. МАТИЗЕН

Среди плоских *четырехугольников принято* выделять классы, обладающие теми или иными интересными свойствами: параллелограммы, трапеции, вписанные, описанные и другие. Хорошо известны необходимые и достаточные условия принадлежности четырехугольника к данному классу. Например, четырехугольник является прямоугольником тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: диагонали конгруэнтны и делятся пополам в точке пересечения. Это условие можно взять за определение прямоугольника.

Точно также обстоит дело с *тетраэдром* (так сказать — пространственным четырехугольником). Среди тетраэдров тоже можно выделять классы (например, всем известные *правильные тетраэдры* и *правильные треугольные пирамиды*) и находить необходимые и достаточные условия для принадлежности тетраэдра к данному классу. Именно этим мы здесь займемся, для двух часто встречающихся классов тетраэдров: *равногранных* (с четырьмя конгруэнтными гранями) и *каркасных* (*со сферой, касающейся* всех шести ребер). В отличие от плоского случая, здесь окажется очень большое количество существенно различных условий — порой не похожих друг на друга.

Элементы произвольного тетраэдра

У любого тетраэдра 4 вершины, 6 ребер, 4 грани, 4 трехгранных угла, 6 двугранных углов, 12 плоских углов. Если все 6 ребер конгруэнтны, то конгруэнтными будут и грани, и трехгранные углы, и плоские; в этом случае тетраэдр — правильный. Из конгруэнтности всех 4 граней, однако, еще не следует правильность тетраэдра: в этом мы вскоре убедимся при нашем рассмотрении равногранных тетраэдров.

У произвольного тетраэдра имеется *центр тяжести:* это точка, в которой пересекаются 4 прямые, соединяющие вершины с центрами тяжести противоположных граней. В этой же точке пересекаются все 3 *средние линии* тетраэдра, то есть *линии, соединяющие* середины противоположных ребер.

Есть у всякого тетраэдра и *центр описанной сферы*, то есть сферы, проходящей через все 4 вершины. Этот центр является точкой пересечения 4 перпендикуляров к граням, восставленных из центров их описанных окружностей. В этой же точке пересекаются 6 плоскостей, проходящих через середины ребер перпендикулярно к ним.

А вот что назвать вписанной сферой в тетраэдр — сферу, касающуюся всех ребер, или сферу, касающуюся всех граней? Оказывается, не всякий тетраэдр имеет вписанную сферу в первом смысле (мы в этом убедимся при нашем рассмотрении каркасных тетраэдров), поэтому *вписанной сферой* называют сферу, касающуюся всех 4 граней. Она всегда существует, притом *центр вписанной сферы* — точка пересечения биссекторных плоскостей всех 6 двугранных углов тетраэдра.

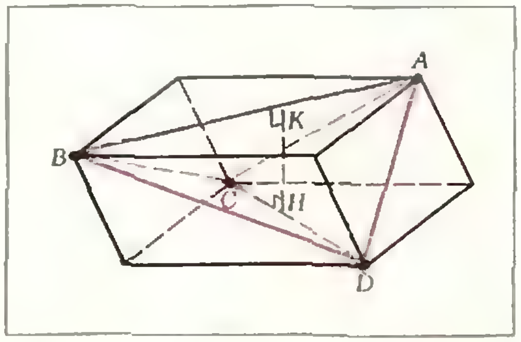


Рис. 1.

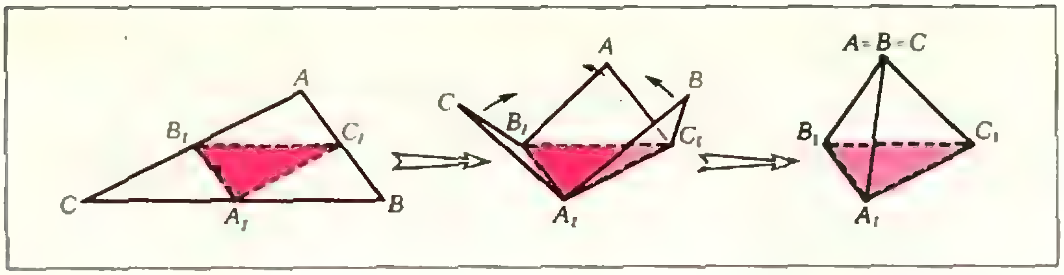


Рис. 2.

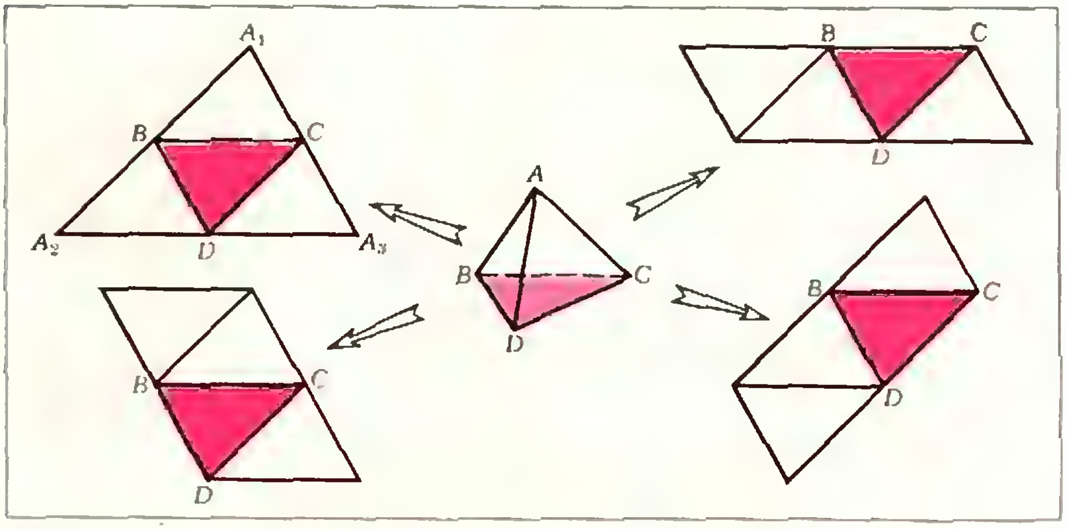


Рис. 3.

Читатель, уловивший аналогию между тетраэдром и треугольником, наверное, теперь ожидает следующую фразу: «Все высоты (перпендикуляры, опущенные из вершины на противоположную грань) тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой его ортоцентром». Но, увы, это утверждение неверно для произвольного тетраэдра, а верно лишь для класса тетраэдров, называемых *ортоцентрическими*. Этого класса мы в этой статье касаться не будем, но надеемся к этой теме еще вернуться в «Кванте».

Хорошо представить себе тетраэдр в пространстве помогает *описанный параллелепипед* (рис. 1), который определяется тем, что скрещивающиеся ребра тетраэдра являются диагоналями его противоположных граней. На этой фигуре легко «увидеть» еще один важный элемент тетраэдра: *общие перпендикуляры скрещивающихся ребер* — они образуют высоты параллелепипеда (например, отрезок КН на рисунке 1).

Равногранные тетраэдры

Как уже говорилось, *равногранным* называется тетраэдр, все грани которого конгруэнтны. Чтобы представить себе равногранный тетраэдр, отличный от правильного, возьмем произвольный остроугольный треугольник из бумаги и будем сгибать его по средним линиям. Тогда три вершины сойдутся в одну точку, а половинки сторон сомкнутся, образуя боковые ребра тетраэдра (рис. 2).

Перечислим теперь свойства тетраэдра, каждое из которых является необходимым и достаточным условием равногранности, начиная с определения.

(0) Грани конгруэнтны.

(1) Скрещивающиеся ребра попарно конгруэнтны.

(2) Трехгранные углы конгруэнтны.

(3) Противолежащие двугранные углы конгруэнтны.

(4) Два плоских угла, опирающиеся на одно ребро, конгруэнтны.

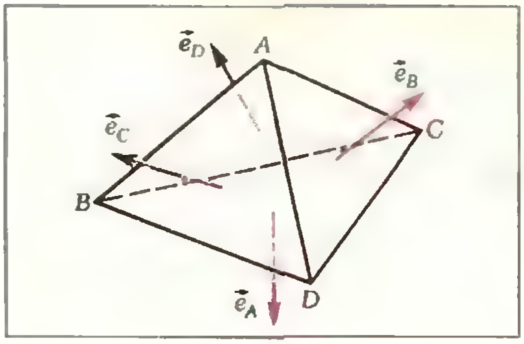


Рис. 4.

(5) Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°.

(6) Развертка тетраэдра — треугольник или параллелограмм (рис. 3).

(7) Описанный параллелепипед — прямоугольный.

(8) Тетраэдр имеет три оси симметрии.

(9) Общие перпендикуляры скрещивающихся ребер попарно перпендикулярны.

(10) Средние линии попарно перпендикулярны.

(11) Периметры граней равны.

(12) Площади граней равны.

(13) Высоты (тетраэдра) равны.

(14) Отрезки, соединяющие вершины с центром тяжести противоположных граней, конгруэнтны.

(15) Радиусы описанных около граней окружностей равны.

(16) Центр тяжести (тетраэдра) совпадает с центром описанной сферы.

(17) Центр тяжести совпадает с центром вписанной сферы.

(18) Центр описанной сферы совпадает с центром вписанной.

(19) Вписанная сфера касается граней в центрах описанных около них окружностей.

(20) Сумма внешних единичных нормалей (единичных векторов, перпендикулярных к граням — см. рис. 4) равна нулю.

(21) Сумма косинусов всех двугранных углов равна 2.

При большом количестве утверждений, равносильность которых нужно доказать, важно найти наиболее экономный порядок рассуждений. Мы наметим его, но лишь часть этапов проведем подробно.

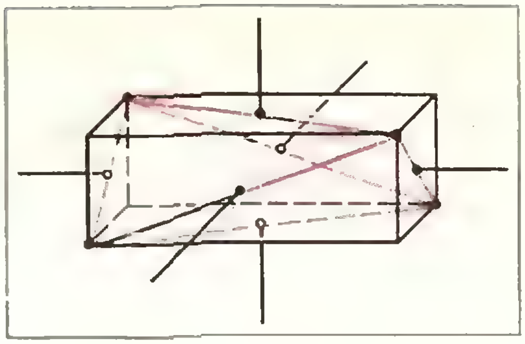


Рис. 5.

Проще всего устанавливается, что

(0) ⇔ (1) ⇔ (2) ⇔ (3) ⇔ (4)

Для иллюстрации докажем (1) ⇒ (0). Пусть $|AB| = |DC|$, $|AD| = |BC|$, $|AC| = |BD|$. Тогда любые две грани тетраэдра $ABCD$ конгруэнтны как треугольники с тремя равными сторонами: одна сторона общая, две другие равны по условию. Например, для граней ADB и ADC, ребро AD общее, а ребра AB и DC, AC и BD конгруэнтны по условию. При остальных доказательствах следует помнить, что трехгранный угол однозначно определяется как своими тремя двугранными углами, так своими тремя плоскими углами.

Рассуждать дальше можно по схеме

(4) ⇒ (5) ⇒ (6) ⇒ (1)

(откуда уже следует равносильность первых шести условий (1)—(6). Докажем, например, (5) ⇒ (6). Разрежем тетраэдр $ABCD$ по ребрам AB, AC, AD и рассмотрим развертку $A_1BA_2DA_3C$ (см. рис. 3). Тогда в точ-

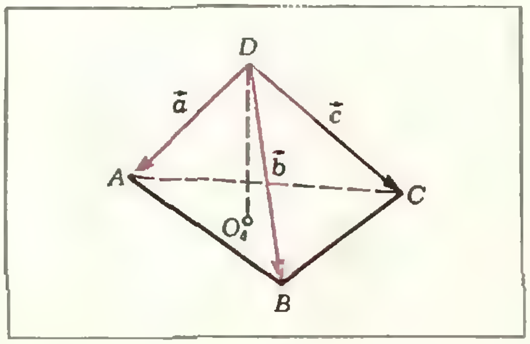


Рис. 6.

ках B, C и D приложены по три угла, сумма которых 180°, поэтому углы A_1BA_2, A_2OA_3, A_3CA_1 — развернутые; значит, $A_1A_2A_3$ — треугольник, содержащий точки B, C, D и являющийся разверткой тетраэдра $ABCD$. Для остальных разверток рассуждение аналогично.

Наш следующий шаг — доказательство равносильности

$$\boxed{(1) \Leftrightarrow (7)}$$

В самом деле, поскольку скрещивающиеся ребра тетраэдра — диагонали граней описанного параллелепипеда (см. рис. 1), из попарной конгруэнтности ребер следует, что грани описанного параллелепипеда — прямоугольники и наоборот.

Теперь мы предлагаем рассуждать по схеме

$$\boxed{(7) \Rightarrow (8) \Rightarrow (9) \Rightarrow (10) \Rightarrow (7)}$$

Остановимся лишь на (7) ⇒ (8). Взглянув на рисунок 5, вы легко установите, что осями симметрии являются прямые, соединяющие центры симметрии противоположных граней описанного (прямоугольного) параллелепипеда, или, что здесь то же самое, общими перпендикулярами скрещивающихся граней.

Далее, очевидно,

$$\boxed{(0) \Rightarrow (11), (12), (13), (14), (15)}$$

Мы докажем, что (11) ⇒ (1), (12) ⇒ (3), (13) ⇒ (12), (14) ⇒ ⇒ (1), (15) ⇒ (4); тем самым будет установлена равносильность первых 15 свойств.

Чтобы установить

$$\boxed{(11) \Rightarrow (1)}$$

запишем условие (11) в виде

$$a_2+b_2+c_2=a_2+b_1+c_1=$$
$$=b_2+a_1+c_1=c_2+a_1+b_1, \quad (*)$$

где a_1, b_1, c_1 — длины ребер тетраэдра, исходящих из одной вершины, $a_2b_2c_2$ — длины соответственно скрещивающихся с ними ребер. Из этой системы легко получить (как?)

$$a_1=a_2,\ b_1=b_2,\ c_1=c_2,$$

а это и есть запись условия (1).

Для доказательства утверждения

$$\boxed{(12) \Rightarrow (3)}$$

мы предварительно заметим, что

$$S_4=S_1c_{14}+S_2c_{24}+Sc_{34}, \quad (**)$$

где S_i — площади i-й грани, а c_{ij} — косинус двугранного угла между i-й и j-й гранью. Соотношение (**) сразу следует из теоремы о площади проекции («Геометрия 9—10», § 40), если спроектировать все грани тетраэдра на четвертую грань. Написав еще три таких соотношения (для трех других граней) и воспользовавшись условием (12), придем к системе

$$c_{14}+c_{24}+c_{34}=c_{13}+c_{23}+c_{34}=$$
$$=c_{12}+c_{23}+c_{24}=c_{12}+c_{13}+c_{14},$$

которая решается точно так же, как (*). Получим

$$c_{14}=c_{23},\ c_{24}=c_{14},\ c_{34}=c_{12},$$

откуда следует равенство соответствующих углов, то есть (3).

Утверждение

$$\boxed{(13) \Rightarrow (12)}$$

очевидно следует из формулы для объема тетраэдра $V=Sh/3$.

Чтобы доказать

$$\boxed{(14) \Rightarrow (1)}$$

обозначим через O_i центр тяжести i-й грани и выразим $|DO_4|$ через стороны $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ (рис. 6). Имеем

$$\overrightarrow{DO_4}=\frac{1}{3}\,(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

(докажите это!), откуда, находя скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{DO_4}$, получим

$$\overrightarrow{DO}_4^2=\frac{1}{9}\,(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+$$
$$+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

Обозначив $a_1=|\vec{a}|$, $b_1=|\vec{b}|$, $c_1=|\vec{c}|$, $a_2=|BC|$, $b_2=|AC|$, $c_2=|AB|$ и воспользовавшись тем, что $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$, можно $\overrightarrow{DO}_4^2$ выразить в виде

$$DO_4^2=\frac{1}{3}\,(a_1^2+b_1^2+c_1^2)+$$
$$+\frac{1}{9}\,(a_2^2+b_2^2+c_2^2).$$

Написав еще три таких соотношения (для трех остальных граней и при-

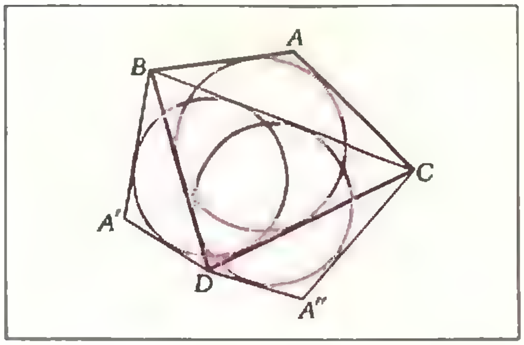


Рис. 7.

равняв их правые части (что можно по условию (14)), придем к равенствам $a_1^2=a_2^2$, $b_1^2=b_2^2$, $c_1^2=c_2^2$, то есть получим (1)*).

Наконец, чтобы доказать

$$\boxed{(15) \Rightarrow (4)}$$

рассмотрим две грани тетраэдра, их общее ребро и опирающиеся на это ребро плоские углы. Опишем около граней окружности. По условию их радиусы равны. Величины вписанных углов, опирающихся на общую хорду конгруэнтных окружностей или равны, или дают в сумме π. Дальнейшее доказательство сводится к несложному перебору вариантов.

Доказательство эквивалентности оставшихся шести свойств (16)—(21) вместе с выбором соответствующей стратегии, мы оставляем читателю. Заметим лишь, что при доказательстве свойства (20) полезно воспользоваться равенством (верным для любого тетраэдра)

$$S_1\vec{e}_1+S_2\vec{e}_2+S_3\vec{e}_3+S_4\vec{e}=0,$$

где $\vec{e}_i$ — единичный внешний нормальный вектор i-й грани, и S_i — ее площадь. Это равенство доказано в этом номере «Кванта» в заметке В. Н. Дубровского.

Каркасные тетраэдры

Напомним, что *каркасным* называется тетраэдр, для которого существует сфера, касающаяся всех шести ребер тетраэдра. Не всякий тетраэдр каркасный. Например, легко понять, что нельзя построить сферу, касающуюся всех ребер равногранного тетраэдра, если его описанный параллелепипед «длинный» (рис. 5).

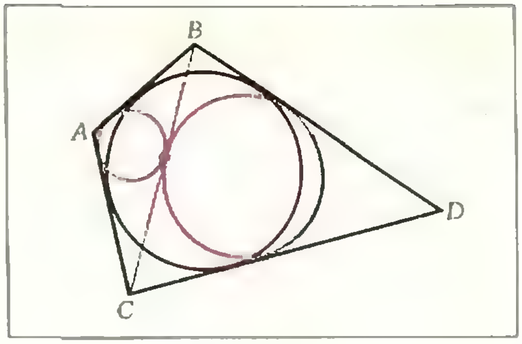


Рис. 8.

Перечислим интересующие нас равносильные свойства тетраэдра.

(0) Существует сфера, касающаяся всех ребер.

(1) Суммы длин скрещивающихся ребер равны.

(2) Суммы двугранных углов при противоположных ребрах равны.

(3) Окружности, вписанные в грани, попарно касаются.

(4) Все четырехугольники, получающиеся на развертке тетраэдра (рис. 7), — описанные.

(5) Перпендикуляры, восставленные к граням из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке.

Равносильность этих свойств предлагаем доказать по схеме

$$\boxed{(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (0)}$$

Свойства (2) и (4) в эту схему можно добавить по-разному; выбор стратегии мы оставляем читателю.

Мы не будем проводить здесь доказательства, а отметим лишь два полезных для этой цели факта.

1. Плоский четырехугольник будет описанным тогда и только тогда, когда суммы его противоположных *сторон равны.*

2. Если описанный четырехугольник разбить диагональю на два треугольника, то вписанные в треугольники окружности касаются (рис. 8).

Заметим, что из утверждения 1 можно получить общий способ для построения развертки каркасного тетраэдра: взять описанный четырехугольник, разделить на два треугольника (грани) и пристроить еще две грани, пользуясь свойством (1).

---

*) Другое доказательство основано на том, что отрезки, указанные в свойстве (14), пересекаются в одной точке и делятся в отношении 1:3.

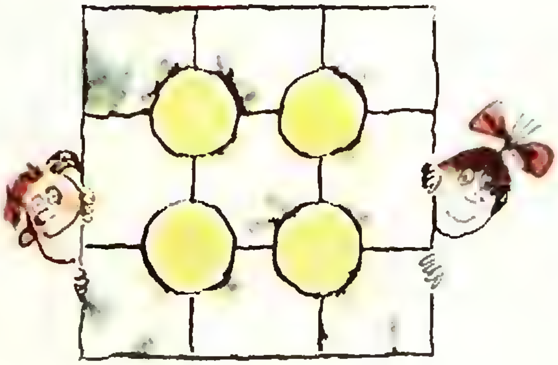
КВАНТ для младших школьников

Задачи

1. В люстре 5 лампочек. Переключатель имеет 6 положений, при которых каждый раз горит разное количество лампочек — от 0 до 5. Однажды несколько лампочек перегорело. Какое наименьшее число раз нужно переключить переключатель, чтобы узнать, какие именно?

2. Найти все такие трехзначные числа, которые равны произведению числа, записываемого его двумя последними цифрами, на число, выражаемое его последней цифрой.

3. В клетках квадрата 3×3 расставили числа 1,2,...,9. Затем в каждом кружкѐ записали среднее арифметическое окружающих его четырех чисел. После этого вычислили среднее арифметическое полученных четырех чисел. Какое наибольшее число может при этом получиться?



4. В бочке 18 литров бензина. Имеется два ведра объемом по 7 литров, в которые нужно налить по 6 литров бензина. Кроме того, есть черпак объемом 4 литра. Как можно осуществить разлив?

5. Почему днем из комнаты, окно которой завешено тюлевой занавеской, предметы на улице хорошо различимы, а предметы, находящиеся в комнате, с улицы не видны?

Эти задачи нам предложили
А. И. Азамов, Г. А. Гальперин, В. В. Произволов, С. В. Дворянинов, А. П. Савин.

О больших числах

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

Однажды в одном пионерском лагере мне довелось присутствовать на вечере вопросов и ответов под названием «А кто самый...?» Много было разных вопросов: «У кого самый длинный хвост? Какая звезда самая близкая к Земле?» Но вот одна девочка спросила:

— А какое число самое большое?

Вместо ответа я ей предложил сыграть в такую игру.

— Вот конфета,— сказал я,— кто назовет большее число, тот получает эту конфету. Назови свое число!

— Сто тысяч миллионов,— выпалила девочка.

— Нет такого названия, — ответил я.

— Нет есть,— настаивала девочка.

— Ладно, тогда я загадал двести тысяч миллионов. Сыграем еще?

Остальные ребята зашумели, начали говорить, перебивая друг друга.

— Тихо,— сказал я,— давайте говорить по очереди, а то ничего нельзя понять. Из десятка ребят, тут же поднявших руку, я выбрал невысокого мальчика в очках.

— Игра нечестная,— сказал он — какое бы число ни назвала Маша, Вы назовете число на единицу больше и выиграете. И вообще, нет наибольшего числа: к любому числу единичку можно прибавить.

Маша, продолжавшая стоять около стола, спросила меня:

— А как называются числа больше миллиона?

Судя по лицам ребят, этот вопрос заинтересовал многих из них. Я стал рассказывать.

— В пределах первой тысячи, как вы знаете, название имеет единица каждого разряда: единица, десять, сто, тысяча. Следующие единицы, имеющие собственное названия

ние, идут через каждые три разряда, то есть каждая очередная именованная единица содержит тысячу предыдущих именованных единиц:
1 000 000 — *миллион*,
1 000 000 000 — *миллиард* или *биллион*,
1 000 000 000 000 — *триллион*,
1 000 000 000 000 000 — *квадраллион*,
далее идут *квинтиллион*, *секстиллион*, *септиллион*, *октиллион*, *нониллион*, *дециллион*.

Принцип построения названий несложен. По-латыни слова «би, трес, квадра, квинта» и т. д. означают два, три четыре, пять и т. д. Мы видим, что троек нулей в записи числа на одну больше, чем латинское число в его названии.

Нужно сказать, что эти названия почти не используются. Астрономы, физики и другие специалисты, имеющие дело с большими числами, предпочитают записывать числа с помощью степеней числа 10. Так, число 460 000 000 физик запишет либо как $46 \cdot 10^7$, а чаще, как $4{,}6 \cdot 10^8$. Если это число нужно прочесть, то он и прочтет его как «четыре и шесть десятых на десять в восьмой».

— А что делать, если на конце не будет нулей? — спросил меня один из мальчиков.

— Дело в том,— сказал я,— что при физических и других измерениях, как правило, верными бывают только первые две-три цифры. Чтобы получить большее количество верных знаков для какого-то числа, например, массы планеты или расстояния до нее, требуется применять особые предосторожности и специальные очень точные приборы. Поэтому в больших числах, получаемых из обычного эксперимента, оставляют лишь первые две-три цифры, а остальные заменяют нулями.

— А с каким самым большим числом приходилось иметь дело на практике? — раздался вопрос с последнего ряда.

— Такое число можно даже назвать,— ответил я,— физики считают, что во всей Вселенной количество элементарных частиц, из которых состоят атомы находящегося в ней вещества, не больше, чем 10^{88}. Поэтому нет практической необходимости пользоваться числами, большими, чем 10^{100}. Для этого числа придумано специальное название — *гугол*. Кажется, невозможно представить себе такую громадину. Но все-таки попробуем.

Представьте себе табло из 400 лампочек, расположенных в виде квадрата 20×20. Это представить себе легко, подобные табло встречаются в крупных аэропортах и на вокзалах, там с помощью загорающихся лампочек высвечиваются объявления о прибытии и отправлении поездов или самолетов. А теперь подумаем, сколько разных способов существует, чтобы зажечь табло 20×20.

Начнем считать количество состояний нашего табло. Для порядка занумеруем лампочки числами от 1 до 400. Первая лампочка может быть в двух состояниях: потушенной и зажженной. Две лампочки могут быть уже в четырех состояниях. Если использовать для обозначения потушенной лампочки значок о, а для зажженной значок +, то эти четыре состояния можно перечислить: оо, +о, о+, ++. Для трех лампочек будет уже восемь состояний: ооо, +оо, о+о, ++о, оо+, +о+, о++, +++. Количество состояний удвоилось потому, что оно равно количеству состояний для первых двух лампочек при потушенной третьей лампочке, плюс то же самое количество состояний при зажженной третьей. Нетрудно заметить, что при добавлении четвертой лампочки количество состояний вновь удвоится и станет равным $2^4=16$, при пяти лампочках количество состояний будет $2^5=32$, при десяти — уже $2^{10}=1024$, а при 400 лампочках — 2^{400}. Покажем, что это число больше гугола. Обратим внимание, что $2^{10}=1024>$ $>10^3$, поэтому $2^{400}=2^{10\cdot 40}>10^{3\cdot 40}=$ $=10^{120}$. Итак, с помощью нашего нехитрого табло мы смогли превзойти гугол.

Сколько же времени понадобится для того, чтобы реализовать все имеющиеся возможности? Пусть у нас есть электронное реле, которое меняет состояние табло со скоростью 100 раз в секунду. Поскольку в каждом часе 3600 секунд, в сутках 86 400 секунд, а в году 31 536 000 секунд, то за год табло успеет сделать 3 153 600 000 миганий или $3{,}1536 \cdot 10^9$. Разделив 10^{120} на это число, получим около $3 \cdot 10^{110}$ лет — число, в миллиарды раз большее гугола. Вот так табло!

Может быть, мы сделали великое открытие в науке? К сожалению, нет. То, что количество состояний системы во много раз превосходит количество ее элементов, люди поняли очень давно. И очень часто трудно бывает из всего многообразия вариантов выбрать наилучший. Например, где разместить заводы по производству какого-то нового типа изделий? Какие мощности выбрать для этих заводов? Если сделать немного крупных заводов, то стоимость производства будет невелика, зато изделия придется далеко возить. Если же сделать много мелких заводов, то возить изделия придется меньше, но стоимость изготовления изделий на небольших предприятиях возрастает. Чтобы решать такие и подобные задачи, имеющие большое народнохозяйственное значение, непрерывно работают тысячи электронных вычислительных машин, перебирающих тысячи вариантов в секунду.

— А можно еще вопрос? — руку поднял первый мальчик в очках.

— Да, пожалуйста.

— Но математикам, наверное, приходится оперировать еще большими числами?

— Те, кто думает, что математики только то и делают, что складывают, умножают и делят числа, очень далеки от истины. Лишь в одной ее области — теории чисел — ученые часто имеют дело с конкретными целыми числами. И здесь действительно появляются очень большие числа. Например, долгое время шло соревнование — кто назовет большее простое число. Простое — значит, имеющее лишь два различных делителя: себя и единицу. Потом стали искать лишь такие простые числа, которые имеют вид: $2^n - 1$. Эти числа называются *простыми числами Мерсенна*, в честь французского ученого Марена Мерсенна, математика, акустика, теоретика музыки, одного из основателей Парижской Академии наук. Числа Мерсенна интересны тем, что если число $2^n - 1$ — простое, то число $2^{n-1}(2^n - 1)$ равно сумме всех своих делителей, кроме самого числа. Такие числа древние греки назвали *совершенными*. Укажем три первых совершенных числа:

$$6 = 2 \cdot 3 = 2(2^2 - 1) = 1 + 2 + 3,$$

$$28 = 2^2 \cdot 7 = 2^2(2^3 - 1) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 2^4 \cdot 31 = 2^4(2^5 - 1) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Интересно, что число $2^n - 1$ будет простым только в том случае, если число n — простое. К концу прошлого века было известно 12 простых чисел Мерсенна: для $n = 2$, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107 и 127. Для $n = 127$ простое число Мерсенна равно — тут я достал из кармана записную книжку, и на доске переписал: 170141183460469231731687303715884105884105727

— Это число все же меньше гугола,— продолжил я.— Но теперь за дело взялись электронные вычислительные машины. Они нашли, что числа $2^n - 1$ будут простыми при $n = 521$, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 44497.

Последнее число $2^{44497} - 1$ имеет уже более 13 тысяч цифр. Заметим, что гугол имеет «всего» 100 цифр.

После моего ответа последовали новые вопросы: «Какая ЭВМ считает быстрее всех? Какой зверь бегает быстрее всех?»

Вечер вопросов и ответов продолжался...

задачник кванта

Задачи

M811—M815; Ф823—Ф827

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 сентября 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7—83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M811, M812» или «Ф823». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M811. Пусть h_a, h_b, h_c — высоты, а m_a, m_b, m_c — медианы остроугольного треугольника (проведенные к сторонам a, b, c), r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей. Докажите, что

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}<1+\frac{R}{r}.$$

Д. М. Милошевич

M812. Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$$

С. И. Майзус

M813. Даны отрезки OA, OB и OC одинаковой длины (точка B лежит внутри угла AOC). На них как на диаметрах построены окружности. Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку O (см. рис. 1, с. 44), равна половине площади (обычного) треугольника ABC.

В. В. Прасолов

M814. Отметим в натуральном ряде числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Среди отмеченных чисел встречаются тройки последовательных чисел, например

$$72=6^2+6^2,\ 73=8^2+3^2,\ 74=7^2+5^2.$$

а) Объясните, почему не могут встретиться четыре последовательных отмеченных числа.

Докажите, что среди отмеченных чисел встретится бесконечно много б) пар, в)* троек последовательных чисел.

Л. Д. Курляндчик

M815*. На окружности расставлены $4k$ точек, занумерованных в произвольном порядке числами $1, 2, \ldots, 4k$.

Докажите, что эти точки можно соединить попарно непересекающимися отрезками так, о разность чисел в концах каждого отрезка превосходит $3k-1$.

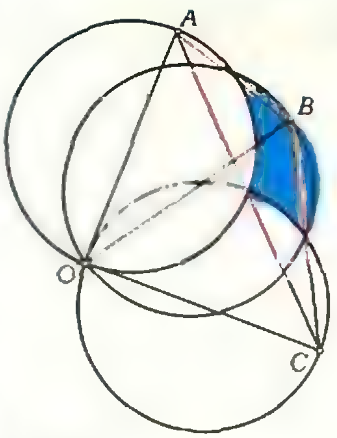


Рис. 1.

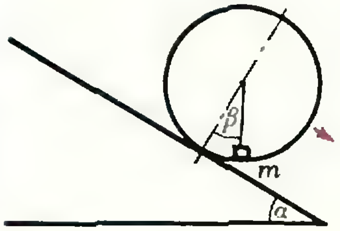


Рис. 2.

б) Постройте пример расстановки номеров, показывающий, что число $3k-1$ в пункте а) нельзя заменить меньшим.

А. А. Разборов

Ф823. Метеорит, летевший прямо на планету (по прямой, проходящей через центр планеты), попал в автоматическую космическую станцию, вращавшуюся вокруг планеты по круговой орбите радиуса R. В результате столкновения метеорит застрял в станции, которая перешла на новую орбиту с минимальным расстоянием до центра планеты $R/2$. Определить скорость метеорита перед столкновением. Масса станции в 10 раз превосходит массу метеорита. Масса планеты M. Гравитационная постоянная равна G.

О. Ю. Пикишина

Ф824. Полый цилиндр массы M скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=45°$. На абсолютно гладкой внутренней поверхности цилиндра лежит маленькое тело массы $m=M/2$. Чему равен угол β (рис. 2) во время скатывания?

А. И. Федосов

Ф825. Лампочку, рассчитанную на напряжение 2,5 В и ток 0,2 А, подключают длинными проводами к батарейке. Амперметр, включенный последовательно с лампочкой, показывает ток $I_1=0{,}2$ А. Когда лампочку подключили к проводам параллельно с амперметром, она накалилась так же, как и в первом случае. Какой ток показывает амперметр? Батарейку считать идеальной, сопротивление проводов равно 2 Ом.

А. Р. Зильберман

Ф826. На достаточно удаленные предметы смотрят через собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=9$ см, располагая глаз на расстоянии $a=36$ см от линзы. Оценить минимальный размер экрана, который нужно расположить за линзой так, чтобы он перекрыл все поле изображения. Где следует расположить экран?

Д. В. Белов

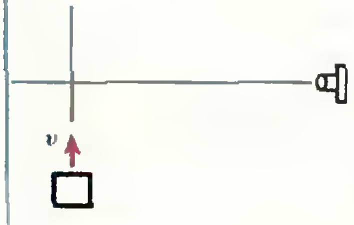


Рис. 3.

Ф827. Куб с ребром длины a движется со скоростью $v=0{,}8\,c$ (c — скорость света) в направлении, перпендикулярном одной из граней куба. Что получится на фотографии куба, сделанной удаленным фотоаппаратом с очень короткой выдержкой, если оптическая ось аппарата перпендикулярна грани куба и пересекает траекторию его центра (рис. 3)?

Д. Ю. Григорьев

Problems

M811—M815; P823—P827

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that September 30th, 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, K-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: 'KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M811. Let h_a, h_b, h_c be the altitudes and m_a, m_b, m_c the medians of a triangle (to the sides a, b, c), while r and R are the radii of the incircle and the circumcircle. Prove that

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}<1+\frac{R}{r}.$$

D. M. Miloshevich

M812. Prove that for any positive integer n

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$$

S. I. Mayzus

M813. The congruent line segments OA, OB and OC (the point B lying within the angle AOC) are the diameters of three circles. Prove that the area of the curvilinear triangle bounded by the arcs of these circles and *not containing* the point O (see figure Рис. 1) is half of that of the ordinary triangle ABC.

V. V. Prasolov

M814. In the sequence of natural numbers encircle all those which can be represented as the sum of two squares of integers. Among the encircled numbers triplets of successive numbers appear, e. g.

$$72=6^2+6^2,\ 73=8^2+3^2,\ 74=7^2+5^2.$$

a) Explain why four successive encircled numbers never appear.

Prove that there are infinitely many b) couples, c)* triplets of successive encircled numbers.

L. D. Kurlyandchik

M815*. On the circle $4k$ points are chosen and numbered 1, 2, ..., $4k$ arbitrarily.

a) Prove that these points may be joined by $2k$ nonintersecting line segments so that the difference between the numbers at the end points never exceeds $3k-1$.

b) Construct an example of numeration showing that the number $3k-1$ in a) cannot be replaced by a smaller one.

A. A. Razborov

P823. A meteorite, flying directly towards a planet (along a straight line passing through its centre), collides with an automatic space lab rotating about the planet along a circular orbit of radius R. The collision results in the meteorite getting stuck on the space lab, which changes its orbit to one whose minimal distance to the planet's centre is $R/2$. Determine the velocity of the meteorite just before the collision. The mass of the space lab is 10 times that of the meteorite. The planet's mass is M, the gravitational constant is G.

O. Yu. Nikishina

P824. A hollow cylinder of mass M rolls down an inclined plane (with angle $\alpha=45°$) without slipping. On the absolutely smooth inner surface of the cylinder lies a small body of mass $m=M/2$. What will the angle β (figure Рис. 2) be while the cylinder is rolling?

A. I. Fedosov

P825. A lamp designed for voltage 2.5 V and current 0.2 A is connected by long wires to a battery. An ammeter, connected in series to the lamp, gives a reading of $I_1=0.2$ A. When the lamp was connected in parallel to the ammeter, it heated exactly as much as in the first case. What was the reading on

the ammeter then? The battery is assumed ideal, the resistance of the wires is 2 Ohm.

A. R. Zilberman

P826. Far-away objects are viewed through a convergent lens of focal distance $F = 9$ cm, the eye being located at the distance $a = 36$ cm from the lens. Estimate the minimalsize of a screen which, if placed behind the lens, would entirely cover the field of vision. Where should the screen be placed?

D. V. Belov

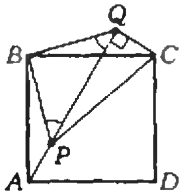
P827. A cube with side a moves with velocity $v = 0{,}8\,c$ (where c is the velocity of light) in a direction perpendicular to one of its faces. What will we see on a photograph of the cube taken by a far-away camera with a very short exposure, if the optical axis of the camera is perpendicular to a face of the cube and intersects the trajectory of its centre (figure Рис. 3)?

D. Ju. Grigoriev

Решения задач

M796—M798; Ф808—Ф812

M796. *Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$ так, что $|AP|:|BP|:|CP| = 1:2:3$. Найдите $\widehat{APB}$.*



Ответ: $\widehat{APB} = 135°$. Повернем $\triangle ABP$ вокруг точки B на 90° так, чтобы вершина A совместилась с C (см. рисунок). Пусть вершина P перейдет при этом в точку Q. Тогда $|PQ|^2 = 2|BP|^2 = 8|AP|^2$ ($\triangle BPQ$ — равнобедренный прямоугольный), а $|QC| = |PA|$. Следовательно, $|PQ|^2 + |QC|^2 = 9|AP|^2 = |CP|^2$, то есть PQC — прямоугольный треугольник с прямым углом PQC. Отсюда $\widehat{APB} = \widehat{CQB} = \widehat{CQP} + \widehat{PQB} = 90° + 45° = 135°$.

Имеется и менее искусственное (но более громоздкое) решение с помощью метода координат. Примем прямые AB и AD за оси координат; пусть (x, y) — координаты точки P. Тогда, считая сторону квадрата равной 1, получим: $|AP|^2 = x^2 + y^2$, $|BP|^2 = x^2 + (1-y)^2$, $|CP|^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$. По условию $|AP|^2 : |BP|^2 : |CP|^2 = 1:4:9$, отсюда легко найти x и y, а затем и искомый угол.

Л. Д. Курляндчик

◆

M797*. *Известно, что последними цифрами квадратов целых чисел могут быть лишь цифры 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Верно ли, что перед последней цифрой в них может встретиться любая группа цифр, то есть что для любого набора из n цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно найти целое число, квадрат которого оканчивается цифрами $a_1a_2\ldots a_nb$ (где b — одна из перечисленных выше цифр)?*

Ответ: Нет. Мы приведем два доказательства этого факта.

Первое доказательство. Пусть A_n — число всех комбинаций из n цифр, на которые может оканчиваться точный квадрат. Мы покажем, что если $n > 4$, то $A_n < 10^{n-1}$. Из этого будет вытекать наше утверждение: даже если бы каждая комбинация $a_1, \ldots, a_{n-1}$ встречалась в сочетании лишь с одним b, уже было бы $A_n = 10^{n-1}$. Чтобы получить все n-значные окончания квадратов, очевидно, достаточно рассмотреть квадраты только n-значных чисел. Разобьем эти 10^n чисел (от 0 до $10^n - 1$) *на классы, собирая в один класс все* числа с одинаковым n-значным окончанием квадратов (p и q входят в один класс, если $p^2 - q^2$ делится на 10^n). Тогда A_n равно числу таких классов; исходя из этого мы и будем оценивать A_n.

Рассмотрим по отдельности три группы n-значных чисел: (1) числа, делящиеся на 5^n (их ровно 2^n); (2) нечетные числа, не делящиеся на 5^n (их меньше чем $0{,}5 \cdot 10^n$); (3) четные числа, не делящиеся на 5^n (их тоже меньше чем $0{,}5 \cdot 10^n$). Количество чисел в первой группе мало́ по сравнению с 10^n. Для нас важно, что они дают попарно разные остатки при делении на 2^n (потому что $k \cdot 5^n - l \cdot 5^n = (k - l) \cdot 5^n$ не может делиться на

$$\begin{array}{llr}
 & & m^2 \\
10^n(10^n-2m) & & +m^2 \\
10^n(0{,}25\cdot 10^n \pm m) & & +m^2 \\
k_1\cdot 5^n & (k_1\cdot 5^n-2m) & +m^2 \\
k_2\cdot 5^n & (k_2\cdot 5^n-2m) & +m^2 \\
k_3\cdot 5^n & (k_3\cdot 5^n+2m) & +m^2 \\
k_4\cdot 5^n & (k_4\cdot 5^n+2m) & +m^2
\end{array}$$

2^n при $1<l<k\leqslant 2^n$), и следовательно, среди этих остатков по одному разу встречаются все возможные остатки от деления на 2^n. Пусть, далее, m — число из второй группы. Найдем в первой группе числа $k_1\cdot 5^n$, $k_2\cdot 5^n$, $k_3\cdot 5^n$ и $k_4\cdot 5^n$, дающие при делении на 2^n такие же остатки, как $2m$, $2^{n-1}+2m$, 2^n-2m и $2^{n-1}-2m$. Тогда квадраты 8 чисел m, 10^n-m, $0{,}5\cdot 10^n\pm m$, $k_1\cdot 5^n-m$, $k_2\cdot 5^n-m$, $k_3\cdot 5^n+m$ и $k_4\cdot 5^n+m$ (они выписаны на полях) имеют одинаковые n-значные окончания при $n\geqslant 4$. Действительно, поскольку $0{,}25\cdot 10^n$ — целое число ($n\geqslant 4$), k_i — четные числа, а числа в синей рамке на полях делятся на 2^{n-1}, все числа в красной рамке делятся на 10^n. Таким образом, классы чисел второй группы содержат по крайней мере по 8 элементов, поэтому их число меньше, чем $0{,}5\cdot 10^n/8$. Точно так же при $n\geqslant 4$ классы чисел третьей группы содержат по крайней мере по 16 элементов. (Каждый класс вместе с числом m содержит числа 10^n-m, $0{,}25\cdot 10^n\pm m$, $0{,}5\cdot 10^n\pm m$, $0{,}75\cdot 10^n\pm m$, $k_1\cdot 5^n-m$, ..., $k_4\cdot 5^n-m$, $k_5\cdot 5^n+m$, ..., $k_8\cdot 5^n+m$, где k_1, ..., k_8 выбраны так, что числа $k_1\cdot 5^n$, ..., $k_8\cdot 5^n$ дают при делении на 2^n те же остатки, что и числа 2^n, $2^{n-2}+2m$, $2^{n-1}+2m$, $3\cdot 2^{n-2}+2m$, 2^n-2m, $2^{n-2}-2m$, $2^{n-1}-2m$, $3\cdot 2^{n-2}-2m$.) Таким образом, число классов в группе (3) меньше $0{,}5\cdot 10^n/16$, а общее число классов

$$A_n<2^n+\frac{0{,}5\cdot 10^n}{8}+\frac{0{,}5\cdot 10^n}{16}=$$

$$=10^n\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)<10^n\left(\frac{3}{32}+\frac{1}{5^4}\right)=$$

$$=0{,}9535\cdot 10^{n-1}<10^{n-1}.$$

Попробуйте найти $\lim\limits_{n\to\infty} A_n/10^{n-1}$.

Второе доказательство. Оно короче первого, но менее поучительно. Имеет место следующий факт:

если предпоследняя цифра точного квадрата нечетна, то последняя равна 6.

В самом деле, из равенства $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$ видно, что предпоследняя цифра квадрата любого числа и предпоследняя цифра квадрата его последней цифры имеют одну и ту же четность. Но у квадрата однозначного числа предпоследняя цифра нечетна только в двух случаях: $4^2=16$ и $6^2=36$.

Теперь покажем, что точный квадрат не может кончаться на 005*b*. Действительно, по доказанному такой квадрат должен был бы иметь окончание 0056, и тогда он давал бы остаток 8 при делении на 16, что, очевидно, невозможно (квадрат числа, делящегося на 4, делится на 16, а квадрат числа, не делящегося на 4, не делится на 8).

Предлагаем читателю самостоятельно исследовать случаи $n=2$ и 3 подробнее. Докажите, что а) для любого числа a_1a_2 найдется точный квадрат с окончанием a_1a_2b; б) точный квадрат может кончаться на $a_1a_2a_3b$ (при некотором b) в том и только том случае, когда трехзначное число $a_1a_2a_3$ дает при делении на 8 остаток, не равный 5 или 7.

Приведем еще одну задачу на эту тему, присланную в редакцию *Д. Федоровым*: докажите, что число вида $aa{\ldots}ab$, где $b=a+1$, не может быть точным квадратом.

Д. Б. Фукс

◆

М798*. *На окружности отметили 4k точек и раскрасили их попеременно в красный и синий цвета; затем 2k красных точек произвольным образом соединили попарно k красны-*

Допустим сначала, что красные отрезки друг с другом не пересекаются, и покажем, что тогда каждый из них пересекается хотя бы с одним синим, то есть число красно-синих пересечений не меньше k. Возьмем любой красный отрезок AB и одну из стягиваемых им дуг. Число красных точек на ней четно (потому *ми отрезками, а $2k$ синих — k синими отрезками (никакие три отрезка не пересекаются в одной точке). Докажите, что найдется по крайней мере k точек пересечения красных отрезков с синими.*

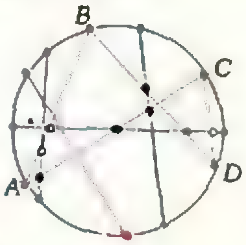


Рис. 1.

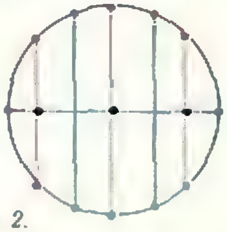


Рис. 2.

что любая из них должна быть соединена отрезком с точкой той же дуги), следовательно, число синих точек на этой дуге нечетно. Поэтому один из начинающихся на ней синих отрезков должен пересекать AB.

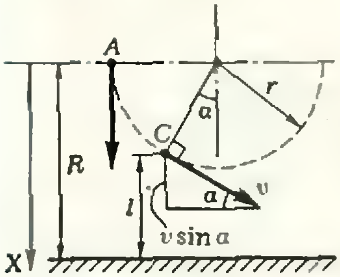
Теперь покажем, что любую систему красных и синих отрезков можно «распутать» — заменить новой, в которой красные отрезки попарно не пересекаются, не увеличивая при этом числа красно-синих пересечений. Пусть AC и BD — пересекающиеся красные отрезки. Заменим их красными отрезками AB и CD (рис. 1). Ясно, что любой отрезок (красный или синий), пересекающийся с отрезком AB или с отрезком CD, имеет с ними обоими столько же точек пересечения, сколько с AC и BD. Поэтому при замене число красно-синих пересечений не увеличивается, а число красно-красных пересечений уменьшается по крайней мере на 1. После нескольких таких операций мы получим систему отрезков, в которой красные отрезки попарно не пересекаются, а число красно-синих пересечений не больше исходного и в то же время, как было доказано вначале, не меньше k.

Легко построить пример системы отрезков, имеющей ровно k красно-синих пересечений (рис. 2).

С. В. Фомин

◆

Ф808. *Моторная лодка, находящаяся в точке A на расстоянии R от берега озера, начинает разворот, двигаясь со скоростью $v = 18$ км/ч по окружности радиуса $r = R/2$; в начальный момент скорость лодки направлена к берегу. Волна от лодки дошла до берега через время $t = 3$ мин после начала разворота. Скорость распространения волн от лодки по поверхности воды равна $u = 9$ км/ч. Найти расстояние R.*



Рассматривая лодку как источник волн, распространяющихся из каждой точки траектории лодки, найдем ту точку C, из которой волна дойдет раньше всего до берега. Положение точки C определяется из условия равенства скорости распространения волн и проекции скорости лодки на направление «к берегу» (ось X на рисунке):

$$u = v_x = v\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = u/v = 1/2,$$

то есть $\alpha = 30°$. Расстояние от точки C до берега равно

$$l = R - r\cos\alpha = R - \frac{R}{2}\cos\alpha = R\left(1 - \frac{1}{2}\cos\alpha\right).$$

Время t_1, которое требуется волне, чтобы дойти из точки C до берега, равно

$$t_1 = l/u = \frac{R}{u}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\alpha\right).$$

Время t_2, в течение которого лодка дошла от точки A до точки C, равно

$$t_2 = \frac{2\pi r}{v}\cdot\frac{60°}{360°} = \frac{\pi R}{6v}.$$

Полное время, через которое после начала разворота волна дойдет до берега, равно

$$t = t_1 + t_2 = \frac{R}{u}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\alpha\right) + \frac{\pi R}{6v}.$$

Отсюда находим расстояние R от точки A до берега:

$$R = \frac{6tuv}{3v(2-\cos\alpha) + \pi u} \approx 545 \text{ м}.$$

А. И. Буздин

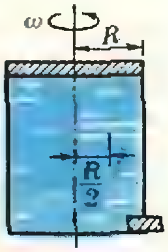
◆

Ф809. *Цилиндрический бак наполнен доверху жидкостью плотности ϱ. Сверху бак плотно закрыт крышкой радиуса R. Снизу в баке имеется отверстие площади s, закрытое пробкой массы m (см. рису-*

Давление в жидкости во вращающемся баке на одной и той же глубине будет разным: в центре сосуда и у стенок — давление нарастает по мере удаления от центра. Найдем, на сколько отличается давление у стенок от давления в центре.

Выделим мысленно тонкий горизонтальный столбик жидкости с площадью поперечного сечения σ (см. рисунок).

нок). Чтобы вытащить пробку из бака, нужно приложить силу f. С какой максимальной угловой скоростью можно вращать бак вокруг вертикальной оси так, чтобы пробка не вылетела?



Центр масс этого столбика движется по окружности радиуса $R/2$. Запишем уравнение движения столбика:

$$\varrho R\sigma\omega^2 \frac{R}{2} = \Delta p \cdot \sigma$$

($\varrho R\sigma$ — масса столбика, $\Delta p \cdot \sigma$ — результирующая сил давлении, действующих на столбик справа и слева). Таким образом, давление в жидкости у стенки больше давления в центре на величину

$$\Delta p = \frac{1}{2}\varrho\omega^2 R^2.$$

Поэтому сила, действующая на пробку со стороны жидкости, равна

$$F = s\left(p_0 + \varrho gH + \frac{1}{2}\varrho\omega^2 R^2\right),$$

где p_0 — атмосферное давление, H — высота бака.

Запишем уравнение движения пробки:

$$m\omega^2 R = p_0 s + F_{\text{тр}} - s\left(p_0 + \varrho gH + \frac{1}{2}\varrho\omega^2 R^2\right).$$

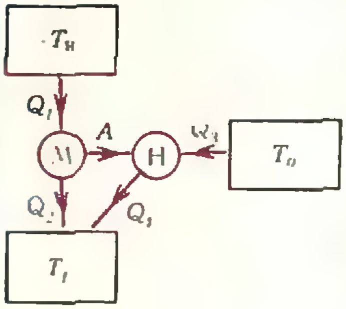
Как следует из условия, пробка вылетает из бака при $F_{\text{тр}} = f + s\varrho gH$. Учитывая это, найдем угловую скорость вращения, при которой пробка вылетит:

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{mR + \frac{1}{2}s\varrho R^2}}.$$

В. И. Комов

◆

Ф810. *Имеется нагреватель с рабочей температурой $t_н = 700$ °C. Температура окружающей среды — $t_0 = 20$ °C. Какое минимальное количество тепла необходимо забрать у нагревателя, чтобы испарить $m = 3$ кг воды, нагретой до температуры кипения ($t_1 = 100$ °C)? Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26$ МДж/кг.*



При непосредственной передаче тепла от нагревателя к воде для испарения массы воды m необходимо получить от нагревателя количество тепла $Q_0 = mr$.

Попытаемся уменьшить эту величину, воспользовавшись тем фактом, что тепловой насос (то есть тепловая машина, работающая по обратному циклу) может перекачивать большое количество тепловой энергии от холодного тела к горячему при малых затратах механической энергии, если перепад температур невелик.

Представим себе устройство для испарения воды, состоящее из идеальной тепловой машины М и идеального теплового насоса Н, включенных так, как показано на рисунке 1. Машина забирает у нагревателя количество тепла Q_1 и передает горячей воде количество тепла Q_2, совершая при этом работу A. Тепловой насос Н, используя работу A, забирает у окружающей среды количество тепла Q_3 и передает горячей воде количество тепла Q_4.

Рассчитаем суммарное количество тепла $Q_2 + Q_4$, получаемое водой. Коэффициент полезного действия машины М равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_н - T_1}{T_н}.$$

Отсюда

$$A = Q_1 \frac{T_н - T_1}{T_н}, \quad Q_2 = Q_1 \frac{T_1}{T_н}.$$

Так как тепловой насос Н — идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу, то для него можно аналогичным образом записать

$$\frac{A}{Q_4} = \frac{T_1 - T_0}{T_1} \Rightarrow Q_4 = A\frac{T_1}{T_1 - T_0} = Q_1 \frac{(T_н - T_1)T_1}{T_н(T_1 - T_0)}.$$

Таким образом,

$$Q_2 + Q_4 = Q_1 \frac{T_1}{T_н} \frac{T_н - T_0}{T_1 - T_0}.$$

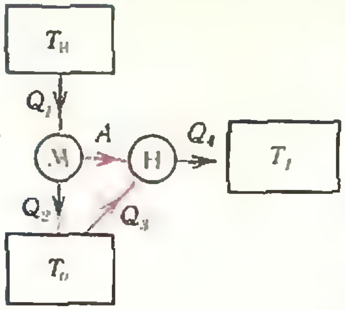


Рис. 2.

Для того чтобы испарить воду, необходимо, чтобы суммарное количество переданного ей тепла было равно $Q_2+Q_1=Q_0$. Следовательно, машина М должна забирать у нагревателя количество тепла

$$Q_1=Q_0\frac{T_н(T_1-T_0)}{T_1(T_н-T_0)}\approx 0{,}31\ mr. \qquad (*)$$

Таким образом, при использовании идеального теплового насоса (холодильника) Q_1 оказывается значительно меньше количества тепла, необходимого для испарения воды.

Из формулы для КПД теплового насоса следует, что при $\frac{T_1-T_0}{T_1}\ll 1$ можно использовать тепловую энергию окружающей среды (на испарение, нагрев и т. д.), затрачивая при этом малое количество механической, электрической или какой-либо другой нетепловой энергии. Однако на практике тепловые насосы (холодильники) пока далеки от идеальных, и их использование в качестве нагревающих элементов еще не нашло широкого распространения.

Интересно отметить, что результат (*) получится и в том случае, если машина М будет работать между нагревателем и окружающей средой (рисунок 2).

О. С. Рабинович

◆

Ф811. *В обычной схеме однополупериодного выпрямителя (рис. 1) $C=1000$ мкФ, $R=500$ Ом. Частота сети $\nu=50$ Гц. Считая диод идеальным, найти:*

1) величину коэффициента пульсаций напряжения $k=\frac{\Delta U}{U}$ на резисторе R;

2) во сколько раз уменьшится коэффициент k, если последовательно с резистором включить катушку индуктивности $L=100$ Гн.

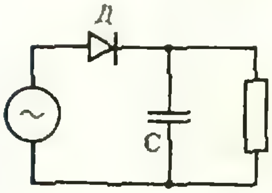


Рис. 1.

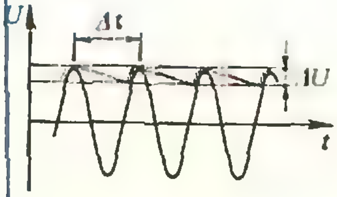


Рис. 2.

1) При выбранных параметрах C и R заряд конденсатора меняется незначительно, поэтому ток разрядки конденсатора можно считать постоянным. Тогда

$$\Delta U=\frac{\Delta q}{C}=\frac{I\cdot\Delta t}{C}=\frac{U\cdot\Delta t}{RC}.$$

Значит,

$$k=\frac{\Delta U}{U}=\frac{\Delta t}{RC}.$$

Если конденсатор разряжается мало, то он подзаряжается в моменты максимального положительного напряжения в сети (рис. 2), то есть

$$\Delta t=T=\frac{1}{\nu}.$$

Следовательно,

$$k=\frac{1}{\nu RC}\approx 0.04.$$

2) При подсоединении катушки индуктивности коэффициент пульсаций станет еще меньше (индуктивность большая: $2\pi\nu L\gg R$). Ток нагрузки тем более можно считать постоянным; значит, напряжение на конденсаторе будет меняться по тому же закону, что и в первом случае. При этом напряжение на катушке будет почти компенсировать изменения напряжения на конденсаторе. Ток через катушку в течение периода сети будет меняться по параболическому закону (ЭДС индукции меняется по линейному закону), причем максимальное значение тока будет в середине периода:

$$\mathcal{E}=\frac{\Delta U}{T}t \quad (\text{при } t\in[nT,(n+1)T]),$$

$$I=I_0-\frac{\Delta U}{T}\,\frac{1}{L}\,\frac{1}{2}t^2.$$

Пульсации в этом случае определяются изменениями тока: $\Delta U_1=R\cdot\Delta I$. Поскольку

$$\Delta I=I_{max}-I_{min}=\frac{1}{2}\,\frac{\Delta U}{LT}\,\frac{T^2}{4}=\frac{1}{8}\,\frac{UT^2}{LRC}$$

$\left(\Delta U=\frac{UT}{RC}\right)$, окончательно получаем:

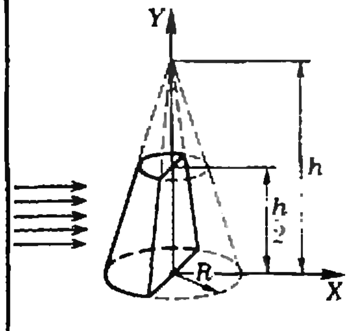
$$k=\frac{\Delta U_1}{U}=\frac{1}{8}\frac{T^2}{LC}=5\cdot 10^{-4}.$$

Итак, при подсоединении катушки индуктивиости пульсации уменьшатся в $\frac{4\cdot 10^{-2}}{5\cdot 10^{-4}}=80$ раз.

А. Р. Зильберман

◆

Ф812. *Коническая линза представляет собой половину усеченного стеклянного конуса. Показатель преломления стекла n; размеры линзы указаны на рисунке. На линзу падает пучок параллельных лучей, перпендикулярных плоской части боковой поверхности линзы. Под каким углом к оси пучка надо расположить за линзой экран, чтобы изображение пучка на экране было прямой линией?*



На любой луч, падающий на поверхность линзы, линза оказывает двойное действие. В плоскости, параллельной основаниям, коническая линза действует как обычная цилиндрическая линза. Но фокусное расстояние цилиндрической линзы определяется радиусом кривизны ее боковой поверхности. У конической линзы этот радиус меняется с высотой, поэтому и оптическая сила конической линзы меняется с высотой. В плоскости, перпендикулярной основаниям, коническая линза действует как призма с углом при вершине $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{R}{H}$. Нетрудно показать, что она преломляет лучи на угол $\beta=\varphi(n-1)$.

Введем систему координат, поместив начало ее в центре основания линзы и направив ось X вдоль пучка лучей, а ось Y вдоль высоты линзы. Лучи, лежащие в горизонтальной плоскости $y'=\mathrm{const}$, после преломления в линзе соберутся в точке O с координатами (x, y), причем координата x равна фокусному расстоянию линзы на высоте y', то есть равна $\frac{r(y')}{n-1}$, где $r(y')$ — радиус боковой поверхности конуса на высоте y'. Так как $r(y')=R\left(1-\frac{y'}{H}\right)$,

$$x=\frac{R}{n-1}\left(1-\frac{y'}{H}\right). \qquad (1)$$

Координата y определяется из условия, что приходящие в точку $O(x, y)$ лучи образуют с осью X угол $\beta=(n-1)\operatorname{arctg}\frac{R}{H}$:

$$\frac{y'-y}{x}=\operatorname{tg}\left((n-1)\operatorname{arctg}\frac{R}{H}\right). \qquad (2)$$

Исключая y' из уравнений (1) и (2), получаем уравнение для линии, в которую сфокусируются лучи:

$$y=H-x\left(A+\frac{n-1}{R}H\right) \qquad (3)$$

(здесь для краткости мы ввели обозначение $\operatorname{tg}\left((n-1)\operatorname{arctg}\frac{R}{H}\right)=A$).

Из выражения (3) следует, что экран надо установить под углом $\alpha=\operatorname{arctg}\left(A+\frac{n-1}{R}H\right)$ к оси X — в этом случае линия фокусировки будет четкой.

А. А. Лапидес

Еще одно определение равногранного тетраэдра?

В статье В. Э. Матизена «Равногранные и каркасные тетраэдры» в этом номере приводится 21 свойство равногранных тетраэдров, эквивалентных его определению (включая само определение). Среди них — равенство периметров граней, площадей граней, радиусов описанных окружностей граней (свойства (11), (12), (15)). Странно, что свойства «радиусы вписанных в грани окружностей равны» в этом списке нет. Как вы думаете, обязан ли тетраэдр с этим свойством быть равногранным?

В. Д.

Постоянная становится переменной

С. С. ВАЛЛАНДЕР

Пояснить асимптотическое поведение решения при $12 \to \infty$.

(Г. Дж. Липкин, из сборника «Физики шутят», М., «Мир», 1966)

В серьезных математических работах часто и в совершенно различных ситуациях встречается следующая идея: зафиксировать переменные величины и менять постоянные. В этой заметке мы покажем, как с помощью этой идеи решается задача **М799б**):

Найдите два решения уравнения

$$3^x+3^{x^2}=2^x+4^{x^2} \qquad (1)$$

и докажите, что у него нет других решений.

Это внешне эффектное уравнение кажется малоприспособленным к решению элементарными методами. Обычно уравнения подобного вида решаются из соображений монотонности. Для примера рассмотрим решение задачи **М799а**): *Найдите одно решение уравнения* $3^{x+1}+100=7^{x-1}$ *и докажите, что у него нет других решений.*

Искомый корень легко угадать: $x=4$ (проверьте!). А других решений нет, потому что, разделив обе части уравнения на 3^{x-1}:

$$9+100\cdot 3^{-x+1}=(7/3)^{x-1}, \qquad (2)$$

мы получим в левой части убывающую функцию от x, а в правой — возрастающую.

Однако применить соображения монотонности к уравнению (1), судя по всему, трудно (хотя нельзя, конечно, исключить возможность того, что более хитрые рассуждения этого типа могут привести к цели). Действительно, уравнение (1) имеет **два** решения — $x=0$ и $x=1$. Как же доказать, что других решений у него нет?

Попробуем воспользоваться тем, что левая и правая части уравнения имеют похожую структуру $a^x+b^{x^2}$, причем сумма оснований в обеих частях одна и та же ($a+b=6$) — благодаря этому уравнение имеет решение $x=1$. Запишем уравнение (1) в виде

$$3^x+(6-3)^{x^2}=2^x+(6-2)^{x^2} \qquad (3)$$

и рассмотрим функцию $f(t)=t^x+(6-t)^{x^2}$. (Это решающий момент: в исходном уравнении мы **фиксируем** переменную и начинаем менять постоянные). Мы должны доказать, что равенство (3), то есть $f(3)=f(2)$, невозможно при $x\neq 0$ и $x\neq 1$. Для этого достаточно установить, что при каждом значении x, кроме 0 и 1, функция $f(t)$ монотонна, по крайней мере на промежутке $2<t<3$.

Найдем производную (по t!) функции f: $f'(t)=xt^{x-1}-x^2(6-t)^{x^2-1}$ и покажем, что она сохраняет знак на отрезке $[2;\ 3]$ (при $x\neq 0;\ 1$). Разберем отдельно три случая — $x<0$, $0<x<1$ и $x>1$.

При $x<0$, очевидно $f'(t)<0$; следовательно, $f(t)$ убывает и $f(2)>f(3)$.

При $0<x<1$ и $t<3$ имеем: $6-t>3$ и $x^2(6-t)^{x^2-1}<x(6-t)^{x-1}<x3^{x-1}<xt^{x-1}$, то есть $f'(t)>0$ и $f(3)>f(2)$.

Наконец, при $x>1$ и $t<3$

$$x^2(6-t)^{x^2-1}>x(6-t)^{x-1}>x3^{x-1}>xt^{x-1},$$

то есть $f'(t)<0$ и $f(2)>f(3)$.

Итак, уравнение (3) (или (1)) не имеет корней, отличных от 0 и 1.

Точно так же можно доказать, что любое уравнение вида $a^x+(2k-a)^{x^2}=b^x+(2k-b)^{x^2}$ при $0<a<b<k$, и $k>1$ имеет ровно два решения — 0 и 1 (в нашей задаче $b=k=3$, $a=2$).

Приведем еще одно решение задачи М799б), опирающееся на ту же идею. (Его нашли некоторые читатели).

Отсутствие отрицательных корней уравнения (1) вытекает из того, что при $x<0$ $3^x<2^x$ и в то же время $3^{x^2}<4^{x^2}$. При $0<x<1$ рассмотрим функцию $g(t)=(t+1)^x-t^x$. Поскольку $g'(t)=x((t+1)^{x-1}-t^{x-1})<0$, функция $g(t)$ убывает. Следовательно, $g(3)=4^x-3^x<g(2)=3^x-2^x$. А так как $4^x-4^{x^2}=4^{x^2}(4^{x-x^2}-1)>3^{x^2}(3^{x-x^2}-1)=3^x-3^{x^2}$, справедливо неравенство

$$3^x-2^x>4^x-3^x>4^{x^2}-3^{x^2}. \qquad (4)$$

Поэтому $3^x+3^{x^2}>2^x+4^{x^2}$. Аналогично разбирается случай $x>1$ — с той разницей, что в (4) вместо знаков $>$ получаются знаки $<$.

В заключение сформулируем сходную по условию, но более сложную задачу:

Сколько решений имеет уравнение $3^x+3^{x^2}=4^x+2^{x^2}$?

Поправка

В «Кванте» № 5 в статье «Интерференция волн» допущена ошибка. В задаче 2 (с. 36) должно быть: $\sin\alpha/\sin(\beta+\alpha)=1/n$, откуда, с учетом малости углов, $\beta\approx\alpha(n-1)$. Тогда $L\approx 300$ см, $N\approx 600$, $b_0\approx 50$ мкм.

Что скрывается за превращениями тетраэдра

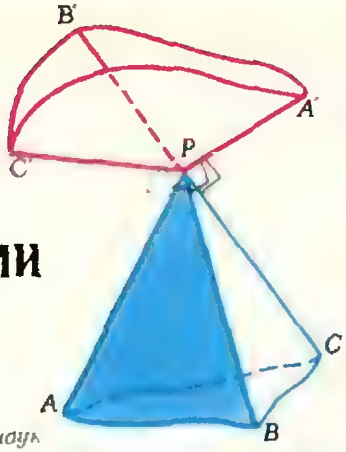


Рис. 1.

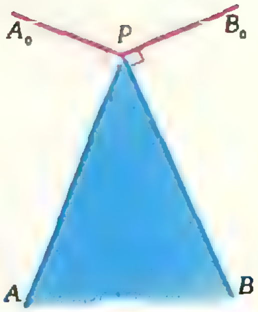


Рис. 2.

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

В этой заметке мы приведем решение задачи М793 и попутно расскажем о связанных с ней любопытных геометрических фактах.

М793*. *Из вершины P тетраэдра $PABC$ проводятся три отрезка PA', PB', PC', перпендикулярные граням PBC, PCA, PAB и равные по длине площадям этих граней соответственно (направления отрезков выбираются так, что точки A' и A, B' и B, C' и C лежат по разные стороны от плоскостей соответствующих граней PBC, PCA, PAB). Докажите, что*

а) повторив это же построение для тетраэдра $PA'B'C'$ (и его вершины P), мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному тетраэдру $PABC$ с коэффициентом $3V/4$, где V — объем тетраэдра $PABC$;

б) вектор $\vec{PA'}+\vec{PB'}+\vec{PC'}$ перпендикулярен плоскости ABC.

в) Из точки O, взятой внутри тетраэдра $ABCD$, опускаются перпендикуляры на плоскости его граней. На этих перпендикулярах от точки O откладываются отрезки, равные по длине площадям соответствующих граней, и концы этих отрезков принимаются за вершины нового тетраэдра $A'B'C'D'$. (Разумеется, с точностью до параллельного переноса, этот тетраэдр не зависит от выбора точки O.) Докажите, что, повторив это построение для тетраэдра $A'B'C'D'$, мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному с коэффициентом $3V$, где V — объем исходного тетраэдра $ABCD$. (Если $3V=1$, то последний тетраэдр получается из исходного параллельным переносом.)

Ясно, что трехгранный угол при вершине P тетраэдра $PA'B'C'$ из задачи а) полностью определяется трехгранным углом $PABC$. С обсуждения соотношений между этими углами мы и начнем.

Полярный угол трехгранного угла. Решение задачи М793, а.

Трехгранный угол $PA'B'C'$ называется *полярным* к трехгранному углу $PABC$, если его ребра перпендикулярны граням угла $PABC$ и направлены во внешнюю сторону (то есть, например, $(PA')\perp(PBC)$ и лучи PA' и PA лежат по разные стороны от плоскости PBC; рис. 1). Докажем два основных свойства полярного угла.

Пусть $PA'B'C'$ — полярный угол к $PABC$, тогда

1) $PABC$ — полярный угол к $P'A'B'C'$;

2) сумма величин угла APB и двугранного угла при ребре PC' в угле $PA'B'C'$ равна π; то же верно и для любого плоского угла в одном из трехгранных углов и соответствующего двугранного угла в полярном угле.

Действительно, ребра угла $PABC$ перпендикулярны граням угла $PA'B'C'$ (например, $(PA)\perp(PB'C')$, потому что по определению полярного угла $(PB')\perp(PA)$ и $(PC')\perp(PA)$). Далее, лучи PA и PA' лежат по разные стороны от плоскости PBC, причем $(PA')\perp(PBC)$. Поэтому угол APA' — тупой, а значит, эти лучи лежат по разные стороны и от плоскости $PB'C'$, перпендикулярной лучу PA'. Таким образом, луч PA (и, аналогично, PB и PC) направлен во внешнюю сторону относительно угла $PA'B'C'$. Утверждение 1) доказано.

Для доказательства утверждения 2) заметим, что плоскость APB пересекает двугранный угол при ребре PC' по его линейному углу A_0PB_0 (рис. 2; $A_0\in(PC'B')$, $B_0\in(PC'A')$), причем углы APA_0 и BPB_0 — прямые и лучи PA и PB_0 лежат по разные стороны от прямой PB, а PB и PA_0 — по разные стороны от PA. Поэтому величина двугранного угла при PC' равна $\widehat{A_0PB_0}$ и $\widehat{A_0PB_0}+\widehat{APB}=\pi$.

Задачи

1. Пусть $PABC$ и $PA'B'C'$ — полярные друг другу трехгранные углы. Докажите, что а) величина угла между ребром PA и гранью PBC и величина угла между PA' и $PB'C'$ в сумме дают π; б) ось конуса, описанного около угла $PABC$, и ось конуса, вписанного в угол $PA'B'C'$, совпадают, а сумма углов раствора этих конусов равна π.

2. Докажите, что сумма величин двугранных углов трехгранного угла всегда больше π.

3. Два трехгранных угла конгруэнтны, если их плоские углы соответственно равны по величине. Выведите отсюда, что два трехгранных угла с соответственно равными двугранными углами конгруэнтны.

Докажем теперь утверждение а) нашей задачи. Пусть $PA_1B_1C_1$ — тетраэдр, построенный по $PA'B'C'$. Его трехгранный угол при вершине P по построению является полярным к углу $PA'B'C'$, полярному к $PABC$. Следовательно, он совпадает с трехгранным углом $PABC$, то есть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на лучах PA, PB и PC. Найдем отношение длин ребер PA_1 и PA ($S_{PB'C'}$, S_{PAB} и т. д. — площади граней $PB'C'$, PAB и т. д.):

$$|PA_1| = S_{PB'C'} = \frac{1}{2}|PB'| \cdot |PC'| \cdot \sin \widehat{B'PC'} =$$

$$= \frac{1}{2} S_{PAC} \cdot S_{PAB} \cdot \sin \widehat{a},$$

где $\widehat{a} = \pi - \widehat{B'PC'}$ — двугранный угол при ребре PA тетраэдра $PABC$. Но площадь грани PAB равна $S_{PAB} = \frac{1}{2}|PA| \cdot h$, где h — высота треугольника PAB, проведенная из вершины B, поэтому

$$|PA_1| : |PA| = \frac{1}{4} S_{PAC} \cdot h \sin \widehat{a} = \frac{3}{4} V,$$

поскольку $h \sin \widehat{a}$ — это длина высоты тетраэдра $PABC$, опущенный на грань PAC (рис. 3). Аналогично доказывается, что $|PB_1| : |PB| = |PC_1| : |PC| = 3V/4$. Таким образом, тетраэдр $PA_1B_1C_1$ гомотетичен тетраэдру $PABC$ с коэффициентом $3V/4$.

Решение задачи М793, б и теорема о «еже»

Будем называть вектор, перпендикулярный грани Γ данного тетраэдра, равный по длине ее площади и направленный во внешнюю сторону*), *вектором грани* Γ. Надо доказать, что сумма $\vec{v} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'}$ векторов трех граней тетраэдра $PABC$ перпендикулярна четвертой грани ABC, то есть что $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Пользуясь тем, что вектор $\overrightarrow{PA'}$ перпендикулярен $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PB'} - \overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PC}$, а $\overrightarrow{PC'} - \overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{PB}$, получим

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'})(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) =$$

$$= \overrightarrow{PB'} \cdot \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA'} \cdot \overrightarrow{PA}.$$

Но $\overrightarrow{PA'} \cdot \overrightarrow{PA} = S_{PBC} \cdot |PA| \cdot \cos \widehat{APA'}$, а $\widehat{APA'} = \varphi + \frac{\pi}{2}$, где φ — угол между ребром PA и плоскостью PBC (рис. 4); кроме того, $|PA| \sin \varphi = H_A$ — это длина высоты тетраэдра, опущенной на грань PBC.

Следовательно, $\overrightarrow{PA'} \cdot \overrightarrow{PA} = -S_{PBC}|PA| \sin \varphi = -S_{PBC} \cdot H_A = -3V$. Точно так же и $\overrightarrow{PB'} \cdot \overrightarrow{PB} = -3V$. Таким образом, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = -3V + 3V = 0$. Равенство $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ доказывается аналогично.

Ясно, что доказанное утверждение имеет место для любых трех векторов граней, то есть *сумма векторов любых трех граней тетраэдра перпендикулярна четвертой грани*. Но ведь и вектор четвертой грани ей перпендикулярен! Значит, сумма всех четырех векторов граней (если она не равна $\vec{0}$) перпендикулярна любой грани тетраэдра. А это, конечно, невозможно. Итак, доказана

Теорема о «еже» (для тетраэдра). *Сумма векторов граней любого тетраэдра равна* 0.

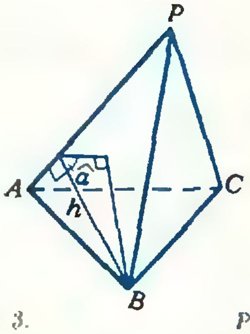


Рис. 3.

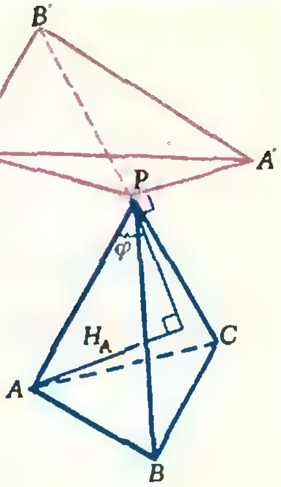


Рис. 4.

Задачи

4. Сформулируйте и докажите двумерную теорему о «еже» — для треугольника.

5. На плоскости даны два равнобедренных прямоугольных треугольника PAB' и $PA'B$ с прямыми углами при их общей вершине P (и с одинаковыми направлениями обхода вершин). Пусть PH — высота треугольника PAB. Докажите, что прямая PH делит отрезок $A'B'$ пополам.

6. Пользуясь теоремой о «еже» для треугольника, докажите теорему о «еже» для призмы.

7. Докажите теорему о «еже» для произвольного выпуклого многогранника.

8. Пользуясь теоремой о «еже» для тетраэдра $ABCD$,

а) выразите площадь грани ABC через площади трех других граней и углы между ними;

б) докажите, что сумма величин его двугранных углов при ребрах AB, BC, CD и DA заключена в пределах от 0 до 2π;

в) Докажите, что сумма величин всех его двугранных углов заключена в пределах от 2π до 3π;

г) докажите, что сумма s косинусов всех двугранных углов удовлетворяет неравенствам $0 < s \leqslant 2$, причем $s = 2$ тогда и только тогда, когда грани тетраэдра равновелики; докажите, что в последнем случае двугранные углы при скрещивающихся ребрах равны.

Решение задачи М793, в. Проблема Минковского

По условию задачи $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ и $\overrightarrow{OD'}$ — это векторы граней (BCD, CDA, DAB и ABC) тетраэдра $ABCD$. Отложим от точки O векторы граней тетраэдра $A'B'C'D'$. Их концы служат вершинами нового тетраэдра $A''B''C''D''$; надо доказать, что этот тетраэдр гомотетичен тетраэдру $ABCD$.

---

*) Другими словами, направление этого вектора совпадает с направлением перпендикуляра, опущенного на Γ из любой внутренней точки тетраэдра.

Заметим, что $\overrightarrow{OD''}$ — вектор грани $A'B'C'$ для тетраэдра $A'B'C'D'$ — является также вектором грани $A'B'C'$ и для тетраэдра $OA'B'C'$. Действительно, точки O и D' лежат по одну сторону от плоскости $A'B'C'$ (иначе сумма $\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$ не равнялась бы $\vec{0}$), поэтому вектор $\overrightarrow{OD''}$ направлен во внешнюю сторону тетраэдра $OA'B'C'$. По теореме о «еже» вектор — $\overrightarrow{OD''}$ равен сумме векторов граней $OA'B'$, $OB'C'$ и $OC'A'$ тетраэдра $OA'B'C'$. Но этот тетраэдр строится точно так же (с точностью до параллельного переноса), как тетраэдр $PA'B'C'$ в задаче а), следовательно $\overrightarrow{OD''}=-k(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$, где $k=3V/4$. Аналогично $OA''=-k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$, поэтому $\overrightarrow{D''A''}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OD''}=k(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=k\cdot 4\overrightarrow{DA}=3V\cdot\overrightarrow{DA}$. Таким же образом доказывается, что $D''B''=3V\cdot\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{D''C''}=3V\cdot\overrightarrow{DA}$. Это и значит, что тетраэдры $A''B''C''D''$ и $ABCD$ гомотетичны с коэффициентом $3V$.

Отсюда немедленно следует, что *для любых четырех некомпланарных векторов, дающих в сумме $\vec{0}$, существует единственный с точностью до параллельного переноса тетраэдр, для которого данные векторы служат векторами граней.* (Если $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ — данные векторы и $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$, $\overrightarrow{OD'}$ — векторы граней тетраэдра $ABCD$, то искомый тетраэдр гомотетичен $A'B'C'D'$.) Это утверждение является очень частным и простым случаем так называемой проблемы Минковского: *можно ли по заданному набору некомпланарных векторов с нулевой суммой простроить выпуклый многогранник, для которого они служили бы векторами граней? будет ли такой многогранник единственным?* Эта проблема была поставлена и решена (положительно) выдающимся немецким математиком Германом Минковским в конце прошлого века.

Задачи

9. В тетраэдре $ABCD$ грани ABC и ABD, а также CDA и CDB равновелики. Докажите, что отрезок, соединяющий середины ребер AB и CD, является их общим перпендикуляром.

10. Докажите, что следующие свойства тетраэдра эквивалентны*): 1) все грани конгруэнтны; 2) все грани равновелики; 3) центр описанной сферы совпадает с центром тяжести (центр тяжести определяется тем, что сумма векторов, проведенных из него в вершины тетраэдра, есть $\vec{0}$).

---

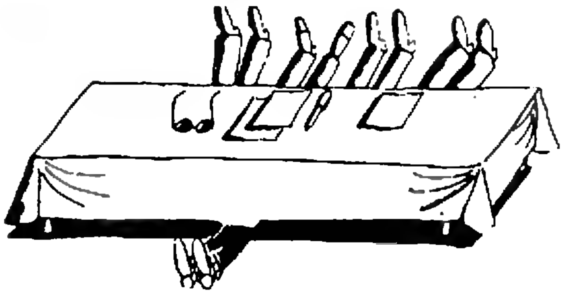
*) Тетраэдры, о которых говорится в этой задаче, называются равногранными. О них подробно рассказано в статье В. Э. Матизена в этом номере журнала; см. также выше задачу 8, г.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

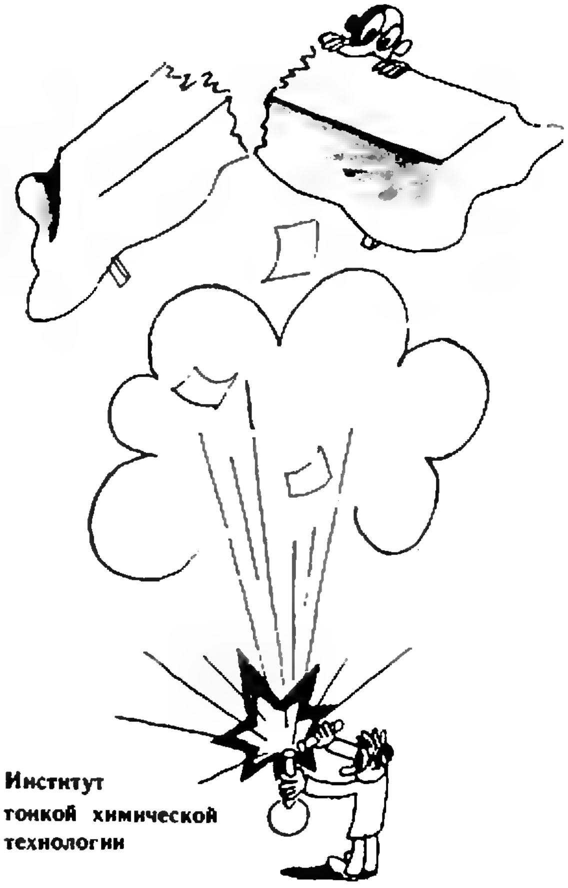
Тихо! Идут экзамены!

(Цикл рисунков А. И. Семенова)

Геологоразведочный институт

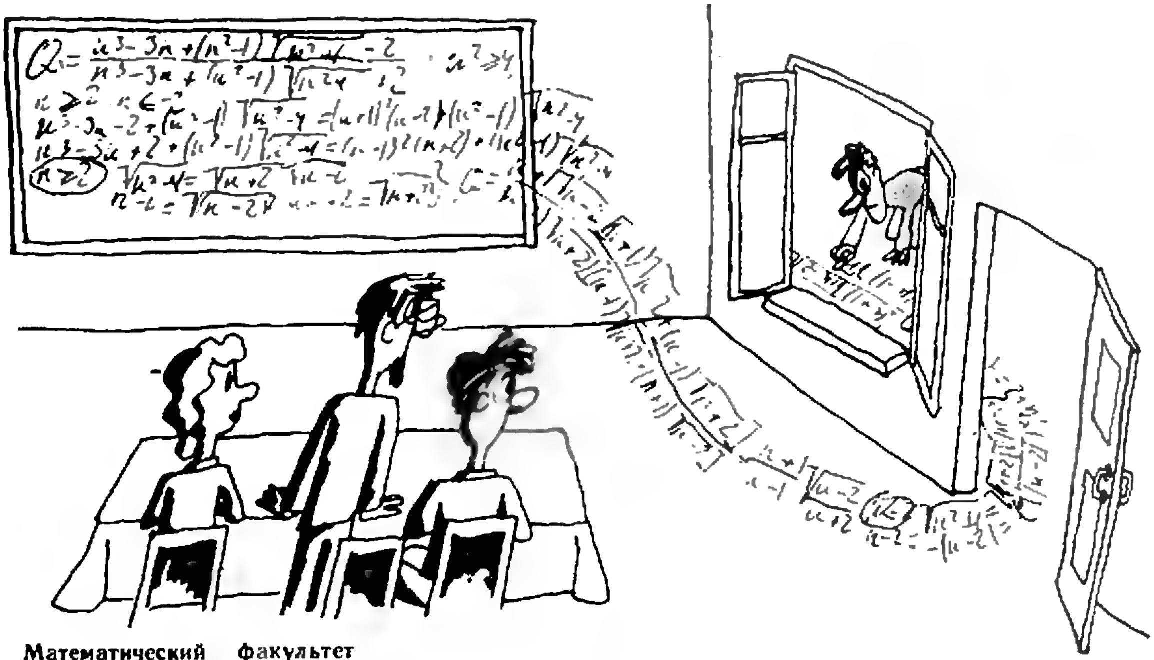


Автомеханический институт

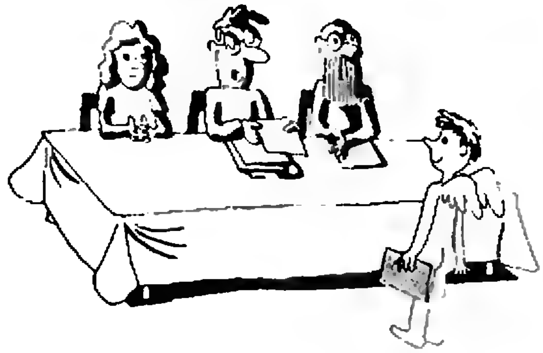


Институт тонкой химической технологии

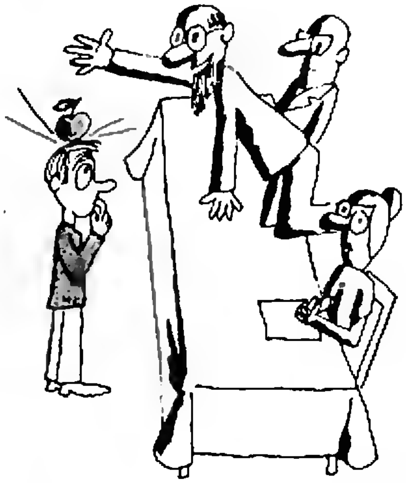
КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ



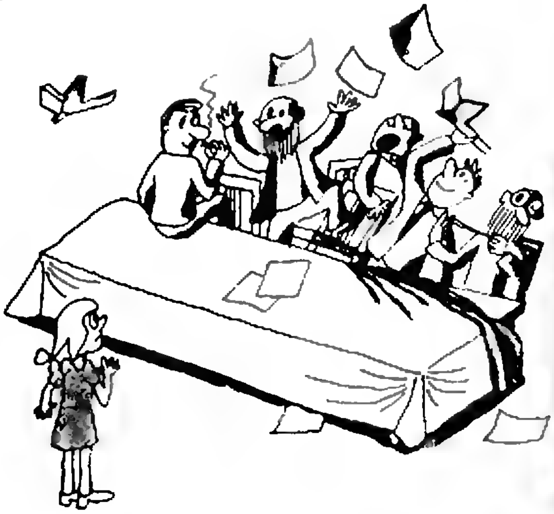
Математический факультет



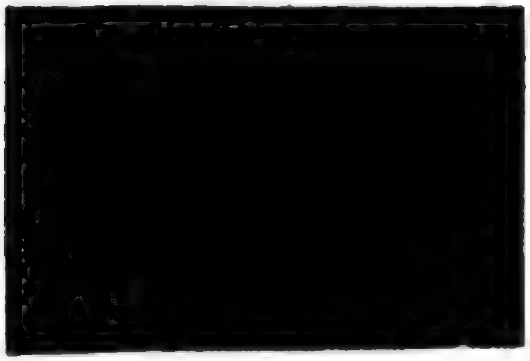
Авиационный институт
— У товарища отличная характеристика, имеет опыт работы в летном деле...



Физический факультет
— Теперь вспомнили закон всемирного тяготения?



Педагогический институт
— Итак, вы пришли в класс. Ну-ка, наведите порядок!



Электротехнический институт
—... Да, с практическими навыками у вас слабовато.

Что такое случайность?

Купив билет в автобусе, вы обнаруживаете, что его номер состоит из одних семерок. Удивительно, не правда ли? Конечно! Ведь не каждый же день такое бывает! А теперь представьте себе, что номер билета — 830877. Наверное, ничего удивительного вы в этом не найдете. А почему, собственно? Ведь и номер 777777, и номер 830877 встречаются одинаково часто (лучше сказать, одинаково редко) — в одном случае из миллиона. Так почему же мы по-разному воспринимаем их появление?

Почему, если наш партнер выбросит на игральной кости десять шестерок подряд, мы подозреваем что-то неладное, а если он выбросит 2, 6, 2, 1, 2, 6, 4, 5, 1, 3, у нас подозрений не возникает?

Почему одни последовательности кажутся нам «случайными», а другие (например, шесть семерок) — нет? Можно ли дать точное математическое определение случайности?

Впервые такое определение было предложено в 1919 году немецким математиком и физиком Рихардом Мизесом. Мы не имеем возможности изложить его во всех деталях, но постараемся объяснить замысел.

Рассмотрим для простоты последовательности, состоящие только из «нулей» и «единиц». В каком случае мы согласны считать такую последовательность случайной? Например, если мы будем многократно подбрасывать обыкновенную монету и записывать результаты («орел» — 1, «решка» — 0), полученная последовательность должна быть случайной.

Прежде всего, ясно, что в случайной последовательности должно быть примерно одинаковое число нулей и единиц; поэтому последовательность из одних нулей, как и последовательность из одних единиц, не случайна.

Хотя последовательность

0101010101...

и содержит равное число нулей и единиц, вряд ли кто-нибудь сочтет ее случайной. Что в ней плохого? Например, то, что в ней ни разу не встречается двух подряд идущих нулей или двух единиц, в то время как в случайной последовательности комбинации 00, 01, 10, 11 должны встречаться одинаково часто. Но и требования равной частоты появления всех комбинаций одинаковой длины мало.

Выпишем подряд числа 0, 1, 2, 3, ... в двоичной системе — получится последовательность

0110111001011101111000...

Можно доказать (попробуйте!), что «в пределе» для любого n все комбинации из нулей и единиц длины n будут встречаться в этой последовательности одинаково часто. Но, несмотря на это, вряд ли кто-нибудь согласится считать ее случайной.

Так что же такое случайная последовательность? Мизес предложил такой подход к определению этого понятия. Будем выбирать из последовательности некоторые ее члены, руководствуясь каким-то правилом. Например, разрешается выбрать все члены с четными номерами или все члены, номера которых — простые числа. Разрешается также, решая вопрос о том, выбирать или нет какой-то член, учитывать значения предыдущих членов последовательности. Например, можно отобрать те члены, перед которыми идут две единицы подряд (Но правило «выбрать те члены, которые сами равны единице», не допускается!) Так вот, случайная по Мизесу последовательность должна быть такой, что при **любом** правиле выбора нули и единицы встречаются среди выбранных членов одинаково часто. (Это требование, как можно проверить, запрещает считать случайными приведенные выше последовательности нулей и единиц).

Рихард Мизес сделал попытку положить свою концепцию случайности в основу теории вероятностей, но натолкнулся на серьезные логические трудности. Убедительную критику его подхода дал советский математик А. Я. Хинчин, а удовлетворительное обоснование теории вероятности было получено в 1933 г. А. Н. Колмогоровым на другом пути — аксиоматическим методом.

Однако порожденное Мизесом направление исследований, посвященное делению последовательностей на «случайные» и «неслучайные», оказалось плодотворным. В начале семидесятых годов А. Н. Колмогоров, воспользовавшись идеями теории алгоритмов, дал убедительное определение этих понятий.

Рихард Мизес родился 100 лет назад во Львове. Окончив Венский университет, он затем был профессором Страсбургского и Берлинского университетов. С 1933 г. Мизес работал профессором Стамбульского университета, с 1939 г.— в Гарварде (США). Умер Мизес в 1953 г.

А. Х. Шень

О целочисленных точках кривых вида

$$x^n+y^n=c^n$$

Если c — целое число, то окружность

$$x^2+y^2=c^2 \qquad (1)$$

обязательно проходит через точки с целыми координатами, например через точки $(0, \pm c)$ и $(\pm c, 0)$, лежащие на осях координат. Окружность (1) может проходить и через целочисленные точки, не лежащие на осях координат, например, при $c=5$ — через точки $(3, 4)$, $(4, 3)$ *).

А может ли кривая

$$x^n+y^n=c^n \qquad (2)$$

(где $n>3$, $c>0$) проходить через целочисленную точку (x, y) при $x>0$ и $y>0$? В общем виде ответ на этот вопрос неизвестен, однако мы докажем следующее утверждение:

Для любого целого положительного c можно указать такой номер N, начиная с которого (то есть при $n>N$) кривая (2) не проходит через целочисленные точки, не лежащие на осях координат.

Почему это так? Изучение графика кривой (2) при $n=1$, 2, 3, 4, ... наводит на мысль, что при достаточно большом n эта кривая прижимается к ломаной ABC, звенья которой идут по прямым AB и BC, заданным соответственно уравнениями $y=c$ и $x=c$, где c — целое (рис. 1). Но внутри «красного коридора» ширины 1, ограниченного ломаной ABC, осями координат и ломаной $A_1B_1C_1$ (см. рис. 1), уже нет целочисленных точек, а наша кривая целиком лежит в этом коридоре при достаточно большом n.

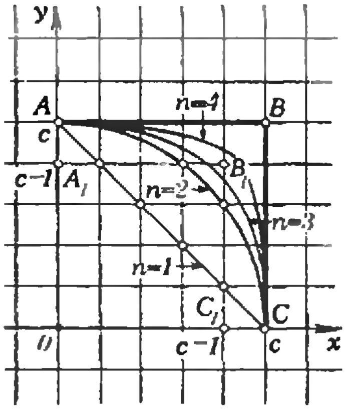


Рис. 1.

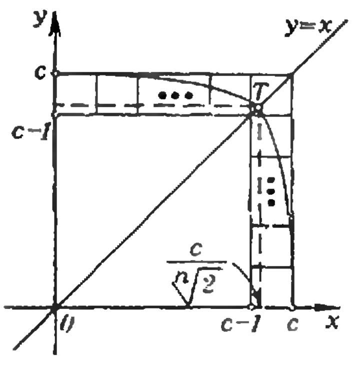


Рис. 2.

Основываясь на этих наглядных соображениях, приведем теперь строгое доказательство сформулированного утверждения.

Пусть дано целое $c>0$; кривая (2) пересекает оси координат в точках $(c, 0)$, $(0, c)$. Ее точка пересечения T с биссектрисой первого квадрата имеет абсциссу $x=\frac{c}{\sqrt[n]{2}}$. Чтобы кривая целиком оказалась внутри «красного коридора» (рис. 2), достаточно потребовать, чтобы $c-1<\frac{c}{\sqrt[n]{2}}$. А последнее неравенство будет выполненным, если мы выберем

$$n>\frac{\ln 2}{\ln c-\ln(c-1)},$$

что всегда можно сделать, так как правая часть неравенства — постоянная. В «коридоре» нет целочисленных точек. Значит, наша кривая не проходит через целочисленные точки, не лежащие на осях координат, что и требовалось.

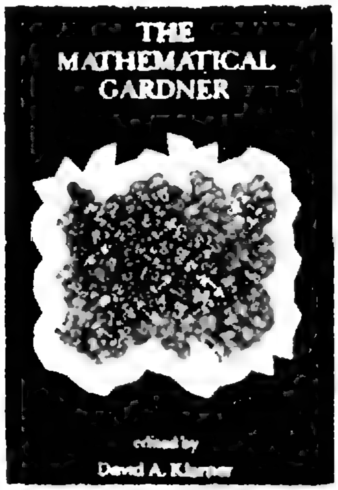
А. Г. Маневич

---

*) Если окружность (1) проходит через целочисленную точку (x_0, y_0), то тройка чисел (x_0, y_0, c) называется *пифагоровой*. О пифагоровых тройках можно прочитать в «Кванте», 1981, № 4, с. 39 и 1979, № 4, с. 38.

Мартин Гарднер и "The Mathematical Gardner"

Доктор физико-математических наук
И. М. ЯГЛОМ



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦВЕТНИК

В этом году в СССР под названием «Мир науки» начал выходить перевод на русский язык известного американского «общенаучного» журнала для широкого читателя "Scientific American", родственного, по своему характеру и кругу читателей, нашему журналу «Наука и жизнь».

Более двадцати лет отделом математики журнала "Scientific American" заведовал Мартин Гарднер и более двадцати лет в каждом номере этого ежемесячника появлялась подготовленная им рубрика «Математические игры».

У меня нет ни малейшего сомнения в том, что при свойственных Гарднеру ярких математических способностях и обостренном научном эстетическом чутье, при его изобретательности и остроумии, умении ценить и чувствовать чужие результаты и личной научной инициативе, в полной мере проявляющихся во всех его публикациях, он вполне мог бы стать серьезным ученым-математиком. Однако Гарднер избрал другой путь — путь популяризатора математической науки. При этом здесь он в полной мере является Профессионалом.

Я пишу это слово с большой буквы, ибо отношусь к нему с таким же глубоким уважением, как поэт Александр Межиров, написавший известные строки

> Пусть пребудут в целости
> Хмуры и усталы
> Делатели ценности
> Профессионалы,

или как поэтесса Марина Цветаева, назвавшая один из самых центральных своих сборников простым и высоким словом «Ремесло», каким обозначала она, вслед за поэтессой Каролиной Павловой, свой поэтический труд.

К своему ремеслу популяризатора математики Гарднер всегда относился с цветаевской одержимостью и проявлял в нем тот высокий профессионализм, который отличает каждого настоящего Мастера.

Профессионалами-популяризаторами были также Сэм Лойд (1841—1911), Генри Эрнест Дьюдени (1857—1930) и Яков Исидорович Перельман (1882—1942). Однако Лойд, Дьюдени и Перельман относятся к несколько более ранней эпохе, а известно, что во всех областях жизни наше время отличается повышенными техническими требованиями.

Если в начале века прыжок в высоту за 2 м расценивался почти как чудо, то сегодня посетителей спортивных соревнований не так уж удивляет и высота в 2 м 30 см (причем это не значит, конечно, что нынешние атлеты по своим физическим данным превосходят прежних — но техника прыжка разработана у них несравненно глубже и детальнее). Если у Пушкина рифмовка трех или, тем более, четырех строк встречалась крайне редко, то у Пастернака и пятикратная рифмовка встречается достаточно часто (что никак не означает, разумеется, что Пастернак как поэт выше Пушкина — предположение, которое, безусловно, крайне возмутило бы самого Бориса Леонидовича: просто работали эти два писателя «в разной технике»). И уж совсем нет никакого сомнения в том, что знания и «техническая оснащенность» современного инженера, специализирующегося в области электронных приборов, не сравнимы с тем, чем владел, скажем, наладчик электромашин дореволюционной эпохи.

Глубина гарднеровских математических конструкций, широта его знаний и богатство используемых им приемов также не идут ни в какое сравнение с арсеналом Лойда, Дьюдени и Перельмана.

В октябре 1979 г. Мартину Гарднеру исполнилось 65 лет — возраст, который в США дает право на пенсионное обеспечение. Легко представить себе, что работа над рубрикой «Математические игры» в журнале "Scientific American" сама по себе игрой отнюдь не являлась — увы, слово «усталы» в процитированном выше четверостишии Межирова не является случайным и относится ко всем, кто по-настоящему вкладывает душу в свою работу. Во всяком случае Гарднер не решился продолжать свою деятельность в журнале и ушел на пенсию.

◆ По предложению Гарднера редакция пригласила на его место физика Дугласа

Р. Хофштадтера, человека совсем другого типа, интеллектуального склада и характера мышления. Перу Хофштадтера принадлежит замечательная, но по своей структуре, содержанию и замыслу глубоко отличная от стиля Гарднера книга «Гёдель, Эшер, Бах»*). Замена Гарднера на Хофштадтера сразу же полностью изменила характер соответствующих разделов журнала (и даже само название «гарднеровской» рубрики). ◆

Юбилей Гарднера его друзья и поклонники решили ознаменовать изданием сборника посвященных ему статей. В 1983 г. издательство «Мир» должно выпустить русский перевод этого сборника. К сожалению, принятое издательством название «Математический цветник» не передает игру слов оригинального названия "The Mathematical Gardner", обыгрывающего сходство фамилии Gardner с английским словом gardener («садовник»).

Среди авторов сборника — американцы, канадцы, англичане, голландцы, французы; это — поистине плод международного сотрудничества математиков, выразивших таким образом уважение и признательность человеку, так много сделавшему для популяризации их наук.

Среди авторов — один из патриархов современной геометрии канадец Гарольд Скотт Макдональд Коксетер (его статья «Ангелы и демоны» посвящена математическому анализу некоторых произведений Эшера) и видный специалист по теории кодирования и комбинаторике С. Голомб (читателям «Кванта» он может быть известен по книге «Полимино» (М., «Мир», 1975)).

Сборник разбит на 6 разделов: «Игры», «Геометрия», «Плоские мозаики», «Пространственные мозаики», «Забавы и задачи», «Числа и теория кодирования».

В качестве примера статьи из раздела «Игры» можно указать на разбор игры «Кригсшпиль» (в переводе с немецкого — «Военная игра»), представляющей собой «гибрид» шахмат и «морского боя»: двое противников ведут игру за своими шахматными досками и по обычным правилам, но ни одни из них не знает ни ходов, ни расположения фигур другого (и то, и другое известно «посреднику», который предупреждает, если тот или иной ход является невозможным, и сообщает игрокам другую минимально необходимую информацию); в рассматриваемой статье речь идет о том, можно ли при таких условиях с помощью короля и ладьи заматовать одинокого короля противника.

В разделе «Плоские мозаики» обращает на себя внимание большая статья редактора американского научно-популярного математического журнала "Mathematics Magazine" («Математический журнал») Дорис Шаттшнейдер, содержащая инспирированную Гарднером драматическую — и еще, как будто, не завершенную — историю поисков всех типов выпуклых пятиугольников, которыми можно, без пробелов и перекрытий, замостить плоскость. Дело в том, что, как легко видеть (докажите это сами!), плоскость можно замостить одинаковыми копиями треугольника и (выпуклого или невыпуклого) четырехугольника любого вида; с другой стороны, несложные соображения, связанные с подсчетом углов (попытайтесь-ка их найти!), доказывают, что плоскость нельзя замостить (одинаковыми или различными) выпуклыми многоугольниками, имеющими $\geqslant 6$ сторон, если хоть один из этих многоугольников имеет больше 6 сторон *). Три типа выпуклых шестиугольников, которыми можно замостить плоскость, найти совсем несложно (может быть, и это вам удастся сделать самостоятельно), а вот вопрос о пятиугольниках ... Продолжением статьи Д. Шаттшнейдер служит обзор известных математиков Б. Грюнбаума (США) и Г. К. Шепарда (Англия) «Несколько проблем, связанных с плоскими мозаиками» — и эти проблемы (их в статье ровно дюжина) настолько интересны, что я просто не могу выбрать для вас какую-то одну из них!

Немало свежего материала содержит и раздел «Пространственные мозаики» — так, например, здесь рассказывается об использовании задач об укладке квадратов на плоскости и кубов в пространстве для вывода и доказательства алгебраических неравенств. Разделы «Плоские мозаики» и «Пространственные мозаики» кажутся мне самыми интересными в книге.

В заключение — несколько задач из «Математического цветника»:

1. Радиусы трех попарно касающихся друг друга внешним образом окружностей, имеющих общую внешнюю касательную, равны a, b и c ($a>b>c$). Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

2. На плоскости расположены p точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Чему равно наибольшее возможное число $l(p)$ прямых, содержащих 3 из этих точек, при $p=3$, 4, 5, ..., 11?

3. Две плоские фигуры (два пространственных тела) F_1 и F_2 называются *равновеликими по Кавальери*, если существует такая прямая l (плоскость π), что любая параллельная l прямая (параллельная π плоскость) пересекает F_1 и F_2 по отрезкам s_1 и s_2 одинаковой длины (по фигурам S_1 и S_2 одинаковой площади). Существует ли

а) многоугольник M, равновеликий по Кавальери кругу K?

б) многогранник P, равновеликий по Кавальери шару Σ?

4. В каком случае прямоугольник размера $p\times q$ (где p и q — целые числа) можно покрыть (неперекрывающимися) костями домино размера 2×1 так, что внутри прямоугольника не найдется параллельной его сторонам прямой, разбивающей прямоугольник на 2 меньших прямоугольника, тоже покрытых костями домино?

---

*) Курт Гёдель (1906—1978) — знаменитый «математический логик» (родился в Австро-Венгрии, с 1940 г. жил в США). Морис Корнелис Эшер (1898—1971) — известный голландский художник, «математический график».

*) Однако (вот вам еще одна несложная, но интересная задача!) для любого $n>3$ можно указать невыпуклый n-угольник, копиями которого можно замостить плоскость (для $n=9$ см. «Квант», 1980, № 2, с. 25).

5. Пятикилометровый рельс закреплен в своих концевых точках. Летом из-за сильной жары длина рельса увеличилась на 2 м. На какую, по порядку величины, высоту поднялась средняя точка рельса в результате его «вспучивания»? (Задачу следует решить «в уме».)

6. Двое играют в следующую игру: первый задумывает 5 натуральных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, меньших 100, а второй «предъявляет» сопернику пятерки чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и т. д., после чего ему сообщаются суммы $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5$, $b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4+b_5x_5$ и т. д. Ясно, что за 5 «ходов» второй игрок всегда может определить загаданные числа, решив соответствующую систему 5 уравнений с 5 неизвестными. А какое наименьшее число «ходов» достаточно сделать второму игроку, чтобы определить загаданные числа?

7. Картинная галерея в плане представляет собой (не обязательно выпуклый) n-угольник. Докажите, что

а) внутри галереи всегда можно расположить $\left[\frac{n}{3}\right]$ сторожей так, чтобы они могли обозреть все стены;

б) существуют такие галереи, в которых нельзя расположить таким образом меньшее число сторожей.

Приложение

Книги и статьи Гарднера, имеющиеся на русском языке

1. «Математические головоломки и развлечения» (М., «Мир», 1971).
2. «Математические досуги» (М., «Мир», 1972).
3. «Математические новеллы» (М., «Мир», 1974).
4. «Математические чудеса и тайны» (М., «Наука», 1977).
5. «Есть идея!» (М., «Мир» 1982).
6. «Этот правый, левый мир» (М., «Мир», 1967).
7. «Теория относительности для миллионов» (М., «Атомиздат», 1979).

И. Е. Тамм — человек и ученый

Доктор физико-математических наук
Б. М. БОЛОТОВСКИЙ

Нередко бывает так, что физические законы и явления носят имена ученых — первооткрывателей: законы Ньютона и кольца Ньютона, закон Ома, законы Фарадея, эффект Мёссбауэра... А что мы знаем о людях, именами которых названы эти законы и явления? Каков их вклад в развитие науки? Какую научную смену они себе подготовили? Какими человеческими качествами они обладали?

На бо́льшую часть этих и подобных вопросов ответа в учебниках не найти. И тем, кто интересуется физикой, особенно полезно читать книги, рассказывающие о жизни и творчестве ученых. Эти книги расширяют наше знание физики, потому что мы получаем представление о ходе развития науки (в учебниках, как правило, дается лишь результат развития). Но, может быть, еще важнее то, что они знакомят нас с личностью ученого.

Воспоминания
о И.Е.ТАММЕ

Недавно в издательстве «Наука» вышла книга воспоминаний о выдающемся советском ученом И. Е. Тамме. *)

Игорь Евгеньевич Тамм (1895—1971) — физик-теоретик, академик АН СССР, лауреат Государственных премий СССР, лауреат Нобелевской премии. Круг его научных интересов широк: классическая электродинамика, электронная теория, квантовая теория твердых тел, ядерная физика, физика элементарных частиц ... И. Е. Тамм — автор плодотворных физических теорий. С его именем связан ряд важных открытий. Например, он открыл существование таких состояний электронов на поверхности твердого тела, когда электроны как бы «привязаны» к поверхности: они не могут уйти ни внутрь тела, ни наружу. Эти состояния получили название «Таммовские поверхностные состояния». Они играют большую роль в физике твердого тела.

Более тридцати статей помещено в книге о И. Е. Тамме. Пишут его сотрудники, друзья, пишут его ученики (ныне — известные советские ученые), ученики его учеников, пишут товарищи по летним походам и даже люди, которые его видели только несколько раз. Пишут о том, какое удивительное, радостное и неизгладимое впечатление произвел на них Игорь Евгеньевич, какой он был замечательный человек, как действовал на окружающих своим примером. Авторы воспоминаний — не писатели-профессионалы. Нужна была важная причина для того, чтобы каждый из них взялся за перо. Эта причина у всех авторов одна — глубокое уважение и любовь к Игорю Евгеньевичу.

Прочитайте книгу воспоминаний и вы увидите, что в целом она получилась интересная и полезная.

---

*) Воспоминания о И. Е. Тамме (М., «Наука», 1981).

Задачи-оценки

1. $\Delta p\sim 2/3\rho_{\text{вод}}gH\sim 3\cdot 10^7$ Па (здесь учтено, что океан занимает две трети поверхности Земли и что средняя глубина океана H порядка 4 км).

2. $\rho_{\text{возд}}v^2S\sim mg$, откуда $v\sim(mg/(\pi R^2\rho_{\text{возд}}))^{1/2}\sim$ ~ 5 м/с (при $m\sim 100$ кг и $R\sim 3$ м).

3. $\rho_C=\frac{M_C}{V_C}=\frac{24\pi}{GT^2}\left(\frac{D_C}{r}\right)^{-3}\sim 10^3$ кг/м$^3\sim$ ~ 1 г/см^3 (здесь $D_C/r\sim 0{,}01$ — угловой размер Солнца, $T\sim 3\cdot 10^7$ с — период обращения Земли вокруг Солнца).

4. $n\sim\sqrt{2gH}/\pi v\sim 1{,}5$ (при $v\sim 30$ м/с). Указание. За время перемещения на длину кузова l центр тяжести машины приобретет вертикальную скорость $v_ц\sim gl/v$, или угловую скорость $\omega\sim v_ц/l/2\sim 2g/v$. Тогда число оборотов автомобиля $n\sim t\omega/2\pi\sim\sqrt{2gH}/\pi v$.

5. $Fl\sim mv^2/2\sim mgL/2$; следовательно, $F\sim$ $\sim mgL/(2l)\sim 800$ Н (для $m\sim 8$ кг, $L\sim 20$ м, $l\sim 1$ м).

6. $F\cdot R\sim mg\cdot 2R$, где R — радиус зубчатого колеса, $2R$ — расстояние от его оси до педали, mg — вес человека, то есть сила давления на педаль; отсюда $F\sim 2mg\sim 1400$ Н (при $m\sim 70$ кг).

7. $mv\sim Ft$, или $\rho\cdot 4/3\pi r^3\cdot v\sim p\cdot\pi r^2\cdot r/v$; тогда $v\sim(p/\rho)^{1/2}\sim 30$ м/с.

8. $F=ma\sim mv^2/(2s)\sim 7\cdot 10^3$ Н (при $m\sim$ ~ 60 кг).

9. Согласно закону Паскаля, давление в центре Земли, создаваемое «столбами» от полюса до центра (высотой $R_З-x$) и от экватора до центра (высотой $R_З$) должны быть равны. Учитывая, что ускорение свободного падения на полюсе равно g, а на экваторе $g-\omega^2R_З$, имеем

$$\rho\frac{g}{2}(R_З-x)\sim\rho\frac{g-\omega^2R_З}{2}R_З.$$

Отсюда для разности уровней мирового океана получаем

$$x\sim\frac{(\omega R_З)^2}{g}=\left(\frac{2\pi R_З}{T}\right)^2\frac{1}{g}\sim 20\text{ км}$$

(здесь T — это одни сутки).

10. Пусть d — средний диаметр стволов и l — среднее расстояние между деревьями. Мысленно сместим деревья от наблюдателя так, чтобы стволы образовали сплошной круговой забор, радиус которого равен искомому расстоянию x. За таким забором человека не будет видно ниоткуда. В заборе длиной $2\pi x$ окажется примерно $2\pi x/d$ деревьев, которые были «сдвинуты» с площади πx^2. Если на площадь $\sim l^2$ приходится в среднем одно дерево, то на площади πx^2 их будет $\pi x^2/l^2$. Таким образом,

$$2\pi x/d\sim\pi x^2/l^2,$$

откуда, положив $l\sim 3$ м и $d\sim 0{,}2$ м, получаем

$$x\sim 2l^2/d\sim 100\text{ м}.$$

Мартин Гарднер и "The Mathematical Gardner"

1. Указание. Спроектируйте центры окружностей на их общую касательную и воспользуйтесь равенством большего из трех полученных отрезков сумме двух других.

2. 1, 1, 2, 4, 6, 7, 10, 12, 16. Замечание. Кроме указанных, известны еще только значения $l(p)$ при $p=12$ и $p=16$.

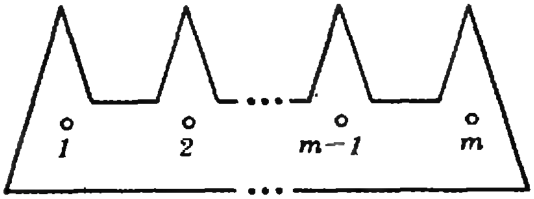
3. а) Нет; б) Да.

4. Если pq четно, $p>5$, $q>5$ и по крайней мере одно из чисел p, q отлично от 6.

5. ≈ 70 м. (Ожидали вы такого ответа?)

6. 1.

7. а) Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции по n; б) Указание. См. рисунок.



Избушка на курьих ножках

(см. с. 32)

Вопрос 1. Спички любого слоя прижаты к спичкам сцепленного с ним слоя силой давления со стороны каких-то других слоев. Существование этого давления возможно благодаря трению между сцепленными слоями. Для устойчивости необходимо, чтобы сила давления, которую должен развивать слой, не превосходила максимальной силы трения, возможной в данном слое. Ввиду симметрии будем считать силы давления между парами сцепленных спичек и силы трения между ними одинаковыми для всех спичек и равными, соответственно, P и $F_{тр}$ (равенство сил давления вдоль одного ребра следует из условия равновесия). Пусть в слое N спичек (мы пренебрегаем тем, что в разных слоях несколько различное число спичек). Спички одного слоя соприкасаются со сцепленными спичками в $4N-2$ местах, поэтому суммарная сила трения для одного слоя $F_1=(4N-2)F_{тр}$. Рассмотрим четыре взаимно сцепленных слоя, например слои из горизонтальных спичек стен. На них сверху и снизу давят пол и потолок. Легко видеть, что сила этого давления равна $2F_1$. Она уравновешивается четырьмя силами P, действующими на две верхние (или нижние) спички стен. Отсюда $P=\frac{1}{2}F_1=(2N-1)F_{тр}$. Условие устойчивости $F_{тр}<\mu\cdot P=(2N-1)\mu\cdot F_{тр}$, где μ — коэффициент трения. Преобразуя, находим $(2N-1)\mu>1$, $2N-1>\frac{1}{\mu}$, $N>\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{2}$. Принимая для дерева $\mu=0{,}25\div 0{,}5$, получаем $N>2\div 3$. Практически построить каркас из минимального числа спичек ($N=2\div3$) крайне трудно, поскольку для этого надо, чтобы все спички были одинаковы и прижаты с одинаковой силой. Куб с $N=6\div8$, который можно построить из обычных спичек, имеет достаточно большой запас прочности.

Вопрос 2. 3/4. Весь куб состоит из трех одинаковых систем параллельных спичек, каждая из которых, как легко видеть, занимает 1/4 объема куба.

Еще одно определение равногранного тетраэдра?

(см. с. 51)

Нет, не обязан. Пример нам сообщил ученик 10-го класса ФМШ № 18 при МГУ А. Семенов. Оказывается, при данной длине боковой стороны существуют, вообще говоря, два равнобедренных треугольника с одним и тем же радиусом вписанной окружности, причем оба они могут быть остроугольными; «пары» нет только у правильного треугольника (для доказательства изучите зависимость радиуса вписанной окружности от длины боковой стороны и угла при основании). Пусть в тетраэдре $ABCD$ грани ABC и ABD конгруэнтны одному из таких двух треугольников, а CDA и CDB — другому, так что $|AC|=|CB|=|BD|=|DA|$. Тогда, очевидно, $ABCD$ — неравногранный тетраэдр, удовлетворяющий нужному свойству.

Раскраска плоскости и теорема Ван дер Вардена о прогрессиях

(см. «Квант» № 6)

3. Зафиксируем произвольное разбиение натурального ряда на N классов. Теперь перейдем к координатной плоскости, разбитой на клетки (начало координат поставим в центре какой-нибудь клетки, а оси проведем параллельно осям клетчатой бумаги). Покрасим клетки первого координатного угла следующим образом: клетку с центром (i, j), где i и j — натуральные числа, покрасим в цвет, номер которого совпадает с номером класса разбиения натурального ряда, в котором находится число $2^i \cdot j$. Из теоремы о раскраске (для некоторого прямоугольника) следует, что найдутся одноцветные клетки с координатами $(a+bi, c+bj)$, где i и $j=1, 2, \ldots, n$. Им соответствуют натуральные числа $2^{a+bi}(c+bj)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$, из одного класса разбиении, которые образуют n арифметических прогрессий, с первыми членами $2^{a+bi}(c+b)$, образующими геометрическую прогрессию длины n.

4. Решим сразу задачу в). Нужное разбиение образуют множества A — объединение интервалов натурального ряда вида $(2n-1)!<a<(2n)!$ и B — объединение интервалов $(2n!)<b<(2n+1)!$.

Дом, который построил...

(см. «Квант» № 6)

Прежде всего постараемся четко сформулировать задачу. Внимательно присмотревшись к самовару, нетрудно заметить, что крышка, из-под которой шел пар, и кран, из которого вытекала холодная вода, находятся на разных уровнях. Значит, в верхней части самовара вода горячая, а в нижней — холодная. Возникает естественный вопрос: можно ли нагреть воду таким образом, чтобы вверху она была горячей, а внизу холодной? Вот мы и сформулировали задачу. Теперь постараемся решить ее.

В школьном учебнике для 6—7 классов на странице 142 описан опыт, в котором вода в пробирке нагревается вверху, оставаясь холодной внизу, если пробирка подогревается только в верхней части. Это происходит вследствие плохой теплопроводности воды и невозможности конвекции при таком способе нагревания. Очевидно, и в самоваре по какой-то причине вода нагревалась только сверху. Поскольку самовар углевой, можно предположить, что почему-либо нижние угли не разогрелись, а горели только верхние.

Задача — шутка

(см. «Квант» № 6)

У человека уши расположены выше рта, поэтому путь звуковой волны от верхнего крикуна к нижнему короче, чем путь от нижнего к верхнему, значит, нижний услышит верхнего раньше, чем верхний нижнего.

Этот ответ производит неизгладимое впечатление на специалистов по теории гравитации, особенно после того, как они затратят несколько часов на расчет взаимодействия звуковой волны с неоднородным гравитационным полем. Из состояния, в которое они после этого впадают, их можно вывести с помощью легкого постукивания по спине.

Четвертая страница обложки

(см. «Квант» № 6)

Пятнадцать кубов собираются из следующих пар: 1 — *д*, 2 — *ж*, 3 — *п*, 4 — *г*, 5 — *з*, 6 — *к*, 7 — *б*, 8 — *а*, 9 — *в*, 10 — *и*, 11 — *н*, 12 — *е*, 13 — *о*, 14 — *м*, 15 — *л*.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. Книга стоит два рубля.

2. Обозначим число, стоящее в верхнем кружочке, через x, а сумму тройки чисел на каждом «отрезке» через y. Сумма этих сумм по всем «отрезкам» равна $5y$, при этом каждое из чисел в кружочках входит в эту сумму по два раза, кроме числа x, которое входит три раза. Отсюда $5y=2(1+2+3+4+5+6+7)+x$, или $5y=56+x$. Если же мы сложим числа лишь по горизонтальным «отрезкам», то получим сумму шести чисел из семи, то есть $28-x$. Отсюда $2y=28-x$. Сложив полученные уравнения, получим $7y=84$, откуда $y=12$ и $x=4$. Остальные числа могут быть расставлены 12 способами. Одна из расстановок такова: во второй строке стоят числа 1, 2, 5, а в третьей 7, 6, 3.

3. На 48. Каждое из чисел делится на 2, по крайней мере одно число делится на 4 и хотя бы одно число делится на 3. То, что не существует большего числа, показывает пример: $2\cdot4\cdot6=48$.

4. Первый выигрывает. Для этого ему нужно поставить «крестик» в центре. Тогда противник обязан ставить «нулик» (иначе он проигрывает на следующем ходу); после этого первый игрок выиграет, поставив симметричный (относительно центра) «нулик».

5. Комочки грязи, попадая на сухое стекло, образуют на нем небольшие загрязненные участки (грязь не расползается). С ростом их числа видимость постепенно ухудшается, но не так быстро, как при попадании грязи на мокрое стекло: по мокрому стеклу комочки сразу растекаются из-за сил смачивания, образуя крупные «кляксы». За значительно меньший промежуток времени «кляксы» покрывают все стекло.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. Да, может. 31 декабря Саше исполнилось 11 лет, и разговор происходил на следующий день, 1 января.

2. Один угол — прямой, остальные два равны 45°. Пусть h_a и h_b — рассматриваемые высоты и $h_a \leqslant h_b$. По условию $a \leqslant h_a$. Но $h_b \leqslant a$ (так как перпендикуляр не длиннее наклонной, проведенной из той же точки к прямой). Отсюда $a \leqslant h_a \leqslant h_b \leqslant a$, следовательно, $a = h_a = h_b = b$ и треугольник ABC является равнобедренным и прямоугольным.

3. Поскольку каждый раз вдвое уменьшается плечо рычага, то необходимо прикладывать вдвое бо́льшую силу.

4. 13 824 и 15 625. По условию задачи $10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e = (10d + e)^3$. Это условие можно переписать в виде $100(100a + 10b + c) = (10d + e + 1)(10d + e)(10d + e - 1)$. Три множителя в правой части этого равенства — последовательные числа. На 5 может делиться только один из них, который поэтому должен делиться сразу на 25. Рассмотрим все случаи. Если первый множитель равен 25, то такое число существует и равно 13 824. Если второй множитель равен 25, то число также существует и равно 15 625, если третий множитель равен 25, то произведение справа равно $27 \cdot 26 \cdot 25$ и не делится на 4, а 100 делится на 4. Если же множитель, который делится на 25, больше, чем 25, то есть равен 50 или 75, то произведение будет не меньше чем $50 \cdot 49 \cdot 48 = 117\,600$, то есть не менее чем шестизначным.

5. Каждое число, начиная со второго, равно сумме удвоенного числа десятков и утроенного числа единиц предыдущего числа. Вместо знака ? нужно поставить число 5. Заметим, что могут быть и другие способы образования подобной последовательности и тогда число ? будет другим.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 3, 4)

Задание 5. Трехходовка, в которой в форме миниатюры осуществляется так называемая индийская тема. **1. Сa7 d6 2. Крb6 Крd4 3. Крc6×.**

Задание 6. Первый ход решения не бросается в глаза: **1. Кd3!** Теперь возможно несколько вариантов: 1... Кр:c4 2. Сe6×, 1...Кр:e4 2. Сc6×, 1...К:c4 2. Ф:b7×, 1...К:e4 2. Фg8×, 1...bc 2. Лe5×, 1...fe 2. Лc5×. Во всех остальных случаях следует 2. Лe:d4×.

Задание 7. 1. Лd8 Крf6 2. Лg8 e6 3. Кd6 Крe7 4. Кc8+ Крf6 5. Лg6×. Начальная буква «Т» трансформировалась в букву «Г».

Задание 8. 1. Крg7! Черные в цугцванге. 1...Ф:b4 (Ф:a2) 2. Фe3×, 1...Ф:d2 (Ф:b1) 2. Фc5×, 1...Кр:b4 2. Фa5×, 1...Кр:d2 2. Фe1×.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили
Л. В. Денисенко, М. Б. Дубах, В. Е. Киселев, Э. В. Назаров, И. Е. Норинский, А. И. Семенов, В. М. Скрылев, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Д. М. Утенков.
Фото А. М. Страшевского, В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник Э. А. Смирнов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор М. Л. Медведская

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.5.83. Подписано к печати 17.6.83.
Т-14239 Формат 70×108 1/16 Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,08 Тираж 165 920 экз.
Заказ № 1294 Цена 40 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку кандидат технических наук, мастер спорта СССР по шахматам Е. Я. Гик.

ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Сегодня мы рассмотрим следующую задачу: *какое наименьшее число красок требуется для раскраски доски n×n, при которой любые два поля, связанные ходом данной фигуры, окрашены в разные цвета?*

Эту задачу можно в общем виде сформулировать на языке теории графов. Напомним, что *граф* задается множеством точек (вершин графа) и множеством некоторых пар таких вершин (ребер графа). Например, можно в центре каждого поля шахматной доски поставить точку — это будут вершины графа, и затем соединить отрезками (или просто линиями, чтобы избежать пересечений с другими вершинами) пары точек на тех полях, с которых можно попасть друг на друга, скажем, ходом коня. Это и будут ребра графа.

Мы получили *граф коня*. Постройте его на листе бумаги в клетку и посмотрите, сколько ребер выходит из каждой вершины (получатся числа от 2 до 8).

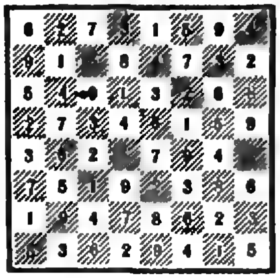
Теперь займемся раскрасками. Граф называется *k*-раскрашиваемым, если можно так окрасить каждую его вершину одной из *k* красок, что каждые две вершины, соединенные ребром, окрашены в разные цвета. Наименьшее из таких чисел *k* называется *хроматическим числом* данного графа.

Каково же хроматическое число графа коня? Очевидно, оно равно двум. Собственно, здесь и раскрашивать нечего, годится обычная черно-белая доска — ведь конь после каждого хода меняет цвет поля, на котором стоит, и на доске 1×1 или 2×2 хватит и одной краски.

В случае слонов и ладей для раскраски обычной доски надо ровно восемь красок, а для раскраски доски $n\times n$ — n красок. В графе слона каждую вертикаль можно окрасить в свой цвет. В графе ладьи все поля первой горизонтали окрасим в разные цвета, а для раскраски последующих горизонталей будем сдвигать цвета на один вправо. Другими словами, если краски занумеровать, то окраска первой горизонтали обычной доски — 1, 2, ..., 8; второй — 2, 3, ..., 8, 1; третьей — 3, 4, ..., 8, 1, 2 и т. д.

Переходя к королям, заметим, что для них все четыре поля произвольного квадрата 2×2 должны быть окрашены в разные цвета. Оказывается, четырех красок хватает и для любой доски $n\times n$ (при $n=1$ — одна краска). Левый нижний квадрат 2×2 можно раскрасить произвольно в четыре цвета, затем перенести его раскраску на соседние квадраты 2×2 и т. д.

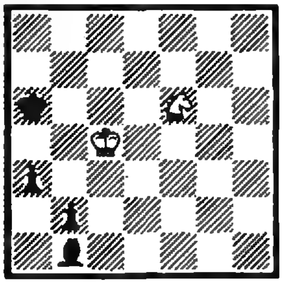
На следующем рисунке показана раскраска обычной шахматной доски для ферзей (краски занумерованы числами от 1 до 9).



Действительно, здесь никакие два одинаковых числа не стоят на одной вертикали, горизонтали и диагонали. Восьми красок для раскраски доски с ферзями не хватает (представляем вам это доказать самостоятельно). В общем случае доказано, что доску $n\times n$ можно раскрасить в $n+3$ цвета так, что ферзи, стоящие на полях одного цвета, не угрожают друг другу. Для некоторых n достаточно и меньшего числа красок: n, $n+1$ или $n+2$. Существует гипотеза, что хроматическое число графа ферзя при любом $n>3$ равно либо n, либо $n+1$.

Графы, которые мы рассматривали, называются *неориентированными* — на их ребрах не выделено направления (поскольку фигуры могут ходить и вперед, и назад). А вот в графе пешки вершины надо соединять направленными отрезками (линиями со стрелкой), так как пешки ходить назад не могут. Такой граф называется *ориентированным*. Легко убедиться, что хроматическое число графа пешки равно двум (при $n>1$).

Приведем теперь один этюд с «цветным» содержанием.



С. Белоконь, 1972 г.
Ничья.

Доска имеет размеры 7×7, и это не случайно — этюд был составлен специально для конкурса «Спортлото». Шесть фигур на 49-клеточной доске символизируют выбор шести счастливых номеров из 49 возможных! Специфика доски проявляется и в решении: **1. Крb3 Cd3! 2. Kc4+ C:c4+ 3. Кр:а3 b1K+!** (3...b1Ф, Л пат) **4. Крb2 Cd3 5. Кра1!** Черным удалось сохранить обе легкие фигуры, но все углы доски черные, и при белопольном слоне поставить мат невозможно! (Мат слоном и конем ставится в том углу, какого цвета слон.)

Литература

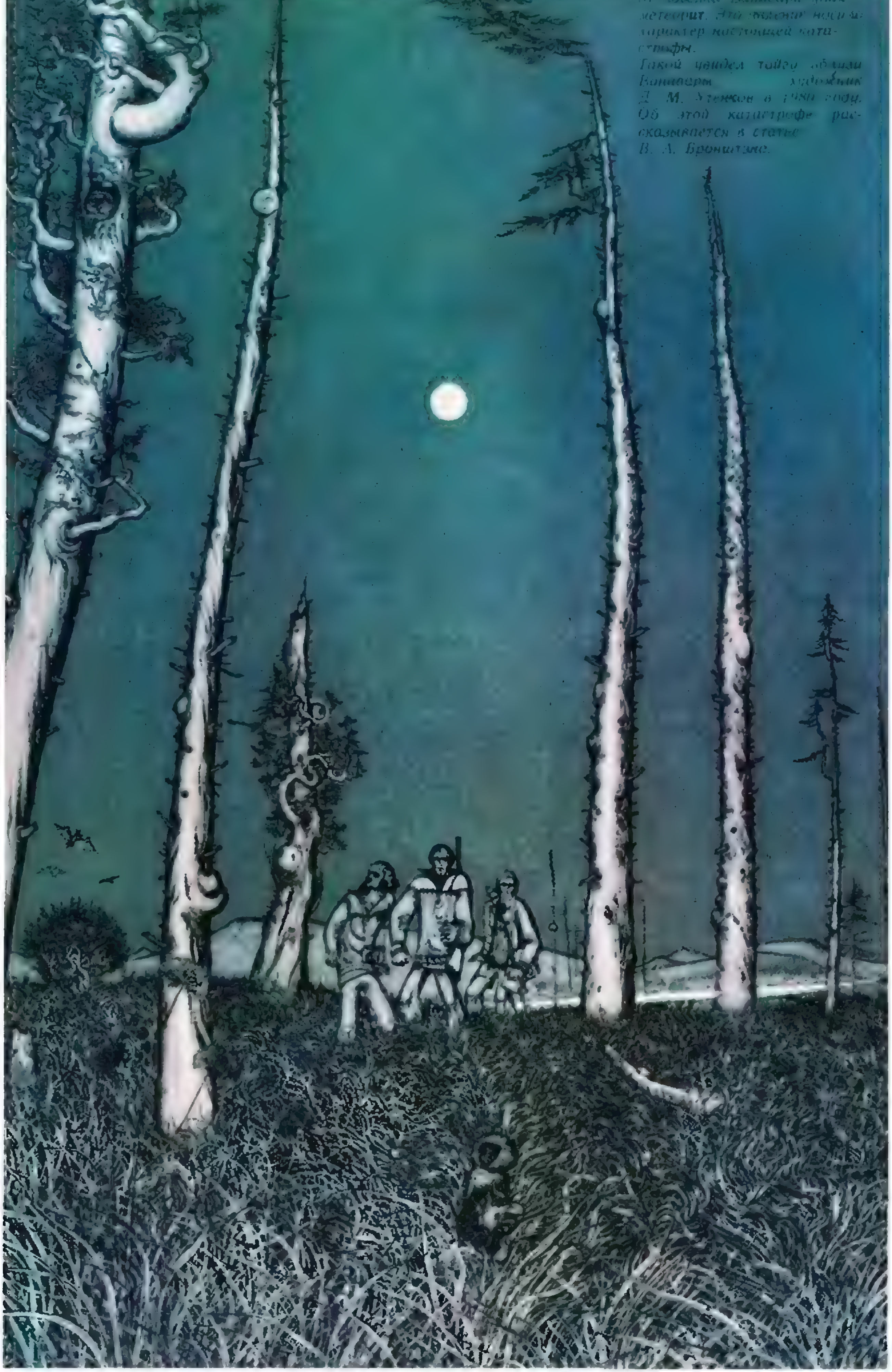
1. *О. Оре.* «Теория графов» (М., «Наука», 1980).
2. *Ф. Харари.* «Теория графов» (М., «Мир», 1973).
3. «Квант», 1980, № 9; 1981, № 3.

Конкурсные задания

13. Белые: Крс3, Ch3, п. h2; черные: Крf2. Выигрыш.

14. Белые: Крh8, пп. g2, h3, h6; черные; Крf8, пп. g3, g5, h4. Ничья.

Срок отправки решений — 25 сентября 1983 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс, задания 13, 14».



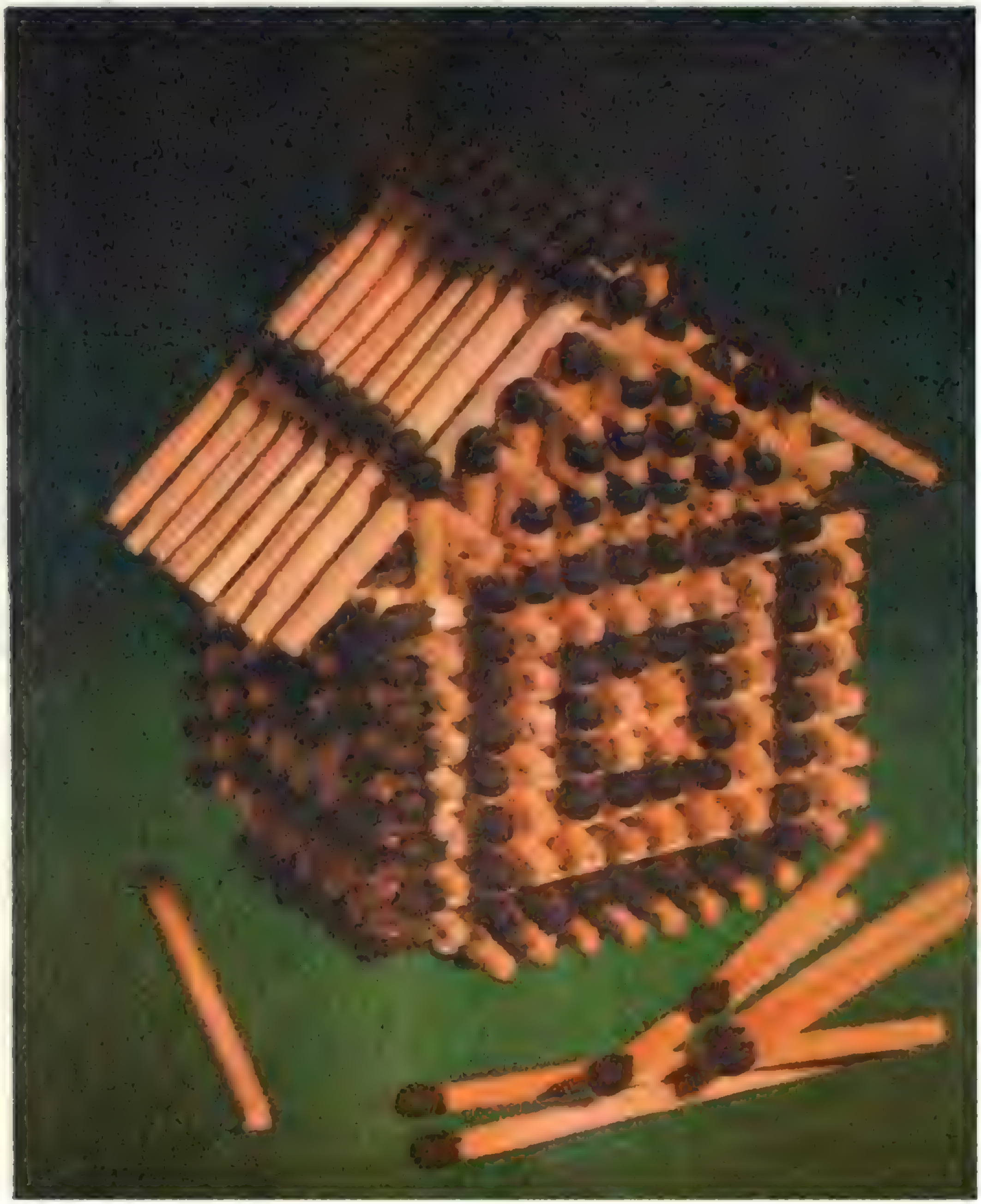
метеорит. Это явление носило характер настоящей катастрофы.
Такой увидел тайгу области Ванавары художник Д. М. Уденков в 1980 году. Об этой катастрофе рассказывается в статье В. А. Бронштэна.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Около трех лет понадобилось алжирскому умельцу Али Беннари, чтобы собрать из спичек макеты здания столичного главпочтамта, шестиэтажного здания в мавританском стиле, кафедрального собора и бейского дворца («Правда», 23 апреля 1983 г.).

В течение дня вы можете построить из спичек — без клея и без всяких крепежных приспособлений — «избушку на курьих ножках», фотографию которой вы здесь видите. Как это сделать, рассказывается в разделе «Наша обложка».



НОМЕР
8

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

8 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*Ю. Ю. Житковский.* Физики изучают гидрокосмос	*Yu. Yu. Jitkovski.* Physicists study the hydrocosmos
7	*А. И. Анохин, З. Д. Ломакина.* Математика мореплавателю	*A. I. Anokhin, Z. D. Lomakina.* Mathematics for the seaman
13	*А. Д. Чернин.* Вспыхивающие рентгеновские звезды	*A. D. Chernin.* Flashing X-ray stars
20	*М. Г. Крейн, А. А. Нудельман.* Теорема Борсука — Улама	*M. G. Krein, A. A. Nudelman.* The Borsuk — Ulam theorem
26	*А. Н. Пегоев.* Что случилось с лампочкой?	*A. N. Pegoev.* What happened to the lightbulb?
	Новости науки	**Science news**
31	*И. В. Карпова.* Необычные кристаллы-генераторы	*I. V. Karpova.* Unusual cristals-generators
	Математический кружок	**Mathematics circle**
32	*И. Ф. Шарыгин.* Вокруг биссектрисы	*I. F. Sharygin.* About bissectors
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
38	*Л. Б. Печерский.* Когда $\|a+b\|=\|a\|+\|b\|$?	*L. B. Pecherski.* When does $\|a+b\|=\|a\|+\|b\|$?
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
41	Задачи	Problems
42	*Е. Е. Семенов.* Степа Мошкин путешествует	*E. E. Semionov.* Stiepa Moshkin travels
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
46	Задачи М816 — М820; Ф828 — Ф832	Problems M816—M820; P828—P832
50	Решения задач М801 — М805; Ф813 — Ф817	Solutions M801—M805; P813—P817
	Игры и головоломки	**Games and puzzles**
57	*В. А. Сапронов.* Рэндзю	*V. A. Sapronov.* Renju
	Рецензии, библиография	**Book reviews**
60	*Е. П. Левитан.* Какое оно — наше Солнце?	*E. P. Levitan.* What is it like — our Sun?
	Информация	**Information**
61	Всесоюзный смотр	All union meeting
62	*В. Н. Сергеев.* Конкурс проектов	*V. N. Sergeev.* Contest of projects
62	Вечерняя физическая школа при МГУ	Moscow state university physics evening school
63	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(25, 37, 45, 56, 60)*	**Miscellaneous** *(25, 37, 45, 56, 60)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Каспаров играет магараджей *(3-я с. обложки)*	Kasparov plays maharajahs *(3rd cover page)*

На первой странице обложки приведена фотография обычной лампочки накаливания. О том, когда и почему может перегореть такая лампочка, вы прочитаете в статье А. Н. Пегоева.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1983

Физики изучают гидрокосмос

Доктор физико-математических наук
Ю. Ю. ЖИТКОВСКИЙ

Океан... Для Земли — это две трети ее поверхности. Океан — это колыбель всего живого на Земле, океан — это кухня погоды (к сожалению, человек пока не повар на этой кухне), океан — это дорога, которая служит человечеству тысячелетия и, надо думать, прослужит еще долго без ремонта; наконец, океан — природная кладовая белков и, как любят говорить, «неисчерпаемая кладовая» минерального сырья. Думаю, следует говорить более осторожно, так как «неисчерпаемые запасы» многих видов рыб, увы, уже исчерпаны.

В XX веке суша стала мала человеку, ее границы стали ему тесны, и он стал рваться за ее пределы — в океан, в воздух, в космос.

Что человек может найти в океане? О продуктах уже было сказано. Нефти в море, точнее — под морем, содержится не меньше, чем на суше. Сейчас со дна морского добывают около 20% мировой добычи нефти, а к 2000 году, предположительно, океанская нефть будет составлять 50% всей добычи. Большое количество каменного угля уже сегодня добывают из морских шахт. Более 4% мировой добычи серы дают морские промыслы. Значительная часть мировой добычи руд редких металлов приходится на морские россыпи. Велика добыча в море олова, золота, серебра, алмазов, марганца, кобальта, никеля... Так в чем же дело? Океан рядом, он таит в себе несметные богатства! Казалось бы, бери да осваивай его!

Почему же так медленно идет освоение океана? Почему в первой половине XX века рельеф видимой стороны Луны был нам известен лучше, чем рельеф дна океана? Почему, наконец, на высоте более 100 км над Землей побывало уже более ста человек, а на глубине океана, в десять раз меньшей, только двое? И почему человек назвал глубины океана гидрокосмосом?

В основном освоению океана мешают две причины. Одна причина очевидна — это гидростатическое давление. На глубине в 10 км на каждый квадратный метр поверхности давит десять тысяч тонн воды. Кроме того, не надо забывать, что морская вода — весьма агрессивная жидкость, быстро разъедающая большинство металлов.

Вторая причина, мешающая освоению океана,— это громадное затухание электромагнитных волн в хорошо проводящей соленой морской воде. Из-за этого человек в океане практически лишен основных привычных ему средств получения информации и связи. Эти трудности, мешающие проникновению человека в океан, проблемы, связанные с их преодолением, пожалуй, сравнимы с трудностями освоения космоса. Поэтому глубины океана и назвали гидрокосмосом.

Однако есть один вид волн, которые в воде распространяются гораздо лучше, чем в воздухе,— это акустические волны. Конечно, акустика в океане не может полностью заменить оптику, радиолокацию, радиосвязь, телевидение и другие средства, основанные на элетромагнитных волнах. Но это уже некий «луч света в темном царстве» гидрокосмоса.

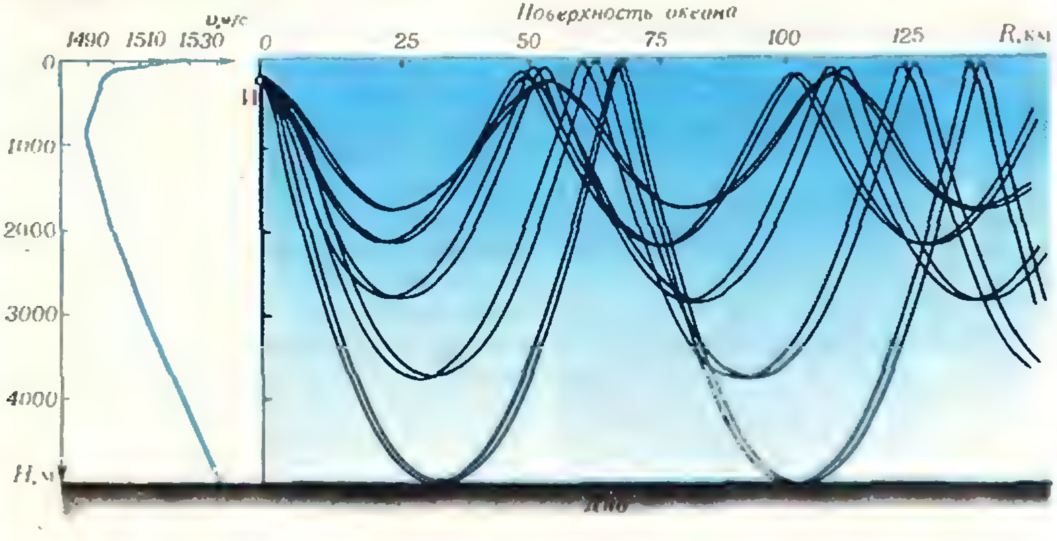
К сожалению, законы распространения акустических волн в океане весьма сложны. Мы привыкли, что луч света, как правило, есть кратчайшее расстояние между двумя точками. Для звуковых лучей в океане это далеко не так. Океан представляет собой слоисто-неоднородную среду, то есть в первом приближении его можно представить в виде горизонтальных однородных слоев воды, плотность воды и скорость звука меняются по вертикали от слоя к слою.

Изменение скорости звука приводит к искривлению звуковых лучей, обусловливает чрезвычайно сложную картину акустического поля в океане. Например, на определенных расстояниях от источника звука появляются области повышенной концентрации акустической энергии (так называемые зоны конвергенции) и, наоборот, зоны тени, куда акустическая энергия практически не проникает.

В большинстве случаев условия распространения звука создают в океане на определенной глубине так называемый подводный звуковой канал, ось которого совпадает с горизонтом минимума скорости звука. В звуковом канале сконцентрирована распространяющаяся от источника звуковая энергия. Наличие такого канала приводит к явлению сверхдальнего распространения звука. Так, взрыв небольшого заряда, произведенный на оси такого канала, может быть зарегистрирован на расстоянии 10—15 тысяч км.

Надо иметь в виду, что вся эта картина акустического поля не статична. Весь океан пронизан течениями, вихрями диаметром в сотни километров, районами, где глубинные воды поднимаются, а поверхностные, наоборот, опускаются. Поэтому картина акустического поля непрерывно меняется. Помните девиз

Картина распространения в океане звука, излучаемого точечным источником (И), расположенным вблизи поверхности (влево от источника — симметричная картина). Слева на рисунке приведены зависимость скорости звука v от глубины.
Видно, что изменение скорости звука по глубине обусловливает искривление звуковых лучей. В океане появляются зоны тени, куда не попадает звук, и зоны повышенной интенсивности звука (там, где лучи сгущаются). Ось подводного звукового канала находится на глубине минимума скорости звука — 1000 м.

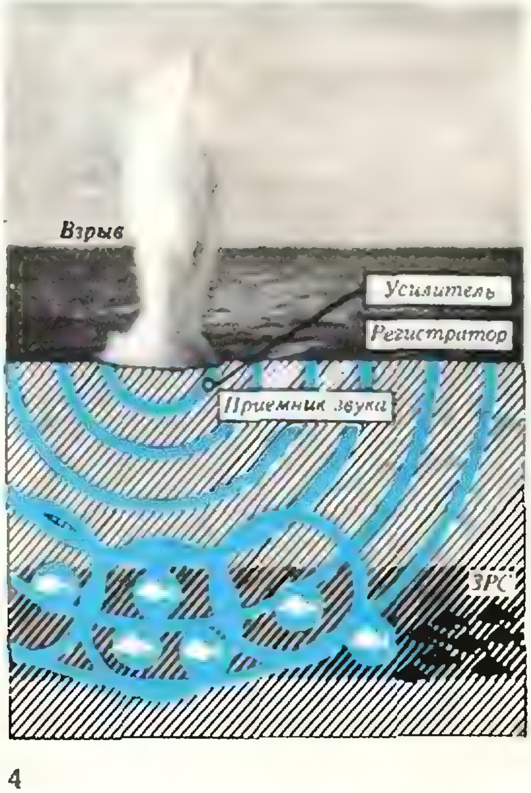


«Наутилуса» капитана Немо — «Подвижный в подвижном»? Точнее было бы — «Подвижный в изменчивом».

Так красиво нарисованная нами картина параллельных горизонтальных слоев на самом деле искажена в пространстве существованием глубинных, так называемых «внутренних» волн, обусловленных колебаниями слоев воды различной плотности. Вертикальные колебания могут иметь периоды порядка суток и достигать размаха в 100 м. Толщу океанских вод могут пронизывать волны, вызванные подводными землетрясениями,— цунами.

Сложная картина акустических полей в океане связана и с наличием неровных границ — поверхности и дна, которые отражают и рассеивают падающую на них звуковую энергию. При этом верхняя граница (вода — воздух) практически непрозрачна для звука, и форма ее меняется во времени; нижняя граница — дно — неизменна во времени, но частично прозрачна для акустических волн, которые проникают в дно океана.

Рассеяние акустических волн звукорассеивающими слоями.



Прием слабых сигналов осложняется наличием окружающего шумового фона. Этот фон складывается из шумов, обусловленных динамическими процессами, в основном — ветровым волнением, из биологических шумов (известно, что морские животные весьма широко используют акустические волны), из сейсмического фона, шума проходящих судов и т. д.

Даже из такого краткого перечисления факторов, влияющих на распространение звука в океане, видна вся сложность процесса передачи и приема акустических сигналов в океане. Можно себе представить те трудности, которые встречаются при исследовании законов распространения звука в океане. А ведь эксперименты проводятся в очень широком диапазоне частот и на дистанциях от сотен метров до тысяч километров.

Изучение акустических полей в океане — только часть проблем, которые изучает акустика океана. Есть задачи, которые принято называть обратными. Характер распространения, отражения, рассеяния акустических волн дает информацию о свойствах среды, об объектах, отражающих и рассеивающих звук. Определение характеристик океана по такой информации — вот конечная цель этих исследований. Например, время распространения эхолотного импульса до дна и обратно позволяет измерять глубину океана. Акустические методы исследования океана заменяют традиционные «контактные» методы на экспрессные «неконтактные».

Теперь хотелось бы подробнее остановиться на некоторых вопросах. Я уже говорил о том, что окружающий шум мешает приему полезных акустических сигналов. Могу добавить, что рассеяние в обратном направлении также, вообще говоря, мешает приему сигналов, например сигналов связи. Но, с другой стороны, шум несет и информацию о его источниках, например о динамических процессах в океане, а рассеянные сигналы дают нам информацию о рассеивателях, в нашем случае — о неровностях по-

Преподаватели и студенты кафедры физики гидрокосмоса Московского физико-технического института (третий слева — заведующий кафедрой академик Л. М. Бреховских) на борту научно-исследовательского судна «Академик Мстислав Келдыш» в греческом порту Патры.

Глубоководный аппаратурный комплекс. Снизу подвешен излучатель звука.

верхности и дна, а также о морских организмах.

В рамках журнальной статьи невозможно рассказать подробно обо всех исследованиях, проводящихся в океане. Здесь и исследования рельефа дна, и изучение его строения; исследование законов накопления осадков и изучение тепловых потоков, идущих со дна; определение химического состава океанических вод и исследование вихрей в водах океана, и многое, многое другое. Поэтому я попытаюсь рассказать более подробно только об исследованиях, связанных с изучением рассеяния звука морскими организмами.

Несколько десятилетий назад было обнаружено, что практически во всех районах Мирового океана, кроме его полярных областей, существуют скопления мелких морских организмов, локализованных по вертикали. Эти скопления состоят, как правило, из мелких рыбок размером в несколько сантиметров. Они формируют один или несколько слоев толщиной в десятки метров. Днем эти слои находятся на глубинах 200—1000 м, а ночью они поднимаются, или, как говорят биологи, мигрируют, к поверхности. Эти скопления рассеивают звук, причем рассеяние от них намного больше, чем от толщи воды, не содержащей морских организмов (то есть доля звуковой энергии, рассеивающейся при прохождении сигнала через скопление рыбок, гораздо больше, чем в случае «чистой» воды). Такие скопления как раз и были обнаружены по рассеянию звука, что было зарегистрировано эхолотами как «ложное дно». Они были названы звукорассеивающими слоями (сокращенно ЗРС). Количество организмов и их видовой состав меняется в слоях от района к району, а поскольку эти мелкие рыбки служат пищей для более крупных промысловых рыб, то информация о ЗРС позволяет судить о распределении промысловых рыб. Эту информацию получают с помощью акустических волн.

Излучатель звука генерирует колебания определенной частоты. Когда колебания, распространяясь в толще воды, встречаются со скоплениями морских организмов, небольшая доля энергии рассеивается во все стороны, в том числе и в обратном направлении. Эта рассеянная энергия улавливается приемником звука, который располагается рядом с излучателем. Зная излученную мощность и измеряя интенсивность рассеянного сигнала, можно определить, какая доля энергии рассеивается в ЗРС. Меняя частоту колебаний излучателя, можно «настроиться» на частоту собственных колебаний плавательного пузыря рыбки. При этом доля рассеянной энергии резонансно возрастает. Частота собственных колебаний плавательного пузыря определяется его размерами, которые, в свою очередь, зависят от размера рыбки.

Таким образом, акустическое «зондирование» дает информацию о месте нахождения ЗРС, глубине их «залегания», о количестве рыбок, об их размерах.

Недавно на новом научно-исследовательском судне «Академик Мстислав Келдыш», принадлежащем Институту океанологии им. П. П. Ширшова АН СССР, состоялась экспедиция в Атлантику по разработке акустических методов исследования океана (в ней принимали участие также студенты кафедры физики гидрокосмоса факультета общей и прикладной физики МФТИ).

В исследованиях использовался глубоководный аппаратурный комплекс, представлявший собой герметичную сферу диаметром около полуметра, в которой находились мощный (несколько киловатт) генератор и исполнительное устройство, которое осуществляло управление генератором по команде сверху. Вне сферы находились излучатель и приемник звука. Этот комплекс мог опускаться на кабель-тросе на любую глубину от поверхности до 5000 м. С его помощью можно было делать подробный «разрез» океана от поверхности до дна.

Обычно читателей интересуют перспективы развития новых методов исследования океана. Что ожидает нас в будущем?

Развитие науки происходит, как правило, скачкообразно. Какой-то промежуток времени идет количественное накопление экспериментального материала, осмысливание и интерпретация наблюдений, фактов. Результатом этого является качественный скачок в теории, заметно продвигающий нас по пути приближения к истине. При этом многие, казалось бы, незыблемые и очевидные представления часто пересматриваются. Затем следует очередной этап накопления результатов исследования. И так далее. На мой взгляд, акустика океана в настоящее время находится в стадии накопления фактов. Думаю, что этап этот будет довольно длительным, так как океан велик, изменчив и многообразен, а фронт исследований еще относительно узок, что в значительной степени связано с недостаточной технической оснащенностью исследований. Будут новые, более совершенные приборы и оборудование — будут новые результаты. Изучение океана требует дорогостоящего, часто весьма громоздкого оснащения.

Уже сегодня есть идеи, каким образом можно практически непрерывно получать информацию о характеристиках Мирового океана по всей его акватории. Этот метод получил название акустической томографии. Суть его заключается в следующем. По периметру района океана, характеристики которого необходимо знать, устанавливаются достаточно жестко несколько приемно-излучающих систем. Системы поочередно излучают акустические импульсы и принимают их. Принимаемые сигналы несут информацию о температуре, солености и других параметрах среды, через которую они распространялись, то есть о районе океана, «оконтуренном» приемно-излучающими системами. В результате можно будет непрерывно получать характеристики океанской среды. Ценность подобной информации очевидна.

На пути решения этой задачи, конечно, есть много трудностей. Во-первых, надо решить ее теоретически; во-вторых, надо неподвижно установить по всему Мировому океану множество достаточно мощных излучающих систем и управлять их излучением. В-третьих, надо создать парк мощных ЭВМ, которые могли бы в относительно короткое время обрабатывать громадный объем информации. И многое, многое другое...

Задача эта, несомненно, международного масштаба и пока еще не сегодняшнего дня. Однако у меня нет сомнения, что человечество решит ее.

Математика мореплавателю

Капитан дальнего плавания
А. И. АНОХИН,
кандидат физико-математических наук
З. Д. ЛОМАКИНА

Три морские трагедии

Это случилось в середине прошлого века. Вскоре после того, как следовавший с Цейлона в Европу барк «Звезда» прошел остров Св. Елены, к нему стремительно приблизилась «Мрачная шутка» — черная бригантина снискавшего устрашающую известность пирата Бенито де Сото. На «Звезде», где, кроме немногочисленного экипажа, находились 25 солдат-инвалидов и почти столько же женщин и детей, не помышляли о сопротивлении, но надеялись откупиться находившимся в трюме грузом. Однако дело до переговоров не дошло — высадившиеся на барк пираты зверски убили несколько человек, включая капитана, а остальных загнали в трюм, забив гвоздями крышку люка. Затем морские разбойники разграбили судно, свалили мачты, изрубили рангоут, такелаж и устроили попойку, после которой вернулись на свою бригантину. Но прежде, чем «Мрачная шутка» на всех парусах убралась восвояси, Бенито де Сото убедился, что в корпусе «Звезды» ниже ватерлинии просверлены отверстия, через которые в несколько отсеков трюма поступала забортная вода. Но зловещему замыслу пирата не суждено было осуществиться. Почему? Об этом мы расскажем позже, когда немного разберемся в теории.

* * *

В Лондоне к стене собора Св. Павла с конца прошлого века прикреплена бронзовая пластина. Выбитый на ней текст повествует о гибели броненосца «Капитан» и, быть может, невольно выражает упрек тем, по чьей вине она произошла.

Броненосец «Капитан» был построен в 1870 году. Те, кому доверялись тайны военного флота Великобритании, знали, что сие творение строителей необычно: в нем, так сказать, соединялось несовместимое — многочисленные артиллерийские установки, в том числе в громадных вращающихся башнях, мощная бортовая броня, усиленное парусное вооружение и весьма низкий надводный борт, что должно было уменьшить вероятность попадания вражеских снарядов. Казалось бы, лучше не надо! Правда, привлеченный в качестве консультанта опытный инженер Рид заново произвел необходимые математические расчеты и заявил, что при незначительном воздействии усилившегося ветра броненосцу грозит опрокидывание. Однако это заключение специалиста, подтвержденное математическими расчетами, не было принято во внимание — высокочтимые лорды из Адмиралтейства настояли на своем.

Спуск броненосца на воду состоялся, как говорится, под звуки фанфар. А затем «Капитан» вместе с десятью другими кораблями принял участие в учениях. Внезапно налетел шквал. Все корабли не особенно ощутили его силу. Все, за исключением броненосца «Капитан»,— он опрокинулся. Чем же была вызвана эта катастрофа?

* * *

Апрель 1912 года. Мировая общественность, казалось, затаила дыхание — английский трансокеанский лайнер «Титаник» в первый раз пересекал Атлантику. Самое большое и комфортабельное судно того времени: длина — 270 метров, водоизмещение — 66 тысяч тонн, спортивные залы, бассейны, бани, бары, рестораны. Кроме того, плавучий остров высотой в пятнадцатиэтажный дом рекламировался как предел надежности.

Наступила очередная ночь замечательного плавания. Многие пассажиры отправились отдыхать, но немалое их число продолжало веселиться. И, видимо, никто из них не знал, что судно вошло в район, где ему угрожала встреча с айсбергами — ледяными исполинами, четыре пятых которых коварно прячутся под водой. В определенной степени уподобился пассажирам капитан, подгоняемый судовладельцем, требовавшим выдерживать график движения, рассчитанный на установление рекорда скорости пересечения Атлантики. Правда, капитан выставил шесть впередсмотрящих. Но простое сравнение дальности видимости и скорости судна показало бы, что на них нельзя надеяться. И действительно, когда один из впередсмотрящих заметил айсберг и доложил о нем, увернуться от плавающей ледяной скалы уже не было возможности. Своей подводной частью она бесшумно разрезала обшивку корпуса по длине 90 метров.

Трагедия «Титаника», его экипажа и пассажиров (из 2200 человек погибло 1517) описана во многих источниках. Поэтому мы затронем лишь один вопрос, который, кстати, не нашел широкого освещения. Однако все по порядку...

Плавучесть и судьба барка «Звезда»

На известном каждому школьнику законе Архимеда основано свойство *плавучести* судна — способности плавать с заданной осадкой, неся на себе снаряжение и грузы, необходимые для нормальной эксплуатации.

На судно в спокойной воде (рис. 1, *а*) действуют два рода сил: сила тяжести $\vec{P}$,, которая приложена в центре тяжести G судна и направлена вертикально вниз (к центру Земли), и сила гидростатического давления $\vec{\gamma}$. которая приложена в так называемом *центре величины* C и направлена вертикально вверх. Под влиянием последней силы судно стремится всплыть, поэтому ее называют *силой поддержания*.

Если вес судна больше силы поддержания, судно, естественно, тонет. Кстати, этим и хотел воспользоваться Бенито де Сото, «загружая» барк «Звезда» забортной водой.

Для обеспечения плавучести судна в процессе его эксплуатации судоводителю требуется пользоваться многими математическими понятиями и приемами вычислений. В частности, для этого нужны чертеж судна и связанные с ним коэффициенты, параметры, определяющие посадку судна, уравнение равновесия судна; вычисляется вес судна и координаты его центра тяжести, объемное водоизмещение и координаты центра величины, изменение углубления от приема груза; определяется число тонн на единицу осадки. И все это требует больших

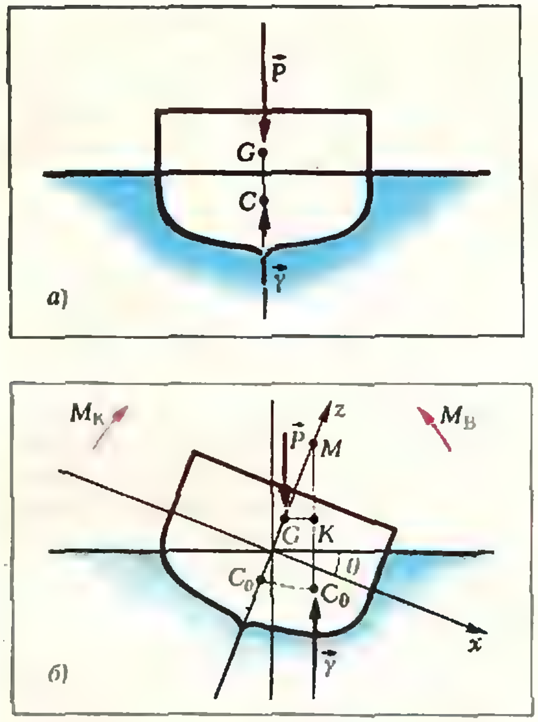


Рис. 1.

и точных математических расчетов.

Вернемся теперь к заключенным в трюме «Звезды». Им удалось выбить крышки люка. Часть трюма затопило водой, судно дополнительно погрузилось. Однако Бенито де Сото просчитался — сила поддержания оказалась достаточной для того, чтобы барк удержался на плаву. И хотя погиб капитан, который мог бы произвести необходимые расчеты и установить, что судну не угрожает непосредственная опасность потопления, часть оставшихся в живых членов экипажа знала, что при том количестве груза, которое пираты оставили на разграбленном корабле, у них оставался запас плавучести. Это их воодушевляло в отчаянных попытках спасти барк и продержаться до того момента, когда их подобрали моряки с проходившего судна, случайно оказавшегося вблизи движущегося по воле стихии барка.

Остойчивость и гибель «Капитана»

Остойчивостью называется способность судна, выведенного воздействием внешних сил из положения равновесия, возвращаться к нему снова после прекращения этого воздействия. Потеря остойчивости — скоротечный вид крушения, чаще всего приводящего к гибели не только судна, но и экипажа.

Различают продольную и поперечную остойчивость судна. Наибольшую опасность при плавании представляет потеря поперечной остойчивости. Наклонение судна в поперечной плоскости, перпендикулярной плоскости ватерлинии, называется *креном*, наклонение в продольной плоскости — *дифферентом*.

Поясним понятие остойчивости в случае крена.

Очевидно, для равновесия плавающего судна необходимо, чтобы сила $\vec{P}$ и $\vec{\gamma}$ (см. рис. 1, *а*) были равны по величине, а точки их приложения лежали на одной вертикали.

При наклонении судна на какой-либо борт под действием кренящего момента $M_{\text{к}}$ (например, внезапного усиления ветра, как было с броненосцем «Капитан») на угол θ центр величины судна, вследствие изменения формы подводного объема судна (рис. 1, *б*), переместится в сторону крена из положения C_0 в положение $C_{\text{в}}$. В курсах теории устройства судна доказывается, что при малых углах крена траекторию перемещения центра величины можно принять за окружность с центром в некоторой точке M (см. рис. 1, *б*) и радиусом r. Точка M называется поперечным *метацентром*, r — поперечным *метацентрическим радиусом*.

Тогда пара сил $\vec{P}$ и $\vec{\gamma}$, приложенных, соответственно, в точках G и $C_{\text{в}}$, образует так называемый *восстанавливающий момент* M_B. В курсах теоретической механики доказывается, что восстанавливающий момент можно определить по формуле

$$M_{\text{в}} = |\vec{P}| \cdot |GK| = |\vec{P}| h \cdot \sin\theta,$$

где $h = r - z_G + z_C$, а z_G и z_C — соответственно, координаты центра тяжести и центра величины в выбранной системе координат. В соответствии с этим выражением может быть три случая крена.

1.° $M_B > 0$, то есть центр тяжести лежит ниже метацентра (см. рис. 1,*б*). Тогда восстанавливающий момент действует в сторону возвращения судна в прямое положение; судно остойчиво.

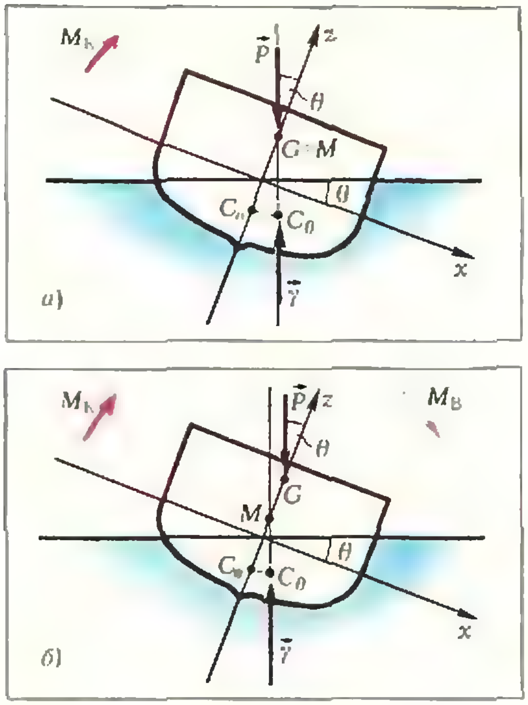


Рис. 2.

2°. $M_B = 0$, то есть центр тяжести совпадает с метацентром (рис. 2, *а*). Тогда сила тяжести $\vec{P}$ и сила поддержания $\vec{\gamma}$ действуют по одной прямой и восстанавливающего момента не возникает. Этот случай называется случаем *нулевой остойчивости* судна; практически судно неостойчиво.

3°. $M_B < 0$, то есть центр тяжести лежит выше метацентра (рис. 2, *б*). Тогда восстанавливающий момент действует в ту же сторону, что и кренящий момент,— в сторону увеличения крена; судно неостойчиво.

При крене судна на большой угол θ физическая сущность явления не изменится, только формула для нахождения плеча GK остойчивости приобретает более сложный вид.

Таким образом, остойчивость судна нужно уметь рассчитывать по определенным законам при конструировании судна (именно этими расчетами инженера Рида и пренебрегли, когда приняли решение строить броненосец «Капитан»).

Но при этих расчетах конструкторы должны учитывать, что избыточную остойчивость тоже нельзя считать явлением положительным, так как судно, обладающее избыточной остойчивостью, испытывает резкую бортовую качку, что отрицательно сказывается на самочувствии и работоспособности экипажа и работе судовых механизмов.

А при эксплуатации судна каждый капитан помнит, что любое достаточно остойчивое судно неразумными действиями можно привести в неостойчивое состояние. Например, если капитан рыболовного судна, увлекшись ловом (такой уж богатый попался косяк!), не проследит за тем, чтобы своевременно обработать и уложить улов в трюмы, на палубе скопится слишком много рыбы. Как следствие, центр тяжести судна поднимется выше метацентра и судно потеряет остойчивость.

При работе на судах следует учитывать, что при приеме и снятии груза взаимное расположение центра тяжести и центра величины меняется, что влечет за собой изменение остойчивости. Поэтому при грузовых операциях в море и в порту капитан должен контролировать и регулировать остойчивость судна. Для этого в процессе грузовых работ производят расчет остойчивости по определенным формулам и схемам, учитывая вес и расположение имеющихся на судне запасов топлива, питьевой воды, балласта, пищевых запасов и принимаемого или снимаемого груза.

Непотопляемость и крушение «Титаника»

Каждое судно, естественно, должно обладать *непотопляемостью*, то есть способностью оставаться на плаву и не опрокидываться при затоплении части его отсеков. Другими словами, при затоплении одного или нескольких отсеков судно должно сохранять плавучесть и остойчивость.

А что случилось с получившим повреждение корпуса «Титаником»? По словам одного из очевидцев катастрофы, поначалу этот гигант покачивался на небольшой зыби, сияя огнями иллюминаторов и окон, лишь слегка наклонившись на нос. Затем дифферент стал резко возрастать. В воду ушли носовая часть и мостик, а кормовая часть поднялась вверх. В течение нескольких минут «Титаник» стоял почти вертикально и затем ушел в глубину.

Да, плавучий остров после повреждения держался на воде лишь два часа. И случилось это потому, что в период проектирования и постройки «Титаника» были нарушены основные требования непотопляемости: поперечные водонепроницаемые переборки, отделяющие один отсек от другого, не были доведены до верхней палубы, палубные люки не обладали водонепроницаемостью. В связи с этим и имея в виду решение состоявшегося после гибели «Титаника» лондонского суда, академик Алексей Николаевич Крылов писал: «Таким образом, вся вина целиком свалена на капитана, доблестно погибшего на своем посту, о самих же конструктивных недостатках, повлекших за собой его гибель при сравнительно небольшом повреждении, в постановлении суда не упомянуто ни единым словом».

Основоположниками науки о непотопляемости являются адмирал С. О. Макаров, академик А. Н. Крылов и профессор И. Г. Бубнов. Именно А. Н. Крылов, опираясь на идеи С. О. Макарова, разработал теоретическую сторону непотопляемости и создал таблицы непотопляемости. Кстати, в 1905 году, в период русско-японской войны, при Цусимском сражении, когда погибло три броненосца, однотипный с ними и получивший не меньше повреждений «Орел» был спасен, так как инженер-механик броненосца практически использовал исследования А. Н. Крылова.

Что касается таблиц непотопляемости Крылова, позволяющих вести успешную борьбу за живучесть судна, то к 1930 году они были приняты на флотах уже почти всех стран мира.

Безопасность судов в наши дни

Но, быть может, достижения науки и техники в области мореплавания и судостроения существенно убавили заботы о мореходных качествах судна и, таким образом, снизили значение математики? Да и необходима ли математика в других важнейших областях повседневной работы судоводителя?

Ныне морская стихия остается такой же грозной и коварной, какой была всегда. Достижения современной науки и техники, конечно, повысили степень безопасности плавания, но, с другой стороны, резко возросли объем, разнообразие и сложность задач, которые решают моряки сегодняшнего дня.

Так, в начале 1982 года крупнотоннажное судно «Серебрянка» вело промысел зверя среди льдов Арктики. Когда произошла внезапная подвижка пакового льда, мастерство капитана и возглавляемых им моряков позволило избежать губительных последствий, но судно получило все-таки две пробоины: во вспомогательном машинном отделении и в первом из трех трюмов. Моряки справились с заделкой пробоин. Но в процессе борьбы за живучесть судна капитану и его помощникам потребовалось быстро произвести многочисленные сложные и точные математические расчеты, показывающие, что именно необходимо сделать для уменьшения опасного дифферента в случае затопления поврежденных отсеков (разумеется, с учетом распределения имеющегося на судне груза).

К сожалению, во многих странах мира обеспечение безопасности судов и борьба за живучесть судна далеко не всегда осуществляются успешно. По данным ассоциации «Институт оф Лондон андерайтерс», объединяющей свыше 100 страховых компаний, в 1979 году мировой торговый флот понес самые большие потери за время существования судоходства. И почти все погибшие суда пребывали под опекой страховых компаний капиталистических государств. Названная ассоциация резко критикует судовладельцев, которые «...грубо нарушают инструкции и не соблюдают элементарные нормы безопасности, практически не уделяют внимания профессиональной подготовке судовых экипажей». Широко известное страховое общество «Регистр судоходства Ллойда» еще раньше обратилось к контактирующим с ним судовладельцам с *отчаянным призывом всемерно усилить* теоретическую и практическую подготовку моряков, особенно судоводителей. Указанное страховое общество вынуждено было обратиться и непосредственно к морякам: «Учитесь! Постоянно учитесь, если не желаете покоиться на дне! Курс по имени Техническое Невежество ведет к катастрофе!»

Безусловно, математика является основополагающим фундаментом учебы судоводителя и вообще моряка. Об этом уже говорилось, когда затрагивались такие мореходные качества судна, как плавучесть, остойчивость и непотопляемость. Знание математики необходимо и для решения большинства других повседневных задач судоводителя.

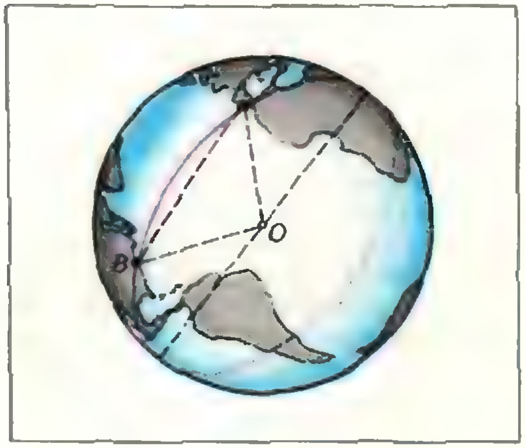


Рис. 3.

Математика и судовождение сегодня

Одна из важнейших задач навигации в открытом море или океане — задача выбора оптимального курса. В случае, когда курс прокладывается на достаточно большое расстояние, поверхность Земли уже нельзя считать плоской. Тогда пользуются простейшей моделью навигационного пространства — сферой. Кратчайшим расстоянием от одной точки поверхности Земли до другой является *дуга большой окружности* (рис. 3). Нахождение параметров движения судна сводится к нахождению элементов сферического треугольника. Поэтому традиционным разделом всех «судоводительских» специальных курсов является *сферическая тригонометрия*, где выводятся основные формулы, связывающие элементы сферического треугольника (так называемые формулы синусов, косинусов и котангенсов).

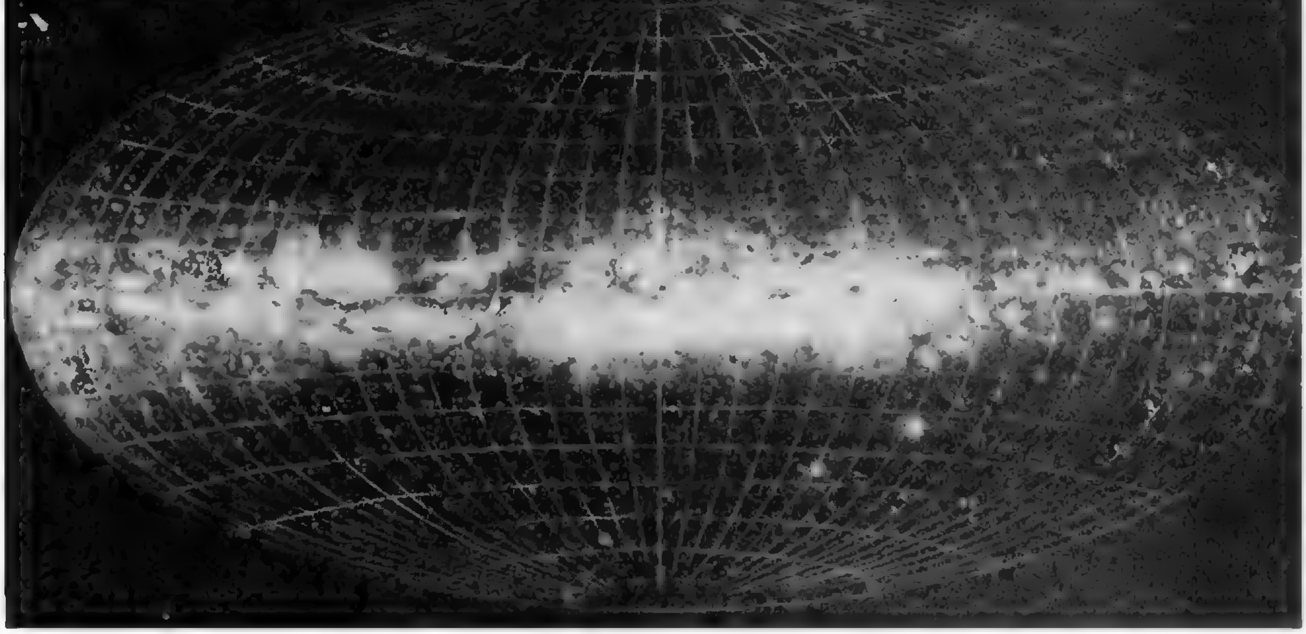
Все вычисления производятся по строго продуманным схемам, результат должен иметь оценку с точки зрения его надежности и точности. Эта оценка производится по правилам и формулам теории ошибок. Поэтому в руководствах по «Математическим основам судовождения» излагаются элементы курсов теории вероятностей и математической статистики.

Математика необходима и для *того, чтобы владеть мореходной астрономией.*

Без математики невозможно освоить и успешно эксплуатировать технические средства судовождения.

Продолжать дальнейший перечень нет смысла.

Упоминавшийся выше академик А. Н. Крылов, математик и корабел, сказал о своей специальности, что она — «... приложение математики к различным вопросам морского дела». Точно так и у судоводителя!



Вспыхивающие рентгеновские звезды

Доктор физико-математических наук
А. Д. ЧЕРНИН

В 1975 году группа советских астрономов сообщила о наблюдении коротких и мощных всплесков космического рентгеновского излучения. Вскоре американские ученые обнаружили вспышки рентгеновского излучения в центре одного из звездных скоплений нашей Галактики. Так началась история исследования барстеров — вспыхивающих рентгеновских звезд. Их название происходит от английского слова burst, что значит взрыв, вспышка. Сейчас известно более 30 таких звезд; 8 из них принадлежат звездным скоплениям.

То, что звезды способны излучать не только видимый свет, но и рентгеновские лучи, выяснилось в последние 15—20 лет, когда появились специальные рентгеновские телескопы, выносимые на высотных баллонах, ракетах, спутниках за пределы земной атмосферы (которая не пропускает к нам космическое рентгеновское излучение). Космические источники испускают рентгеновские лучи в области длин волн от 10^{-8} до 10^{-10} м. Кванты, соответствующие этому диапазону электромагнитных волн, имеют энергию от 0,1 до 30 кэВ или от 10^{-17} до $3 \cdot 10^{-15}$ Дж.

Барстеры — нейтронные звезды

Нарастание блеска барстера*) происходит за время от нескольких долей секунды до десяти секунд. Затем во время от нескольких секунд до нескольких минут блеск убывает до исходного уровня, и новая вспышка происходит через несколько часов или несколько дней (рисунок 1). Некоторые барстеры иногда «выключаются» на недели и месяцы.

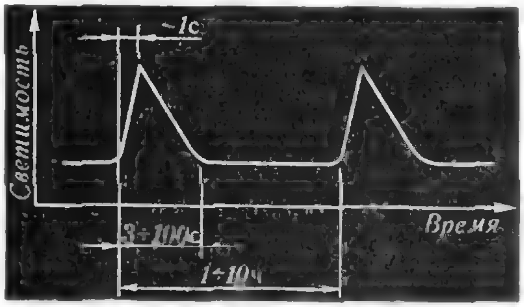


Рис. 1. Типичная зависимость светимости барстера от времени.

---

*) Говоря о нарастании блеска барстера, мы имеем в виду нарастание мощности рентгеновского излучения, испускаемого барстером. И дальше, говоря о невидимом для глаза рентгеновском излучении, мы будем пользоваться теми же привычными терминами, что и для видимого света.

и затем снова «оживают», опять дают рентгеновские вспышки. Почти всегда вспышки барстеров происходят на фоне неисчезающей, хотя и несколько меняющейся со временем, рентгеновской светимости.

Расположение барстеров на небе и не хаотично, и не равномерно. Большинство их сосредоточено в направлении на центр Галактики, и их тем больше, чем ближе к центру (рисунок 2). Это обстоятельство служит очевидным указанием на то, что барстеры принадлежат нашей Галактике. Более того, отсюда следует, что типичное расстояние до барстера близко к расстоянию от нас до центра Галактики — это 10 кпс, или $3 \cdot 10^{20}$ м.

Сигналы, принимаемые рентгеновскими телескопами во время вспышек разных барстеров, различаются по энергии приблизительно в десять раз. Значения плотности потока энергии, то есть энергии, приходящей на единицу поверхности в единицу времени, лежат в пределах

$$F = (3 \cdot 10^{-11} \div 3 \cdot 10^{-12}) \text{ Дж/(м}^2\cdot\text{с)}.$$

Зная расстояние до источника — $R = 3 \cdot 10^{20}$ м, можно найти его светимость, то есть полную энергию, излучаемую источником в единицу времени во все стороны:

$$L = 4\pi R^2 F = (3 \cdot 10^{30} \div 3 \cdot 10^{31}) \text{ Дж/с}.$$

Энергия, излучаемая барстером за время вспышки, получается умножением светимости L на длительность вспышки Δt (здесь для длительности вспышки Δt принято среднее значение 10 с).

Таким же способом находится и фоновая, неисчезающая светимость барстера. Ее значение приблизительно одинаково для всех барстеров: $L_0 \approx 10^{30}$ Дж/с.

Для понимания природы барстеров очень важно то обстоятельство, что во время вспышки барстер светится так, как светилась бы поверхность тела, нагретого до температуры от десяти до тридцати миллионов градусов. Это установлено по виду спектра рентгеновского излучения барстера, то есть по характеру зависимости излучаемой энергии от длины волны*). Средняя энергия ε излучаемого кванта связана с температурой T тела приближенным соотношением $\varepsilon \approx kT$, где $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. При температуре $T = (1 \div 3) 10^7$ К значение $\varepsilon \approx (1 \div 4) 10^{-16}$ Дж действительно лежит в интервале энергий, характерных для рентгеновских лучей.

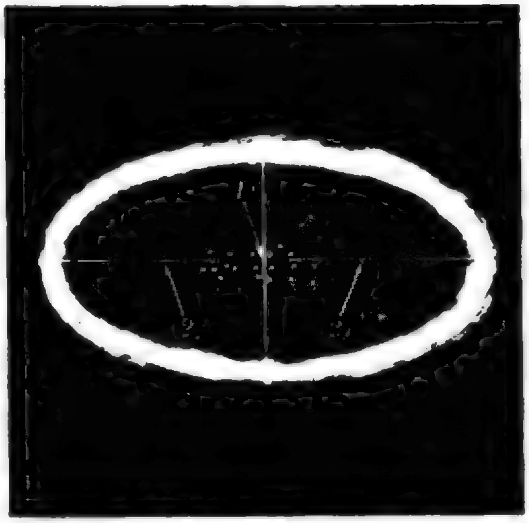


Рис. 2. Положение барстеров в Галактике. 1 — центр Галактики; 2 — центральная плоскость Галактики.

Согласно одному из законов термодинамики — закону Стефана — Больцмана, поверхность тела, нагретого до температуры T, излучает в единицу времени с единицы площади количество энергии, пропорциональное четвертой степени температуры тела: $W = \sigma T^4$. Коэффициент пропорциональности $\sigma = 5{,}7 \times 10^{-8}$ Дж/(м$^2\cdot$с$\cdot$К) называют постоянной Стефана—Больцмана. Шар радуса r имеет площадь поверхности $4\pi r^2$; эта поверхность, если она нагрета до температуры T, создает светимость

$$L = \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2.$$

С помощью этой формулы и на основании данных о температуре и вспышечной светимости барстера можно найти радиус его излучающей поверхности:

---

*) На различные участки спектра излучающего тела приходятся разные доли излучаемой энергии. Максимум энергии приходится на определенный интервал длин волн спектра. Чем выше температура тела, тем дальше смещается максимум в область малых длин волн. По тому, на какую длину волны приходится максимум излучаемой телом энергии, можно судить о температуре тела.

$$r=\left(\frac{L}{4\pi\sigma T^4}\right)^{1/2}\approx 10^4\ \text{м}=10\ \text{км}$$

(в этой оценке использованы средние значения $L=10^{31}$ Дж/с, $T=2\cdot10^7$ К).

Как раз такие размеры имеют самые плотные из всех небесных тел — нейтронные звезды. Они возникают в результате сильного сжатия «обычных» звезд на поздних стадиях их эволюции.

Эволюция звезд

Солнце и подобные ему «обычные» звезды светят за счет выделения энергии при термоядерных реакциях, происходящих в их недрах. Ядерным топливом для них служит водород. Превращение водорода в гелий способно поддерживать светимость Солнца на неизменном уровне еще многие миллиарды лет. Звезды же более массивные, чем Солнце, светят ярче и быстрее расходуют ядерное горючее. Исчерпав водород, они «сжигают» в своих недрах гелий, превращая его в углерод; затем может «загореться» и углерод и т. д. Ядерный ресурс звезды исчерпывается, когда в этом процессе превращения легких элементов в тяжелые почти все вещество звезды превращается в железо. Железо уже не «горит»: ядра железа не могут превращаться в еще более тяжелые ядра с выделением энергии.

Звезда, лишенная источников энергии, охлаждается, давление в ней падает, и рано или поздно сила давления оказывается недостаточной для противодействия силам гравитационного притяжения, действующим внутри звездного вещества. Под действием сил тяготения звезда начинает сжиматься, ее плотность возрастает, и в структуре звезды происходит существенная перестройка, итогом которой может быть одно из трех новых состояний. Какое из этих состояний осуществится, зависит от массы звезды.

Если масса звезды велика и превосходит массу Солнца ($M_\odot\approx2\cdot10^{30}$ кг) не менее чем в 3—5 раз, то звезда неудержимо сжимается (так называемый гравитационный коллапс) и в конце концов превращается в черную дыру. Если масса звезды мала и не превышает 1,5 масс Солнца, то сжатие звезды останавливается при средней плотности звездного вещества около миллиарда килограммов в кубическом метре и радиусе, составляющем одну сотую радиуса Солнца ($R_\odot\approx7\cdot10^8$ м). Такие звезды — их называют белыми карликами — известны давно; они излучают свет за счет остатка своей тепловой энергии, постепенно, в течение нескольких миллиардов лет, охлаждаются, застывают и становятся невидимыми.

Звезды промежуточных масс, от 1,5 до 3—5 масс Солнца, сжимаются до радиуса приблизительно в 10 километров; плотность звездного вещества достигает при этом 10^{18} кг/м — значения, сравнимого с плотностью внутри атомных ядер. При такой плотности в веществе звезды происходит нейтронизация: электроны как бы вдавливаются в протоны, и из слияния электронов с протонами получаются нейтроны. Так возникает звезда, почти целиком состоящая из нейтронов, — нейтронная звезда.

Нейтронные звезды были обнаружены в 1967 году, когда радиоастрономы зарегистрировали быстрые периодические пульсации радиоизлучения, источником которых могли быть только сверхплотные звезды с радиусом до 10 км. Позднее были открыты и нейтронные звезды, испускающие периодические импульсы рентгеновского излучения. И те, и другие источники были названы пульсарами. Периодичность их излучения связана с быстрым вращением нейтронных звезд; периоды пульсаров, то есть промежутки времени между максимумами излучаемых ими импульсов, совпадают с периодами вращения нейтронных звезд и остаются постоянными с огромной точностью — до восьмого знака.

Теперь к пульсарам прибавилась новая разновидность нейтронных звезд — барстеры.*).

Аккреция

Имеются прямые наблюдения свидетельства того, что барстеры представляют собой не одиночные нейтронные звезды, а нейтронные звезды в двойных звездных системах. Их компаньонами в звездных парах служат «обычные» звезды, в недрах которых происходит термоядерное горение.

Эти двойные системы оказываются довольно тесными, при своих орбитальных движениях в паре звезды находятся друг от друга на расстояниях, сравнимых с их радиусами. По этой причине нейтронная звезда может увлекать и захватывать своим сильным полем тяготения часть вещества с поверхности звезды-компаньона. В тесной паре происходит непрерывное перетекание вещества с «обычной» звезды на нейтронную. Процесс захвата вещества гравитационным полем звезды называется аккрецией.

Захватываемое вещество срывается или истекает с поверхности звезды-компаньона и, ускоряясь при падения в поле тяготения нейтронной звезды, приобретает значительную скорость и кинетическую энергию. Неизбежное столкновение с поверхностью нейтронной звезды приводит к торможению вещества, к превращению его кинетической энергии в тепло. Из-за этого поверхность нейтронной звезды разогревается и начинает излучать электромагнитные волны.

---

*) Подробнее об эволюции звезд можно прочитать в книгах С. А. Каплана «Физика звезд» (М., Наука, 1977) и И. С. Шкловского «Звезды: их рождение, жизнь и смерть» (М., Наука, 1978); нейтронным звездам была посвящена статья А. Б. Мигдала в первом номере «Кванта» за 1982 год.

Эта картина напоминает то, что происходит в рентгеновской трубке, — там тоже частицы (электроны) разгоняются (электрическим полем), а затем тормозятся (при столкновении с анодом), и их кинетическая энергия идет на излучение электромагнитных волн рентгеновского диапазона.

Постоянный разогрев поверхности нейтронной звезды за счет кинетической энергии аккрецируемого вещества способен обеспечить рентгеновское излучение, на фоне которого наблюдаются вспышки. Выясним, каким должен быть темп аккреции, чтобы «фоновая» рентгеновская светимость была на уровне наблюдаемой величины $L_0 \approx 10^{30}$ Дж/с.

Для этого нужно прежде всего определить скорость, с которой вещество падает на нейтронную звезду. Ее можно оценить по приближенной формуле

$$v \approx \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}, \qquad (*)$$

где $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2 — гравитационная постоянная, M — масса звезды, r — ее радиус.

Формулу (*) можно получить, воспользовавшись законом всемирного тяготения, согласно которому два тела с массами M_1 и M_2 притягиваются с силой GM_1M_2/r_{12}^2, где r_{12} — расстояние между ними. В нашей задаче под M_1 следует понимать массу частицы захватываемого вещества, под $M_2 = M$ — массу нейтронной звезды, под r_{12} — расстояние до частицы от центра нейтронной звезды. Сила тяготения, совершая работу над частицей, изменяет ее скорость. Правда, переход от закона всемирного тяготения к приближенной формуле (*) проделать не совсем просто. Дело в том, что сила тяготения меняется по мере приближения частицы к поверхности звезды. Этим наша задача отличается от задачи о свободном падении в поле тяготения Земли. Когда высота h, с которой падает тело, очень мала по сравнению с радиусом Земли $r_\oplus$, можно пренебречь изменением силы тяготения на расстояниях $\sim h \ll r_\oplus$ и считать, что эта сила постоянна; постоянно тогда и ускорение силы тяжести $g = GM_\oplus/r_\oplus^2$ ($M_\oplus$ — масса Земли).

В этом случае, как известно, скорость, с которой тело подходит к поверхности Земли, равна $v = \left(\frac{2GM_\oplus h}{r_\oplus^2}\right)^{1/2}$. Для очень грубой оценки эту формулу можно применять и в случае расстояний, не слишком малых по сравнению с радиусом $r_\oplus$; если, скажем, взять высоту h равной половине $r_\oplus$, то формула примет тот же вид, что и соотношение (*): $v \approx \left(\frac{GM_\oplus}{r_\oplus}\right)^{1/2}$.

Скорость падения вещества на нейтронную звезду, оцениваемая по приближенной формуле (*), оказывается очень большой, сравнимой со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Подставляя, например, в качестве массы звезды удвоенную массу Солнца и беря для радиуса значение 10 км, найдем, что $v = 1/2\, c$.

Если на поверхность нейтронной звезды выпадает за единицу времени масса вещества j, то энергия, которая сообщается звезде за единицу времени, равна

$$Q = \frac{1}{2} j v^2.$$

Температура поверхности звезды становится постоянной, когда энергия, получаемая от аккрецируемого вещества, становится равной энергии, излучаемой звездой. Такое состояние соответствует фоновой светимости барстера, более или менее постоянной во времени. Приравнивая величину фоновой светимости L_0 (потеря энергии) величине Q (приход энергии к поверхности звезды), найдем поток аккреции:

$$j = \frac{2L_0}{v^2}.$$

С помощью известных значений L_0 и v находим, что $j \approx 10^{14}$ кг/с. В таком количестве звезда-компаньон способна поставлять вещество нейтронной звезде в течение многих миллионов лет.

Термоядерные взрывы

Но что вызывает рентгеновские вспышки, резкие нарастания светимости барстеров? Тот факт, что импульсы излучения барстеров следуют один за другим без какой-либо четкой периодичности, означает, очевидно, что механизм вспышек не связан ни с собственным вращением нейтронной звезды вокруг оси, ни с ее периодическим орбитальным движением в двойной звездной системе. Иначе барстеры были бы такими же хорошими часами, как пульсары.

Причина вспышек — в тех превращениях, которые испытывает вещество, выпавшее на поверхность нейтронной звезды.

Захваченное барстером вещество звезды-компаньона имеет обычный звездный химический состав: (70—75) % водорода (по массе), около (25—30) % гелия, приблизительно 1% более тяжелых элементов. При ударе о поверхность нейтронной звезды газ сжимается и разогревается до такой степени, что становятся возможными термоядерные реакции превращения водорода в гелий — такие же, как и в недрах Солнца и других «обычных» звезд.

Выделяющаяся в реакциях энергия добавляется к той энергии, которую сообщает поверхности звезды аккреция. Эта добавка, однако, не очень велика. Действительно, в ядерных превращениях — пусть даже до полного «сгорания», то есть превращения водорода в железо,— выделяется не больше чем 0,01 c^2 энергии на единицу массы вещества. Поэтому энергия, выделяемая в единицу времени при термоядерном горении аккрецируемого вещества, не превышает величины 0,01 $c^2 j$. Сравнивая это с нашей оценкой кинетической энергии аккрецируемого вещества, найдем, что термоядерные реакции дают приток энергии, который приблизительно в тридцать раз меньше энергии аккреции.

Важнее здесь другое. В результате термоядерных реакций горения водорода на поверхности нейтронной звезды образуется слой гелия. Оказывается, именно в слое гелия и развиваются процессы, вызывающие вспышки.

Более 30 лет назад Л. Э. Гуревич и А. И. Лебединский, разрабатывая теорию поздних стадий эволюции звезд, обнаружили, что при определенных условиях на звездах могут происходить термоядерные взрывы. В звезде, исчерпавшей ядерное горючее в своей центральной области, чаще всего имеются близкие к поверхности слои, где вещество еще богато водородом, гелием и другими легкими элементами. Представим себе ситуацию, когда температура в этих слоях весьма высока, но все же не достаточна для протекания ядерных реакций. Пусть, далее, по какой-либо причине температура в одном из этих слоев повысится и окажется вдруг выше критического предела, с которого становится возможным ядерное горение. Что будет происходить дальше?

Очевидно, начнутся ядерные реакции с выделением тепла. Но будет ли температура слоя оставаться достаточно высокой? Повысится ли она или понизится? Это зависит от соотношения между темпом выделения тепла в ядерных реакциях и темпом отвода тепла из слоя наружу. Если тепло уходит из слоя очень быстро, почти мгновенно, то ясно, что, едва начавшись, ядерные реакции тут же и затухнут, так как температура слоя сразу понизится и станет меньше критической.

Иной результат следует ожидать в случае, если тепло, выделяемое при ядерных реакциях, не успевает быстро покидать слой, так что происходит дальнейшее повышение его температуры. С повышением температуры ядерные реакции протекают все эффективнее, быстро растет выделение тепла, и в результате температура слоя продолжает нарастать. Но тогда ядерные реакции пойдут еще быстрее, приток тепла повысится и т. д. Можно сказать, что процесс ядерного энерговыделения развивается в этом случае лавинообразно, поддерживая и ускоряя сам себя. А это — взрыв. В слое ядерного горения звезды этот процесс развивается потому, что скорость ядерных реакций очень чувствительна к температуре: чем выше температура, тем эффективнее ядерные реакции, тем быстрее выделяется тепло.

Об этом явлении вспомнили сразу же, как только были открыты барстеры; астрономы разных стран быстро пришли к общему мнению, что вспышки рентгеновского излучения обусловлены взрывным термоядерным горением во внешних слоях нейтронных звезд.

Количественное исследование этого процесса требует сложных вычислений. Расчеты ведутся на крупных вычислительных машинах. Это позволяет должным образом учесть структуру слоя, его тепловой баланс, определяемый нагревом при ядерных реакциях и охлаждением из-за теплопроводности и излучения, и большое разнообразие других факторов, существенно влияющих на физику явления. Детальные исследования показали, что термоядерные взрывы, сопровождающиеся вспышками рентгеновского излучения, происходят в слое гелия, образующемся на поверхности нейтронной звезды в результате аккреции. Согласно расчетам, этот слой имеет толщину приблизительно в один метр, плотность свыше миллиарда килограммов в кубическом метре и температуру около полумиллиарда градусов.

При таких условиях способна протекать реакция объединения трех ядер гелия в ядро углерода:

$$3(^4He) \rightarrow {}^{12}C$$

Эту реакцию в ядерной физике называют тройным альфа-процессом (ядро гелия — это альфа-частица). Из-за чрезвычайно высокой температурной чувствительности тройной альфа-процесс действительно может развиваться взрывообразно. В гелиевом слое он протекает столь стремительно, что температура слоя может подскочить, скажем, вдвое за несколько сотых долей секунды. Никакой теплоотвод не поспевает за таким темпом энерговыделения: раз начавшись, горение гелия идет со всей возрастающей скоростью, пока весь он не превратится в углерод. *)

При «сгорании» одного килограмма гелия выделяется 10^{14} джоулей энергии. Сколько всего энергии выделяется за вспышку? Для ответа на этот вопрос нужно, очевидно, знать массу гелиевого слоя.

Так как гелия полностью «сгорает» за один взрыв, его накопление происходит за время между взрывами. Беря для оценки промежуток между двумя рентгеновскими вспышками порядка $\Delta T \approx 10^4$ с и пользуясь уже полученной выше оценкой для скоростей аккреции $j = 10^{14}$ кг/с, найдем массу слоя: $m = j \cdot \Delta T \approx 10^{18}$ кг.

Теперь умножим эту величину на энергию, выделяемую одним килограммом гелия, и получим оценку полной энергии вспышки: это дает 10^{32} Дж. Такая величина хорошо согласуется с наблюдательными данными, о которых мы выше говорили.

Можно оценить также и типичную продолжительность вспышки. Для этого нужно воспользоваться сведениями из ядерной физики о скорости выделения энергии в тройном альфа-процессе при данных плотности и температуре вещества. Для указанных выше характеристик гелиевого слоя получается приблизительно 10^{13} джоулей энергии на каждый килограмм вещества в секунду. При массе слоя 10^{18} кг это дает полную скорость энерговыделения около 10^{31} Дж/с.

Эта величина весьма близка к типичной наблюдаемой светимости барстера во время рентгеновской вспышки.

Теория хорошо объясняет также и соотношение между вспышечной и спокойной, фоновой, светимостью барстера.

Все это позволяет считать, что природа излучения барстеров разгадана. Но остаются все же серьезные вопросы, на которые пока нет ответа.

Вопросы и гипотезы

Вспомним, например, что из трех десятков известных барстеров восемь, то есть приблизительно одна четверть, принадлежат звездным скоплениям. Во всех восьми случаях это так называемые шаровые скопления, состоящие из наиболее старых звезд Галактики и насчитывающие каждое приблизительно по миллио-

---

*) В отличие от гелия, горение водорода на нейтронной звезде происходит в спокойном режиме, без взрыва, и заметное нарастание температуры в реакциях превращения водорода в гелий всегда происходит за время в несколько сот секунд, что слишком медленно для развития взрыва.

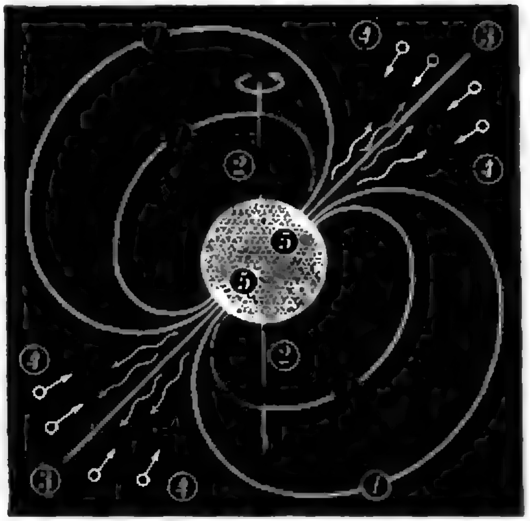


Рис. 3. Схема рентгеновского пульсара (аккреция в магнитном поле, излучение горячих пятен). 1 — силовые линии магнитного поля; 2 — ось вращения нейтронной звезды; 3 — магнитная ось звезды; 4 — частицы вещества, падающие к магнитным полюсам; 5 — горячие пятна у полюсов.

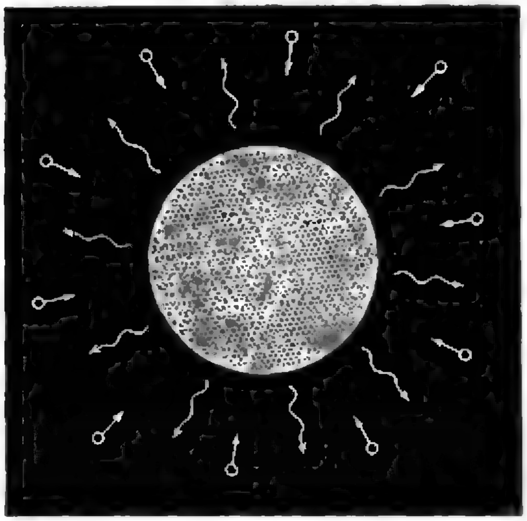


Рис. 4. Схема барстера (аккреция, нагрев и излучение со всей поверхности).

ну звезд. Все 124 известных шаровых скопления Галактики содержат чуть больше ста миллионов звезд, что составляет одну тысячную полного числа звезд Галактики. Отсюда видно, что барстеры определенно предпочитают возникать среди звезд шаровых скоплений. Причину этого предпочтения еще предстоит понять. Почему нейтронная звезда проявляет себя в одних случаях как барстер, а в других — как пульсар? Или иначе: почему барстер не пульсирует, а пульсар не вспыхивает?

Полагают, что рентгеновские пульсары тоже входят в тесные двойные системы с перетеканием вещества и аккрецией. Возможно, в этом случае значительную роль играют магнитные поля. Магнитное поле нейтронной звезды, если оно достаточно сильное (в 10^{12} раз сильнее среднего магнитного поля Солнца, равного 10^{-4} Тл), способно изменять характер аккреции — вещество направляется полем преимущественно к магнитным полюсам звезды. Из-за этого нагрев оказывается неравномерным: у полюсов температура значительно выше, чем на всей остальной поверхности звезды. Горячие пятна у полюсов и создают, главным образом, излучение (вспомним, что светимость сильно зависит от температуры, она пропорциональна ее четвертой степени). Если звезда быстро вращается и при этом магнитная ось наклонена к ее оси вращения (рисунок 3), то возникает эффект маяка: яркое пятно то видно, то не видно наблюдателю, и излучение представляется прерывистым, пульсирующим.

Магнитное поле барстера, вероятно, слабее, чем у пульсара; оно не влияет на аккрецию, которая происходит более или менее равномерно по всем направлениям, так что вся поверхность нейтронной звезды прогревается одинаково и одинаково излучает (рисунок 4). Тогда вращение звезды, которое и здесь может быть быстрым, не проявится в излучении. Если так, то становится понятным, почему барстер не пульсирует. Но почему на пульсаре не происходят вспышки? Предполагают, что магнитное поле, управляющее аккрецией, способно каким-то образом предотвращать термоядерные вспышки на поверхности нейтронной звезды.

Эти догадки и гипотезы еще предстоит проверить дальнейшими теоретическими расчетами и астрономическими наблюдениями.

Теорема Борсука — Улама

или
Кое-что о погоде,
о дрессированной лошади
и двумерных полях

Член-корреспондент АН УССР
М. Г. КРЕЙН,
кандидат физико-математических наук
А. А. НУДЕЛЬМАН

Погода считается с топологией

Погода капризна и своенравна. Параметры, описывающие ее (например, давление, температура, влажность), непрерывно изменяются с течением времени и при переходе из одной местности в другую. На картах погоды изотермы и изобары могут иметь самые прихотливые (и, увы, не всегда предсказуемые) формы. И тем не менее, как бы причудливо ни выглядела карта погоды земного шара, имеет место

Теорема о погоде. *В каждый момент времени на Земном шаре имеется пара диаметрально противоположных точек («антиподов»), в которых одинаковы как температура, так и давление.*

Это утверждение, облеченное в «метеорологическую» форму, на самом деле отражает не свойства земной атмосферы, а свойства функций, определенных и непрерывных на сфере. Она относится к топологии — отделу математики, который, в частности, занимается изучением свойств функций, или наборов функций, непрерывных на тех или иных множествах.

Некоторые свойства таких функций определяются структурой множеств, на которых они непрерывны. Например, для числовых функций, изучаемых в школе, справедлива геометрически очевидная

Теорема о нуле функции. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значение противоположных знаков, то между a и b есть такая точка x_0, в которой $f(x_0)=0$.*

Мы не приводим доказательства этой наглядно очевидной теоремы, поскольку оно, как это ни странно, не элементарно.

Для справедливости теоремы о нуле существенны как непрерывность функции (почему?), так и то свойство отрезка, которое называется *связностью* (в отрезке нет «пробелов», «просветов»). Так, функция $f(x)=\sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}+2x$ непрерывна на своей области определения $[-2,-1]\cup[1,2]$ отрицательна на $[-2,-1]$ и положительна на $[1,2]$, а в нуль она не обращается ни в одной точке.

В этой статье рассказывается о некоторых свойствах пар функций, определенных и непрерывных на сфере. Но начнем мы с более простого случая — с одного неожиданного свойства функций, непрерывных на окружности.

Случай окружности: бег дрессированной лошади

Пусть цирковая лошадь по команде дрессировщика плавно начинает бег по окружности арены из точки A и, заканчивая оборот, плавно останавливается в этой же точке. Оказывается, как бы ни изменялась ее скорость во время бега, *можно указать две диаметрально противоположные точки арены, в которых скорость лошади имеет одно и то же значение.*

Разумеется, дело здесь не в дрессировке лошади (которую мы в дальнейшем представляем себе в виде точки), а в свойстве непрерывных функций, о котором сейчас пойдет речь.

Будем определять положение лошади $Л$ на окружности с площадью угла Θ ($0\leqslant\Theta\leqslant2\pi$), который радиус $ОЛ$ образует с радиусом OA, проведенным в начальную точку (рис. 1); соответствующее значение скорости обозначим через $v(\Theta)$. Подразумевается, что функция v непрерывна на $[0;2\pi]$ (движение и остановки — плавные), по условию $v(0)=0$, $v(2\pi)=0$. Точке $Л'$, диаметрально противоположной точке $Л$, при $0\leqslant\Theta\leqslant\pi$ отвечает угол $\Theta+\pi$. Требуется доказать существование такого $\Theta_0\in[0;\pi]$, для которого $v(\Theta_0+\pi)=v(\Theta_0)$.

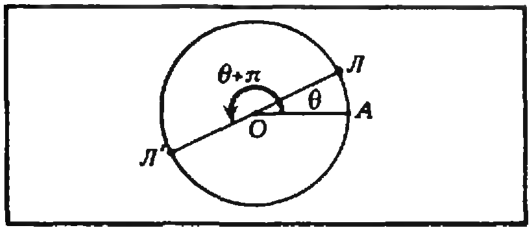


Рис. 1.

Рассмотрим функцию $u(\Theta)=v(\Theta+\pi)-v(\Theta)$. Нам надо найти такое $\Theta_0\in[0,\pi]$, для которого $u(\Theta_0)=0$. Функция u непрерывна на отрезке $[0;\pi]$ (как разность непрерывных функций) и на концах этого отрезка ее значения $u(0)=v(\pi)-v(0)=v(\pi)$ и $u(\pi)=v(2\pi)-v(\pi)=-v(\pi)$ либо имеют противоположные знаки (если $v(\pi)\neq0$), либо равны нулю (если $v(\pi)=0$). В последнем случае $\Theta_0=0$; если же $v(\pi)\neq0$, то существование Θ_0 вытекает из теоремы о нуле.

Легко понять, что для доказательства несущественна неотрицательность функции $v(\Theta)$ (обегая арену, лошадь может время от времени двигаться в обратном направлении) и условия $v(0)=0$, $v(2\pi)=0$, существенно лишь равенство $v(0)=v(2\pi)$ (точку A лошадь может пройти с разгона; важно, чтобы она вернулась в эту точку с той же мгновенной скоростью).

Очевидно, что v можно рассматривать как функцию не числа Θ, а точки $Л$, поэтому доказанную теорему можно сформулировать еще следующим образом:

Теорема «о лошади». *Если некоторая функция определена на окружности и непрерывна на ней, то найдутся две диаметрально противоположные точки окружности, в которых эта функция принимает одинаковые значения.*

Математические формулировки теоремы о погоде

Переведем на математический язык теорему о погоде. В данный момент времени каждой точке P земной поверхности S ставятся в соответствие два числа — давление $f(P)$ и температура $g(P)$ в этой точке. Тем самым на сфере S определены две функции, которые предполагаются непрерывными на S — при малых изменениях положения точки P значения этих функций изменяются мало.

Точное определение непрерывности функции на произвольном точечном множестве X (расположенном на прямой, в плоскости или в пространстве) можно сформулировать так:

функция φ называется *непрерывной* в точке $P_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для каждой точки $P \in X$, удаленной от P_0 на расстояние, меньшее, чем δ, имеет место неравенство $|\varphi(P) - \varphi(P_0)| < \varepsilon$; функция *непрерывна на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Условимся антипод точки $P \in S$ обозначать через P' (P и P' — концы одного и того же диаметра сферы).

Отвлекаясь от «метеорологического» смысла функций f и g, сформулируем теорему в общем виде:

Теорема Борсука — Улама[*]. *Если функции f и g определены и непрерывны на сфере S, то на этой сфере найдутся диаметрально противоположные точки P_0 и P_0', в которых $f(P_0') = f(P_0)$ и $g(P_0') = g(P_0)$.*

Введем две функции $F(P) = f(P') - f(P)$ и $G(P) = g(P') - g(P)$. Обе они непрерывны на S и обладают свойством антисимметрии: $F(P') = -F(P)$, $G(P') = -G(P)$, так как, например, $F(P') = f((P')') - f(P') = f(P) - f(P') = -F(P)$. Для точек $P_0 \in S$, в которых $f(P_0') = f(P_0)$, $g(P_0') = g(P_0)$, и только для таких точек $F(P_0) = 0$ и $G(P_0) = 0$.

Следовательно, теорема Борсука — Улама вытекает из следующей теоремы:

Теорема об общем нуле. *Если функции F и G непрерывны на сфере S и обе обладают свойством антисимметрии, то на сфере S найдется точка P_0, в которой обе функции равны нулю: $F(P_0) = G(P_0) = 0$.*

Теорема о нулях векторных полей

Теорема о нуле дает достаточные условия, при выполнении которых функция, непрерывная на отрезке, имеет на отрезке «нуль». Сейчас будет рассмотрена теорема, дающая признак существования общего «нуля» у двух функций, непрерывных на круге.

Пусть каждой точке Q некоторого плоского множества K (у нас это чаще всего будет круг) поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a}(Q)$, лежащий в той же плоскости. В этом случае говорят, что на множестве K задано *двумерное векторное поле* (рис. 2). Вектор в плоскости задается с помощью двух координат, поэтому задание двумерного векторного поля равносильно заданию двух функций: $\vec{a}(Q) = (x(Q); y(Q))$.

Векторное поле называется *непрерывным в точке* Q_0, если в этой точке непрерывны обе функции $x(Q)$, $y(Q)$; поле *непрерывно на данном множестве*, если оно непрерывно в каждой его точке. Векторное поле называется *вырожденным* в множестве K, если для некоторой точки $Q_0 \in K$ вектор $\vec{a}(Q_0)$ — нулевой. Нам нужны достаточные условия вырожденности непрерывного на круге векторного поля.

Мы сначала дадим векторное истолкование теоремы о нуле. На прямой вектор задается одной координатой. Поэтому задание на отрезке функции можно истолковать как задание *одномерного векторного поля* (состоящего из векторов, которые расположены на одной прямой), и теорему о нуле можно сформулировать так:

Теорема о нуле одномерного поля. *Если на отрезке задано непрерывное одномерное векторное поле, причем на концах отрезка соответствующие векторы имеют противоположные направления, то это поле вырожденное* (рис. 3, *а*).

На случай двумерного поля эта теорема обобщается следующим образом:

Теорема о нуле двумерного поля. *Если на круге задано непрерывное двумерное векторное поле, причем в любых диаметрально противоположных точках его окружности соответствующие векторы имеют противоположные направления, то это поле вырожденное* (рис. 3, *б*).

Как и одномерная теорема о нуле, эта теорема доказывается средствами, выходящими за рамки школьного курса. Но в то время как в теореме о нуле одномерного поля это компенсировалось наглядностью, о двумерной теореме этого нельзя сказать. Поэтому мы приведем «правдоподобное рассуждение», которое, мы надеемся, убедит читателей в справедливости этой теоремы.

---

[*] Карол Борсук (род. в 1915 г.) — польский математик, Станислав Улам (род. в 1909 г.) — американский математик.

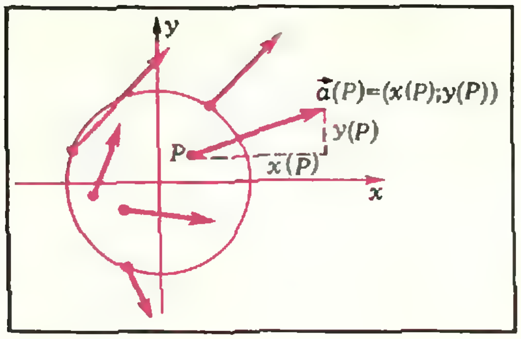


Рис. 2.

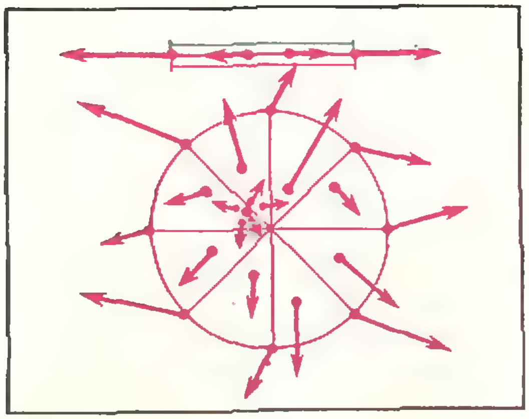


Рис. 3

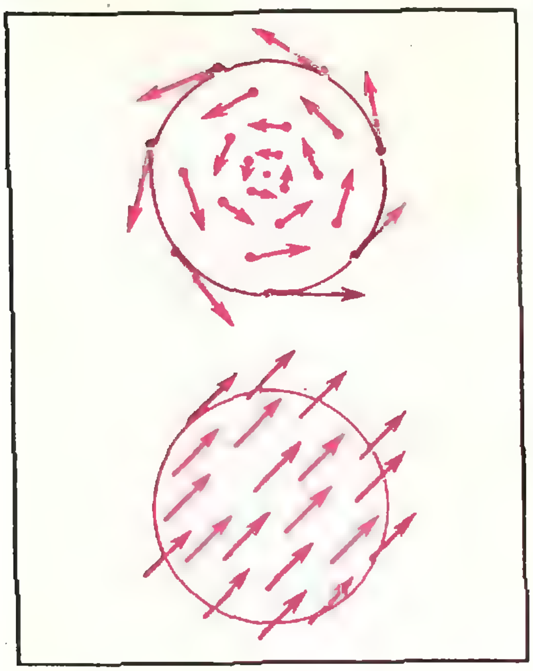


Рис. 4

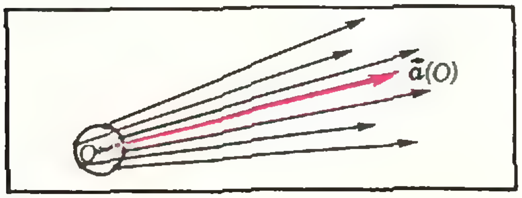


Рис. 5.

Пусть O — центр круга K, r — его радиус. Граничную окружность круга K обозначим через C, а через C_ε обозначим концентрическую окружность радиуса εr $(C=C_1)$. Пусть $\vec a$ — непрерывное векторное поле на K. Если $\vec a(Q)\neq 0$ для всех $Q\in C_\varepsilon$, то при движении Q по C_ε вектор $\vec a(Q)$ будет как-то поворачиваться. Обозначим через $\nu(C_\varepsilon)$ количество оборотов против часовой стрелки, которое совершает вектор $\vec a(Q)$, приложенный к фиксированной точке I, когда точка Q пробегает окружность C_ε один раз против часовой стрелки*). Целое число $\nu(C_\varepsilon)$ может быть положительным, нулем или отрицательным. Уточним, что если в процессе движения Q по некоторой дуге окружности C_ε вектор $\vec a(Q)$ сделает несколько оборотов против часовой стрелки и столько же оборотов по часовой стрелке, то при подсчете $\nu(C_\varepsilon)$ эти обороты «взаимно уничтожаются». Советуем читателю найти $\nu(C)$ для полей, показанных на рисунке 4 (поле скоростей вращающегося круга и поле, образованное параллельным переносом).

Пусть $\vec a(Q)$, $Q\in K$ — векторное поле, удовлетворяющее условиям теоремы. Рассуждая от противного, предположим, что $\vec a(Q)\neq\vec 0$ для всех $Q\in K$. Тогда, в частности, $\vec a(O)\neq\vec 0$. В силу непрерывности поля, вблизи O все векторы $\vec a(Q)$ мало отличаются по направлению от $\vec a(O)$. Значит, при малом $\varepsilon_0>0$ имеем $\nu(C_{\varepsilon_0})=0$ (см. рис. 5 — так как на C_{ε_0} векторы направлены «почти так же», как $\vec a(O)$, вектор $\vec a(Q)$ не совершает ни одного целого оборота, когда Q обегает C_{ε_0}). Будем теперь постепенно увеличивать ε до крайнего значения $\varepsilon=1$. Так как $\vec a(Q)\neq\vec 0$ всюду, число $\nu(C_\varepsilon)$ определено для всех значений ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, то есть $\nu(C_\varepsilon)$ — всюду определенная на $(0, 1]$ функция от ε. Эта функция непрерывна (так как наше поле непрерывно) и принимает лишь **целые** значения. Но целочисленная функция изменяется толь-

---

*) Читателям, ознакомившимся со статьей С. В. Матвеева в «Кванте», 1983, № 4, советуем сравнить это число с «инвариантом F».

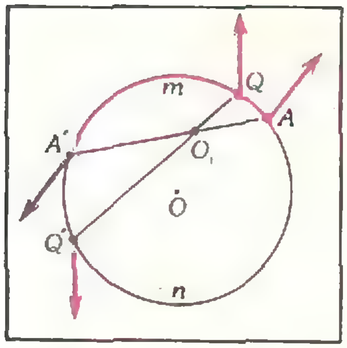


Рис. 6.

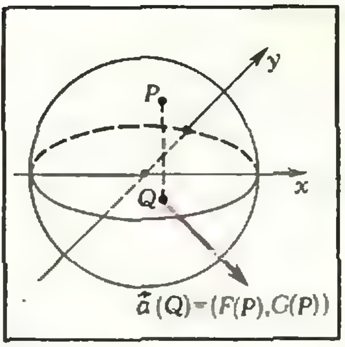


Рис. 7.

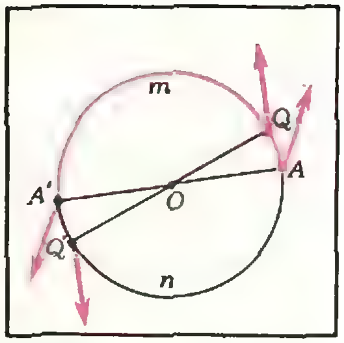


Рис. 8.

ко скачками (по величине $\geqslant 1$), она либо разрывна, либо постоянна. Значит, в нашем случае $\nu(C_\varepsilon)=\text{const}$, откуда $\nu(C)=\nu(C_{\varepsilon_0})=0$.

Возьмем теперь на окружности C некоторую точку A и диаметрально противоположную ей точку A' (рис. 6). Так как направления векторов $\vec{a}(A)$ и $\vec{a}(A')$ противоположны, при движении точки Q по полуокружности AmA' от точки A до точки A' вектор $\vec{a}(Q)$ совершает нечетное число полуоборотов. При дальнейшем движении точки Q по полуокружности $A'nA$ от A' к A вектор $\vec{a}(Q)$ совершит такое же (и притом в том же направлении) число полуоборотов. Следовательно, $\nu(C)$ есть нечетное число, что противоречит доказанному равенству $\nu(C)=0$ и завершает наше рассуждение.

Доказательство теоремы об общем нуле

Итак, пусть на сфере S заданы непрерывные функции F и G, обладающие свойством антисимметрии

$$F(A')=-F(A),\ G(A')=-G(A).$$

Проведем через центр O сферы S какую-либо плоскость. Круг, получившийся в сечении, обозначим через K, а его окружность — через C. Введем в секущей плоскости какую-нибудь прямоугольную систему координат с началом O и каждой точке $Q\in K$ поставим в соответствие вектор $\vec{a}(Q)$ с координатами $F(P)$ и $G(P)$, где P — та точка верхней полусферы, которая проектируется в точку Q (рис. 7). Предоставляем читателю убедиться в том, что полученное векторное поле непрерывно на K. В силу свойства антисимметрии на сфере функций F и G, для всех $Q\in C$ будем иметь

$$\vec{a}(Q)=-\vec{a}(Q')$$

По теореме о нуле двумерного поля найдется точка $Q_0\in K$, в которой $\vec{a}(Q_0)=\vec{0}$. Это значит, что $F(P_0)=0$, $G(P_0)=0$, где P_0 — точка сферы, проектирующаяся в точку Q_0. Теорема доказана.

Одно географическое следствие

Из теоремы Борсука — Улама вытекает одно следствие, огорчительное для географов. Положение точки на земном шаре принято указывать с помощью географических координат — широты θ и долготы φ. Их можно рассматривать как функции точек земной сферы. В этой системе координат особое положение занимают полюсы: широта у каждого из них 90° (северная или южная), а долготу можно приписать любую. Поэтому, если двигаться, скажем, к северному полюсу по одному меридиану, а достигнув его, продолжить движение по любому другому меридиану, то при этом непрерывном движении широта будет изменяться непрерывно, а долгота — испытает скачок. Если условиться приписывать знак «плюс» восточной долготе и знак «минус» — западной, то долгота испытывает скачок и при переходе из западного полушария в восточное через меридиан, являющийся антиподом гринвичского меридиана. Возникает вопрос: нельзя ли *на всей поверхности сферы ввести координаты так, чтобы они были непрерывными функциями соответствующей точки сферы*? При этом, естественно, не должно быть разных точек с одинаковыми парами координат.

Согласно теореме Борсука — Улама, *это невозможно*. Действительно, если бы на сфере S были бы заданы непрерывные координаты $x(P)$ и $y(P)$ $(P \in S)$, согласно этой теореме, нашлись бы даже антиподы $P_0, P_0' \in S$, в которых $x(P) = x(P_0')$, $y(P_0) = y(P_0')$.

Некоторые обобщения

Если внимательно проанализировать ход доказательства теоремы «о лошади», можно обнаружить что не так уж важно то обстоятельство, что точки *Л* и *Л'* — диаметрально противоположные. Все рассуждения сохраняют силу, например, тогда, когда вместо центра O взять произвольную внутреннюю точку O_1 круга и под *Л* и *Л'* понимать концы хорды, проходящей через O_1. Аналогично можно поступить и с теоремой о нуле двумерного поля, и с теоремой Борсука — Улама (рис. 8). Здесь важно то, что при новом определении точки P' сохраняется свойство $(P')' = P$.

Всякое непрерывное отображение $P \to P'$, обладающее этим свойством, называется *инволюцией*. Советский математик А. Фет, используя тонкие и сильные средства топологии, обнаружил, что теорема Борсука — Улама (даже в ее n-мерном варианте) остается в силе, если на сфере S задана произвольная инволюция $P \to P'$. Вот точная формулировка этого утверждения для трехмерного пространства:

Пусть на сфере S задана произвольная инволюция $P \to P'$. Для каждой пары непрерывных на S функций $f(P)$ и $g(P)$ найдется точка $P_0 \in S$ такая, что $f(P_0') = f(P_0)$, $g(P_0') = g(P_0)$.

* * *

Читателю, у которого появилось желание более подробно ознакомиться с основными понятиями топологии, мы рекомендуем прочесть превосходно написанную популярную книгу Н. Стинрода и У. Чинна «Первые понятия топологии» (М., Мир, 1967) *). В этой книге имеется более полное и строгое доказательство теоремы Борсука — Улама, а также ряд других «аппетитных» теорем (например, «теорема о блинах», «теорема о разрезании сэндвича с ветчиной»).

Наш календарь

150
лет назад

Законы электролиза

В самом начале 1833 года Фарадей сообщил Лондонскому Королевскому обществу о проведенных им экспериментах, впервые доказавших тождественность различных видов электричества — «обыкновенного», возникающего в результате трения, гальванического, термоэлектричества, электричества, получаемого индукционным способом, и так называемого животного электричества (обнаруженного у некоторых рыб и морских животных). Суть доказательства состояла в демонстрации одинаковости «действий», производимых электричеством различного происхождения.

В числе прочих действий (таких, например, как тепловое, физиологическое или магнитное) Фарадей исследовал и химическое действие. Это исследование привело его к выводу, получившему впоследствии название первого закона Фарадея для электролиза: химическое действие электрического тока прямо пропорционально абсолютному количеству проходящего электричества (естественно, что формулировка Фарадея несколько отличается от современной). Закон был сформулирован на основе целой серии тщательно продуманных и мастерски проведенных опытов, в ходе которых Фарадей открыл еще один закон, называемый теперь вторым законом Фарадея: электрохимические эквиваленты соответствуют химическим эквивалентам.

Писать отчет об этих экспериментах Фарадей закончил 31 декабря 1833 года, и опубликовал его уже в 1834 году. Вот почему иногда пишут, что законы Фарадея были открыты в 1833, а иногда — в 1834 году.

Установить точные количественные законы электролиза в те времена было делом не простым. Фарадей сумел это сделать, во многом благодаря изобретенному им прибору — вольтаэлектрометру, который впервые позволил измерить количество электричества.

Заметим также, что именно при описании этих исследований Фарадей ввел в физику такие привычные и необходимые для нас сейчас термины, как электролит, электролиз, анод, катод, катион и т. д.

Помимо того, что законы Фарадея легли в основу элетрохимии, они сыграли очень важную роль в истории развития физики: впервые навели на мысль о дискретной природе электричества, о существовании «атома электричества» (по-современному — электрона).

Б. Е. Явелов

---

*) См. также книгу В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича «Наглядная топология» (М., Наука 1982).

Что случилось с лампочкой?

Кандидат физико-математических наук
А. Н. ПЕГОЕВ

Конечно, перегорание лампочки — событие мелкое. Пожалуй, даже слово «событие» здесь кажется не совсем уместным. Однако разговор о том, почему и как разрушаются нити в лампах накаливания, вполне достоин внимания.

Наша промышленность выпускает миллиарды ламп в год. Прослужив по нескольку сотен или тысяч часов, все они перегорают, вызывая у одних легкую досаду, а у других удивление и любопытство. Иногда вид перегоревшей лампочки озадачивает даже опытного электрика.

Но прежде чем говорить о перегорании ламп, несколько слов об их устройстве. Главная деталь лампы (рис. 1) — тело накаливания. Обычно это вольфрамовая нить в форме спирали или двойной спирали. Концы нити соединены с концами вводов. Вводы средней частью закреплены в стеклянной лопатке. Нить поддерживается вводами и проволочными держателями, последние впаяны в стеклянный штенгель. Эта конструкция размещается в стеклянной колбе. К колбе приклеен цоколь, к контактам которого припаяны наружные концы вводов. Их диаметр несколько меньше, чем диаметр внутренней части вводов. Внутри цоколя находится носик — запаянный конец стеклянной трубочки, через которую откачивается воздух из колбы. В некоторых видах ламп колба наполняется инертным газом (аргоном, криптоном), иногда с добавлением галогенов.

Нить накаливания — самый ненадежный элемент лампы. Ток, протекающий через нить, нагревает ее почти до 3000 К. Повышение напряжения на 15% от номинального приводит к быстрому разрушению нити. Даже повышение напряжения на 1% снижает срок ее службы на 15%, хотя и повышает светоотдачу на 4%.

Как уже говорилось, вид перегоревшей лампочки может вызвать удивление, а иногда может и озадачить. Выделим по внешним признакам несколько видов разрушения ламп, сформулируем соответствующие вопросы, а затем и ответим на них.

Жизнь большинства ламп заканчивается после длительного горения. В последнее мгновение свет мерцает, может измениться его цвет, иногда слышится тихое гудение, и нить разрывается.

Вопрос 1: *почему после длительной эксплуатации разрушается небольшой участок нити, тогда как остальная часть нити еще работоспособна?*

В быту до четверти ламп перегорает в момент включения. Сразу после замыкания цепи лампа ярко вспыхивает и гаснет. Характерно, что разрушается небольшой участок нити, обычно около ввода.

Вопрос 2: *почему в момент включения, когда температура нити еще не достигла рабочего значения, возрастает вероятность перегорания нити?*

Иногда перегорание нити при включении сопровождается вспышкой в цоколе. При этом перегорает один из вводов в наружной его части, а на стекле колбы осаждается испарившийся металл. Колба может отклеиться от цоколя и повис-

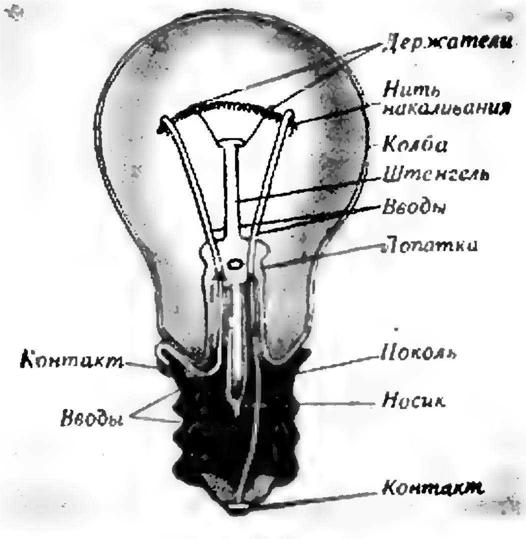


Рис. 1. Лампа накаливания в разрезе.

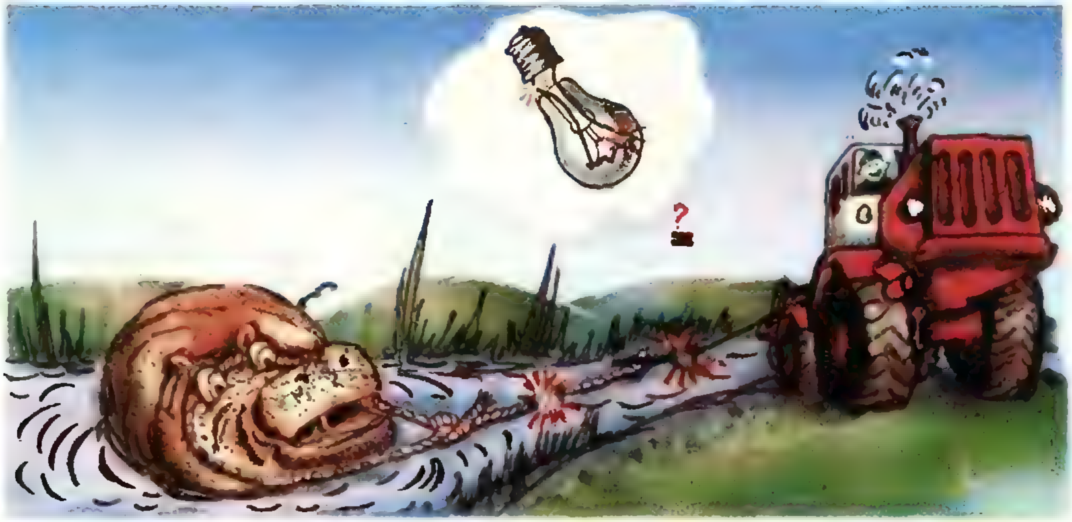


Рис. 2. Одновременное разрушение нити и ввода подобно одновременному разрыву тонкого шнурка и связанной с ним прочной веревки.

нуть на уцелевшем вводе. (В этом случае можно вывинтить цоколь из патрона, захватив край цоколя концами бокорезов с изолированными ручками.) Такая картина поистине не может не удивить. Во-первых, электрическая цепь разрушилась в двух местах — нить и ввод. Во-вторых, перегорел ввод, у которого ток плавления значительно больше, чем у нити (это видно хотя бы из того факта, что в рабочем режиме один и тот же ток раскаляет нить и почти не нагревает вводы). Парадокс здесь такой же, как будто мы потянули за слабый шнурок и порвали его, но при этом порвалась еще и прочная веревка, к которой привязан шнурок (рис. 2).

Вопрос 3: *по какой цепи протекает ток, разрушающий ввод?*

В некоторых случаях (это касается, в основном, мощных ламп) при включении лампы расплавляется значительная часть нити накаливания. Капли вольфрама проплавляют колбу лампы (а иногда и стеклянный плафон), стекло трескается и с грохотом падает. Застывшие капли вольфрама, их обугленные следы, нерасплавленные кусочки нити можно найти на предметах, находившихся под лампой.

Вопрос 4: *почему при перегорании лампы ток возрастает настолько, что может расплавиться значительный участок нити?*

Желающие могут попытаться самостоятельно ответить на эти вопросы и лишь после этого прочитать приведенные ниже ответы.

* * *

Ответ на вопрос 1. Причину разрушения малого участка нити естественно искать в том, что нить не может быть абсолютно однородной. Представим нить как последовательное соединение небольших участков, изображенных на схеме в виде резисторов с сопротивлением R_i каждый (рис. 3).

Электрическое сопротивление участка нити определяется его длиной l_i, диаметром d_i и удельным сопротивлением материала ϱ_i: $R_i = 4\varrho_i l_i/(\pi d_i^2)$. Выберем длины участков одинаковыми и будем считать одинаковыми удельные сопротивления всех участков, тогда различие в сопротивлениях будет связано только с различием в диаметрах участков. Путь по нити протекает ток I, который определяется приложенным к нити напряжением U и сопротивлением нити R (то есть суммой сопротивлений всех участков): $I = U/R$. На каждом участке выделяется мощность $P_i = I^2 R_i$. При установившемся тепловом режиме эта мощность расходуется на световое и тепловое излучение, а также на отвод тепла по соседним участкам и вводам и через газ в колбе.

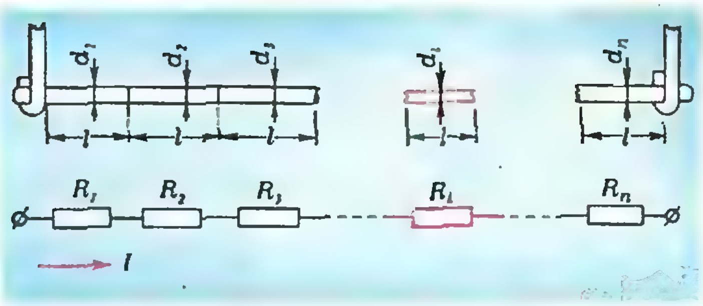


Рис. 3. Разделенная на отдельные участки нить накаливания и ее эквивалентная схема.

Вследствие неоднородности нити по толщине всегда найдется участок, диаметр которого наименьший. Этот участок будет обладать наибольшим сопротивлением, на нем выделяется наибольшая мощность. В то же время излучение тепла с такого участка ослаблено, так как площадь его поверхности минимальна. В результате данный участок приобретает наибольшую температуру. Росту температуры противодействуют потери тепла, связанные с излучением и теплопроводностью (чем больше температура, тем больше тепла излучается и передается с помощью теплопроводности). Поэтому установившееся значение температуры слабого участка определяется совместными действиями всех этих факторов.

Добавим, что с ростом температуры увеличивается удельное сопротивление проводника. Это еще повышает сопротивление, выделяемую мощность, а следовательно, и температуру участка. Скорость испарения вольфрама тоже сильно увеличивается с ростом температуры. Поэтому участок нити с наименьшим диаметром теряет металл с поверхности с наибольшей скоростью. Другими словами, уменьшение диаметра приводит к увеличению скорости уменьшения диаметра (такие процессы называются лавинообразными). В результате температура слабого участка повышается еще больше и достигает точки плавления вольфрама — нить разрушается.

Заметим, что на температуру слабого участка нити влияют также дефекты структуры материала нити (изменяется удельное сопротивление и теплопроводность, последнее изменяет условия передачи тепла к соседним участкам) и особенности поверхности нити (что изменяет излучательную способность участка). Однако эти факторы играют гораздо меньшую роль, чем неоднородность нити по толщине.

Ответ на вопрос 2. Примем во внимание, что удельное сопротивление многих чистых металлов, в том числе и вольфрама, пропорционально абсолютной температуре: $\varrho_2/\varrho_1 = T_2/T_1$. Если комнатная температура T_1 около 300 К, а рабочая темпе-

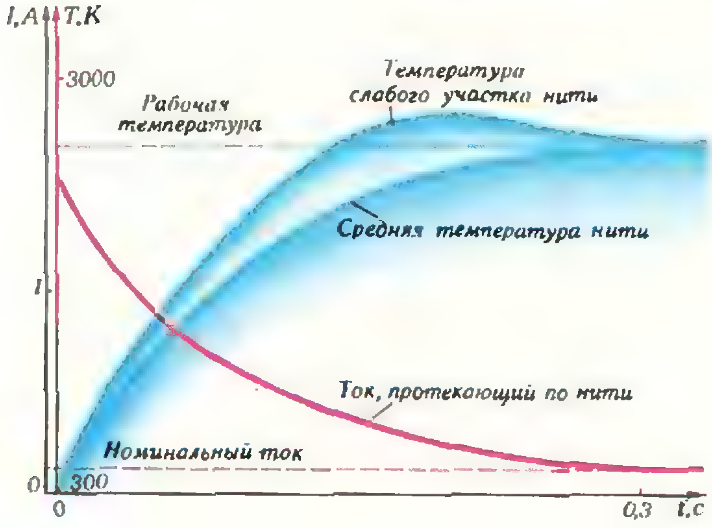


Рис. 4. Примерные графики изменения со временем (после включения лампы) средней температуры нити, температуры ее слабого участка и тока, протекающего по нити.

ратура нити T_2 почти 3000 К, то, сразу после включения сопротивление нити приблизительно в 10 раз ниже, чем в разогретом состоянии. Следовательно, в начальный момент ток, протекающий через нить, превышает номинальное значение почти в 10 раз (рис. 4). Затем по мере разогрева нити сила тока уменьшается.

Само по себе повышенное значение тока не разрушает нить, но создает предпосылки для временного перегрева отдельных ее участков. Действительно, слабый участок нити с уменьшенным диаметром, как мы уже выяснили, обладает повышенным сопротивлением, на нем выделяется повышенная мощность. В неустановившемся режиме мощность расходуется, помимо излучения и теплоотвода, на нагрев нити. Поскольку теплоемкость слабого участка понижена по сравнению с другими участками, а мощность повышена, этот участок разогревается быстрее, чем остальные. Это, в свою очередь, приводит к увеличению сопротивления слабого участка и к дополнительному ускорению разогрева. В результате его температура достигает рабочего уровня раньше, чем разогреется вся нить. В этот момент ток еще превышает номинальное значение, поэтому слабый участок на некоторое время перегревается (см. рис. 4). Этого может оказаться достаточно, для того чтобы произошло испарение вольфрама с поверхности нити и нить в этом месте уменьшилась в диаметре. С каждым последующим включением ослабление нити прогрессирует, пока, наконец, при очередном включении перегрев не приведет к разрушению слабого участка.

Таким образом, зависимость сопротивления нити от температуры приводит к перегреву и разрушению слабого участка нити в момент включения, когда основная часть нити еще не прогрелась.

Лампам в театральных светильниках, напряжение на которых повышается плавно, такая гибель не угрожает. А мигающие, часто включаемые лампы должны иметь особенно однородные нити или работать с недогревом. Это же касается, например, ламп для светофоров.

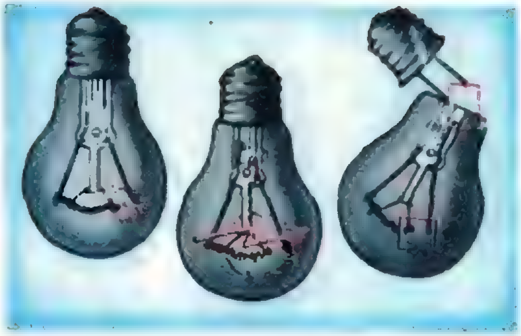


Рис. 5. Последовательные стадии разрушения нити и ввода.

Ответ на вопрос 3. Как перегорает нить при включении лампы, мы уже выяснили. А почему при этом может разрушиться ввод? Ясно, что ток, разрушающий ввод, не протекает по нити, так как основная часть нити (с относительно небольшим током плавления) сохранилась. Ясно также, что этот ток протекает внутри лампы, поскольку разрушение ввода явно связано с перегоранием нити.

Оказывается, причина всему — дуговой разряд между вводами внутри колбы. При разрушении слабого участка нити в колбе возникает облачко паров вольфрама, частично ионизированных. Иногда через это облачко происходит пробой, и между вводами зажигается электрическая дуга. Ток дуги и разрушает ввод в его ослабленной наружной части (рис. 5). Следы дуги остаются в виде сизого налета на вводах внутри колбы.

Интересно, что такая неприметная деталь конструкции лампы, как различие диаметров вводов внутри и вне колбы, имеет важное значение. Если бы диаметр наружного участка ввода был таким же или бо́льшим, чем диаметр внутреннего участка, то было бы возможным испарение ввода внутри лампы. А это чревато взрывом колбы.

Ответ на вопрос 4. Иногда после разрушения слабого участка нити пробой возникает не между двумя вводами, а между одним из вводов и оставшейся частью нити. Это приводит к плавлению большого отрезка нити и возможному взрыву колбы лампы (рис. 6). Можно лишь

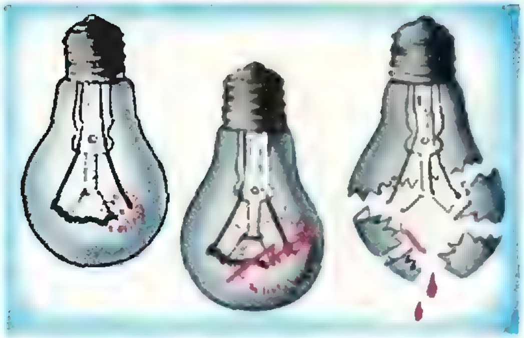


Рис. 6. *Последовательные стадии расплавления значительного участка нити.*

посоветовать не вставать под лампой в момент ее включения.

* * *

Рассмотрим еще два необычных и интересных случая перегорания ламп.

Однажды в момент выключения разбилась колба лампы. Оказалось, что при длительном горении нить постепенно провисала под действием силы тяжести, приближалась к дну колбы и в какой-то момент коснулась его. Это происходило медленно, поэтому нагревание стекла не привело к его разрушению. А вот остывание после выключения было столь быстрым, что стекло в месте соприкосновения с нитью растрескалось. Нить при этом осталась целой.

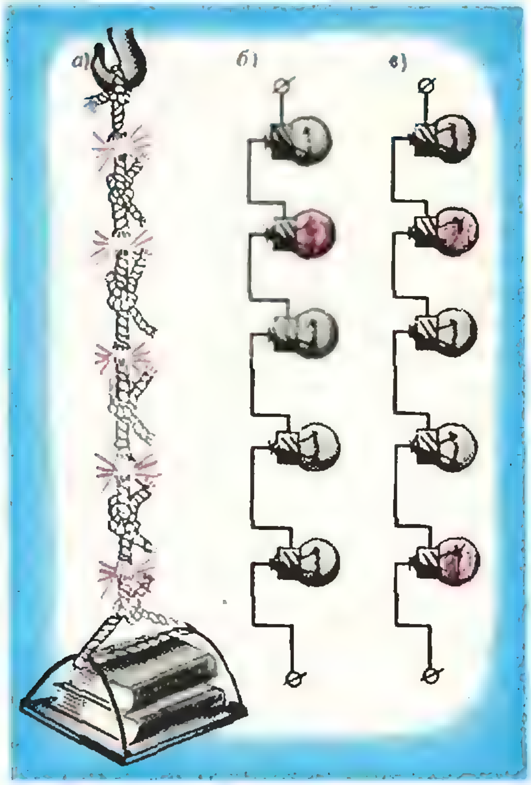
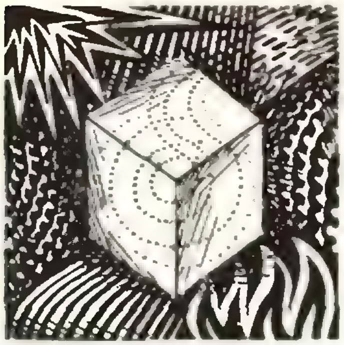


Рис. 7. *Шнурок не может разорваться сразу в нескольких местах, а последовательно соединенные лампы могут перегореть одновременно.*

Теперь расскажем о случае одновременной гибели двадцати ламп, соединенных последовательно. Во времена, когда елочных гирлянд еще не было в прейскуранте Деда Мороза, была составлена цепочка из двадцати маломощных автомобильных ламп, рассчитанных на 12 В каждая. При включении в сеть с напряжением 220 В лампы мигнули и перегорели (все двадцать!), при этом в каждой лампе испарился короткий отрезок нити. Это так же удивительно, как если бы при растягивании шнурка, связанного из двадцати кусочков, он порвался бы в двадцати местах — аккуратно между узелками (рис. 7, *а*).

Почему же одновременно перегорели все лампы? Причина этого в следующем. Разрушение слабого участка нити в одной из ламп привело к зажиганию электрической дуги между вводами (рис. 7, *б*). Сопротивление дугового промежутка существенно меньше сопротивления нити в рабочем режиме, в результате этого напряжение на остальных лампах увеличилось. Это ускорило гибель следующей лампы: зажигание дуги в ней (рис. 7, *в*). Напряжение на уцелевших лампах еще возросло, и эстафета разрушения передавалась от одной лампы к другой, пока в цепи не осталось слабых мест. Так перегорание одной слабой лампы обусловило разрушение остальных. Такие случаи, конечно, редки, но вполне вероятны.



Необычные кристаллы-генераторы

Кандидат физико-математических наук
И. В. КАРПОВА

Представьте себе электрическую цепь, состоящую из специально приготовленного полупроводникового кристалла, резистора и источника постоянного напряжения (например, батарейки для карманного фонаря), соединенных последовательно. Оказывается, при определенных условиях в такой цепи могут возбуждаться электрические колебания. Сначала это было предсказано теоретически, а затем и подтверждено экспериментально.

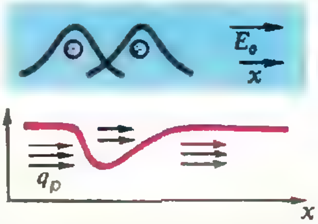
На опыте были обнаружены колебания с амплитудой несколько вольт, частоты колебаний лежали в интервале от 10^2 до 10^7 Гц. Генерирующий образец представлял собой прямоугольный брусок с размерами граней от нескольких мм до десятков мкм, вырезанный из монокристалла германия или кремния.

Характерно, что колебания возникают при самых обычных условиях: при комнатной температуре, без дополнительного давления, в отсутствие сильных электрических или магнитных полей. Все особенности связаны только с составом кристалла. Какие же это особенности?

Известно, что в полупроводниках заряды переносятся двумя типами носителей: электронами и дырками, отличающимися друг от друга, в первую очередь, знаком заряда и направлением упорядоченного движения в электрическом поле. Электроны и дырки могут находиться в двух состояниях — свободном и связанном. Переход из первого состояния во второе называют рекомбинацией. При этом переходе носители зарядов захватываются на так называемые ловушки, которыми обычно служат атомы примесей или дефекты кристаллической решетки полупроводника. Ловушки, как правило, заряжены, поэтому понятно, что электроны и дырки захватываются одной и той же ловушкой с разными вероятностями. Следовательно, и время, в течение которого они участвуют в переносе тока (время жизни), тоже не одно и то же. Так вот, если в кристалл введены подходящие примеси, такие, что время жизни электронов и дырок, а также их концентрации удовлетворяют определенным соотношениям, то в кристалле может произойти генерация электрических колебаний. Попробуем объяснить это.

Предположим, что где-то в полупроводнике случайно возникла флуктуация (неоднородность) плотности электронов. Так как полупроводник в целом электрически нейтрален, возникший отрицательный заряд должен быть скомпенсирован положительным зарядом соответствующей флуктуации дырок. Пусть введенные в кристалл ловушки таковы, что практически все избыточные дырки будут связанными, а электроны — свободными.

Если к образцу приложить внешнее электрическое поле напряженности E_0, оно поляризует флуктуации дырок и электронов так, что в результате суммарное электрическое поле имеет провал (см. рисунок). Рассмотрим потоки свободных дырок, втекающих в область провала поля и вытекающих из нее. Поток дырок, то есть число дырок, проходящих ежесекундно через единицу площади сечения, перпендикулярного направлению движения дырок, равен $q_p=n_pv$, где n_p — концентрация дырок, v — их скорость. В однородном кристалле концентрация свободных дырок всюду одна и та же, а скорость зависит от поля — она пропорциональна его напряженности (аналогично скорости направленного движения свободных электронов в металле). На левом склоне провала поля втекающий поток дырок больше вытекающего, поэтому дырки будут накапливаться на левом склоне, то есть застревать на ловушках. На правом склоне провала поля втекает дырок меньше, чем вытекает, то есть здесь дырки будут выбрасываться с ловушек. Таким образом, флуктуация дырок будет перемещаться влево.



При определенных условиях может оказаться,

(Окончание см. на с. 40)

Вокруг биссектрисы

Кандидат физико-математических наук
И. Ф. ШАРЫГИН

В этой статье собраны некоторые геометрические факты, прямо или косвенно связанные с биссектрисой треугольника. Среди них читатель найдет и несложные, но часто используемые «леммы», и более солидные и трудные «теоремы» и просто красивые «задачи». Но мы не станем их никак классифицировать, а просто будем нумеровать в порядке появления в статье. Утверждения, которые приводятся в статье без доказательства, автоматически включаются в число упражнений. Впрочем, и имеющиеся в статье доказательства мы постарались изложить по возможности лаконично, чтобы оставить читателям простор для размышлений.

Это должен знать каждый

Напомним прежде всего некоторые общепринятые обозначения: ABC — данный треугольник, S_{ABC} — его площадь, $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$, $2p=a+b+c$, O и R — соответственно, центр описанной окружности и ее радиус, I и r — центр и радиус вписанной окружности. Кроме того, треугольник имеет три вневписанные окружности, каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Их центры и радиусы будем обозначать, соответственно, I_a, I_b, I_c, r_a, r_b, r_c (I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, r_a — ее радиус).

Все другие обозначения будут разъясняться в соответствующих местах.

(1) *Пусть биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке A_1. Тогда*

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|}=\frac{|BA|}{|AC|}=\frac{c}{b}.$$

(2) *Пусть биссектриса внешнего угла при вершине A пересекает прямую BC в точке A_2. Тогда*

$$\frac{|BA_2|}{|A_2C|}=\frac{|BA|}{|AC|}=\frac{c}{b}.$$

(3) $S_{ABC}=pr$.

(4) $S_{ABC}=(p-a)\,r_a$.

(5) *Если M — точка касания вписанной окружности со стороной AB, то $|AM|=p-a$. (Аналогично опреде-*

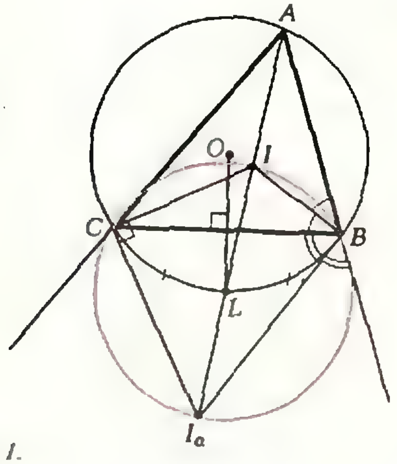


Рис. 1.

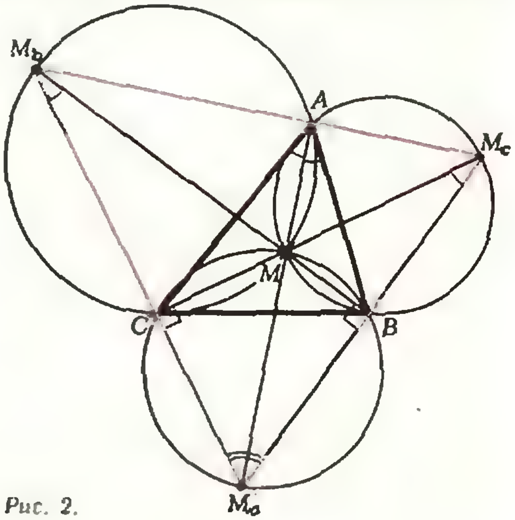


Рис. 2.

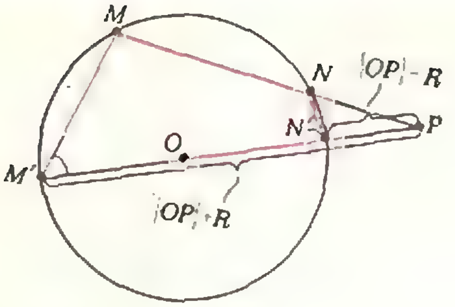


Рис. 3, а.

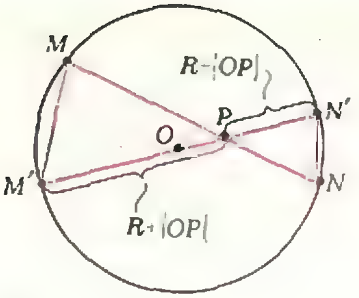


Рис. 3, б.

ляются и другие отрезки, на которые стороны треугольника делятся точками касания со вписанной окружностью.)

(6) *Если M — точка касания вневписанной окружности с центром I_a с прямой AB, то $|AM|=p$.*

(7) *Вершины B и C лежат на окружности с диаметром II_a; центр L этой окружности лежит на описанной окружности (рис. 1).*

Таким образом, центр вписанной окружности I обладает следующим свойством: прямые AI, BI и CI (то есть биссектрисы) проходят через центры описанных окружностей треугольников BIC, CIA, AIB соответственно. Верна и обратная теорема.

(8) *Если прямые AM, BM и CM проходят через центры описанных окружностей треугольников BMC, CMA и AMB, то M — центр вписанной окружности треугольника ABC.*

В самом деле, пусть M_a, M_b, M_c — точки пересечения прямых AM, BM и CM с соответствующими окружностями, отличные от M (рис. 2). Тогда MM_a, MM_b и MM_c — диаметры этих окружностей, поэтому M_aA, M_bB и M_cC — высоты треугольника $M_aM_bM_c$. Отсюда получаем $\widehat{BAM}=\widehat{BM_cM}=90°-\widehat{BM_aC}=\widehat{CM_bM}=\widehat{CAM}$, то есть M лежит на биссектрисе угла A и, аналогично, на биссектрисах углов B и C.

Расстояния между центрами «замечательных окружностей».

(9) $|OI|^2=R^2-2Rr$ *(формула Эйлера).*

(10) $|OI_a|^2=R^2+2Rr_a$.

(11) $|II_a|^2=4R\,(r_a-r)$.

Для доказательства первых двух формул напомним, что если M и N — точки пересечения произвольной прямой, проходящей через данную точку P, с окружностью радиуса R с центром O, то $|PM|\cdot|PN|=|R^2-|OP|^2|$. (Это вытекает из подобия треугольников PMM' и PNN', где M' и N' — точки пересечения прямой OP с окружностью; рис. 3, *а* и *б*.) Отсюда следует, что $R^2-|OI|^2=|IA|\cdot|IL|$, где L — точка пересечения биссектрисы угла A с описанной окружностью (рис. 4). Но $|IA|=r/\sin(\hat{A}/2)$, а $|IL|=|LB|=2R\times\sin(\hat{A}/2)$ по утверждению (7), поэтому $R^2-|OI|^2=2Rr$. Аналогично, $|OI_a|^2-R^2=|I_aL|\cdot|I_aA|=2R\times\sin(\hat{A}/2)\times r_a/\sin(\hat{A}/2)=2Rr_a$. Наконец, $|II_a|^2=(2|IL|)\cdot(|I_aA|-|IA|)=4R\sin\frac{\hat{A}}{2}\cdot\frac{r_a-r}{\sin\frac{\hat{A}}{2}}=4R(r_a-r)$.

(12) *Точки, симметричные центрам вневписанных окружностей относительно центра описанной окружности, лежат на окружности радиуса $2R$ с центром I.*

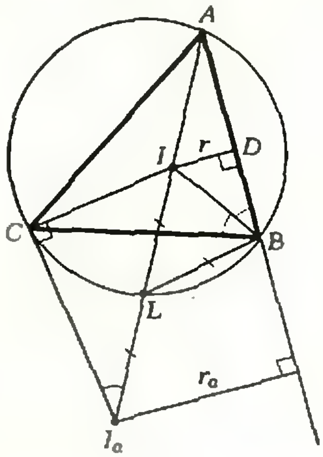


Рис. 4.

Два экстремальных свойства центра вписанной окружности

Возьмем внутри треугольника ABC произвольную точку M. Существует довольно много неравенств, касающихся расстояний от этой точки до вершин треугольника. Мы рассмотрим два таких неравенства, имеющих отношение к теме статьи.

(13) *Обозначим через A_1 точку пересечения прямой AM с описанной окружностью. Тогда*

$$\frac{|BM|\cdot|CM|}{|A_1M|}\geqslant 2r.$$

(14) $|AM|\sin B\widehat{M}C + |BM|\times\times\sin C\widehat{M}A+|CM|\sin A\widehat{M}B\leqslant p.$

В обоих случаях равенство достигается, если M совпадает с I — центром вписанной окружности.

Допустим, что наименьшее значение выражения $f(M)=\dfrac{|BM|\cdot|CM|}{|A_1M|}$, стоящего в левой части неравенства (13), достигается в некоторой точке M внутри треугольника ABC. Мы покажем, что $M=I$. А поскольку $f(I)=2r$ (это следует, например, из подобия прямоугольных треугольников BID и I_aIC на рисунке 4 [*])), отсюда будет вытекать, что *если $f(M)$ принимает свое наименьшее значение внутри треугольника ABC*, то $f(M)\geqslant 2r$. Выделенное предположение является нетривиальным и очень существенным. Мы обсудим его несколько позже.

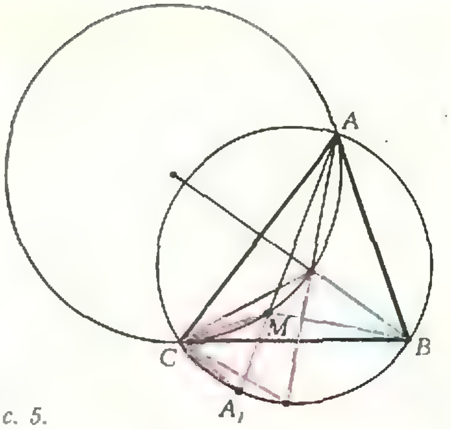


Рис. 5.

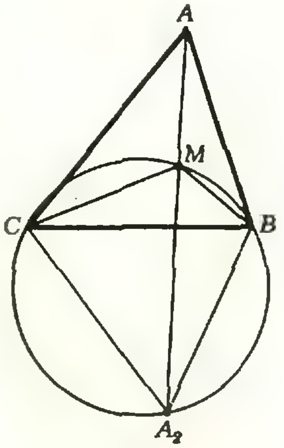


Рис. 6.

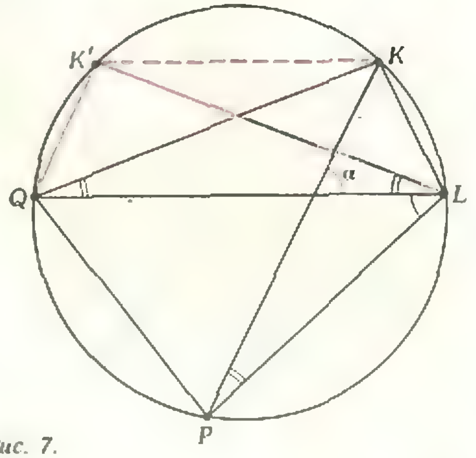


Рис. 7.

Опишем около треугольника AMC окружность (рис. 5). Все треугольники CMA_1, получающиеся при перемещении точки M по ее дуге AC, подобны между собой (почему?), следовательно, отношение $|CM|/ /|A_1M|$ будет для них одним и тем же. Поэтому, если M — точка минимума величины $f(M)$, прямая BM должна проходить через центр окружности, описанной около треугольника AMC, иначе мы могли бы уменьшить $|BM|$, оставляя постоянным отношение $|CM|/|A_1M|$. Пусть теперь B_1 и C_1 — точки пересечения прямых BM и CM с окружностью, описанной около треугольника ABC, тогда, как мы видели при доказательстве формулы (9), $|MA|\cdot|MA_1|= =|MB|\cdot|MB_1|=|MC|\cdot|MC_1|$ и потому

$$\frac{|BM|\cdot|CM|}{|A_1M|}=\frac{|CM|\cdot|AM|}{|B_1M|}=\frac{|AM|\cdot|BM|}{|C_1M|}.$$

Следовательно, прямые AM и CM также должны проходить через центры окружностей, описанных около треугольников BMC и AMB соответственно, и в силу (8) точка M — центр вписанной окружности треугольника ABC.

---

[*] Равенство $f(I)=2r$ требовалось доказать также в задаче М769,в), решение которой опубликовано в «Кванте» № 2 за этот год.

Вернемся к вопросу о достижении наименьшего значения функцией $f(M)$. В анализе доказывается, что непрерывная числовая функция, заданная на отрезке, обязательно принимает в некоторых его точках свое наибольшее и наименьшее значение*). Аналогичная теорема верна и для функций нескольких переменных, например для функций на плоскости; в частности, функция, непрерывная на многоугольнике, всегда достигает на нем наибольшего и наименьшего значения. Однако к нашей задаче эта теорема непосредственно не применима — функция $f(M)$ не определена в вершинах треугольника ABC. Более того, ее даже невозможно доопределить в точках A, B, C так, чтобы она стала непрерывной на всем треугольнике (включая границу)! Но если отрезать от треугольника уголки, мы получим шестиугольник, на котором наша функция уже будет непрерывна и, следовательно, достигает наименьшего значения. Можно показать, что вблизи границы треугольника $f(M) > 2r$. Поэтому, если отрезаемые уголки достаточно малы, наименьшее значение $f(M)$ на шестиугольниках, а значит, и на треугольнике, достигается при $M = I$ и равно $2r$.

Рассмотренное доказательство неравенства (13) относят к *косвенным*, в отличие от так называемых *прямых*, когда непосредственно доказывается, что (в нашем случае) $f(M) \geqslant f(I)$ для всех точек M внутри треугольника ABC. Косвенные доказательства нужно проводить с известной осторожностью, потому что наибольшее или наименьшее значение функции достигается отнюдь не всегда. За примером далеко ходить не надо: сама функция $f(M)$ не принимает своего наибольшего значения; читателю предлагается доказать, что $f(M) < l$, где l — длина наибольшей стороны треугольника, для всех точек M треугольника ABC (кроме, конечно, вершин), причем величина $f(M)$ может быть сколь угодно близка к l.

Перейдем к доказательству неравенства (14). Оно тоже будет косвенным: мы покажем, что точка максимума M левой части этого неравенства (если она существует!) совпадает с I.

Опишем около треугольника BMC окружность и продолжим отрезок AM до вторичного пересечения с ней в точке A_2 (рис. 6). Применим к четырехугольнику $BMCA_2$ *теорему Птолемея* — «сумма произведений противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника равна произведению его диагоналей»:

$$|BM| \cdot |A_2C| + |CM| \cdot |A_2B| = |BC| \cdot |A_2M|.$$

Эту теорему можно доказать, выражая двумя способами площадь четырехугольника: если $KLPQ$ — вписанный четырехугольник и хорда KK' параллельна диагонали LQ, то $S_{KLPQ} = S_{K'LPQ}$ (рис. 7); в то же время $2S_{KLPQ} = |KP| \cdot |LQ| \cdot \sin\alpha$, где α — угол между диагоналями KP и LQ, и $2S_{K'LPQ} = |K'L| \cdot |LP| \sin \widehat{K'LP} + |K'Q| \cdot |QP| \times \sin \widehat{K'QP} = (|KQ| \cdot |LP| + |KL| \cdot |QP|) \times \sin\alpha$, ибо $\widehat{K'LP} = \alpha$ — см. рис. 7.

Учитывая, что длины хорд одной окружности пропорциональны синусам опирающихся на них углов, получим

$$|BM| \sin \widehat{A_2MC} + |CM| \sin \widehat{A_2MB} = |A_2M| \sin \widehat{BMC},$$

или

$$|BM| \sin \widehat{AMC} + |CM| \sin \widehat{AMB} = |A_2M| \sin \widehat{BMC}.$$

Сопоставляя последнее равенство с неравенством (14), видим, что левая часть неравенства равна $|AA_2| \sin \widehat{BMC}$. Значит, прямая AM должна проходить через центр окружности, описанной около BMC, поскольку в противном случае, перемещая M по дуге BC, мы можем увеличить левую часть неравенства (14). Дальнейшие рассуждения (в том числе и доказательство существования точки максимума) проводятся так же, как и в задаче (13).

Докажите самостоятельно, что если M совпадает с I, то $|AA_2| \sin \widehat{BMC} = p$; для этого можно воспользоваться, например, задачами (6) и (7) и тем, что $\widehat{BIC} = 90° + \widehat{A}/2$.

Когда подводит интуиция

Если у треугольника равны два «однотипных» элемента (например, два угла или две медианы и т. п.), то естественно ожидать, что он будет равнобедренным. Среди задач на доказательство утверждений такого рода издавна одной из самых трудных считается так называемая задача Штейнера—Лемуса.

---

*) См. учебник «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 28.

(15) *Доказать, что если в треугольнике равны две биссектрисы, то треугольник равнобедренный.*

Эта задача широко известна*), а вот следующая забавная вариация на ту же тему почти неизвестна даже среди любителей геометрии.

(16) *Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Можно ли утверждать, что и данный треугольник равнобедренный?*

Оказывается, утверждать это, вообще говоря, нельзя! Более точно, пусть A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC. Если $|A_1B_1|=|A_1C_1|$, а треугольник ABC — не равнобедренный, то его угол A тупой и $\cos\hat{A}$ лежит в интервале $\left]-\frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right[$, что для самого угла A соответствует интервалу $]\,102°40';\ 104°28'\,[$ (значения в градусной мере приближенные). Обратно, для любого угла α из этого интервала можно указать единственный (с точностью до подобия) неравнобедренный треугольник ABC с $\hat{A}=\alpha$, для которого $|A_1B_1|=|A_1C_1|$. Подробное решение этой задачи дается в книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии (планиметрия)» (М., Наука, 1982), с. 157. К сожалению, автор не сумел построить конкретный пример треугольника (то есть точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством. Может быть, это удастся читателям журнала?

Еще 11 задач

(17) Доказать, что биссектриса треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведенными из той же вершины.

(18) Пусть AA' — биссектриса треугольника ABC. Доказать равенства: $|AA'|=\sqrt{bc-|BA'|\cdot|CA'|}=\dfrac{2bc\cos(A/2)}{b+c}$.

(19) Доказать, что высоты треугольника служат биссектрисами треугольника, образованного их основаниями.

(20) Пусть M и N — проекции точки пересечения высот треугольника ABC на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A этого треугольника. Доказать, что прямая MN делит сторону BC пополам.

(21) Доказать, что сумма площадей трех треугольников, вершинами каждого из которых являются три точки касания одной вневписанной окружности со сторонами или продолжениями сторон данного треугольника, равна удвоенной площади этого треугольника, сложенной с площадью треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности с его сторонами.

(22) Пусть AA', BB', CC' — биссектрисы треугольника ABC, L и K — точки пересечения прямых AA' и $B'C'$, CC' и $A'B'$ соответственно. Доказать, что BB' — биссектриса угла LBK.

(23) Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$. Доказать, что если BD — биссектриса угла ANC, то AC — биссектриса угла BMD.

(24) В треугольнике ABC биссектриса угла B пересекает прямую, проходящую через середину AC и середину высоты, опущенной на AC, в точке M, N — середина биссектрисы угла B. Доказать, что биссектриса угла C является также и биссектрисой угла MCN.

(25) Через основания биссектрис треугольника ABC проведена окружность. Рассмотрим три хорды, образованные при пересечении сторон треугольника с этой окружностью. Доказать, что длина одной из этих хорд равна сумме длин двух других.

(26) В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и L так, что $|AK|=|KL|=|LC|$. Через точку пересечения прямых AL и CK проведена прямая, параллельная биссектрисе угла B, пересекающая прямую AB в точке M. Доказать, что $|AM|=|BC|$.

(27) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Противоположные стороны AB и CD при продолжении пересекаются в точке K, стороны BC и AD — в точке L. Доказать, что биссектрисы углов BKC и BLA перпендикулярны и пересекаются на прямой, соединяющей середины AC и BD.

---

*) История этой задачи и одно из решений (возможно, самое короткое) приводятся, например, в книге Г. С. М. Коксетера и С. Л. Грейтцера «Новые встречи с геометрией» (М., Наука, 1978), гл. I, § 5.

Четыре доказательства теоремы о биссектрисе

Теорема о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника в учебном пособии «Геометрия 6-8» не доказывается, а предлагается в виде задачи (№ 914, с. 232). Эта теорема часто используется, например, при установлении факта пересечения трех биссектрис треугольника в одной точке. Здесь мы дадим сразу несколько ее доказательств.

Теорема. Биссектриса BD внутреннего угла треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные сторонам $|BC|$ и $|BA|$ треугольника.

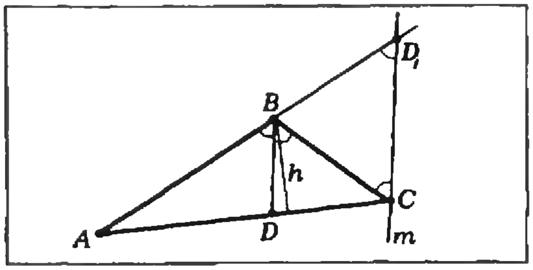


Рис. 1.

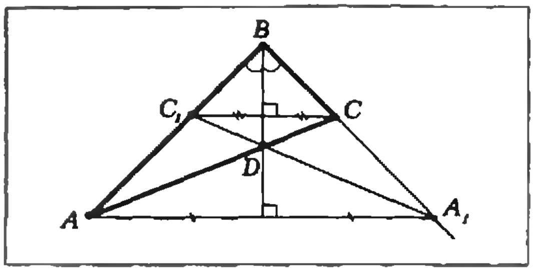


Рис. 2.

Первое доказательство (для 7-го класса).

Проведем через точку C (рис. 1) прямую m, параллельную (BD). Тогда $m \cap [AB) = D_1$ и $\triangle ABD \backsim \triangle AD_1C$; так как $\widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \widehat{BCD_1} = \widehat{CD_1B}$, получаем $|BC| = |BD_1|$ и $\frac{|AD_1|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|AD|}$; отсюда последовательно получаем

$$\frac{|AB|+|BC|}{|AB|} = \frac{|AD|+|DC|}{|AD|},$$

$$1+\frac{|BC|}{|AB|} = 1+\frac{|DC|}{|AD|},$$

$$\frac{|CB|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AD|},$$

что и требовалось доказать.

Второе доказательство (для 8-го класса).

Имеем (см. рис. 1):

$$\frac{S_{CBD}}{S_{ABD}} = \frac{0{,}5\cdot|CB|\cdot|DB|\cdot\sin\frac{\hat B}{2}}{0{,}5\cdot|AB|\cdot|DB|\cdot\sin\frac{\hat B}{2}} = \frac{0{,}5\cdot|CD|\cdot h}{0{,}5\cdot|AD|\cdot h},$$

где h — длина высоты треугольника ABC, проведенной из вершины B. Отсюда

$$\frac{|CB|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AD|}.$$

Третье доказательство (8 класс). По теореме синусов (см. рис. 1)

$$\frac{\sin\frac{\hat B}{2}}{|CD|} = \frac{\sin\hat C}{|BD|}$$

и

$$\frac{\sin\frac{\hat B}{2}}{|AD|} = \frac{\sin\hat A}{|BD|},$$

или

$$\frac{\sin\frac{\hat B}{2}}{|CD|\cdot\sin\hat C} = \frac{1}{|BD|}$$

и

$$\frac{\sin\frac{\hat B}{2}}{|AD|\cdot\sin\hat A} = \frac{1}{|BD|}.$$

Откуда

$$\frac{\sin\frac{\hat B}{2}}{|CD|\cdot\sin\hat C} = \frac{\sin\frac{\hat B}{2}}{|AD|\cdot\sin\hat A},$$

или

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\sin\hat A}{\sin\hat C},$$

или

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|AB|}.$$

Четвертое доказательство (7-8 классы). Выполнив осевую симметрию S треугольника ABC относительно (BD) (рис. 2), получим $S_{(BD)}(A) = A_1$, $S_{(BD)}(C) = C_1$ и $S_{(BD)} = B$.

Тогда $\triangle CDC_1 \backsim \triangle ADA_1$ и $\triangle CC_1B \backsim \triangle AA_1B$ (убедитесь в этом!). Отсюда (учитывая, что $|AB| = |A_1B|$) $\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CC_1|}{|AA_1|}$, $\frac{|CC_1|}{|AA_1|} = \frac{|CB|}{|AB|}$.

Следовательно,

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|AB|}.$$

С. Р. Сефибеков

Объявление

Магазин № 8 Москниги принимает заказы на следующие книги, выпущенные издательством «Наука»:

«Задачи по физике» (Под ред. О. Я. Савченко, 1981, 95 к.),

Каганов М. И., Цукерник В. М. «Природа магнетизма» (1982, 30 к.),

Яворский Б. М., Пинский А. А. «Основы физики» — Т. I «Механика. Молекулярная физика. Электродинамика» (3-е изд., перераб., 1981, 1 р. 20 к.), Т. II «Колебания и волны. Квантовая физика» (3-е изд., перераб., 1981, 1 р. 20 к.).

Заказы направлять по адресу: 103050, Москва, К-50, ул. Медведева, 1, магазин № 8 Москниги, отдел «Книга—почтой».

Когда
$|a+b|=|a|+|b|$?

Л. Б. ПЕЧЕРСКИЙ

Как известно («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 3),

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b| \quad (1)$$

Из геометрического смысла модуля легко следует, что $|a+b|=|a|+|b|$ тогда и только тогда, когда a и b — числа одного знака, точнее (поскольку не запрещается, чтобы какое-нибудь из них было нулем) — когда $a\geqslant0$ и $b\geqslant0$ или когда $a\leqslant0$ и $b\leqslant0$.

Очевидно, сформулированный *критерий равенства* можно записать и так:

$$|a+b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\geqslant0. \quad (2)$$

Следовательно,

$$|a+b|<|a|+|b|\Leftrightarrow ab<0.$$

Критерий равенства «в словесной форме» справедлив для любого числа слагаемых: $|a_1+a_2+\ldots+a_n|=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$ тогда и только тогда, когда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа одного знака (точнее — когда среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нет чисел разного знака). Между прочим, утверждение $|a+b+c|=|a|+|b|+|c|\Leftrightarrow abc\geqslant0$ неверно (почему?).

Пример 1. Решим уравнение

$$|\lg(2x-3)+\lg(4-x^2)|=|\lg(2x-3)|+|\lg(4-x^2)|. \quad (3)$$

По критерию (2) это уравнение равносильно неравенству

$$\lg(2x-3)\cdot\lg(4-x^2)\geqslant0,$$

которое, в свою очередь, равносильно системам

$$\begin{cases}\lg(2x-3)\cdot\lg(4-x^2)\geqslant0\\ 2x-3>0\\ 4-x^2>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lg(2x-3)\cdot\lg(4-x^2)\geqslant0\\ \frac{3}{2}<x<2.\end{cases}$$

Так как $\frac{3}{2}<x<2\Leftrightarrow0<2x-3<1$, последняя система равносильна системам

$$\begin{cases}\lg(2x-3)<0\\ \lg(4-x^2)\leqslant0\\ \frac{3}{2}<x<2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{3}{2}<x<2\\ 0<4-x^2\leqslant1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{3}{2}<x<2\\ x^2\geqslant3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{3}{2}<x<2\\ x\geqslant\sqrt{3}.\end{cases}$$

Ответ. $[\sqrt{3}\,;\,2\,[$.

Решение неравенства

$$|\lg(2x-3)+\lg(4-x^2)|<|\lg(2x-3)|+|\lg(4-x^2)|$$

можно получить выбрасыванием из его области определения $]\,\frac{3}{2}\,;\,2\,[$ решения $[\sqrt{3}\,;\,2\,[$ соответствующего уравнения (3). Ответ. $]\,\frac{3}{2}\,;\,\sqrt{3}\,[$.

Пример 2. Решим «уравнение с параметром»

$$|a-2\sin x|+2|\sin x-\cos x|+|2\cos x-1|=a-1.$$

При $a<1$ это уравнение, очевидно, корней не имеет. Пусть теперь $a\geqslant1$. Так как

$$(a-2\sin x)+2(\sin x-\cos x)+(2\cos x-1)=a-1,$$

можно воспользоваться критерием равенства для трех слагаемых. Поскольку, вдобавок, $a-1\geqslant0$, решаемое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}a-2\sin x\geqslant0\\ \sin x-\cos x\geqslant0\\ 2\cos x-1\geqslant0\end{cases}$$

или «тройному неравенству»

$$\frac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant\sin x\leqslant\frac{a}{2}.$$

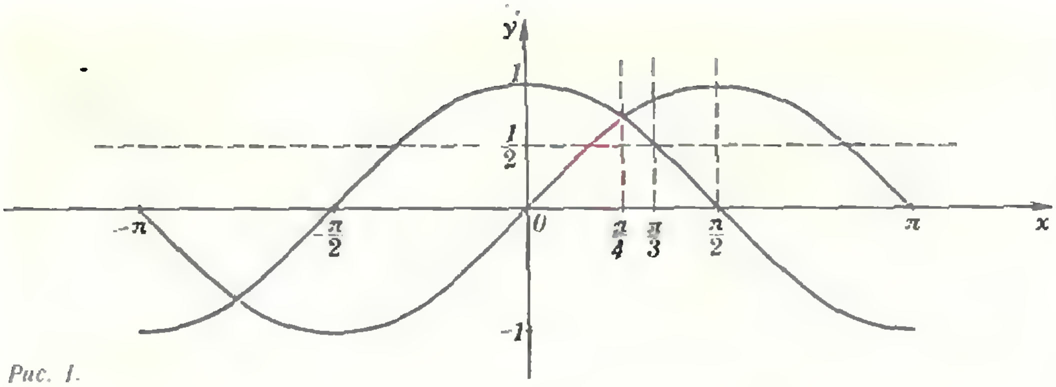


Рис. 1.

На отрезке $[-\pi; \pi]$ это неравенство равносильно (рис. 1) системе

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \\ \sin x \leqslant \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Поскольку $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем, что на $[-\pi; \pi]$ данная система при $1 \leqslant a < \sqrt{2}$ не имеет решений, при $\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{3}$ имеет множеством решений отрезок $\left[\frac{\pi}{4}; \arcsin\frac{a}{2}\right]$ и при $a > \sqrt{3}$ — отрезок $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Ответ. При $a < \sqrt{2}$ нет решений, при $\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{3}$ объединение отрезков $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad \arcsin\frac{a}{2} + 2\pi k\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$, при $a > \sqrt{3}$ — объединение отрезков $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Из (1), заменив в «левом неравенстве» b на $-b$, получаем

$$|a-b| \geqslant |a| - |b|.$$

Поскольку $|a-b| = |a| - |b| \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |a-b| + |b| = |a|$, из (2) получаем *критерий равенства для разности:*

$$|a-b| = |a| - |b| \Leftrightarrow (a-b)\,b \geqslant 0. \quad (4)$$

Пример 3. Решим систему

$$\begin{cases} |x-y| = 2 \\ |x| - |y| = 2. \end{cases} \quad (5)$$

Она равносильна системе

$$\begin{cases} |x-y| = 2 \\ |x| - |y| = 2 \\ |x-y| = |x| - |y| \end{cases}$$

которая, по критерию равенства (4), равносильна системе

$$\begin{cases} |x-y| = 2, \\ |x| - |y| = 2, \\ (x-y)\,y \geqslant 0. \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) равносильна совокупности систем

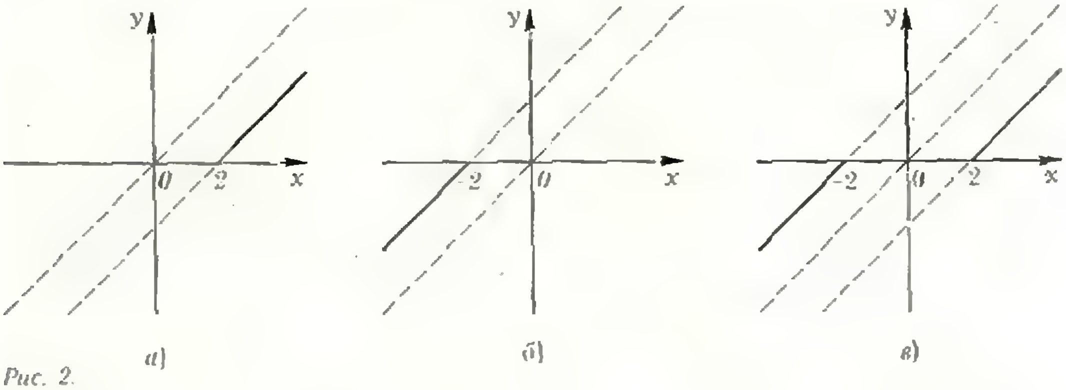
$$\begin{cases} |x-y| = 2 \\ |x| - |y| = 2 \\ x-y \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} |x-y| = 2 \\ |x| - |y| = 2 \\ x-y \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{cases}$$

«Левая» система равносильна системам

$$\begin{cases} x-y = 2, \\ x \geqslant y \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x-2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

ее график изображен на рисунке 2, *а*. «Правая» система равносильна системам

$$\begin{cases} x-y = -2 \\ x \leqslant y \leqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x+2 \\ y \leqslant 0 \end{cases}.$$



а) *б)* *в)*

Рис. 2.

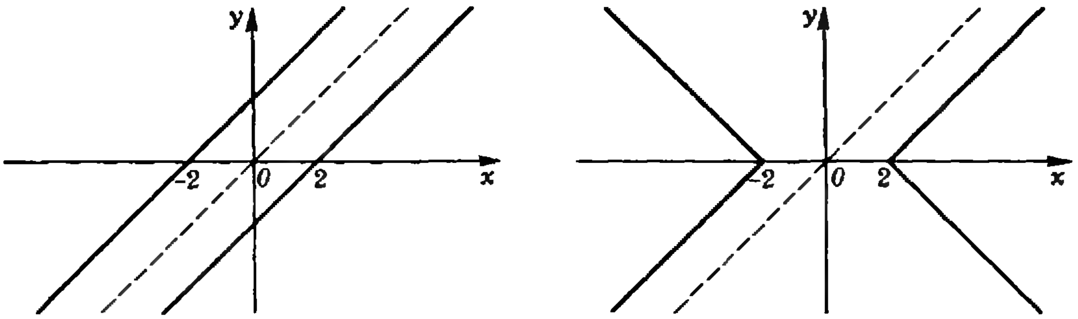


Рис. 3. а) б)

ее график изображен на рисунке 2, *б*. График системы (6) является их объединением (рис. 2, *в*).

Систему (5) можно также решить «графически». Уравнение $|x-y|=2$ равносильно, очевидно, совокупности уравнений $x-y=2$, $x-y=-2$ или $y=x-2$, $y=x+2$; его график изображен на рисунке 3, *а*. Уравнение $|x|-|y|=2$ в первом квадранте имеет вид $x-y=2$ или $y=x-2$; его график см. на рисунке 2, *а*. Легко видеть, что график уравнения $|x|-|y|=2$ симметричен относительно обеих координатных осей; поэтому его график легко получается из графика на рисунке 2, *а* — он изображен на рисунке 3, *б*. Искомый график на этот раз является пересечением графиков на рисунках 3, *а* и 3, *б* (рис. 2, *в*).

Упражнения

1. Решите уравнение

а) $|x^2-2x|+|4-x^2|+2|x|=4$;

б) $|\sqrt{a+1}+x|-|a+\sqrt{a+1}|=|a-x|$.

2. Решите неравенство

а) $|x+\lg x|<|x|+|\lg x|$;

б) $|x^2-\sqrt{x-3}|<|2-\sqrt{x-3}|+|x^2-2|$.

3. Решите систему

а) $\begin{cases}|x+y-4|=5\\|x-3|+|y-1|=3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}|y-\sin x|=1\\|y|-|\sin x|=1.\end{cases}$

Необычные кристаллы-генераторы

(Начало см. на с. 31)

что накапливается дырок больше, чем выбрасывается. Это приведет к увеличению числа дырок в области флуктуации, другими словами, к росту флуктуации и притоку дополнительного числа свободных электронов. В результате глубина провала поля возрастет, что вызовет дальнейший рост числа захваченных дырок, и так далее — вся флуктуация в целом будет нарастать. Однако существуют и причины, уменьшающие флуктуацию. Это, прежде всего, конечность времени жизни электронов и диффузия электронов и дырок.

Характерный размер флуктуации — ее ширина — не может быть меньше длины пробега свободных дырок, то есть расстояния, которое они пробегают между двумя захватами на ловушки. Иначе дырки будут «пролетать» флуктуацию, не захватываясь в ней. С другой стороны, электроны должны оставаться свободными до тех пор, пока флуктуация нарастает. Таким образом, для рассматриваемого процесса и в пространстве и во времени есть характерные интервалы, которые и определяют возможную длину волны и ее период.

Распространяясь в кристалле, волна создает области, обогащенные и обедненные носителями. Дойдя до конца образца, эти области последовательно исчезают. В результате сопротивление образца периодически изменяется, и в цепи наблюдаются колебания тока. Так возникает генерация колебаний в кристалле. Поскольку эти колебания связаны с процессом рекомбинации, их, а значит, и возбуждаемые ими волны называют рекомбинационными.

Изучая особенности рекомбинационных волн, ученые заметили, что их частота и амплитуда зависят не только от особенностей генерирующего кристалла, но и от внешних условий — давления, температуры, освещения, наличия магнитного поля. Это означает, что такой кристалл можно использовать как миниатюрный преобразователь механических, тепловых, световых и др. воздействий в электрические сигналы.

КВАНТ для младших школьников

Задачи

1. Расшифруйте числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{ОДИН} \\ +\ \text{ОДИН} \\ \hline \text{МНОГО} \end{array}$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

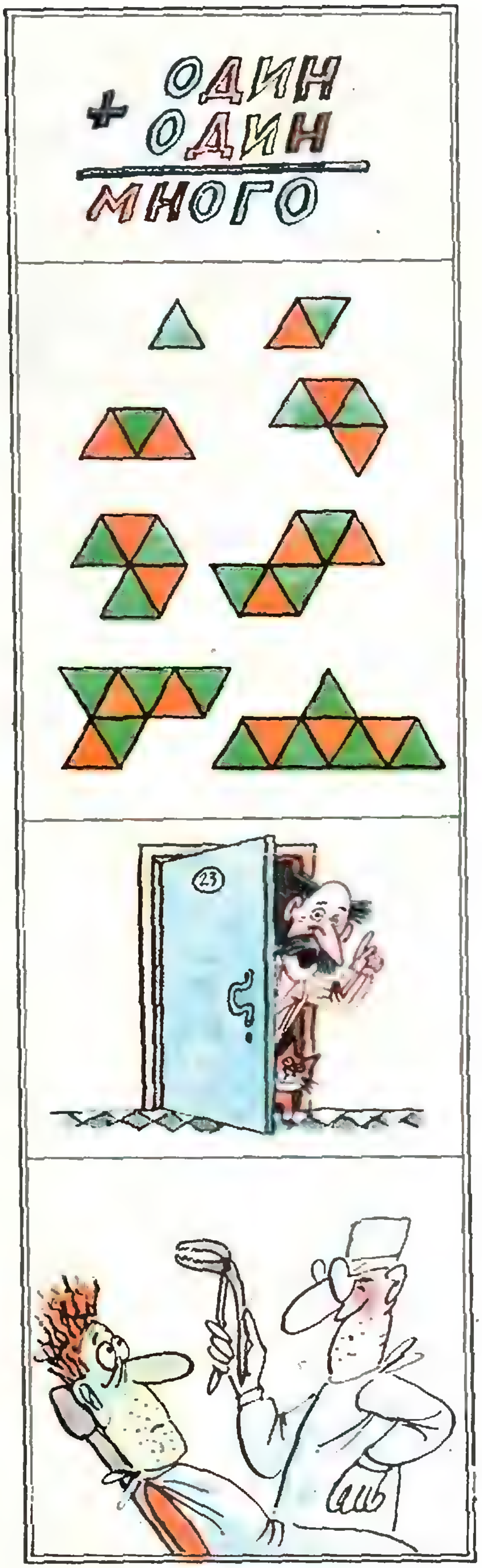
2. Возьмите шестизначное число, которое делится хотя бы на одно из чисел из списка: 7, 13, 11, 37. Переставьте первую цифру в конец числа. Проверьте, что полученное число вновь будет иметь тот же делитель из списка, что и первоначальное. Почему?

3. Из восьми фигурок, сделанных из правильных треугольников (см. рисунок), составьте один большой правильный треугольник.

4. В моей квартире две комнаты. Число, выражающее площадь первой комнаты в м^2, на единицу больше числа выражающего периметр этой комнаты в м, а площадь второй комнаты в м^2 на единицу меньше ее периметра. Каковы размеры этих комнат, если известно, что длина и ширина каждой комнаты выражаются целым числом метров?

5. Сидя в кресле зубного врача, пациент заметил, что вместе с другими инструментами врач прогрел и зеркальце. «Вы кладете зеркало в горячую воду для стерилизации?»— спросил пациент. «Не только для этого»— ответил врач. А для чего еще?

Эти задачи нам предложили: *Н. К. Антонович, Т. Б. Искандерова, Ю. А. Аленков, К. П. Гавриякин, А. П. Савин.*



Степа Мошкин путешествует

или Трое на плоту, не считая Гобоя

Е. Е. СЕМЕНОВ

В июльский полдень от живописной деревни Усть-Утки, что на берегу живописной реки Усть-Гуси, отчалил плот. На плоту было три путешественника: семиклассник Степа Мошкин, его приятель Ваня Синицын и Петр Иванович. Петр Иванович вел в школе физико-математический кружок и был заядлым путешественником. Петр Иванович стоял у весла на носу, Степа управлялся с веслом на корме, а Ваня отталкивался от дна шестом. Плот вышел на середину реки. Над палаткой, установленной на плоту, полоскался флаг. На одной его стороне был изображен Евклид, а на другой — Архимед.

— Посмотрите,— закричал вдруг Степа.— Гобой!

Действительно, метрах в пятидесяти за кормой, чуть задрав нос над водой и прижав уши, на середине реки плыл любимый Степин пес Гобой. Еще несколько секунд — и Гобой стал четвертым членом экипажа.

—Ну,— сказал Петр Иванович,— теперь, ребята, смотрите по сторонам. Мы с вами будем все время «играть в школу»: по очереди один из нас будет учителем, а двое других — учениками. Учитель будет задавать вопросы, а ученики, разумеется, должны на них отвечать. Вопросы же мы будем задавать о том, что увидим вокруг. Вот, например, первый: посмотрите, белье, что сушится на берегу, висит на веревке неподвижно. И флаг над нашей школой тоже неподвижен, а вот флаг на плоту у нас раздувается. Почему? Вот вам еще вопрос: видите ветку, что плывет возле берега? Она явно от нас отстает. А вот эта ветка, у нас за кормой, все время плывет рядом. Как вы думаете, почему так?

— Понятно,— сказали хором Степа и Ваня.

— Отвечать будем по очереди,— сказал Степа.— Первый — Ваня, он на «В».

Ваня не возражал.

— Флаг у нас на плоту раздувается потому,... И тут мы прервем Ваню. Он ответил на вопросы Петра Ивановича и ответил правильно. Подумайте и вы над этими вопросами. А проверить правильность своего ответа вы сможете, посмотрев ванин ответ, который будет приведен в следующем номере журнала. И дальше мы будем поступать так же: мы будем сообщать вам только вопросы, которые задавали друг другу путешественники, а отвечать на них вы будете сами. А потом проверите себя, получив девятый номер «Кванта».

Вот еще несколько вопросов, заданных Петром Ивановичем.

1. Скорость реки Усть-Гусь около 4 км/ч. С какой скоростью плыл плот по отношению к берегам?

2. Гобой плавает со скоростью 5 км/ч. С какой скоростью он приближался к плоту?

3. С какой скоростью плыл Гобой по отношению к берегам?

Ваня тоже придумал вопросы на тему Гобоя:

4. Если бы Гобой плыл против течения, то с какой скоростью двигался бы он по отношению к берегам?

5. С какой скоростью приближался бы Гобой к плоту, плывя ему навстречу?

А Степа сочинил про Гобоя задачу:

Степина задача. Гобой прыгнул в воду, когда расстояние между ним и плотом по реке было 50 м. Через 36 с Гобой оказался на плоту. При этом он все время плыл в направлении, перпендикулярном берегам. С какой скоростью по отношению к берегу плыл Гобой?

За эту задачу Петр Иванович похвалил Степу. А Ваня, решая ее, запутался в корнях, и у него получилось, что Гобой плыл со скоростью 80 км/ч. «Сомневаюсь,— сказал Петр Иванович.— С такой скоростью бегает антилопа гну». В конце концов Ваня справился с трудностями устного счета. Петр Иванович и его похвалил.

— Ой, смотрите, какая туча!— закричал Степа. И в самом деле, к солнцу подбиралась большая сизая туча.

— Будет гроза. Быстро к берегу!— скомандовал Петр Иванович.

Далеко ли гроза?

Прогремело раскатисто и сильно. Степа и Ваня стремглав влетели в палатку.

— Надо скорее закрывать палатку, а то вон как гремит и сверкает!— произнес Ваня, запыхавшись.

— Убить ведь может,— добавил Степа.

— Не беспокойтесь,— залезая в палатку сказал Петр Иванович.— Разряд произошел за три километра отсюда. Так что гроза пока на безопасном для нас расстоянии.

— Почему Вы так думаете? — спросил Степа с сомнением.

— А вот вы не закрывайте палатку и внимательно смотрите и слушайте. Как только сверкнет молния — засекайте время и считайте, сколько секунд пройдет до того, как загремит гром. Звук в воздухе распространяется со скоростью примерно 330 метров в секунду. А гром — это звук, сопровождающий электрический разряд в атмосфере, то есть молнию.

— Понятно,— догадался Степа.— Если от молнии до грома пройдет, например, 6 секунд, то молния, значит, сверкнула в 2 километрах от нас.

— Теперь я не буду бояться грома, ведь это только звук,— сказал Ваня.

— Петр Иванович, а как быть, если нет часов?— спросил Степа.

— На этот случай надо заранее приноровиться считать секунды приближенно. Удобно, например, произносить подряд размеренно числа 21, 22, 23, 24 и так далее, с такой скоростью, чтобы на произнесение каждого из них уходила одна секунда.

Тут снова сверкнула молния. Ребята немедленно принялись считать: двадцать один, двадцать два, ..., тридцать три — и раздался гром.

— Триста тридцать на тринадцать... Молния от нас примерно за четыре с половиной километра,— первым подсчитал Степа.

— Вот и прекрасно. Значит, гроза удаляется от нас,— сказал Петр Иванович.— Кстати, вот вам вопрос:

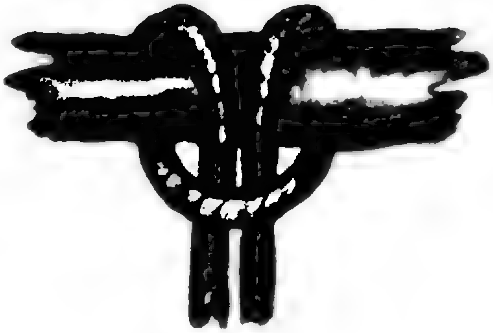
6. Почему при определении расстояния от нас до места разряда мы учитываем скорость распространения звука, но не учитываем скорость распространения света?

Можно ли выиграть в силе с помощью неподвижного блока?

После дождя стало прохладно.

— Как бы нам не простудиться,— сказал Петр Иванович.— Давайте-ка займемся физкультурой.

Он достал из рюкзака длинную веревку, сложил ее вдвое, перекинул петлю через крепкий сук березы, просунул в петлю свободные концы и затянул.



— Вот и готов канат. Кто полезет первым?

Степа довольно быстро и легко поднялся по канату, ухватился за сук и хотел было покачаться. Но сук был мокрый, скользкий, и Степа благоразумно спустился. Пришла Ванина очередь. Однако у него не хватало силенок подняться и наполовину.

— Вот если бы был подвижный блок... Тогда бы я влез — ведь подвижный блок дает выигрыш в силе в два раза!— мечтательно произнес он.

— А может быть, тебе помог бы и неподвижный блок?— спросил Петр Иванович.

— Ну нет,— ответил Ваня.— Меня не проведешь. Во-первых неподвижного блока у нас нет. А во-вторых, неподвижный блок не дает выигрыша в силе... Вот разве перебросить веревку через сук. Я буду держаться за один конец, а за другой вы со Степой будете тянуть меня вверх.

— А все-таки подумайте, нельзя ли с помощью неподвижного блока выиграть в силе,— сказал Петр Иванович.

Друзья надолго задумались. Смотрели на сук, на веревку, друг на друга...

— Нашел!— закричал Степа.— Во-первых, я нашел неподвижный блок: сук-то скользкий, трение веревки об него будет очень малым, и она будет перемещаться по нему почти как по колесику неподвижного блока. Во-вторых, я придумал, как выиграть в силе в два раза: перекидываю веревку через наш «неподвижный блок», одним концом веревки обвязываю себя вокруг пояса, а по другому концу влезаю. Мой вес распределится на два конца, и мне надо будет тянуть за веревку с силой, в два раза меньшей!

— Молодец!— радостно воскликнул Петр Иванович.

—...дец!— ответило ему эхо.

7. Получишь ли ты выигрыш в работе, поднимаясь таким образом?

А Степу он спросил про эхо:

8. Эхо возвратило слово «молодец» через 1 секунду. На каком расстоянии от нас находится та преграда, от которой отразился звук?

* * *

Вечером путешественники сидели у костра. Над рекой взошла полная луна.

— Можете ли вы приближенно определить размеры Луны? — спросил Петр Иванович.— Все, что вам для этого нужно знать, это расстояние от нее до Земли. Оно равно примерно 384 000 км. Все остальные измерения вы можете проделать сами. Подумайте, как это сделать. И пусть это будет последним вопросом на сегодня.

«Задачи на премию» прошлого века

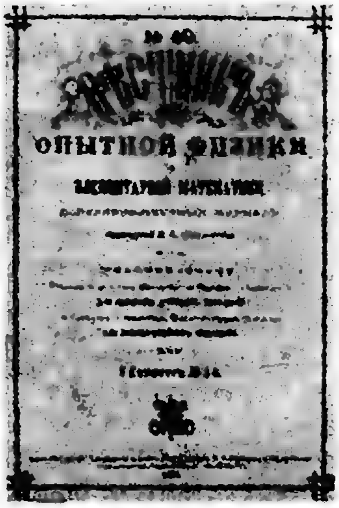
Кандидат педагогических наук
И. С. ПЕТРАКОВ

В 1884 г. профессор Киевского университета В. П. Ермаков на свои средства начал издавать «Журнал элементарной математики». Журнал распространялся по подписке по всей стране. К работе в редакции были привлечены многие видные математики того времени.

Через два года у Ермакова не хватило средств — журнал, под названием «Вестник опытной физики и элементарной математики», стал издавать и редактировать Э. К. Шпачинский. Впрочем, состав редакции не изменился. Ермаков по-прежнему принимал в ее работе самое активное участие.

С 1899 г. редактором «Вестника» был известный впоследствии геометр В. Ф. Каган. Издание «Вестника» продолжалось до января 1917 г.

С 1885 г. в журнале стали публиковаться «задачи на премию». (В нашей стране это был первый конкурс по решению задач, проводившийся в широкой печати.) Приведем первые пять задач (их терминология, конечно, отличается от нашей).



Задача 1 (1885 г.). Найти три целых числа, чтобы сумма их квадратов делилась без остатка на их произведение. Показать, что задача имеет бесконечное число решений, хотя и нельзя составить общего выражения для искомых чисел [*]. Показать, что частное не может равняться никакому иному числу, кроме 3 и 1. Привести все решения, не превосходящие 1000.

Задача 2 (1886 г.). Доказать следующее предложение: если сумма квадратов двух взаимно простых чисел разлагается на множители, то каждый множитель также может быть выражен суммой квадратов двух чисел.

Задача 3 (1887 г.). Даны два равных непересекающихся круга; на двух общих внутренних касательных к ним взяты две произвольные точки F и F'. Из каждой из этих точек к каждому кругу можно провести еще по одной касательной; пусть касательные, проведенные из точек F и F' к одному кругу, встречаются в точке A, к другому кругу — в точке B. Требуется доказать, что прямая AB параллельна прямой, соединяющей центры кругов, и что прямая, соединяющая середины прямых FF' и AB, проходит через середину прямой, соединяющей центры. Показать, что в случае неравных кругов прямая AB проходит через внешний центр подобия кругов [*].

Задача 4 (сентябрь 1888 г.). Ряд x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_n, x_{n+1}, ... составлен таким образом, что между каждыми двумя смежными числами существует зависимость

$$x_n^2+x_{n+1}^2+2ax_nx_{n+1}+2b(x_n+x_{n+1})+c=0.$$

Выразить произвольный член ряда через первый и коэффициенты a, b и c.

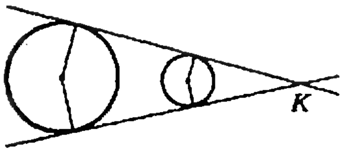
Задача 5 (октябрь 1888 г.). Составить между четырьмя неизвестными x, y, z, t две такие зависимости, чтобы три выражения

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$

$$\frac{x}{x^2+ax+b}+\frac{y}{y^2+ay+b}+\frac{z}{z^2+az+b}+\frac{t}{t^2+at+b},$$

$$\frac{1}{x^2+ax+b}+\frac{1}{y^2+ay+b}+\frac{1}{z^2+az+b}+\frac{1}{t^2+at+b}$$

обращались в постоянные величины [**]. Определить эти постоянные величины.



---

[*] Что авторы понимали под «общим выражением», несколько неясно. Составители Задачника «Кванта», вероятно, не приняли бы столь расплывчатой формулировки.

[*] Точка K на рисунке — «внешний центр подобия» окружностей.

[**] Видимо, по замыслу авторов требовалось написать два соотношения, связывающих x, y, z, t, a и b, при выполнении которых указанные выражения не зависели бы от x, y, z и t.

Поправка

В «Кванте» № 5 в статье «На пальцах и в уме» по вине редакции на с. 41 содержится несколько ошибок. Во второй колонке на с. 41 должно быть:

Для того чтобы найти $(10x+5)^2$, достаточно x умножить на число, следующее за ним, и к полученному произведению приписать 25. Например,

$$35^2=3\cdot4\cdot100+25=1225.$$

Это правило является следствием равенства

$$(10x+5)^2=100x(x+1)+25, \quad (3)$$

которое, в свою очередь, — частный случай тождества (2).

задачник кванта

Задачи

M816—M820; Ф828—Ф832

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 октября 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M816, M817» или «Ф828». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M816. Натуральные числа a и b получаются друг из друга перестановкой цифр. Докажите, что

а) суммы цифр чисел $2a$ и $2b$ равны;

б) суммы цифр чисел $a/2$ и $b/2$ равны (если a и b четные);

в) суммы цифр чисел $5a$ и $5b$ равны.

А. Д. Лисицкий

M817. Точка K лежит на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что соотношение

$$|AK|^2=|AB|\cdot|AC|-|KB|\cdot|KC|$$

выполнено тогда и только тогда, когда $|AB|=|AC|$ или $\widehat{BAK}=\widehat{CAK}$.

А. Л. Тоом

M818. Пусть какие-то k вершин правильного n-угольника закрашены синим цветом (остальные вершины — черные). Будем называть множество закрашенных вершин *равномерным*, если при любом m количества синих вершин в любых двух наборах из m последовательных вершин n-угольника совпадают или отличаются на 1 (см. рис. 1, где приведен пример равномерного множества для $n=8$, $k=5$).

а) Постройте равномерные множества для $n=12$, $k=5$; $n=17$, $k=7$.

Докажите, что равномерное множество существует и единственно (с точностью до поворотов n-угольника),

б) если n делится на k;

в) для любых n и k ($k\leqslant n$).

М. Л. Концевич

M819. В Швамбрании n городов, каждые два из которых соединены дорогой. (Дороги сходятся лишь в городах, все пересечения организованы в разных уровнях.) Злой волшебник намеревается установить на каждой дороге одностороннее движение так, что, выехав из любого города, в него уже нельзя будет вернуться. Докажите, что а) волшебник может это сделать;

б) при этом найдется город, из которого можно добраться до всех других, и найдется город, из которого нельзя выехать;

в) существует $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ способов осуществить намерение злого волшебника.

Л. М. Коганов

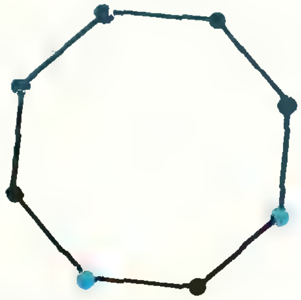


Рис. 1.

М820*. а) Правильный восьмиугольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы два прямоугольника.

б) Правильный $4k$-угольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы k прямоугольников.

в) Найдите суммарную площадь прямоугольников из пункта б), если длина стороны $4k$-угольника равна 1.

В. В. Производов

Ф828. Из точек A, B и C, лежащих на одной прямой (точка B лежит между A и C), бросают три тела — a, b и c:

1) бросают одновременно тела a и b и не бросают тело c; при этом тела a и b сталкиваются в полете;

2) бросают одновременно тела a и c и не бросают тело b; при этом тела a и c сталкиваются раньше, чем тела a и b в первом случае.

При каждом бросании каждому телу сообщают одну и ту же начальную скорость. Столкнутся ли в полете тела b и c, если не бросать тело a?

С. С. Кротов

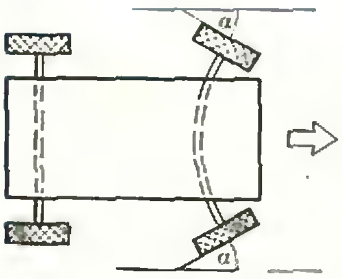


Рис. 2.

Ф829. Передняя ось телеги изогнута так, что плоскости колес образуют угол α с направлением движения. Найти силу сопротивления при установившемся равномерном движении телеги (рис. 2). Коэффициент трения скольжения колес о дорогу μ. Вес телеги P равномерно распределен на все колеса.

А. П. Ершов

Ф830. Известно, что давление насыщенного пара над водным раствором сахара меньше, чем над чистой водой на величину $\Delta p = 0{,}05 \cdot p_{\text{нас}} \cdot c$, где $p_{\text{нас}}$ — давление насыщенного пара над чистой водой, c — весовая концентрация раствора. Цилиндрический сосуд, наполненный до высоты $h_0 = 10$ см раствором сахара с концентрацией $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, помещают под широкий колпак. На дне налит раствор сахара с концентрацией $c_2 = 10^{-3}$ (рис. 3; высота уровня раствора много меньше h_0). Каким будет уровень раствора в сосуде после установления равновесия? Температура под колпаком поддерживается постоянной и равной 20°С. Пар над поверхностью раствора содержит только

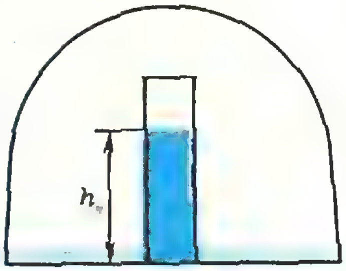


Рис. 3.

молекулы воды. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К).

А. И. Буздин

Ф831. Незаряженная проводящая тонкостенная сферическая оболочка помещена в однородное электрическое поле. При напряженности поля E_0 оболочка разрывается. При какой минимальной напряженности поля разорвется оболочка вдвое большего радиуса, имеющая ту же толщину стенок?

С. К. Строков

Ф832*. Квадратная недеформируемая сверхпроводящая рамка со стороной a расположена горизонтально и находится в неоднородном магнитном поле, индукция которого меняется в пространстве по закону

$$B_x=-kx,$$
$$B_y=0,$$
$$B_z=kz+B_0.$$

Масса рамки m, индуктивность L. В начальный момент центр рамки совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям X и Y. Рамку отпускают. Как она будет двигаться и где окажется через время t?

О. Ю. Никишина

Problems

M816—M820; P828—P832

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that October 31st, 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1 «Квант». Please send us the solutions of physics and

M816. The natural numbers a and b can be obtained from each other by changing the order of their digits. Prove that

a) the sum of digits of the numbers $2a$ and $2b$ are equal;

b) the sum of digits of the numbers $a/2$ and $b/2$ (when a and b are even) are equal;

c) the sum of digits of $5a$ and $5b$ are equal.

A. D. Lisitski

M817. The point K lies on side BC of triangle ABC. Prove that the relation

$$|AK|^2=|AB|\cdot|AC|-|KB|\cdot|KC|$$

holds if and only if $|AB|=|AC|$ or $\widehat{BAK}=\widehat{CAK}$.

A. L. Toom

M818. Suppose k vertices of a regular polygon with n sides are painted blue (the others — black). A set of painted vertices is called *uniform*, if for any m the amount of blue vertices in any two sets of m successive vertices of the polygon is the same or differs by 1 (see figure Рис. 1, where an example of a uniform set is given for $n=8$, $k=5$).

a) Construct uniform sets for $n=12$, $k=5$; $n=17$, $k=7$. Prove that uniform sets exist and are unique (up to rotations of the polygon)

mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

b) if n is divisible by k;
c) for all n and k $(k < n)$.

M. L. Kontsevich

M819. There are n cities in Shvanbrania and every two cities are joined by road. (The roads come together at the cities only, the intersections being on different levels.) An evil magician intends to establish one-way traffic on all the roads so that, having left a city, one can never return there. Prove that

a) the magician can do this;

b) when he does, there will be a city which can be reached from any other and one nobody will be able to enter;

c) how many ways are there to carry out the magician's intention?

L. M. Koganov

M820*. a) A regular octagon is split up into a finite number of parallelograms. Prove that there are at least two rectangles among them.

b) A regular polygon with $4k$-sides is split up into a finite number of parallelograms. Prove that there are at least k rectangles among them.

c) Find the total area of the rectangles indicated in b) if the polygon's side is of length 1.

V. V. Proizvolov

P828. Three solids a, b, c are thrown from points A, B, C in space.
1) When the solids a, b are thrown simultaneously (and c is not), a and b collide in flight.
2) When a, c are thrown simultaneously (and b is not), a and c collide sooner than a and b did. The body a is thrown with the same initial velocity in both cases. Will the bodies c and b collide if they are thrown simultaneously (and a is not) with the same initial velocities as before? The points A, B, C are collinear, the point B being between A and C.

S. S. Krotov

P829. The leading axis of a cart is bent so that the planes of the wheels form the angle α with the direction of motion. Find the force of resistance for established uniform motion of the cart (see figure Рис. 2). The sliding friction coefficient of the wheels on the road is μ. The weight P of the cart is uniformly distributed among the wheels.

A. P. Ershov

P830. It is known that the pressure of saturated vapor over a solution of sugar in water is less than that over pure water by $\Delta p = 0.05\, p_{sat}\, c$, where p_{sat} is the pressure of saturated vapor over pure water, c is the weight concentration of the solution. A cylindrical receptacle, filled to height $h_0 = 10$ cm by a sugar solution of concentration $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ is placed under a large cover. On the bottom there is a sugar solution of concentration $c_2 = 10^{-4}$ (its level is negligible as compared to h_0). What will the level of the solution be when equilibrium is established? The temparature under the cover is maintained constantly equal to 20 °C. The vapor above the solution only contains molecules of water. The universal gas constant is $R = 8.3$ J/(mole $\cdot$ K).

A. I. Buzdin

P831. An uncharged conducting thin-walled spherical envelope is placed in a uniform electric field. When the field reaches the tension E_0 the envelope breaks. For what minimal tension will an envelope of twice the radius of the first one, with walls the same width, break?

S. K. Strokov

P832*. A square undeformable superconducting frame of side a is placed horizontally in a non-uniform magnetic field whose induction in space is given by

$$B_x=-kx,\ B_y=0,\ B_z=kz+B_0.$$

The mass of the frame is m, its inductivity is L. At the initial moment the centre of the frame is at the origin with sides parallel to the X and Y axes. How will the frame move after it is released and where will it be after time t?

O. Yu. Nikishina

Решения задач

M801—M805; Ф813—Ф817

M801*. *Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство*

$$[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+[\sqrt[4]{n}]+\ldots+[\sqrt[n]{n}]=[\log_2 n]+[\log_3 n]+[\log_4 n]+\ldots+[\log_n n]$$

($[x]$ означает целую часть числа x).

Заметим, что целая часть числа $a\geqslant 1$ равна количеству натуральных чисел, меньших или равных a. В частности, $[\sqrt[x]{n}]-1$ есть число натуральных $y\geqslant 2$, таких что $y\leqslant\sqrt[x]{n}$, то есть $y^x\leqslant n$. Следовательно, сумма $([\sqrt{n}]-1)+([\sqrt[3]{n}]-1)+\ldots+([\sqrt[n]{n}]-1)$ равна *количеству N всех пар (x, y) натуральных чисел, больших 1, удовлетворяющих неравенству $y^x\leqslant n$* (при $x>n$ это неравенство решений не имеет, так как $2^x>n$).

Аналогично рассматривается правая часть: $[\log_m n]-1$ — это число натуральных $x\geqslant 2$, таких, что $x\leqslant\log_m n$, то есть $m^x\leqslant n$. Поэтому

$$([\log_2 n]-1)+([\log_3 n]-1)+\ldots+([\log_n n]-1=N$$

(при $m>n$, $y\geqslant 2$ неравенство $m^y\leqslant n$, очевидно, не выполняется).

Итак, обе части нашего равенства равны $N+n-1$.

В. В. Касиль

◆

M802. *На сторонах AB и BC треугольника ABC как на гипотенузах построены вне его прямоугольные треугольники APB и BQC с одинаковыми углами величины β при их общей вершине B. Найдите углы треугольника PQK, где K — середина стороны AC.*

Ответ: $\hat{P}=\hat{Q}=\beta$, $\hat{K}=180^\circ-2\beta$.

Эта задача относится к довольно большой группе задач, в которых рассматриваются треугольники (или другие многоугольники) данной формы, построенные на сторонах другого треугольника (или многоугольника); наверное, самая известная из них — это так называемая «задача Наполеона» — *доказать, что центры правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника вне его, сами образуют правильный треугольник.* Как правило, эти задачи можно решать с помощью композиции преобразований плоскости.

Рассмотрим два преобразования подобия (рис. 1): $F_P=H_P^k\circ R_P^{90^\circ}$, где $k=|PB|:|PA|$, — композицию поворота $R_P^{90^\circ}$ вокруг P на 90° и гомотетии с центром P и коэффициентом k, и $F_Q=H_Q^{\frac{1}{k}}\circ R_Q^{90^\circ}$ (такие преобразования называют *поворотными гомотетиями* или *спиральными подобиями*). Их композиция $F=F_Q\circ F_P$ оставляет точку K на месте (этим и обусловлен выбор именно таких преобразований; доказательство приведем чуть позже). Пусть $F_P(K)=K_1$ (рис. 2), тогда $F_Q(K_1)=K$. Треугольники KPK_1, KQK_1 и APB подобны друг другу как прямоугольные треугольники с одинаковым отношением катетов ($|KP|:|PK_1|=|KQ|:|QK_1|=k=|PA|:|PB|$). А поскольку KK_1 — общая гипотенуза треугольников KPK_1 и KQK_1, они конгруэнтны, так что $|KP|=|KQ|$. Следовательно, $\widehat{PKQ}=360^\circ-2\cdot 90^\circ-2\beta$, $\widehat{KPQ}=\widehat{KQP}=(180^\circ-(180^\circ-2\beta))/2=\beta$.

Остается доказать, что K — неподвижная точка преобразования подобия F. Отметим следующие свойства F:

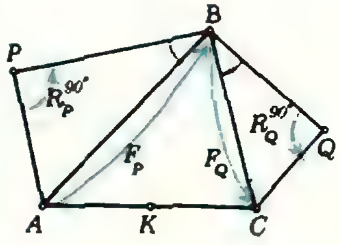


Рис. 1.

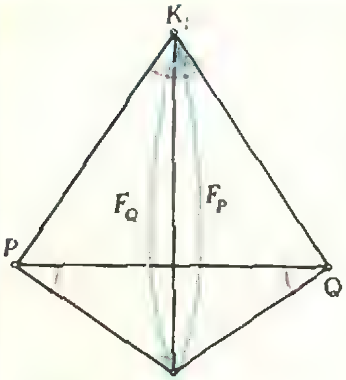


Рис. 2.

1) F — перемещение (потому что коэффициент подобия F равен $k \cdot \frac{1}{k} = 1$);

2) Любой луч при перемещении F переходит в противоположно направленный (при гомотетии направления лучей сохраняются, при повороте любой луч поворачивается на угол, равный углу поворота, поэтому общий угол поворота любого луча при преобразовании F равен $90° + 90° = 180°$);

3) $F(A) = C$ ($F_P(A) = B$ по выбору F_P, а $F_Q(B) = C$ потому, что $\widehat{BQC} = 90°$ и $|QC| : |QB| = |PA| : |PB| = 1/k$).

Отсюда вытекает, что F — это центральная симметрия Z_K с центром K и, в частности, $F(K) = K$.

Попробуйте таким же способом решить «задачу Наполеона».

В. Н. Дубровский

◆

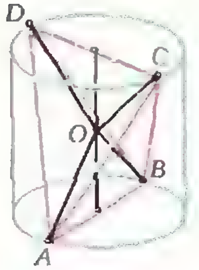
М803. *Сумма двух рациональных чисел x и y — натуральное число, сумма обратных к ним чисел $1/x$ и $1/y$ — тоже натуральное число. Какими могут быть x и y?*

Ответ: $(x, y) = (1, 1), (1/2, 1/2), (2, 2)$. Представим числа x и y в виде несократимых дробей: $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$. Тогда $x + y = \frac{ad + bc}{bd}$ — натуральное число. Следовательно, $ad + bc$ делится на b, а так как a и b — взаимно простые числа, d делится на b. С другой стороны, $ad + bc$ делится на d, поэтому b делится на d. Отсюда вытекает, что $b = \pm d$. Аналогично, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{ad + bc}{ac}$ — натуральное число, поэтому $a = \pm c$. Таким образом, $x = y$ или $x = -y$. Второй случай невозможен, поскольку по условию $x + y \geqslant 1$. В первом случае $x + y = 2x = 2a/b$ и $2/x = 2b/a$ — натуральные числа, то есть a и b — делители двойки, причем $a/b > 0$. Следовательно, $a/b = 1/1 = 1$, или $a/b = 1/2$, или $a/b = 2/1 = 2$.

А. П. Савин

◆

М804. *Точка O — середина оси прямого кругового цилиндра, A и B — диаметрально противоположные точки окружности нижнего основания цилиндра, C — некоторая точка окружности верхнего основания, не лежащая в плоскости OAB. Докажите, что сумма двугранных углов трехгранного угла $OABC$ (с вершиной O) равна 2π.*



Пусть D — точка окружности верхнего основания цилиндра, диаметрально противоположная точке C (рис. 1). Мы докажем, что трехгранные углы $OABC$, $OBCD$, $OCDA$ и $ODAB$ с общей вершиной O попарно конгруэнтны. Поскольку каждые три из этих углов имеют общее ребро (OA, OB, OC или OD) и сумма их двугранных углов при этом ребре, очевидно, равна 2π, сумма всех их 12 двугранных углов равна $4 \cdot 2\pi = 8\pi$. Следовательно, сумма двугранных углов каждого из них, в частности, угла $OABC$, равна $8\pi/4 = 2\pi$.

Для доказательства конгруэнтности этих трехгранных углов заметим, что противоположные ребра тетраэдра $ABCD$ попарно равны ($|AB| = |CD|$ как диаметры конгруэнтных окружностей, а ребра AC и BD, а также AD и BC взаимно симметричны относительно оси цилиндра; (см рис) А так как точка O равноудалена от всех вершин тетраэдра, $\triangle OAB \cong \triangle OCD$, $\triangle OAC \cong \triangle OBD$ и $\triangle OAD \cong \triangle OBC$. Поэтому рассматриваемые трехгранные углы имеют соответственно равные плоские углы, и значит, конгруэнтны. Конгруэнтность трехгранных углов можно доказать и иначе, заметив, что прямые, соединяющие середины ребер AC и BD, а также AD и BC, как и ось цилиндра, являются осями симметрии тетраэдра $ABCD$

Тетраэдр $ABCD$ с конгруэнтными гранями, который помог нам решить задачу, обладает многими замечательными свойствами. Большой список его свойств имеется в статье В. Э. Матизена в «Кванте» № 6 за этот год.

И. К. Жук

M805*. *а) На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны, соответственно, точки A_1, B_1, C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} \leqslant S_{ABC}/4$.*

б) На гранях BCD, CDA, BDA, ABC тетраэдра $ABCD$ выбраны, соответственно, точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $V_{A_1B_1C_1D_1} \leqslant V_{ABCD}/27$.

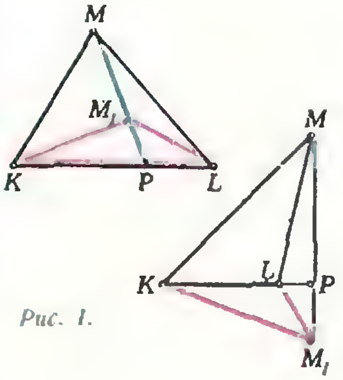


Рис. 1.

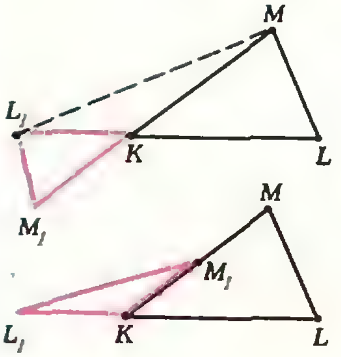


Рис. 2.

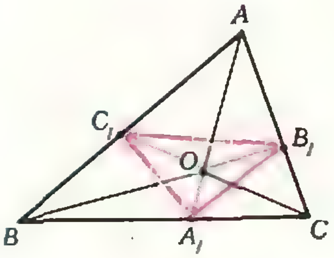


Рис. 3.

Прежде всего докажем несколько простых, но очень полезных лемм об отношениях площадей треугольников и объемов тетраэдров.

(1) *Если прямая MM_1 пересекает прямую KL в точке P (рис. 1), то*

$$S_{KLM} : S_{KLM_1} = |MP| : |M_1P|.$$

Это следует из очевидного равенства $h_M : h_{M_1} = |MP| : |M_1P|$, где h_M и h_{M_1} — высоты треугольников KLM и KLM_1.

(2) *Если точки L_1 и M_1 лежат на прямых KL и KM (рис. 2), то*

$$S_{KLM} : S_{KL_1M_1} = \frac{|KL| \cdot |KM|}{|KL_1| \cdot |KM_1|}.$$

Действительно, $S_{KLM} : S_{KL_1M_1} = (S_{KLM} : S_{KL_1M}) \cdot (S_{KL_1M} : S_{KL_1M_1}) = (|KL| : |KL_1|) \cdot (|KM| : |KM_1|)$ в силу (1).

(3) *Если прямая NN_1 пересекает плоскость KLM в точке P, то*

$$V_{KLMN} : V_{KLMN_1} = |NP| : |N_1P|.$$

(Доказывается аналогично (1).)

(4) *Если точки L_1, M_1, N_1 лежат на прямых KL, KM, KN*, то

$$V_{KLMN} : V_{KL_1M_1N_1} = \frac{|KL| \cdot |KM| \cdot |KN|}{|KL_1| \cdot |KM_1| \cdot |KN_1|}.$$

(Доказывается аналогично (2).)

Перейдем непосредственно к решению задачи.

а) Пусть O — точка пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1; S, S_A, S_B и S_C — площади треугольников ABC, OBC, OCA и OAB (рис. 3). Тогда по (1)

$$\frac{|OA|}{|OA_1|} = \frac{|AA_1| - |OA_1|}{|OA_1|} = \frac{S}{S_A} - 1 = \frac{S - S_A}{S_A}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для отрезков BB_1 и CC_1. Таким образом,

$$\frac{|OA_1|}{|OA|} = \frac{S_A}{S - S_A}, \quad \frac{|OB_1|}{|OB|} = \frac{S_B}{S - S_B}, \quad \frac{|OC_1|}{|OC|} = \frac{S_C}{S - S_C}.$$

Разобьем $\triangle A_1B_1C_1$ на три треугольника отрезками OA_1, OB_1 и OC_1 и оценим площадь каждого из них отдельно.

В силу (2)

$$S_{OA_1B_1} = S_{OAB} \cdot \frac{|OA_1| \cdot |OB_1|}{|OA| \cdot |OB|} =$$

$$= S_C \cdot \frac{S_AS_B}{(S - S_A)(S - S_B)} = \frac{S_AS_BS_C}{(S - S_A)(S - S_B)(S - S_C)} \cdot$$

$$\cdot (S - S_C) = k \cdot (S - S_C).$$

Складывая это равенство с аналогичными равенствами для треугольников OB_1C_1 и OC_1A_1, получим:

$$S_{A_1B_1C_1} = k((S - S_C) + (S - S_A) + (S - S_B)) = 2kS. \qquad (*)$$

Чтобы оценить k, запишем «неравенства о средних» для S_A и S_B, S_B и S_C, S_C и S_A:

$$\sqrt{S_AS_B} \leqslant \frac{S_A + S_B}{2}, \quad \sqrt{S_BS_C} \leqslant \frac{S_B + S_C}{2}, \quad \sqrt{S_CS_A} \leqslant \frac{S_C + S_A}{2}$$

и перемножим их:

$$S_AS_BS_C \leqslant (S_A + S_B)(S_B + S_C)(S_C + S_A)/8 =$$

$$= (S - S_C)(S - S_A)(S - S_B)/8. \qquad (**)$$

Таким образом, $k \leqslant 1/8$ и $S_{A_1B_1C_1} \leqslant S_{ABC}/4$.

б) Приведем лишь общий план доказательства — оно почти дословно повторяет рассуждения пункта а).

Пусть O — точка пересечения данных отрезков, V, V_A, V_B, V_C и V_D — объемы тетраэдров $ABCD$, $OBCD$, $OCDA$, $ODAB$ и $OABC$ (рис. 4). Пользуясь леммами (3) и (4) (вместо (1) и (2) в пункте а)), легко показать, что

$$V_{A_1B_1C_1D_1}=3kV,$$

(ср. (*)), где

$$k=\frac{V_AV_BV_CV_D}{(V-V_A)(V-V_B)(V-V_C)(V-V_D)}.$$

Перемножая «неравенства о средних» для всех четырех троек, составленных из чисел V_A, V_B, V_C и V_D: $\sqrt[3]{V_AV_BV_C}<\frac{1}{3}(V_A+V_B+V_C)=\frac{1}{3}(V-V_D)$, ..., получим (ср. (**)), что $k<1/81$, и, следовательно, $V_{A_1B_1C_1D_1}<<V_{ABCD}/27$.

Р. Н. Ушаков

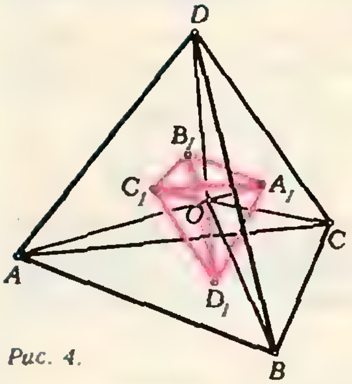


Рис. 4.

◆

Ф813. *Три невесомых шарнирно связанных стержня длины a каждый закреплены шарнирно в точках A и B, лежащих на одной горизонтали (см. рисунок): |AB| = 2a. К шарниру C подвесили груз массы m. При какой минимальной силе, приложенной к шарниру D, средний стержень будет сохранять горизонтальное положение?*

Поскольку шарнир C находится в равновесии, сумма сил, действующих на него, равна нулю. Следовательно (см. рисунок),

$$(m+m_ш)g\sin\alpha=T_2\cos\alpha, \qquad (1)$$

где $m_ш$ — масса шарнира. Из условия равновесия шарнира D и условия горизонтальности среднего стержня следует, что

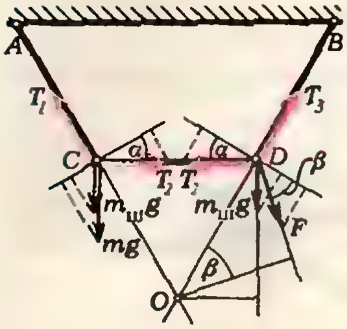
$$T_2\cos\alpha=F\cos\beta+m_шg\sin\alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$F=\frac{T_2\cos\alpha-m_шg\sin\alpha}{\cos\beta}=\frac{mg\sin\alpha}{\cos\beta}>mg\sin\alpha.$$

Таким образом, минимальная сила $\vec{F}_{min}$, при которой средний стержень сохраняет горизонтальное положение, равна по абсолютной величине $mg\sin\alpha=mg/2$ и направлена перпендикулярно стержню BD.

С. К. Строков



Приведем еще одно решение этой задачи, присланное читателем *А. Р. Зубаткиным*.

Внешние силы, действующие на систему, это: приложенные в точках A и B силы реакции со стороны «потолка», равные, соответственно, $|\vec{T}_1|$ и $|\vec{T}_3|$ и направленные вдоль стержней AC и BD; силы тяжести $m_ш\vec{g}$, приложенные к шарнирам; сила $m\vec{g}$, равная весу груза; сила $\vec{F}$, приложенная к шарниру D. Поскольку система находится в равновесии, сумма моментов всех сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Запишем это условие для точки O (см. рисунок):

$$mga\sin\alpha+m_шga\sin\alpha=Fa\cos\beta+m_шga\sin\alpha.$$

Отсюда

$$F=\frac{mg\sin\alpha}{\cos\beta}\Rightarrow F_{min}=mg\sin\alpha=mg/2,\ \vec{F}\perp[BD].$$

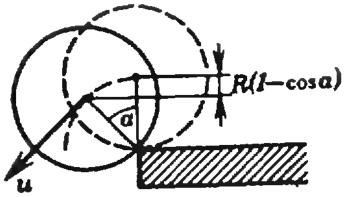
◆

Ф814. *На гладкой горизонтальной поверхности тележки лежит шар радиуса R. Тележка начинает двигаться со скоростью v_0. Найти горизонтальную проекцию скорости шара в момент его удара об пол.*

Рассмотрим движение шара в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}_0$. В этой системе шар движется со скоростью $-\vec{v}_0$. С того момента, как центр шара окажется точно над краем тележки, и до момента отрыва центр шара движется по окружности радиуса R с центром в точке касания (при этом шар не вращается вокруг собственного центра). Найдем угол α (см. рисунок) в момент отрыва. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии и вторым законом Ньютона.

Пусть u — скорость центра шара в момент отрыва. Тогда

$$\frac{mu^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}+mgR(1-\cos\alpha)\quad(m\text{ — масса шара}) \qquad (1)$$



(закон сохранения энергии),

$$\frac{mu^2}{R} = mg\cos\alpha \qquad (2)$$

(второй закон Ньютона). Из (1) и (2) находим

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}\left(\frac{v_0^2}{gR} + 2\right), \quad u = \sqrt{\frac{1}{3}\left(v_0^2 + 2gR\right)}.$$

Поскольку $\cos\alpha < 1$, ясно, что при $v_0^2 > gR$ отрыв произойдет сразу в тот момент, когда центр шара окажется над крайней точкой тележки, и горизонтальная проекция скорости шара u_r при падении на пол будет равна нулю. Если $v_0^2 < gR$, то

$$u_r = v_0 - u\cos\alpha = v_0 - \frac{1}{3Rg}\sqrt{\frac{1}{3}\left(v_0^2 + 2Rg\right)^3}.$$

А. Р. Зильберман

Ф815. *Нижний конец капилляра радиуса $r = 0{,}2$ мм и длины $l = 8$ см погружают в воду, температура которой постоянна и равна 0 °С. Температура верхнего конца капилляра $t_0 = 100$ °С. Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения $\sigma(t)$ воды приведена в таблице. На какую высоту поднимется вода в капилляре? Теплопроводность капилляра намного превосходит теплопроводность воды в нем; теплообменом с окружающим воздухом можно пренебречь.*

t, °С	σ, $\frac{\text{мН}}{\text{м}}$
0	76
20	73
50	67
90	60

◆

Пусть x — высота столбика воды в капилляре. Температура капилляра и, следовательно, воды на этой высоте равна, очевидно,

$$t_x = t_0\frac{x}{l}.$$

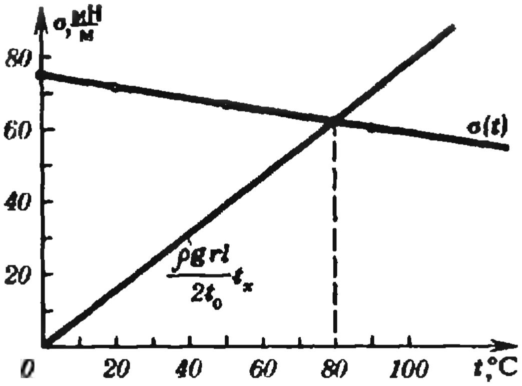
Вода в капилляре удерживается силами поверхностного натяжения. Если $\sigma(t_x)$ — коэффициент поверхностного натяжения при температуре t_x, то

$$x = \frac{2\sigma(t_x)}{\rho g r},$$

где ρ — плотность воды. Отсюда находим

$$\sigma(t_x) = \frac{\rho g r x}{2} = \frac{\rho g r l t_x}{2t_0}.$$

Температура t_x на уровне максимального поднятия воды



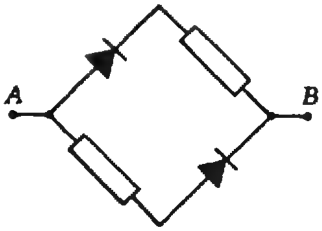
определяется, очевидно, точкой пересечения графика зависимости $\sigma(t_x) = \frac{\rho g r l}{2t_0}t_x$ и графика $\sigma(t)$, построенного по данным таблицы. Из рисунка видно, что $t_x \approx 80$°С. Следовательно,

$$x = l\frac{t_x}{t_0} \approx 6{,}4 \text{ см}.$$

Задачу можно решить и аналитически, если заметить, что точки, взятые из таблицы, хорошо укладываются на прямую.

А. И. Буздин

Ф816. *В схеме, приведенной на рисунке, сопротивления резисторов одинаковы и равны $R=60$ Ом, диоды идеальные. Батарею, дающую напряжение $U=12$ В, подключают к точкам A и B на время $t_1=1$ с. Затем, поменяв полюса местами, подключают батарею к схеме на время $t_2=5$ с. Найти выделившееся в схеме количество теплоты.*



В условии задачи не сказано, какими полюсами подключается батарея к точкам A и B на время t_1, поэтому рассмотрим два возможных варианта включения.

1) Сначала к точке A подключают «плюс» батареи, а к точке B — «минус». Так как диоды идеальные, их сопротивления при этом равны нулю, и все три резистора оказываются включенными параллельно друг другу. Полное сопротивление цепи равно $R_1=R/3=20$ Ом. За время t_1 в цепи выделится количество теплоты

$$Q_1=\frac{U^2}{R_1}t_1=7{,}2\ \text{Дж}.$$

Когда полюса поменяли местами, ток через диоды не течет, и все три резистора оказываются включенными последовательно. Полное сопротивление цепи при этом равно $R_2=3R=180$ Ом. За время t_2 в цепи выделится количество теплоты

$$Q_2=\frac{U^2}{R_2}t_2=4\ \text{Дж}.$$

Общее количество выделившейся в цепи теплоты равно

$$Q=Q_1+Q_2=11{,}2\ \text{Дж}.$$

2) Если сначала к точке A подключен «минус» батареи, а к точке B — «плюс», то

$$Q_1'=\frac{U^2}{3R}t_1\approx0{,}8\ \text{Дж},$$

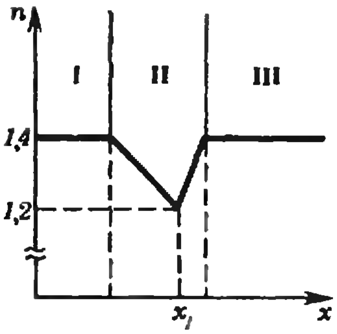
$$Q_2'=\frac{3U^2}{R}t_2\approx36\ \text{Дж},$$

$$Q'=Q_1'+Q_2'\approx36{,}8\ \text{Дж}.$$

Л. И. Баканина

◆

Ф817. *На рисунке показана зависимость показателя преломления n от координаты. Узкий монохроматический пучок света падает на границу раздела сред I и II. При каких углах падения свет проникает в среду III?*



Из закона преломления следует, что вдоль траектории луча значение $n(x)\cdot\sin\alpha_x$ остается постоянным (здесь α_x — угол падения луча на границу раздела, которой соответствует координата x). Поскольку во второй среде показатель преломления сначала уменьшается, углы падения α_x будут расти по мере приближения траектории к границе, которой соответствует координата x_1. При этом касательные к траектории луча будут приближаться к вертикали. Если угол падения во второй среде достигнет значения 90°, то луч не выйдет из этой среды. Если же угол падения будет меньше 90° даже на границе с координатой x_1, где значение $n(x_1)$ минимально, луч перейдет из среды II в среду III.

Пусть при некотором начальном угле падения α_0 (α_0 — угол падения на границу раздела сред I и II) угол падения луча на границу с координатой x_1 достигает 90°. Тогда

$$n_1\sin\alpha_0=n(x_1)\cdot\sin 90^\circ\Rightarrow\sin\alpha_0=\frac{1{,}2}{1{,}4}\approx0{,}86,\ \alpha_0\approx60^\circ.$$

Следовательно, при углах $\alpha>\alpha_0$ лучи света не смогут проникнуть в среду III. При углах $0<\alpha<60^\circ$ пучок света проникнет в среду III.

В. В. Можаев

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Физика и суд

В очень полезной научно-популярной книжке Б. В. Булюбаша и В. З. Гуревича «Электричество и тепло» (М., «Наука», 1978) приведен следующий курьезный случай.

В одном из центральных городов России в начале XX века владельцы электростанции поймали с поличным некоего Иванова, украдкой подключившегося к электросети и освещавшего квартиру. Компания подала на него в суд, обвиняя в хищении принадлежащих ей ценностей. Однако суд оправдал злоумышленника, сославшись на действующее «Уложение о наказаниях». Согласно статье этого документа похищенной могла быть только вещь, имеющая массу и определенные размеры. Сенат, который вторично рассматривал жалобу компании, определил, что электрическая энергия может рассматриваться как «движимое имущество, хотя и не является вещью».

Более хитроумный случай описан в научной монографии немецкого ученого П. Грассмана «Вопросы термодинамического анализа» (М., «Мир», 1965).

В пивоварне охлаждали один из отдаленных погребов посредством центральной холодильной установки. Трубопровод с рассолом проложили через погреб одного торговца. Вскоре владелец пивоварни обнаружил, что торговец использует рассол для охлаждения своего погреба и обвинил его в краже. Однако судья заявил: «В соответствии со статьей 242 уголовного кодекса кража есть противозаконное присвоение чужого имущества. В данном случае нет состава преступления, так как торговец не присваивал себе рассол, а возвращал его обратно в трубопровод пивоварни.»

Тогда владелец пивоварни обратился в следующую инстанцию и подтвердил свою точку зрения таким аргументом: «Речь идет не о краже рассола, а о краже энергии. Если я буду охлаждать погреб торговца, я должен потреблять больше электроэнергии для холодильной машины». Возражение нового судьи физически было обосновано только наполовину: «Рассол ведь получил тепло, т. е. энергию из погреба торговца, следовательно, у Вас энергию не украли, а, наоборот, Вы получили энергию в подарок».

Мы все догадываемся, что судья был неправ, но далеко не каждый сразу скажет, в чем его ошибка.

В. Ф.

Рэндзю

В. А. САПРОНОВ

В детстве многие из вас, наверное, играли в «крестики-нолики» на доске 3×3 (рис. 1): игроки по очереди ставят «крестики» и «нолики» в свободные клетки; выигрывает тот, кто построит ряд (по вертикали, *горизонтали или диагонали) из трех «кре*стиков» или, соответственно, «ноликов». Впрочем, те, кто играли в эти простейшие «крестики-нолики», быстро осознавали, что эта игра — ничейная: при правильной *игре обоих игроков* она заканчивается вничью.

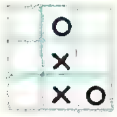


Рис. 1.

Может быть, поэтому среди студентов и старших школьников распространена игра в «крестики-нолики» на «бесконечной» (то есть неограниченной) доске. Легко видеть, что если на такой доске опять считать выигрышем «три в ряд», то начинающий легко выигрывает. Проверьте, что и в игре «четыре в ряд» начинающий довольно легко выигрывает. Обычно играют «пять в ряд». Практика показывает, что и в этом случае начинающий выигрывает (мы не располагаем доказательством указанного утверждения).

С логической точки зрения рэндзю — промежуточный вариант между двумя описанными разновидностями «крестиков-ноликов». Доска — 15×15. Начинающий ставит «крестик» в центральную клетку. Затем второй игрок ставит «нолик» в любую из 224 свободных клеток. На третьем ходу первый игрок ставит «крестик» в любую свободную клетку, не находящуюся в центральном квадрате *5×5* (это единственное ограничение призвано уравновесить шансы сторон). Потом по очереди игроки ставят «нолики» и «крестики» в любые свободные клетки. Выигрывает тот, кто построит ряд из пяти «крестиков» или, соответственно, «ноликов», причем более длинные ряды — не в счет. Вот и все правила рэндзю.

Остается только добавить, что сами рэндзисты говорят на другом — вполне эквивалентном — языке.

Игра «рэндзю» возникла в Центральной Азии более четырех тысяч *лет назад*. В нее играли древние римляне и инки доколумбовской Америки. В начале нашей эры рэндзю попало в Японию, где получило наибольшее распространение. В XX веке рэндзю распространилось по всему миру.

Как же играют в рэндзю? Соперники ставят свои шашки в *пункты пересечения линий* квадрата со стороной 14 клеток (рис. 2); на каждой стороне такого квадрата 15 пунктов, всего их 15×15. Начинающий («черные») ставит черную шашку в центральный пункт. Затем второй игрок («белые») ставит белую шашку в любой из 224 свободных пунктов. На третьем ходу черные ставят черную шашку в любой свободный пункт, лежащий за пределами центрального квадрата (на рисунках он нарисован синим цветом), содержащего 5×5 пунктов (это ограничение*) действует только на третьем ходу!). Потом белые и черные по очереди ставят свои шашки в любые свободные пункты. Выигрывает тот, кто построит ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали)

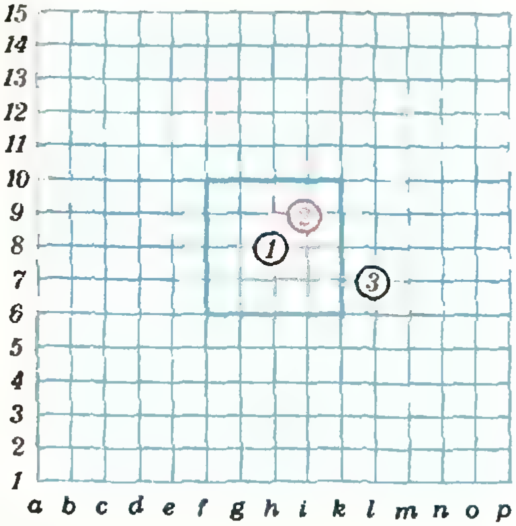


Рис. 2.

---

*) Оно было придумано несколько лет назад у нас в стране. Шансы сторон пытаются также уравновесить и другими ограничениями (см., например, «Наука и жизнь», 1980, № 9).

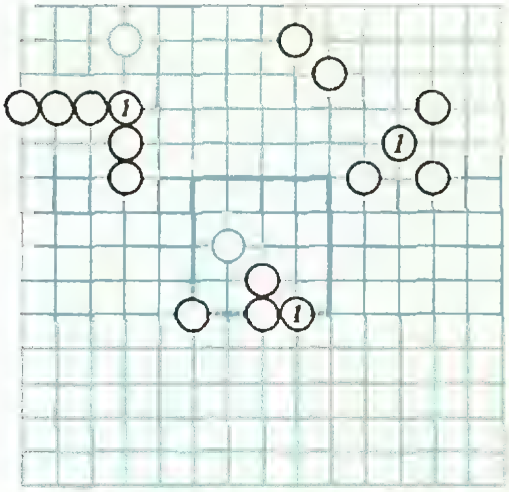


Рис. 3.

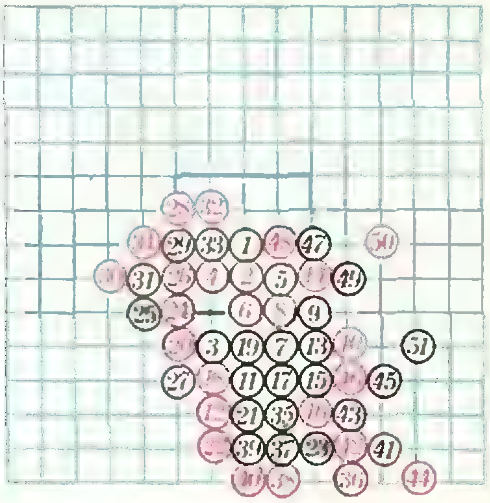


Рис. 4.

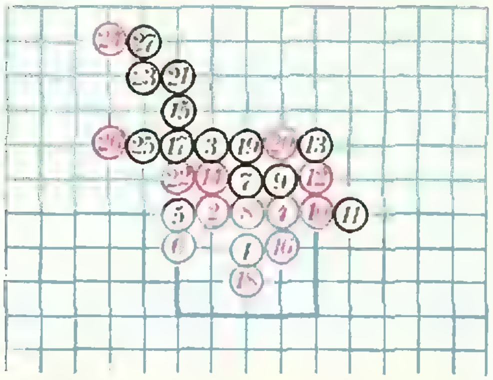


Рис. 5.

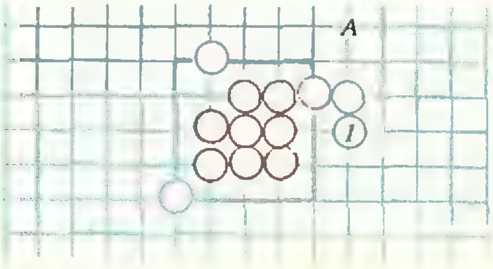


Рис. 6.

из пяти своих шашек, причем более длинные ряды — не в счет.

Вы сели за доску и тут же поняли, как непросто выиграть: соперник перекрывает все ваши попытки достичь заветной пятерки и сам угрожает выигрышем. Как одержать верх?

Начнем с конца. Все атаки, если, конечно, противник не допустил элементарного зевка, завершаются построением какой-нибудь из вилок: 4-4, 4-3 или 3-3 (рис. 3: цифрой 4 обозначены четверки — *шахи*, цифрой 3 — тройки — *полушахи*).

На рисунке 4 показана партия Макаренко — Сапронов из второго чемпионата Москвы (черные шашки здесь и дальше изображаются черными кружочками, белые шашки — красными кружочками; число внутри кружочка — номер хода; советую вам нарисовать доску и «разыграть» на ней эту партию ход за ходом). На 34-м ходу белые поставили полушах, на что черные ответили серией шахов (ходы 35, 37, 39,..., 51), закончившейся вилкой 4-3, после чего белые вынуждены были сдаться.

На рисунке 5 показана партия Янсон — Сундлинг из чемпионата Швеции. На 18-м ходу белые поставили полушах, на что черные ответили серией шахов (ходы 19, 21, ..., ..., 27), закончившиеся вилкой 4-3. (На мой взгляд, 5-й ход черных — не из лучших, и белые могли это доказать, сыграв 6-м ходом в пункт 9. Более перспективным был бы для черных 5-й ход в пункт 8; если бы белые 6-м ходом пошли в пункт 7, черные 7-м ходом пошли бы в пункт 6.)

Иногда угроза вилки эффективнее серии «шах, полушах» или «полушах, шах». На рисунке 6 после хода черных в пункт 1 белые беззащитны. Нетрудно проверить, что лобовой ход в пункт *А* и лишь затем ход в пункт 1 лишали бы черных шансов на победу.

На рисунке 7, наоборот, белым следует сыграть «примитивно» в пункт 1, а затем — в пункт 3. Пойди белые сразу в пункт 3, черные без труда защитились бы.

На рисунке 8 черные ходом в пункт 1 создали исходную позицию для последующей атаки серией шахов (такой ход называется *обозначе-*

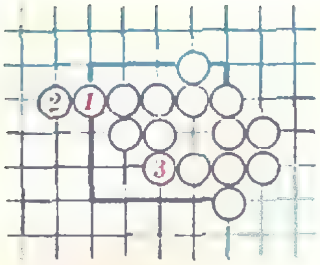


Рис. 7.

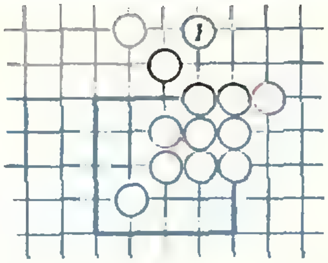


Рис. 8.

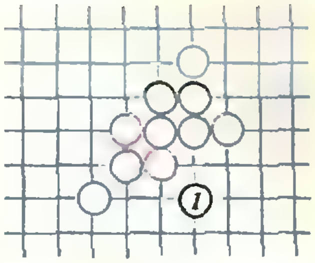


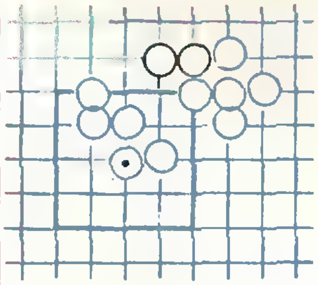
Рис. 9.

нием) и решили ход борьбы в свою пользу — белым пора сдаваться.

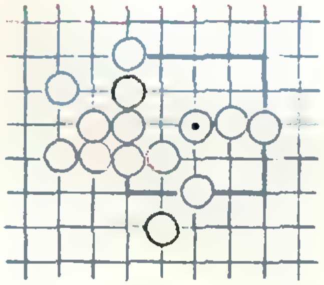
В этюде на рисунке 9 черные выигрывают тихим ходом — *паузой* — в пункт 1.

В заключение мы объявляем конкурс задач по рэндзю. Конкурс проводится в два тура. Десять победителей будут награждены призами, занявший первое место будет приглашен для участия во Всесоюзном турнире по рэндзю.

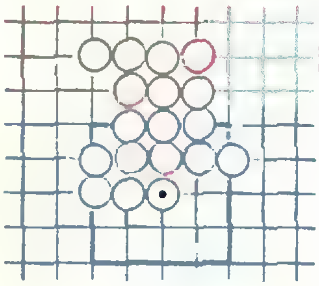
Задачи первого тура



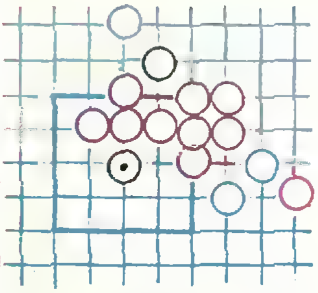
№1



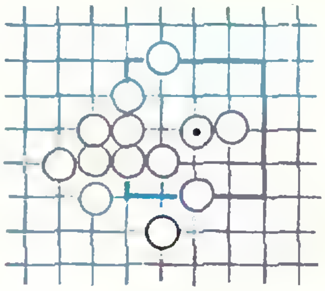
№2



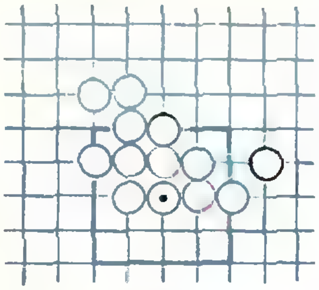
№3



№4



№5



№6

В №№ 1—3 черные начинают и выигрывают.

В №№ 4—6 белые начинают и выигрывают.

Во всех случаях требуется указать кратчайший выигрыш (до построения победной вилки) при оптимальном сопротивлении противоборствующей стороны.

Решения присылаются в виде диаграмм (решения в алгебраической нотации рассматриваться не будут). Шашки исходной позиции не нумеруются. Первый ход предлагаемого решения нумеруется числом 1. Победные серии шахов и побочные варианты допустимо обозначать буквами.

Решения задач первого тура должны быть высланы не позднее 31 октября.

Окончание статьи и задачи второго тура в № 10.

Какое оно — наше солнце?

Кандидат педагогических наук
Е. П. ЛЕВИТАН

МИР знаний
Э. В. Кононович
Солнце — дневная звезда

Среди бесчисленных звезд Вселенной есть одна, которая нас интересует больше всех остальных. Это — Солнце. Об исключительной роли дневного светила люди догадывались давно. Не зная, что представляет собой Солнце и почему оно способно дарить Земле тепло и свет, его обожествляли.

Прошли века. Ушло в прошлое поклонение Солнцу. В наше время Солнце — важный и интересный объект комплексных научных исследований, которые проводят ученые разных стран. Изучается физическая природа Солнца и его атмосферы, эволюция солнечного вещества, влияние солнечной активности на разнообразные земные явления, такие как полярные сияния, магнитные бури, а также метеорологические и биологические явления.

Обо всем этом рассказывается в книге Э. В. Кононовича «Солнце — дневная звезда», которую в 1982 году выпустило издательство «Просвещение». Книга адресована школьникам девятых—десятых классов. Оказывается, знание физики и математики даже в объеме девятого класса достаточно для того, чтобы разобраться в существе таких непростых вопросов, как внутреннее строение Солнца, способы передачи энергии внутри плазменного солнечного шара, природа и роль магнитных полей на Солнце.

Хотелось бы отметить, что книга написана очень «физично». Автору удалось найти множество наглядных образов, дающих, по крайней мере, качественное представление о физике Солнца. И это не удивительно, ибо Э. В. Кононович — специалист в области исследования Солнца, опытный педагог (он доцент МГУ), один из авторов курса общей астрономии для студентов, автор многих научно-популярных публикаций.

В книге Солнце рассматривается как типичный представитель звезд Вселенной. «Изучив подробности строения Солнца и его взаимодействие с явлениями на Земле, мы теперь можем более широко взглянуть на всю проблему роли звезд во Вселенной. И это представляется нам самым главным, ради чего написана книга» — пишет автор в заключительной главе книги.

Думается, что многих из вас книга Э. В. Кононовича «Солнце — дневная звезда» не просто заинтересует, а увлечет солнечной проблематикой.

КВА-КВА
КВАНТ
Цена 40 коп
Индекс 70465
квант
1
1984

К сведению читателей!

Открыта подписка на научно-популярный физико-математический журнал «Квант» на 1984 год. Подписка принимается без ограничения всеми отделениями «Союзпечати» и общественными распространителями печати.

В розничную продажу журнал не поступает.

Периодичность — 12 номеров в год.

Цена одного номера — 40 копеек.

Всесоюзный смотр «Юные техники, натуралисты и исследователи — Родине!»

Секретариат ЦК ВЛКСМ, Коллегия Министерства просвещения СССР, Президиума ВС НТО, Президиум ЦС ВОИР, Бюро Президиума ЦК ДОСААФ СССР постановили провести в 1982—1985 годах Всесоюзный смотр «Юные техники, натуралисты и исследователи — Родине!» Этот смотр — составная часть Всесоюзного смотра научно-технического творчества молодежи, проводимого в годы 11-й пятилетки.

В смотре участвуют юные техники, натуралисты, исследователи — все любители науки и техники, кружки, станции, клубы, школы юных, научные общества учащихся, школьные организации ВОИР и другие юношеские и подростковые научно-технические, опытнические, военно-патриотические и спортивно-технические объединения, созданные и работающие в общеобразовательных школах, во внешкольных и культурно-просветительных учреждениях, учебно-производственных комбинатах, домах техники, НТО, спортивно-технических клубах и школах ДОСААФ, при предприятиях и организациях, в высших учебных заведениях.

Руководство подготовкой и проведением смотра осуществляет оргкомитет, утвержденный учредителями смотра. Для организации смотра на местах создаются, соответственно, республиканские, краевые, областные, городские, районные оргкомитеты.

Для обеспечения оперативного руководства ходом смотра могут создаваться штабы (советы) в школах, УПК, внешкольных учреждениях, на предприятиях и в организациях.

В ходе смотра школьники ведут работу по направлениям: «Юные техники и исследователи — школе»;

«Юные техники и исследователи — производству»; «Юные техники, натуралисты и исследователи — сельскому хозяйству, другим отраслям агропромышленного комплекса»;

«Юные техники, натуралисты и исследователи — лесному хозяйству, охране окружающей среды»; «Юные техники и исследователи — армии, авиации, флоту»; «Юные техники и исследователи — научно-техническому прогрессу».

Целью и задачами смотра являются:

— воспитание у будущей смены рабочего класса, колхозного крестьянства, советской интеллигенции потребности к активному участию в ускорении научно-технического прогресса, привлечение максимального числа учащихся общеобразовательных школ к эффективным формам научно-технического творчества, сельскохозяйственного опыта, исследовательской работы, расширение сети юношеских и подростковых научно-технических и опытнических кружков, секций, объединений, всемерное укрепление их материальной базы;

— укрепление связи научно-технических опытнических объединений школьников с производством, научными учреждениями, высшими учебными заведениями, организациями НТО, ВОИР и ДОСААФ, привлечение к работе с детьми и подростками ученых, специалистов народного хозяйства, передовиков и новаторов производства, изобретателей и рационализаторов, студентов;

— рациональное использование материально-технической базы предприятий, колхозов, совхозов, научных, проектных и конструкторских организаций, культпросветучреждений, домов техники, НТО, спортивно-технических клубов и школ ДОСААФ для всестороннего развития познавательной активности школьников, формирования у них навыков творческой работы, научно-исследовательской и рационализаторской деятельности;

— усиление пропаганды среди школьников достижений науки, техники и производства, перспектив социально-экономического развития трудовых коллективов, знаний в области экономики, углубления практической и народнохозяйственной направленности в деятельности юных техников, натуралистов и исследователей, привлечение их к посильному участию в борьбе за экономию и бережливость.

Итоги смотра подводятся ежегодно:

в школах, внешкольных учреждениях, клубах юных техников и натуралистов, Дворцах и Домах культуры профсоюзов, комнатах при ЖЭКах, вузах и НИИ в январе — в ходе Всесоюзной недели науки, техники и производства для детей и юношества;

в городах и районах — в марте — на выставках лучших работ и конференциях юных техников и натуралистов, членов НОУ;

в области, крае, республике — в мае — июне.

Итоги Всесоюзного смотра будут подводиться на Всесоюзном слете юных техников, натуралистов и исследователей летом 1986 года.

Постановлением о проведении смотра комитетам комсомола, органам народного образования, правлениям, советам НТО и ВОИР, комитетам ДОСААФ предложено в ходе смотра направить организаторскую работу на широкое привлечение детей и подростков к активным формам научно-технического творчества, сельскохозяйственного опытничества, исследовательской работы, осуществить действенные меры по дальнейшему развитию сети и укреплению материальной базы научно-технических объединений учащихся, содействовать углублению практической и народнохозяйственной направленности в их работе.

Конкурс математических проектов

В ноябре 1982 года в Омске при проведении финала математического боя базовых школ Омского университета был организован конкурс математических проектов. Суть конкурса заключалась в необходимости применить математику, здравый смысл, интуицию к решению практических проблем. Фактически требовалось построить математическую модель описанной ситуации и исследовать ее. Темы проектов были ранее предложены на олимпиаде «Студент и научно-технический прогресс»; оказалось, что школьники тоже могут продвинуться достаточно далеко в разработке этих проблем.

Непосредственно конкурс можно проводить в следующей форме: команда докладывает у доски подготовленный дома проект в течение 3—5 минут, после чего защищает его, отвечая на вопросы команд-соперниц и жюри. За защиту проекта она может получить до десяти баллов. После этого выступают оппоненты. Удачная и справедливая критика дает команде до трех баллов, а конструктивное улучшение проекта — до пяти. Потом выступает следующая команда и так далее. На конкурс целесообразно выносить не более 3—4 тем проектов.

Темы проектов конкурса в Омске

1. Десять изобретателей предложили свои варианты решения одной и той же инженерной проблемы. По условиям конкурса с их решениями ознакомились пять экспертов, каждый из которых указал в бланке фамилии трех изобретателей, занявших, по его мнению, первое, второе и третье места.

Требуется придумать процедуру обработки этих данных и выявления первых трех победителей конкурса, после чего охарактеризовать достоинства и недостатки процедуры.

2. Магазин «Тысяча мелочей» продает номерки для квартир в виде отдельных цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Ясно, что потребность в каждой из этих цифр неодинакова. Придумать процедуру, позволяющую определить примерную потребность в каждой из этих цифр, сделать предварительную оценку, в какой пропорции они должны заказываться.

3. На олимпиаду было предложено 15 задач, разделенных жюри на пять «легких», пять «средней трудности» и пять «трудных». Легкие задачи оценивались 1, 2 или 3 баллами, средние — 4—7 баллами, трудные — 8—10 баллами. После проверки работ жюри пришло к выводу, что ошиблось в оценке трудности ряда задач. В самом деле, одну «трудную» задачу решили все без исключения участники, а три из пяти «легких» решили меньше участников, чем любую задачу «средней трудности». Стало понятно, что при оценке трудности задач следует учитывать не только мнение жюри («априорная оценка»), но и результаты участников («апостериорная оценка») в виде отношения числа решивших данную задачу к числу всех участников. Поэтому итоговая оценка трудности задачи должна каким-то разумным способом комбинироваться из двух указанных оценок.

Придумайте такой способ и выявите его сильные и слабые стороны.

4. Агроном на опытном поле площадью 1 га вырастил хороший урожай и до уборки хочет оценить его. Обычно он собирает урожай на 3—4 делянках по 1 м^2 каждая и усредняет его. Однако условия для роста злаков в разных местах неодинаковы (в одном месте они находились в тени лесозащитной полосы, в другом оказались близко у дороги, в третьем сказался избыток удобрений... учесть все условия невозможно). Поэтому агроному надо как-то уменьшить величину ошибок, получающейся от умножения среднего урожая на 1 м^2 делянок на общую площадь поля.

Как это сделать?

5. Оцените время выливания всей жидкости из стандартного молочного пакета тетраэдальной формы.

6. Какие грейпфруты покупать выгоднее: крупные или мелкие?

В. Н. Сергеев

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь своим учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия в школе проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, все желающие смогут посетить научные лаборатории физического факультета и на лекциях ведущих ученых познакомиться с основными направлениями современной физики. Для учащихся десятых классов организуются факультативные занятия по математике. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться, начиная с 26 сентября. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявление можно подавать с 5 по 24 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов.

Адрес ВФШ: 117234, Москва, В-34, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 139-26-56.

Вокруг биссектрисы

(20) Пусть H — точка пересечения высот, тогда MN проходит через середину BH — точку K, $|BK|=|B_1O|$ (B_1 — середина AC). Далее, докажите, что прямая MN параллельна OB (если $\hat{C}>\hat{A}$, то $\widehat{MKH}=2\widehat{MBH}=\hat{C}-\hat{A}=\widehat{OBH}$).

(21) Докажите, что площадь треугольника с вершинами в точках касания вневписанной окружности с центром I_a можно вычислить по формуле

$$Q_a=S_{ABC}\cdot\frac{r_a}{2R}=\frac{S^2_{ABC}}{2R}\cdot\frac{1}{p-a}.$$

Аналогичные формулы могут быть получены для площадей других треугольников.

(22) Пусть K_1 и L_1 — такие точки на BC и BA, что $K_1K\parallel L_1L\parallel BB'$. Достаточно доказать, что треугольники BK_1K и BL_1L подобны, то есть, что $|BK_1|:|K_1K|=|BL_1|:|L_1L|$. Имеем

$$\frac{|BK_1|}{|BA'|}=\frac{|B'K|}{|B'A'|},\quad \frac{|K_1K|}{|BB'|}=\frac{|A'K|}{|B'A'|},$$

и по теореме (1)

$$\frac{|BK_1|}{|K_1K|}=\frac{|B'K|}{|A'K|}\cdot\frac{|BA'|}{|BB'|}=\frac{|CB'|}{|CA'|}\cdot\frac{|BA'|}{|BB'|}=$$
$$=\frac{c}{b}\cdot\frac{|CB'|}{|BB'|}=\frac{ca}{(a+c)\,|BB'|}.$$

Последнее выражение симметрично относительно a и c, а значит, равно также и $|BL_1|:|L_1L|$.

(23) Докажем, что оба утверждения эквивалентны равенству $|AB|\cdot|CD|=|AD|\cdot|BC|$. Возьмем на дуге BAD точку A_1 так, что $|DA_1|=|AB|$. Условие задачи эквивалентно тому, что прямая A_1C проходит через N — середину BD, то есть равенству площадей треугольников DA_1C и A_1BC, откуда $|DA_1|\times\times|DC|=|BA_1|\cdot|BC|$ или $|AB|\cdot|CD|==|AD|\cdot|BC|$.

(24) Пусть B_1 — середина AC. Продолжим биссектрису до пересечения в точке B_2 с перпендикуляром, восставленным к AC в точке B_1. Точка B_2 лежит на описанной около ABC окружности. Проведем через M перпендикуляр к AC, пусть L — точка его пересечения с AC, K — с BB_1, тогда $|KM|=|ML|$. Проведем через K прямую, параллельную AC, пересекающую AB и BC в точках D и E. Если G и F — проекции D и E на AC, то M — центр прямоугольника $GDEF$, причем $\triangle DME\sim\triangle AB_2C$ ($\triangle DME$ получается из $\triangle AB_2C$ при гомотетии с центром в B). Имеем

$$\operatorname{ctg}\widehat{MCL}=\frac{|LC|}{|ML|}=\frac{|LF|}{|ML|}+\frac{|FC|}{|ML|}=$$
$$=\frac{|AB_1|}{|B_1B_2|}+2\frac{|FC|}{|EF|}=\operatorname{ctg}\frac{\hat{B}}{2}+2\operatorname{ctg}\hat{C}.$$

Если теперь B' — основание биссектрисы, P и T — проекции N и B' на BC, то

$$\operatorname{ctg}\widehat{NCB}=\frac{|PC|}{|NP|}=\frac{|PT|}{|NP|}+\frac{|TC|}{|NP|}=\frac{|BP|}{|NP|}+$$
$$+2\frac{|TC|}{|B'T|}=\operatorname{ctg}\frac{\hat{B}}{2}+2\operatorname{ctg}\hat{C},$$

то есть $\widehat{MCA}=\widehat{NCB}$.

(25) Произведение длин отрезков от вершины A треугольника до точек пересечения стороны AB с данной окружностью будет равно такому же произведению для стороны AC. Эти длины легко выразить через длины рассматриваемых хорд и длины сторон треугольника. Аналогичные равенства можно записать для вершин B и C. Таким образом мы получим систему уравнений, позволяющую выразить длины хорд через длины сторон и проверить утверждение задачи прямым вычислением. Чтобы избежать перебора вариантов, удобно выбрать какое-то направление обхода треугольника и считать отрезки направленными, а их длины — произвольными действительными числами.

(26) Пусть $\widehat{KAL}=\widehat{KLA}=\varphi$, $\widehat{KCL}=\widehat{LKC}=\psi$. Тогда $\widehat{BKL}=2\varphi$, $\widehat{BLK}=2\psi$, $2\varphi+2\psi=180°-B$. Если Q — точка пересечения AL и KC, то $\widehat{AQC}=180°-(\varphi+\psi)=90°+\frac{\hat{B}}{2}$. Проведем через M прямую, параллельную BC, до пересечения с KC в точке N, тогда MQ — биссектриса угла AMN и $\widehat{AQN}=90°+\frac{B}{2}$. Отсюда следует, что Q — точка пересечения биссектрис треугольника AMN, значит, $\triangle AMN\sim\triangle KBL$. Пусть $|AK|=|KL|=|LC|=x$, $|AM|=y$, $|MN|=z$. Из того, что $\triangle AMN\sim\triangle KBL$ и $\triangle KMN\sim\triangle KBC$, получим

$$\frac{z}{a-x}=\frac{y}{c-x},\quad \frac{y-x}{c-x}=\frac{z}{a},$$

откуда $y=a$.

(27) Перпендикулярность биссектрис доказывается без труда. Докажем второе утверждение. Пусть M — середина AC, N — середина BD. Из подобия треугольников AMK и BKD следует, что $\widehat{MKA}=\widehat{NKD}$ и $\frac{|MK|}{|KN|}=\frac{|AC|}{|BD|}$, то есть биссектриса угла BKC является также биссектрисой угла MKN и делит отрезок MN в отношении $\frac{|MK|}{|KN|}=\frac{|AC|}{|BD|}$. Очевидно, что в этом же отношении делит MN и биссектриса угла ALB.

Когда $|a+b|=|a|+|b|$?

1. а) $\{0,2\}$; б) При $a<-1$ нет корней, при $-1<a<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ — луч $]-\infty;a]$, при $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ — вся числовая прямая **R**, при $a>\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ — луч $[a;+\infty[$.

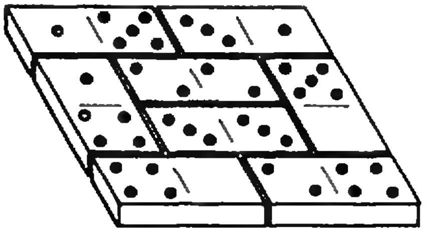
2. а) $]0;1[$; б) $]7;+\infty[$.

3. а) $\varnothing$; б) $y=\sin x+1$ на отрезках $[2\pi k;\pi+2\pi k]$ $(k\in\mathbf{Z})$, $y=\sin x-1$ на отрезках $[\pi+2\pi k;2\pi+2\pi k]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. Пусть значение закрытой части косточки домино — x. Тогда сумма очков на всех косточках равна $37+x$. Но эта сумма делится на 4, поскольку в каждом горизонтальном ряду «магического квадрата» сумма одинакова. Это может быть только в случае $x=3$. Расположение косточек в виде «магического квадрата» показано на рисунке.



2. Возраст школьника, родившегося в августе и пошедшего в первый класс в 7 лет, на 6 больше номера класса, в котором он учится. Поэтому Боря на 6 лет старше Алёши. Когда Боря закончит десятый класс, Алёша закончит четвертый класс и перейдет в пятый.

3. Количество промежутков между точками на 1 меньше, чем самих точек. Значит, если в каждый промежуток поставить по новой точке, то общее количество точек будет равно сумме двух последовательных чисел, из которых одно — четное, а другое — нечетное.

4. Если бы Петя не вышел из дома с запасом в 8 минут, то он, в случае возвращения домой за ручкой, опоздал бы не на 10, а на 18 минут, которые он должен был потратить на двукратное прохождение только что пройденного пути. Отсюда следует, что в момент, когда он вспомнил о забытой ручке, он шел уже 9 минут, то есть прошел $\frac{9}{20}$ пути.

5. Если бы Земля не вращалась вокруг оси, то за один оборот по орбите смена дня и ночи произошла бы на ней один раз, причем заря двигалась бы по планете в необычном направлении — с запада на восток. Поэтому при совпадающих направлениях вращения вокруг оси и обращения по орбите эти сутки нужно вычесть из числа оборотов вокруг оси, при противоположных направлениях — добавить. Значит, в указанном в условии случае число смен дня и ночи увеличилось бы на 2, то есть каждые сутки уменьшились на $\frac{2}{365}$ от нынешних суток (примерно 8 минут).

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 5)

Задание 9 (Т. Доусон, 1916 г.). Белый слон не прочь объявить мат неприятельскому королю с полей c3 или g3, и кажется, что в силу симметрии позиции должны существовать два решения. Однако свободная вертикаль a вносит коррективы. Правильно только **1.g6, 2.h5, 3.Сh4** и **4.С:g3×**. При аналогичном маневре на ферзевом фланге черный слон успевает запатовать себя: 1.c6 Сh5! 2.b5 g6 и после 3.Сb4 на доске пат.

Задание 10 (В. Паули, 1920 г.). К цели ведет только **1. Кc6! Крd6 2. Лb3** Крc7 3. Крe7 Крc8 4.Кa7+ Крc7 5.Лb7×; 2...Крe6 3.Лd3 Крf6 4.Лg3 Крe6 5.Лg6×; 2...Крc5 3.Крd7 Крc4 4.Сd3+ и 5. Лb5×. Симметричное 1.Кg6 не проходит, так как после 1...Крf6 2.Лh3 Крg7 3.Крe7 Крg8 у белых нет шаха конем — справа не хватает одной вертикали.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
Л. В. Денисенко, М. Б. Дубах, А. М. Кошевой, А. К. Малкин, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, В. А. Серов, М. П. Сидоров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, С. В. Юкин
Фото Ю. Ю. Житковского, В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54.
Сдано в набор 16.6.83. Подписано к печати 14.7.83.
Печать офсетная
Бумага $70\times108^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,89. Т-15666
Цена 40 коп. Заказ 1573. Тираж 166 385 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

КАСПАРОВ ИГРАЕТ МАГАРАДЖЕЙ

В «Кванте» однажды рассказывалось об игре с участием сказочной фигуры *магараджа*. Это очень сильная фигура, которая может ходить и как ферзь, и как конь. Даже если белые владеют полным комплектом обычных фигур (на исходных местах), а черные только магараджей, то белым поймать магараджу не так просто, и неопытный игрок может быстро растерять все свое войско. И все же белые при точной игре ловят магараджу, причем не позднее 15-го хода. Не обращая внимания на его перемещения (магараджа мужского рода!), белые делают следующие 14 ходов: **a4, Лa3, h4, Лh3, Кc3, Кf3, Лg3, d4, Фd3, Фe4, Лb3, Лb7, Фd5, Лg8.** Нетрудно убедиться, что при этих ходах магараджа не мог взять ни одну белую фигуру. Теперь у него есть два свободных поля — a6 и f6, в первом случае он гибнет после **15. Сg5**, а во втором — после **15. e4.**

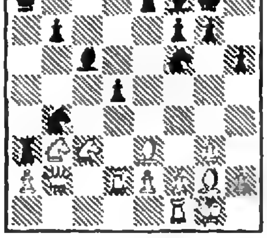
На нашей шахматной страничке нередко встречаются те или иные математические сюжеты. Однако любители шахмат (а их среди будущих математиков и физиков немало), судя по письмам, с интересом знакомятся с различными шахматными событиями, смотрят партии, решают задачи и этюды. Сегодня мы хотим привести одну из партий четвертьфинального матча претендентов между Каспаровым и Белявским.

В «Кванте», 1983, № 2 уже рассказывалось о межзональном турнире в Москве, в котором эти двое талантливых гроссмейстеров завоевали претендентские путевки Жаль, что жребий свел их в самом начале и продолжить борьбу за мировое первенство смог только один из них — Гарри Каспаров, взявший верх со счетом 6:3 Лучшей в матче победитель назвал вторую партию

А. Белявский — Г. Каспаров

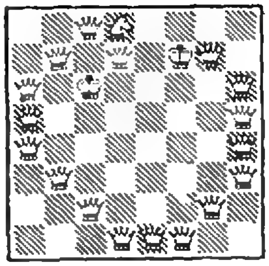
Ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 e6 3. Кc3 c5. Определяет защиту Тарраша, которая долгие годы пребывала в забвении, пока не была реабилитирована Б. Спасским в его победном матче за мировую корону с Т. Петросяном. С тех пор популярность защиты не падает. **4. cd ed 5. Кf3 Кc6 6. g3 Кf6 7. Сg2 Сe7 8. 0—0 0—0 9. Сg5 cd 10. К:d4 h6.** Что представляет собой изолированная пешка «d» — силу или слабость? Наверное, этот вопрос будет существовать вечно. Никто не помнит, чтобы бакинец когда-нибудь избирал защиту Тарраша, и дебютный сюрприз черных удался: на часах Белявского пошел второй час, Каспаров же потратил на свои ходы считанные минуты. **11. Сe3 Лe8 12. Фa4.** В шестой партии Белявский уже не был застигнут врасплох и поставил здесь ферзя на c2, правда, добиться перевеса все равно не сумел. **12...Сd7 13. Лad1 Кb4 14. Фb3 a5 15. Лd2.** Теория рекомендует 15. a4 с небольшим перевесом у белых. Наверное, Каспаров готов был поспорить с этой оценкой, но теперь ему и спорить не приходится. Черные захватывают инициативу на ферзевом фланге, не имея никаких дефектов и на других участках доски. **15...a4 16. Фd1 a3 17. Фb1.** Время идет а белый ферзь никак не может найти уютного пристанища. **17...Сf8 18. ba Л:a3 19. Фb2 Фa8 20. Кb3 Сc6.**

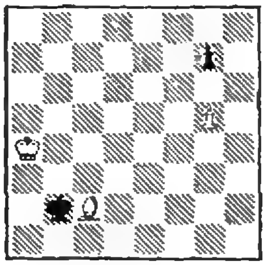


После этого Гарри взглянул в дальний угол зала, где сосредоточились его самые преданные болельщики, и принялся за шоколадку. По всему было видно, что он доволен своей позицией **21. Сd4 Кe4 22. К:e4 de.** Проблема изолированной пешки в данной партии полностью решена — она подтянулась к своей соседке и перестала быть одинокой. **23. Лa1 Сd5 24. Фb1 b6 25. e3.** Грозило смертельное e4—e3, но теперь обнажается пункт d3. **25...Кd3 26. Лd1 b5 27. Сf1 b4 28. С:d3 cd 29. Ф:d3 Л:a2 30. Л:a2 Ф:a2 31. Кc5 Сf3.** У белых очень слабы белые поля, с такими пробоинами трудно бороться против гроссмейстера. **32. Лa1 Фd5 33. Фb3 Фh5 34. Кd3 Сd6 35. Кe1 Сb7 36. Лc1 Фf5.** Черный ферзь весьма активен, в этой партии он почти так же силен, как магараджа... **37. Лd1 Сf8 38. Фb1** Последний ход ферзем не считается — в этой безрадостной позиции на часах Белявского упал флажок.

Конкурсные задания

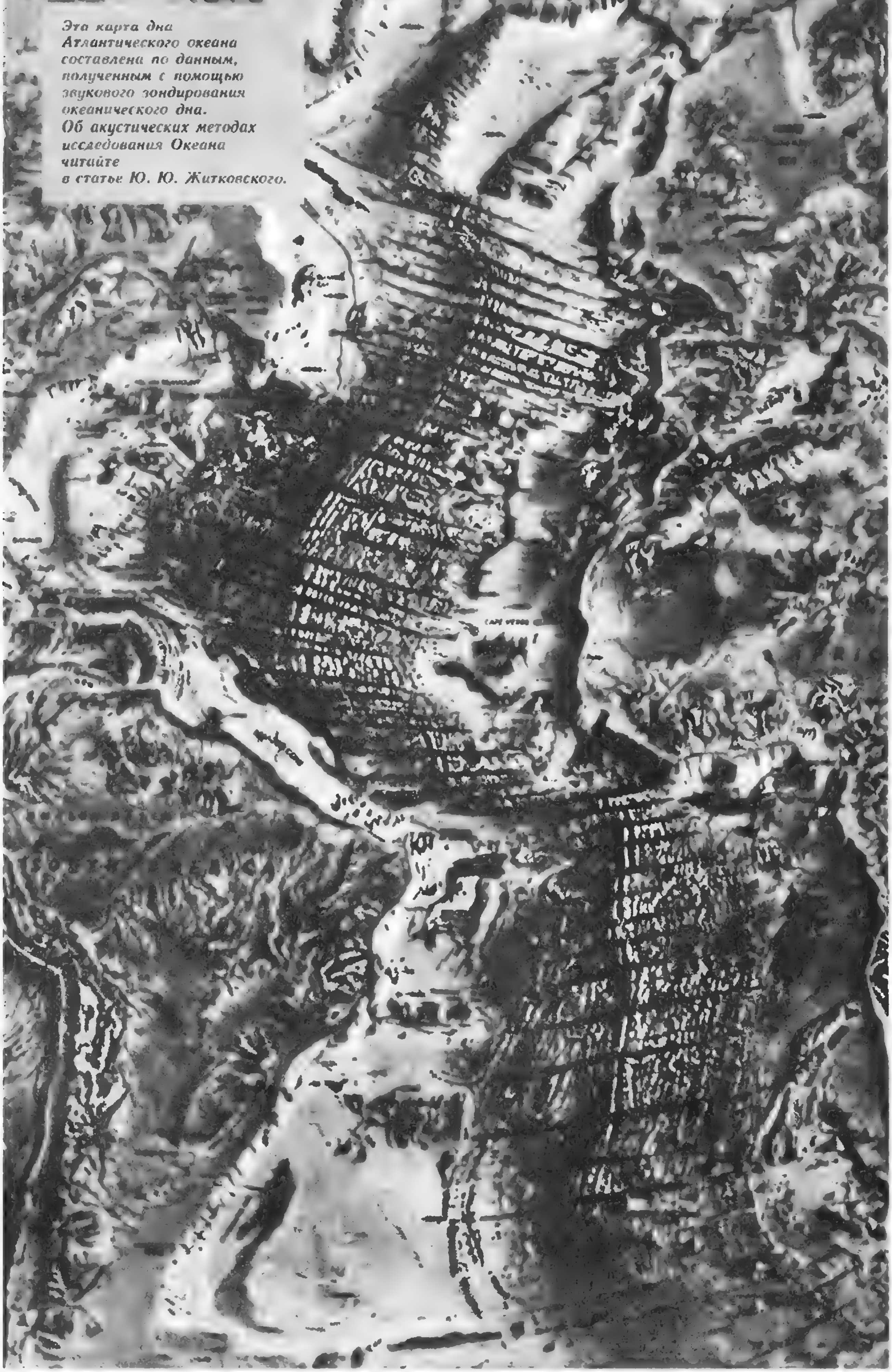


15. На диаграмме нарисовано расположение фигур, возникшее в партии, только все фигуры нарисованы белыми. Восстановить настоящие цвета фигур.



16. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 октября 1983 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16»).



Эта карта дна Атлантического океана составлена по данным, полученным с помощью звукового зондирования океанического дна. Об акустических методах исследования Океана читайте в статье Ю. Ю. Житковского.

Цена 40 коп.

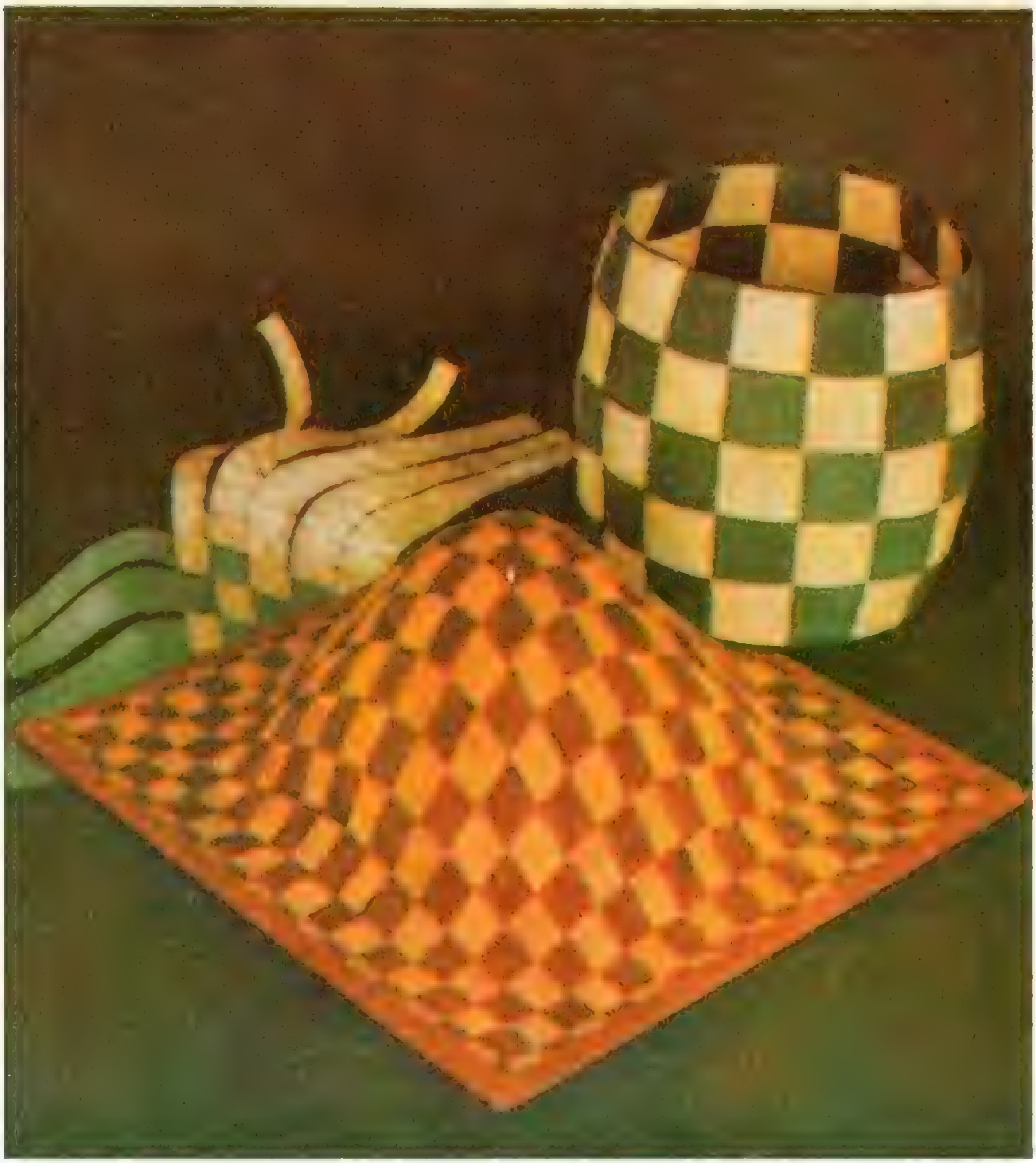
Индекс 70465

Здесь показаны модели двух поверхностей, а также полоски, из которых они сплетены. В отличие от, например, цилиндра, большинство поверхностей нельзя изготовить точно изгибанием одного или нескольких листов бумаги (или другого нерастяжимого материала). Однако приближенно кусок любой поверхности с любой точностью можно моделировать при помощи узких полосок бумаги или (как это сделано здесь) цветной пленки.

Секрет в том, что полоски — переменной ширины, каждая должна иметь свою криволинейную форму. Расчет формы полосок был проведен на ЭВМ, а их «раскрой» — на графопостроителе.

Поверхность при этом представляется множеством криволинейных четырехугольных ячеек, длины и диагонали которых подсчитываются; затем каждая ячейка заменяется двумя треугольниками, и примыкающие друг к другу треугольники чертятся, образуя полоску. После склеивания полосок краями или переплетения продольных и поперечных полосок в шахматном порядке поверхность приобретает «свою» форму.

Ю. В. Котов



НОМЕР
9

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **9** 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*М. И. Кондаков.* С новым учебным годом!	*M. I. Kondakov.* Happy new school year!
3	*В. А. Займовский.* У металлов есть память?!	*V. A. Zaimovski.* Metals have memody?!
10	*А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев.* Кватернионы	*A. S. Mischenko, Yu. P. Soloviev.* Quaternions
16	*Е. Н. Кудрявцева, С. С. Хилькевич.* Почему вода выливается из ведра?	*E. N. Kudriavtseva, S. S. Khilkevich.* Why does water pour out of the pail?
	Новости науки	**Science news**
21	Химическая геометрия	Chemical geometry
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
22	*А. Э. Аринштейн.* Сравнительный вискозиметр Жуковского	*A. E. Arinstein.* Jukovski's comparative viscometer
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
26	*А. А. Болибрух, В. М. Уроев, М. И. Шабунин.* Квадратный трехчлен	*A. A. Bolibrukh, V. M. Uroev, M. I. Shabunin.* The quadratic trinomial
29	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
32	Задачи	Problems
33	*В. Н. Дубровский.* Кубик в картинках	*V. N. Dubrovski.* The cube in pictures
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
39	Задачи М821—М825; Ф833—Ф837	Problems M821—M825; P833—P837
42	Решения задач М806—М810; Ф818—Ф822	Solutions M806—M810; P818—P822
49	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
53	*Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова.* Характерные ошибки на экзаменах по физике	*L. V. Tarasov, A. N. Tarasova.* Typical mistakes on physics exams
	Рецензии, библиография	**Book reviews**
57	Библиотечка «Квант»	The Kvant Library
	Олимпиады	**Olympiads**
58	Московская городская олимпиада по физике 1982/83 года	The Moscow city physics olympiad of 1982/83
60	Свердловская областная олимпиада по математике 1982/83 года	The Sverdlovsk regional mathematics olympiad of 1982/83
62	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints solutions**
	Наша обложка *(51)*	**Our cover page** *(51)*
	Смесь *(25, 31, 52, 61)*	**Miscellaneous** *(25, 31, 52, 61)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Решил жребий *(3-я с. обложки)*	A toss-up decided *(3 rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1983

С новым учебным годом!

Дорогие друзья!

В старые времена на Руси праздник Нового года отмечали 1 сентября. Для всех нас, кто связан со школой, этот день по-прежнему означает начало нового года — года учебного. Давайте подумаем, почему мы в этот день с такой радостью и волнением переступаем порог школы? Не только потому, что там каждого ученика ждет встреча с друзьями, спортивные игры, рассказы друзей о лете. Главное заключается в том, что ежегодно 1 сентября миллионы ребят направляются в увлекательное и трудное путешествие в Страну знаний. Знания необходимы для каждого из нас потому, что мы живем в эпоху научно-технической революции, когда достижения наук непосредствено используются на практике, когда наука становится производительной силой.

В речи на июньском (1983 г.) пленуме ЦК КПСС Генеральный секретарь ЦК КПСС тов. Ю. В. Андропов подчеркнул: «В сфере экономической ключевая задача — кардинальное повышение производительности труда. Мы должны стремиться достичь в этом плане высшего мирового уровня... Главный путь к качественному сдвигу в производительных силах — это, конечно, переход к интенсивному развитию, соединение на деле преимуществ нашего социалистического строя с достижениями научно-технической революции. Причем ее самого последнего этапа, который сулит технологический переворот во многих сферах производства».

Процесс автоматизации и комплексной механизации производства, изменение самого характера труда требует основательной научной базы, широкой эрудиции исполнителей. Поэтому значение научной подготовки будущих специалистов производства в наше время растет с каждым днем.

На протяжении всех школьных лет вас сопровождает «царица наук» — математика. Бурный процесс математизации знания и основанного на науке современного производства предъявляет высокие требования к математической подготовке выпускников школы. Это же в равной мере относится к физике — основе наук о природе, теоретической базе современной техники и технологии. Высокая физико-математическая подготовка школьников — залог достижения успехов в технике, экономике, обороне страны, непременное условие эффективной работы нашего общества по построению коммунизма.

Для нашего общества небезразличны люди с ярко выраженными интересами, склонностями и способностями к математике и физике. Школа помогает таким учащимся проявить свои дарования через систему кружковой работы, олимпиады, факультативные занятия, создает классы с углубленным изучением физики и математики. Именно таким школьникам адресован научно-популярный журнал «Квант».

Основательная физико-математическая подготовка школьников всегда была важным достижением советской школы. Не случайно достижения нашей школы в обучении математике и физике вызывают такой пристальный интерес специалистов за рубежом. В конечном счете именно в школе воспитывается сознательное отношение к труду и закладываются основы для соединения преимуществ социалистического строя с достижениями научно-технической революции.

Итак, начинается новый учебный год — год новых знаний и умений, новых опытов и задач, год более глубокого проникновения в любимую науку. Я поздравляю вас от всей души с этим праздником и желаю больших успехов в учебе и труде, в разумной, сознательной и целенаправленной подготовке к взрослой трудовой жизни!

Мкондаков

Президент Академии педагогических наук СССР
академик АПН СССР М. И. Кондаков

Ni
Ti
Ti
Ni
Ti
Ni

У металлов есть память?!

Доктор физико-математических наук
В. А. ЗАЙМОВСКИЙ

Явления живой и неживой природы настолько многообразны и так тесно переплетены друг с другом, что, столкнувшись с чем-то новым в неорганическом мире, мы невольно ищем аналогию с проявлениями жизнедеятельности человека. Это стремление отражается и на научной терминологии. Такие термины, как «время жизни» или «время оседлой жизни» (применительно к частицам), «живучесть», «усталость» (применительно к конструкционным материалам), считаются вполне строгими и стали общепринятыми наряду с сотнями других, им подобных в этом смысле. И не случайно открытое сравнительно недавно свойство металлических сплавов получило название «память формы». Могут ли металлы вспоминать, помнить, забывать? Давайте попробуем приписать металлам эти способности живых существ, и тогда мы увидим, что металлы способны даже на самоубийство!

Упругая и пластическая деформация

Вначале вспомним, что нам известно из школьного курса физики о деформации металлов, и договоримся о некоторых обозначениях.

Если к металлическому образцу приложить нагрузку — внешнюю силу, которая сообщает ускорение одной части тела относительно другой, то образец изменит свои размеры и форму — деформируется. Деформацию обычно характеризуют отношением изменения Δl размера образца к исходному размеру l: $\varepsilon = \Delta l/l$. Удельной мерой нагрузки служит напряжение — отношение величины действующей на образец силы к площади поперечного сечения образца.

Связь между σ и ε определяется только свойствами материала и для обычных металлов и сплавов отображается кривой, приведенной на рисунке 1.

На участке *OA* зависимость σ (ε) линейна. Эта закономерность была установлена еще в XVII веке английским ученым Гуком. Закон Гука $\sigma = E\varepsilon$ действует только в пре-

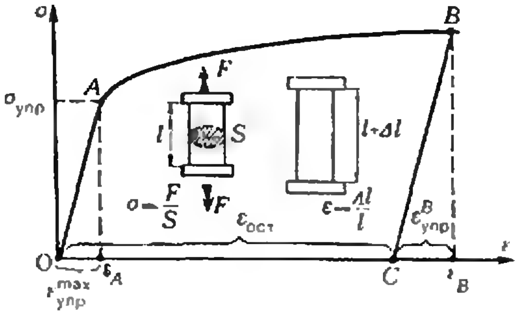


Рис. 1. Диаграмма напряжение — деформация.

делах «упругой области» диаграммы, пока напряжение не превысило предела упругости $\sigma_{упр}$. Константа E называется модулем упругости. Для большинства металлов E имеет порядок величины 10^{10}—10^{11} Н/м², а порядок $\sigma_{упр}$ обычно 10^7—10^8 Н/м²; поэтому максимальная упругая деформация чаще всего имеет порядок величины 10^{-3}, то есть составляет десятые доли процента. Формальный признак упругой деформации — ее обратимость: деформация исчезает при разгрузке, и образец возвращается к исходным размерам и форме. Между прочим, это означает, что, находясь под любым напряжением, не превышающим $\sigma_{упр}$, металл помнит свою исходную форму и восстанавливает ее сразу после устранения нагрузки. Например, если мы изогнем тонкое стальное лезвие для бритья (толщина $h=0{,}08$ мм) в полукольцо радиуса $\varrho=10$ мм, то резкое изменение формы — налицо (рисунок 2), а деформация, тем не менее, еще остается упругой. Наружные слои металла при этом растянуты, а внутренние сжаты; максимальная величина относительной деформации равна $\varepsilon=h/2\varrho$ и составляет 0,4%, что для хорошей стали (у которой $\sigma_{упр}$ достигает 10^9 Н/м²) еще не превышает $\varepsilon^{max}_{упр}$. Тогда при разгрузке лезвие вернется к исходной плоской форме, которую оно помнило, будучи согнутым в полукольцо. Линия разгрузки на диаграмме (см. рисунок 1) будет следовать прямой AO, и деформация уменьшится до нуля.

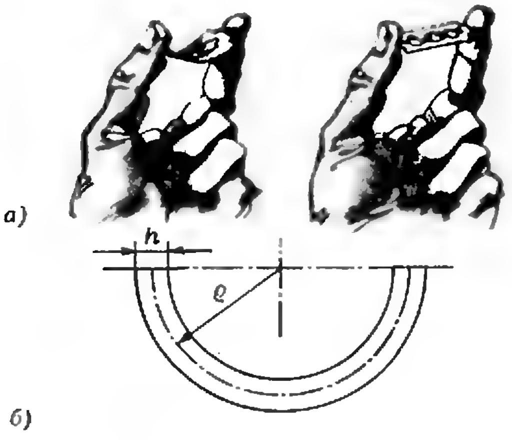


Рис. 2. а) — изгиб пластины в пределах упругой деформации;
б) — пластический изгиб. Средний слой изогнутой пластины не деформирован, его длина равна $\pi\varrho$. Нижний слой растянут, его длина равна $\pi(\varrho+h/2)$.

$$\varepsilon=\frac{\pi(\varrho+h/2)-\pi\varrho}{\pi\varrho}=\frac{h}{2\varrho}.$$

Упругая деформация связана с изменением расстояний между равновесными положениями атомов в кристаллической решетке. При разгрузке силы межатомного взаимодействия возвращают атом в исходные позиции, и форма тела восстанавливается. Но что произойдет, если мы увеличим нагрузку и напряжение превысит $\sigma_{упр}$, а деформация выйдет за пределы $\varepsilon^{max}_{упр}$? Упругая деформация продолжает нарастать прямо пропорционально растущей величине напряжения (в соответствии с законом Гука), но появляется вторая составляющая деформации — пластическая. Общая величина деформации, соответствующей некоторой точке B на рисунке 1, складывается теперь из $\varepsilon_{упр}$, которая исчезнет при разгрузке (линия разгрузки BC пойдет параллельно упругому участку AO), и $\varepsilon_{ост}$ — остаточной деформации, которая остается при снятии нагрузки. Из рисунка 1 видно, что $\varepsilon^{B}_{упр}$ больше $\varepsilon^{max}_{упр}$, поэтому символ «max» здесь не означает, что нельзя получить упругую деформацию большей величины. Он означает лишь, что если общая деформация превысит $\varepsilon^{max}_{упр}$, то она уже не будет чисто упругой и форма тела после разгрузки будет отличаться от исходной.

Таким образом, формальным признаком пластической деформации является ее необратимость: после разгрузки сохраняются остаточные изменения размеров, то есть память металла начинает давать перебои. Если продолжать деформацию дальше, за точку B, то пластическая составляющая будет нарастать при сравнительно слабом росте напряжения. Конечно, в конце концов процесс закончится разрушением образца; величина $\varepsilon_{ост}$ перед разрушением у пластичных металлов составляет десятки процентов, то есть на 2 порядка превышает $\varepsilon_{упр}$. Это уже практически полный «склероз» — металл забывает исходную форму и принимает новую.

На такой забывчивости металлов основаны промышленные процессы их обработки, когда мы проделываем, например, путь от огромного слитка до тонкой проволочки. Если вернуться к нашему примеру с тонкой пластинкой, согнутой в полукольцо, но увеличить ее толщину до 2 мм, то деформация наружных слоев составит уже 10%. Теперь после разгрузки концы пластины лишь немного «спружинят», разойдутся в стороны (относительная деформация уменьшится на 0,5%), и пластина останется почти таким же полукольцом с чуть большим радиусом.

Когда говорят: «согнуть в бараний рог», имеют в виду именно такие большие деформации, при которых упругой составляющей уже можно пренебречь из-за ее малости по сравнению с остаточной. Между строк этого решительного выражения можно прочитать: «уже не разогнешься». Действительно, чтобы устранить последствия пластической деформации и вернуть тело к исходной форме, необходимо принудительно пластически деформировать его в противоположном направлении. Если же нагревать пластически деформированный металл, то форма его остается прежней — нет никаких причин для уменьшения или роста величины остаточной деформации.

Чтобы хорошо понять существо эффекта памяти формы в металлах, надо разобраться в механизме их пластической деформации. Точнее, нам понадобится рассмотреть лишь геометрический аспект этого механизма. Будучи телами кристаллическими, металлы пластически деформируются путем сдвигов по определенным атомным плоскостям в решетке (рисунок 3). Это напоминает сдвиг в стопке монет или в колоде карт. Мы не можем увеличить размер колоды, потянув сразу все карты в продольном направлении, но длина колоды увеличится, если мы будем сдвигать вдоль нее карты одну за другой. Так же удлиняется при растяжении металлический стержень — происходит сдвиг соседних слоев металла друг по другу. Чтобы при этом не нарушалась сплошность металла, слои, разделенные плоскостями сдвига, постепенно разворачиваются в направлении действия нагрузки. Эти сдвиги, как мы уже знаем, необратимы; они и вызывают остаточную деформацию.

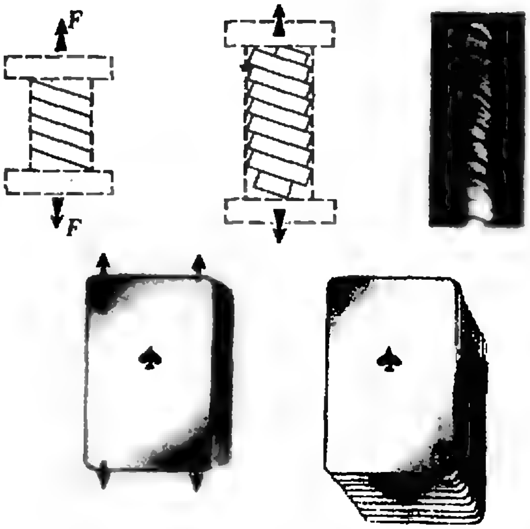


Рис. 3. Пластическая деформация осуществляется путем сдвигов. На фотографии — кристалл цинка после сильной пластической деформации (×50).

Открытие Г. В. Курдюмова и Л. Г. Хандроса

Существуют ли в металлах сдвиговые процессы, которые могут идти без воздействия внешней силы? Оказывается, существуют и уже 3000 лет используются человеком. Еще в древней Греции и Риме использовали явление закалки стали для придания ей особой твердости и прочности. Однако только в XX веке выяснилось, что это изменение свойств стали связано с превращением одной кристаллической модификации железа в другую.

Всем знакомы превращения с изменением агрегатного состояния вещества: при высоких температурах устойчиво газообразное состояние, при более низких температурах — жидкое, что и вызывает конденсацию (при достаточно большом давлении). При дальнейшем охлаждении вещество затвердевает, кристаллизуется, то есть его атомы располагаются в пространстве в строгом геометрическом порядке, образуя кристаллическую решетку. Конкретные типы решеток могут быть различными, причем многим металлам и сплавам свойственно явление полиморфизма — способность изменять тип решетки в зависимости от окружающей температуры, давления и т. д. Такие металлы и сплавы, охлаждаясь от температуры кристаллизации, испытывают полиморфные превращения: вещество остается в твердом состоянии, но его высокотемпературная модификация переходит в низкотемпературную, и порядок расположения атомов в пространстве меняется.

Есть два основных типа подобных превращений в твердом теле. Если температура еще достаточно высока (скажем, около половины от температуры плавления по абсолютной шкале) и атомы сравнительно подвижны, они способны обмениваться местами с соседями и перемещаться на расстояния, превышающие межатомные. В этом случае атомы как бы покидают свои позиции в старой решетке и поодиночке или небольшими группами пристраиваются к новой. Но если этот переход одной кристаллической решетки в другую идет при низких температурах, то характер атомных смещений меняется. Здесь уже атомы менее подвижны, они не могут менять соседей. Поэтому они попадают в новые положения, соответствующие другой решетке, в результате взаимно согласованных перемещений на малые расстояния. Геометрически эта ситуация близка к изображенной на рисунке 3: атомы в одном слое совместно смещаются относительно атомов другого слоя. Отличие лишь в том, что порядок упаковки атомов в соседних слоях разный — в одном слое они образуют решетку одного типа, а в другом — другого. Превращенная область в кристаллическом теле как бы испытывает сдвиг относительно соседней, в которой еще сохранилась старая решетка, а также относительно того участка с прежним порядком упаковки атомов, в котором она сама образовалась. Важно, что все это происходит без участия внешних сил — просто в результате понижения температуры. Превращения этого типа были названы мартенситными, а образующаяся в результате фаза с новой решеткой — мартенситом (в честь немецкого металловеда Мартенса; не путайте с Мартеном, изобретателем сталеплавильного процесса). Высокотемпературную фазу в железе и стали (а позднее, по аналогии, и в других сплавах) назвали аустенитом — в честь английского металлурга Аустена. Именно превращение аустенита в мартенсит ответственно за резкое изменение свойств стали при закалке. В сталях мартенситное превращение начинается обычно при температурах 400—600 К. Температуру начала этого превращения обозначают $M_н$ и называют мартенситной точкой. Хотя $M_н$ и не имеет такого строго определенного значения, как, скажем, температура плавления, при данном химическом составе сплава ее колебания, как правило, невелики.

Мартенситное превращение связано со значительными сдвиговыми смещениями атомов, но форма тела при закалке в целом не изменяется. Дело в том, что в ходе превращения мартенситная фаза разбивается на отдельные кристаллы, так чтобы направления сдвиговых смещений в соседних кристаллах были противоположны. Это снижает общий уровень напряжений, возникающих при мартенситном превращении из-за сильных деформаций решетки и различия в плотности двух участвующих в нем фаз. Упрощенно эта картина изображена на рисунке 4, *а*. Форма тела в целом не изменилась, но первоначально плоские поверхности стали ребристыми. На поверхности появился рельеф — непременный спутник мартенситного превращения.

В 1948 году один из крупнейших советских металлофизиков академик

Г. В. Курдюмов предсказал, а уже в следующем году вместе со своим сотрудником Л. Г. Хандросом (ныне доктором физико-математических наук) экспериментально наблюдал новый тип мартенситного превращения в алюминиевой бронзе. В 1980 году это было признано открытием. Авторы открытия получили соответствующий диплом, а само явление — название «эффект Курдюмова». Суть его в следующем. При благоприятном сочетании определенных условий (в частности, нужно, чтобы разница объемов фаз была небольшой) превращение аустенита (А) в мартенсит (М) приобретает особые черты. Оно становится, как выразился Г. В. Курдюмов, «термоупругим». Этот термин отражает многие необычные особенности такого мартенситного превращения. В частности, он подчеркивает то обстоятельство, что если прекратить охлаждение, то превращение сразу прекращается на той стадии, на которой его застигла температурная остановка, а если начать нагревать образец, то превращение вскоре начинает идти в обратную сторону. Это значит, что мартенсит снова превращается в аустенит, все сдвиговые смещения атомов идут в обратном направлении, а сами атомы возвращаются точно в свои исходные позиции, соответствующие решетке аустенита.

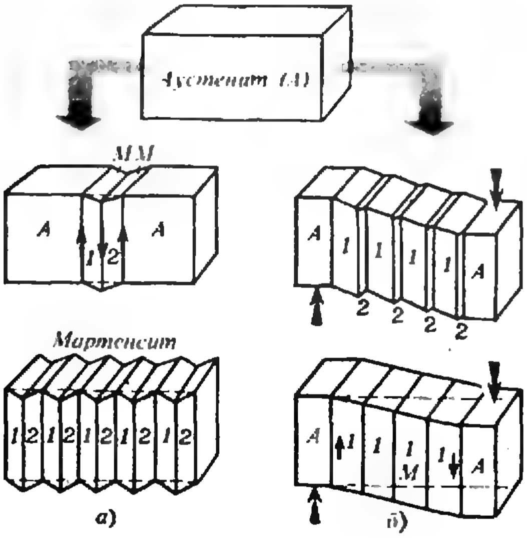


Рис. 4. Мартенситное превращение при охлаждении (а) и под действием нарастающей внешней силы (б).

В сплавах, испытывающих термоупругое превращение, приложением внешнего напряжения можно вызвать повышение температуры мартенситного превращения, но главное — в этих сплавах наличие внешней нагрузки особенно резко меняет геометрическую картину превращения. Если напряжение приложено так, как показано на рисунке 4, *б*, то увеличивается доля кристаллов *1*, в которых направление сдвиговых смещений атомов согласуется с направлением действия нагрузки, а доля кристаллов *2* уменьшается. В предельном случае при А → *М*-переходе реализуется только один вариант смещений атомов (рисунок 4, *б*), и мы получаем значительную общую деформацию образца, которая соответствует относительному удлинению 10% и более.

По своей величине эта деформация намного превышает $\varepsilon_{\text{упр}}^{\max}$ обычных металлов, но она накапливается не за счет необратимых сдвигов, а за счет направленного превращения А → М. Внешняя сила упорядочивает смещения атомов при этом превращении. Если теперь вызвать обратное превращение М → А, то вся эта огромная деформация исчезнет, так как атомы возвращаются в исходное положение, которое они занимали в решетке аустенита.

Получается, что пластина, изготовленная из такого сплава и согнутая в кольцо, помнит исходную плоскую форму, причем может достаточно долго хранить ее в своей памяти. Процесс «вспоминания» реализуется при нагреве, и теперь мы уже можем «взывать к памяти» металла в то время и в той обстановке, когда нам это потребуется.

В настоящее время известны сотни сплавов, проявляющих эффект Курдюмова. Регулируя их состав, мы можем смещать интервал А → М → →А-превращений по температурной шкале. Например, сделаем так, чтобы мартенситная точка $M_н$ была немного ниже комнатной температуры, а $A_н$ — температура начала обратного М → А-превращения при нагреве — немного выше. Тогда небольшое напряжение, приложенное при комнатной температуре, вызовет превращение А → М и значительное изменение формы тела, а при нагреве на 50—100 °С оно вспомнит свою исходную форму. Можно «спустить» интервал превращений в глубокий холод. Тогда задавать новую форму нужно будет при низкой температуре, а вспоминать прежнюю форму металл будет в ходе отогрева до температуры окружающей среды. Интересно, что если мы будем препятствовать возвращению сплава к его первоначальной форме, то в нем возникают очень высокие напряжения. Скажем, изогнуть стержень вблизи $M_{\text{н}}$ можно грузом 10 Н, а при нагреве, стремясь выпрямиться, он сможет уже поднять груз 100 Н. Если же мы подвесим «непосильный» груз, то мучительно вспоминая свою прежнюю прямую форму, стержень иногда даже разрывается на части (самоубийство?!).

Как используют память металлов?

Возможности практического применения сплавов, обладающих уникальным свойством запоминать форму, исключительно разнообразны и заманчивы. Здесь перед конструкторами — широкое поле деятельности, усеянное принципиально новыми инженерными решениями. Например, в космической технике с помощью этих сплавов эффектно решается традиционная проблема экономии места в корабле. Свернутые или скрученные в компактную форму и уложенные в небольших нишах космического корабля антенны, излучатели энергии и т. п. распрямляются после запуска аппарата на орбиту от действия солнечного тепла. Сплавы с памятью можно использовать для создания космического радиотелескопа — компактный моток тонкой проволоки разворачивается при нагреве в круг диаметром около 2 км!

Конечно, запоминающим сплавам есть много применений и на Земле. Их способность поднимать грузы при нагреве открывает возможность создания двигателей прямого преобразования тепла в механическую работу. Модели таких двигателей уже построены. Их КПД невысок, но ведь для их работы можно использовать низкотемпературные источники тепла — солнечную энергию, тепловые отходы промышленных предприятий и т. п.

Это же свойство запоминающих сплавов нашло применение при создании соединения способом, заменяющим сварку, пайку и другие традиционные методы. Допустим, нам надо соединить две трубки для получения, скажем, топливопровода двигателя самолета. Берем втулку из низкотемпературного запоминающего сплава, внутренний диаметр которой на 4% меньше наружного диаметра соединяемых трубок (рисунок 5). В жидком азоте (—196 °С) деформируем втулку так, что ее внутренний диаметр становится на 4% больше наружного диаметра трубок. Теперь концы трубок мы можем ввести внутрь втулки, которая, отогреваясь до комнатной температуры, вспоминает прежнюю форму, сжимается и сжимает концы трубок, обеспечивая прочное герметичное соединение. Здесь используется совершенно необычная с инженерной точки зрения особенность проявления памяти металла. Ведь все нормальные, то есть «забывчивые», металлы при нагреве расширяются во всех направлениях. А запоминающий сплав мы заставили при нагреве сжиматься! Конечно, он сжимается только по двум осям, а по третьей — вдоль оси трубок — растягивается, так как объем материала втулки в ходе М → А-превращения меняется мало. Но в данном случае это

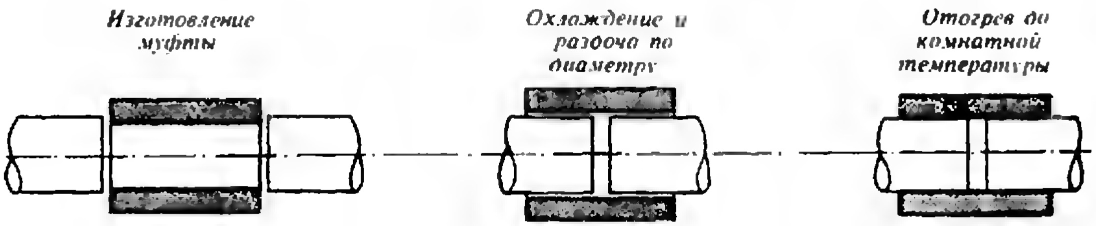

Изготовление муфты
Охлаждение и раздача по диаметру
Отогрев до комнатной температуры

Рис. 5. Схема получения соединения с использованием муфты из сплава с памятью.

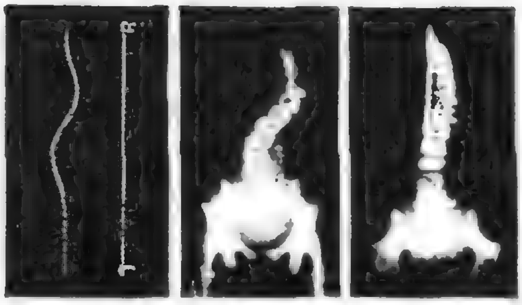


Рис. 6. Новый способ лечения сколиоза.

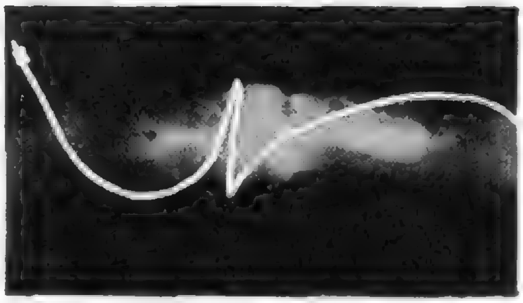


Рис. 7. Тромб, остановленный в кровеносном сосуде собаки фильтром из нитинола.

не мешает решению задачи; важно получить при нагреве уменьшение диаметра втулки, чтобы она сжала концы соединяемых трубок.

В авиации и кораблестроении уже установлены сотни тысяч таких соединений. Они показали высокую надежность и работают безотказно. А ведь надо учитывать, что технически это значительно проще, чем сваривать или паять. Можно легко выполнять такие соединения в труднодоступных или пожароопасных местах и даже в таких экзотических условиях, когда сварка или пайка вообще невозможны, — например, на дне моря.

Запоминающие сплавы используют и для создания разного рода автоматических терморегуляторов, срабатывающих при небольшом превышении заранее заданного значения температуры.

Интересны возможности использования этих сплавов в медицине. Их уже применяют при операциях, связанных со сращиванием костных переломов. Разрабатываются новые способы лечения такого заболевания, как сколиоз — искривление позвоночника. В организм больного оперативным путем вводят стержень, изогнутый так, что он повторяет неправильную форму позвоночника, и скрепляют его с позвоночным столбом. Стержень помнит заранее заданную ему форму правильного позвоночника и начинает восстанавливать ее при небольшом (не опасном и безболезненном для человека) повышении температуры (рисунок 6). Врач может легко регулировать ход лечения.

Другой пример — фильтры для улавливания тромбов (сгустков крови) в сосудах. Слегка охлажденная прямая тонкая проволочка вводится в нужное место кровеносного сосуда и там, отогреваясь до температуры тела, принимает ранее заданную ей причудливо-запутанную форму. Фильтр пропускает кровь, но задерживает тромб (рисунок 7), который, добравшись до сердца или мозга, мог бы привести к смертельному исходу.

Начаты работы по созданию искусственного сердца с использованием тонких проволок из запоминающих сплавов. В медицине, кроме памяти, используется еще и то обстоятельство, что некоторые из запоминающих сплавов, в частности сплав никеля и титана — нитинол, имеют очень высокую коррозионную стойкость и показали отличную совместимость с тканями живых организмов.

Нитинол не ржавеет, он легок и достаточно прочен. Не исключено, что в будущем из него будут, например, делать корпусы автомобилей. Такой автомобиль, даже после серьезного дорожного происшествия, восстановит форму кузова просто в результате легкого подогрева поврежденных мест.

Конечно, сейчас «автомобильный» прогноз выглядит, пожалуй, слишком смелым, так как запоминающие сплавы еще довольно дороги. Но ведь мы еще не знаем, чем нас завтра порадуют геологи.

$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$

Кватернионы

Доктор физико-математических наук
А. С. МИЩЕНКО,
кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

***От редакции.** В нынешнем году «Квант» много рассказывал о числах. О комплексных числах (№ 2, с. 16), об их истории (№ 6, с. 10), о представлении действительных чисел в виде цепных дробей (№ 5, с. 16 и № 6, с. 26), об алгебраических и трансцендентных числах (№ 7, с. 2). Завершает эту серию публикуемая ниже статья (не требующая, однако, знакомства с предыдущими). В ней речь идет о кватернионах — числах, содержащих комплексные, а значит и все остальные, числа. Вы узнаете немного о приложениях кватернионов и о своеобразной истории их создания, исходной точкой которой было желание внести алгебраическую структуру (сложение и, главное, умножение) в геометрические объекты (различные множества точек).*

Как сделать из точек числа?

Если речь идет о точках на прямой — это просто. Выбрав начало отсчета («нуль») и масштаб с направлением («единицу»), можно получить из прямой числовую ось и тем самым превратить каждую точку в действительное число — ее координату (рис. 1).

С точками на плоскости сложнее. Выбрав начало отсчета («нуль») и пару перпендикулярных осей, можно сопоставить каждой точке на плоскости пару ее координат $(x; y)$. Чтобы каждую такую пару — *дуплет* — сделать числом, нужно научиться «складывать» и «умножать» эти дуплеты, причем так, чтобы сохранялись привычные свойства сложения и умножения (переместительный, сочетательный и распределительный законы, наличие обратных операций — деления и вычитания).

Со сложением просто. Дуплеты естественно складывать как векторы —

покоординатно (рис. 2):

$$(x;\ y)+(x';\ y')=(x+x';\ y+y').\quad (1)$$

С умножением же дело обстоит хитрее[*]. Однако и здесь не очень сложная формула дает выход из положения:

$$(x;\ y)\cdot(x';\ y')=(xx'-yy';\ xy'+x'y).\quad (2)$$

Нетрудно проверить, что такое умножение дуплетов вместе со сложением (1) обладают выше упомянутыми «привычными свойствами». Таким образом, множество дуплетов с операциями (1), (2) можно считать полноценным числовым множеством.

На самом деле дуплеты — не что иное, как комплексные числа. Их чаще записывают не в виде $(x;\ y)$, а как $x+yi$, где i — мнимая единица (дуплет (0; 1)), обладающая замечательным свойством $i^2=i\cdot i=-1$, позволяющим (в области комплексных чисел) извлекать корни из отрицательных чисел. Подробнее о комплексных числах можно прочитать в статье Л. С. Понтрягина в «Кванте», 1983, № 2, с. 16.

А как превратить точки пространства в числа? Здесь снова, вводя систему координат, можно записывать точки в виде наборов их координат, но уже не двух, а трех: $(x;\ y;\ z)$. Такие тройки, или *триплеты*, естественно складывать покоординатно:

$$(x;\ y;\ z)+(x';\ y';\ z')=$$
$$=(x+x';\ y+y';\ z+z').\quad (3)$$

Триплеты можно будет считать числами, если найдется способ их умножения, обладающий, вместе со сложением (3), обычными свойствами этих операций. В частности, обратной к умножению операцией (делением на ненулевые элементы).

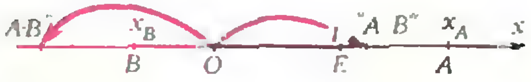


Рис. 1.

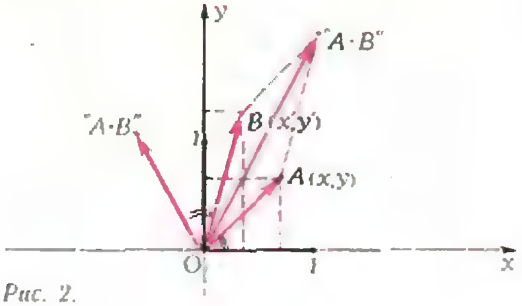


Рис. 2.

Так все-таки, как умножаются триплеты? В 1833 г. этой задачей заинтересовался ирландский математик Уильям Роуан Гамильтон (1805—1865). Но об этом незаурядном человеке стоит рассказать особо.

У. Р. Гамильтон

Гамильтон обладал блестящими и многосторонними способностями. В десять лет он знал наизусть много стихов Гомера, в четырнадцать лет владел девятью языками, в 1824 г. опубликовал в трудах Королевской Ирландской Академии работу, посвященную геометрической оптике, в 1827 г. получил звание королевского астронома Ирландии.

К 1833 г. Гамильтон занимал пост директора обсерватории в Денсинке (около Дублина) и был известен как автор ряда работ по оптике и аналитической механике. Исходя из своих работ по геометрической оптике, Гамильтон предсказал эффект двойной конической рефракции в двуосных кристаллах, который вскоре был обнаружен его коллегой Ллойдом.

В течение долгих десяти лет Гамильтон безуспешно пытался придумать правило умножения триплетов. Позже в письме к сыну он вспоминал: «Каждое утро..., когда я спускался к завтраку, ты и твой брат Уильям Эдвин обычно спрашивали меня: «Ну как, папа, ты уже умножаешь триплеты?» На что я всегда был вынужден печально отвечать: «Нет, я умею лишь складывать и вычитать их.»

Векторное произведение

Задача, которую решал Гамильтон, поначалу казалась несложной. Как складывать векторы — ясно (по формуле (3)), остается «только» найти формулу их умножения — что-нибудь вроде формулы (2) для умножения дуплетов. Но все формулы, которые перепробовал Гамильтон, упорно не подходили — то нарушалось одно из обычных свойств, то другое.

Уже тогда была хорошо известна операция векторного произведения:

---

[*] Покоординатное умножение $(x;\ y)(x';\ y')=(xx';\ yy')$ ничего хорошего не дает: для такой операции нет обратной операции (невозможно, к примеру, деление на ненулевой дуплет (0; 2)).

векторным произведением $\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2$ ненулевых векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ называется вектор, перпендикулярный плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, имеющий направление, определяемое правилом правой руки» (рис. 3), и длину $|\mathbf{v}_1|\cdot|\mathbf{v}_2|\cdot\sin(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Для дальнейшего заметим, что если векторы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ заданы своими координатами в прямоугольной системе координат:

$$\mathbf{v}_1=(\alpha_1;\ \beta_1;\ \gamma_1)$$

$$\mathbf{v}_2=(\alpha_2;\ \beta_2;\ \gamma_2).$$

то

$$\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2= =(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1;\ \gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1;\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1). \quad (4)$$

Но операция векторного произведения не годилась Гамильтону, поскольку она не имеет обратной. Например, если $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2\neq 0$, то угол $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ между этими векторами равен нулю. Значит, длина векторного произведения $\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2$ равна нулю, то есть и сам вектор $\mathbf{v}_3$ нулевой. Если бы операция деления на ненулевой вектор существовала всегда, то мы имели бы $(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2):\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1\neq 0$, *в то время как* $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=0$ *и, значит,* $(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2):\mathbf{v}_2\neq 0$. Получившееся противоречие показывает, что деление на $\mathbf{v}_2$ невозможно.

Не может не вызвать уважения и восхищения то, что, несмотря на разочарование и неудачи, Гамильтон не оставлял надежды и в течение десяти лет с завидным упорством пытался решить поставленную перед собой задачу. И хотя задача так и не была решена (и не могла быть решена — почему, мы объясним позже), десятилетний труд не пропал даром. В один прекрасный день 1843 года Гамильтон вдруг решил для определения умножения рассматривать не триплеты (тройки чисел), а четверки, или, как он их тут же окрестил, кватернионы. Вот как это произошло.

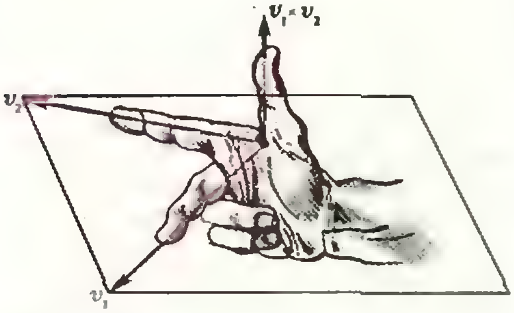


Рис. 3.

Случай на Брогемском мосту

В одном из писем к своему сыну, написанном в свойственном тому времени несколько высокопарном стиле, Гамильтон вспоминал: «Это был 16-й день октября, который случился в понедельник, в день заседания Совета Королевской Ирландской Академии, где я должен был председательствовать. Я направлялся туда с твоей матерью вдоль Королевского канала; и, хотя она говорила мне какие-то отдельные фразы, я их почти не воспринимал, так как в моем сознании подспудно что-то творилось. Неожиданно как будто бы замкнулся электрический контур; блеснула искра, предвещающая многие длинные годы определенно направленной мысли и труда, моего — если доведется, или труда других, если мне будет даровано достаточно сознательной жизни, чтобы сообщить о своем открытии. Я оказался не в состоянии удержаться от желания высечь ножом на мягком камне Брогемского моста фундаментальную формулу о символах i, j, k,

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1,$$

содержащую решение проблемы, но, конечно, эта запись с тех пор стерлась. Однако более прочное упоминание осталось в Книге записей Совета Академии за этот день, где засвидетельствовано, что я попросил и получил разрешение на доклад о *кватернионах на первом заседании* сессии, который и был прочитан соответственно в понедельник 13-го следующего месяца — ноября».

Определение кватернионов

Кватернионы — это четверки действительных чисел $(x;\ y;\ u;\ v)$, которые удобно записывать в виде

$$q=x+yi+uj+vk,$$

x	i	j	k
i	-1	k	j
j	-k	-1	i
k	-j	-i	-1

Рси. 4.

где i, j, k — новые числа, являющиеся аналогом мнимой единицы в комплексных числах. Требуется, чтобы числа i, j, k удовлетворяли следующим соотношениям:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad (5)$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j. \qquad (6)$$

которые удобно записать в виде «таблицы умножения» (рис. 4).

По определению операции сложения и умножения кватернионов производятся по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов с учетом правил (5) — (6).

Согласно этому определению, если q_1 и q_2 — два кватерниона, то

$$\begin{aligned} q_1+q_2 &= (x_1+y_1i+u_1j+v_1k)+ \\ &+(x_2+y_2i+u_2j+v_2k) = x_1+y_1i+ \\ &+u_1j+v_1k+x_2+y_2i+u_2j+v_2k= \\ &=(x_1+x_2)+(y_1i+y_2i)+(u_1j+u_2j)+ \\ &+(v_1k+v_2k)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i+ \\ &+(u_1+u_2)j+(v_1+v_2)k. \qquad (7) \end{aligned}$$

Это, разумеется, привычное нам «покоординатное» сложение. Далее, произведение кватернионов q_1 и q_2 вычисляется так:

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (x_1+y_1i+u_1j+v_1k)\ (x_2+y_2i+ \\ &+u_2j+v_2k) = x_1x_2+x_1y_2i+x_1u_2j+ \\ &+x_1u_2k+y_1x_2i+y_1y_2i^2+y_1u_2ij+y_1v_2ik+ \\ &+v_1x_1k+v_1y_2ki+v_1u_2kj+v_1v_2k^2= \\ &=x_1x_2+x_1y_2i+x_2u_2j+x_1v_2k+y_1x_2i- \\ &-y_1y_2+y_1u_2k-y_1v_2j+u_1x_2j- \\ &-u_1y_2k-u_1u_2+u_1v_2i+v_1x_2k+ \\ &+v_1y_2j-v_1u_2i-v_1v_2=(x_1x_2-y_1y_2- \\ &-u_1u_2-v_1v_2)+(x_1y_2+y_1x_2+u_1v_2- \\ &-v_1u_2)i+(x_1u_2+u_1x_2-y_1v_2+ \\ &+v_1y_2)j+(x_1v_2+v_1x_2+y_1u_2- \\ &-v_1y_2)k. \qquad (8) \end{aligned}$$

Длинная, но совершенно автоматическая проверка показывает, что умножение кватернионов обладает сочетательным свойством:

$$(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3).$$

Естественно считать, что действительные и комплексные числа являются частным случаем кватернионов. Так, действительное число x — это кватернион вида

$$x = x+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k.$$

Комплексное число $z=x+iy$ представляется как кватернион

$$z=x+iy=x+iy+0\cdot j+0\cdot k. \qquad (9)$$

Читатель, не знакомый с комплексными числами, не должен смущаться: он может считать формулу (9), вместе с формулами (7) и (8), определением комплексного числа. Ему также будет полезно написать формулу умножения (8) для случая (9) и сравнить с формулой (2).

У операции сложения кватернионов, очевидно, имеется обратная операция — вычитание. Именно, разность двух кватернионов q_1 и q_2 определяется формулой

$$\begin{aligned} q_1-q_2 &= (x_1-x_2)+(y_1-y_2)i+ \\ &+(u_1-u_2)j+(v_1-v_2)k. \end{aligned}$$

Если $q_1=q_2$, то разность q_1-q_2 — это нулевой кватернион, равный

$$q_1-q_2=0+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k=0.$$

Деление кватернионов

Перейдем теперь к операции деления кватернионов, обратной к операции умножения. Вообще, что мы понимаем под частным от деления числа a на число $b\neq 0$? Это такое число c, что

$$bc=a. \qquad (10)$$

Так определяется частное от деления для действительных и комплексных чисел. К сожалению, для кватерниона применить непосредственно это определение мы не можем. И дело здесь вот в чем. Для того чтобы формула (10) «корректно» определяла частное, нужно, чтобы произведение не зависело от порядка сомножителей. В противном случае наряду с частным $c=b^{-1}a$, определенным формулой (10), существует вполне равноправное «левое» частное» c', определяемое формулой

$$c'b=a,$$

которое может отличаться от «правого частного» c из (10). Вот здесь, кроме необходимости выйти за пределы трехмерного пространства, Гамильтону пришлось принести еще одну жертву.

Оказывается, определенные им новые числа — кватернионы — потеряли еще одно привычное качество: произведение кватернионов зависит от порядка сомножителей. Действительно, уже в формулах (6) при изменении порядка множителей произведение меняет знак.

Таким образом, можно говорить лишь о «делении слева» и «делении справа». Как реально найти, скажем, «левое частное» от деления кватерниона q_1 на кватернион $q_2 \neq 0$?

Обозначим искомое частное через $q = x + yi + uj + vk$. Тогда, используя правило умножения для кватернионов и определение левого частного, получим следующее равенство кватернионов:

$$qq_2 = q_1$$

или

$$\begin{aligned}(xx_2 - yy_2 - uu_2 - vv_2) + \\ + (xy_2 + yx_2 + uv_2 - vu_2)i + \\ + (xu_2 + ux_2 - yv_2 - vy_2)j + \\ + (xv_2 + vx_2 + yu_2 - uy_2)k = \\ = x_1 + y_1 i + u_1 j + v_1 k.\end{aligned}$$

Полученное равенство равносильно системе четырех линейных уравнений с переменными x, y, u, v:

$$\begin{aligned}x_2 x - y_2 y - u_2 u - v_2 v &= x_1\\ y_2 x + x_2 y + v_2 u - u_2 v &= y_1\\ u_2 x - v_2 y + x_2 u - y_2 v &= u_1\\ v_2 x + u_2 y - y_2 u + x_2 v &= v_1.\end{aligned}$$

Предлагаем читателю в качестве упражнения решить эти систему и тем самым найти «левое частное» от деления q_1 на q_2. Аналогичным образом находится «правое частное» от деления q_1 на q_1.

Рассмотрим частный случай, когда делимое q_1 равно действительному числу 1. В этом случае частное от деления $q_1 = 1$ на кватернион q_2 (и «слева» и «справа») равно одному и тому же кватерниону

$$p = \frac{x_2 - y_2 i - u_2 j - v_2 k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}$$

(докажите!). Поэтому кватернион p обозначается через

$$q^{-1} = \frac{x_2 - y_2 i - u_2 j - v_2 k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}.$$

Тогда «правое частное» от деления кватерниона q_1 на ненулевой кватернион q_2 выражается формулой

$$q = q_2^{-1} \cdot q_1,$$

а «левое частное» от деления кватерниона q_1 на q_2 — формулой

$$q = q_1 \cdot q_2^{-1}.$$

Практически частное от деления двух кватернионов ищется другим путем. Для этого нам потребуются

Скалярные и векторные кватернионы

Так же как комплексные числа разлагаются в сумму своей действительной и мнимой частей, кватернион

$$q = x + yi + uj + vk$$

тоже можно разложить в сумму

$$q = x + (yi + uj + vk).$$

Первое слагаемое в этом разложении называется *скалярной частью* кватерниона, а второе слагаемое — *векторной частью*. Скалярная часть x — это просто действительное число, а векторная часть $yi + vj + vk$ может быть изображена вектором

$$\boldsymbol{r} = yi + vj + vk$$

в трехмерном пространстве, где i, j, k мы теперь рассматриваем как единичные векторы прямоугольной системы координат (рис. 5).

Таким образом, каждый кватернион q представляется в виде суммы

$$q = x + \boldsymbol{r},$$

где x — скалярная часть кватерниона q, а $\boldsymbol{r}$ — векторная часть. Если $\boldsymbol{r} = 0$, то $q = x$ и кватернион q называется *скалярным кватернионом*. Если же $x = 0$, то $q = \boldsymbol{r}$ и q называется *векторным кватернионом*.

При сложении кватернионов независимо складываются их скалярные и векторные части.

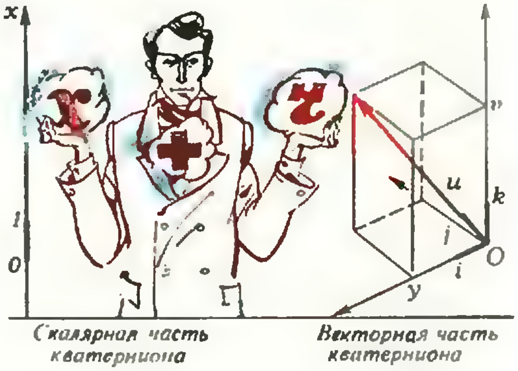


Рис. 5.

При умножении кватернионов дело обстоит сложнее. Если q_1 и q_2 — скалярные кватернионы, то их произведение q_1q_2 тоже скалярный кватернион. В случае, когда $q_1 = x$ — скалярный кватернион, а $q_2 = \mathbf{r}$ — векторный кватернион, произведение

$$q_1q_2 = x\cdot(yi+uj+vk) = (xy)i + (xu)j + (xv)k$$

является векторным кватернионом и операция умножения совпадает с умножением вектора $\mathbf{r}$ в пространстве на действительное число x.

И наконец, если оба кватерниона векторные:

$$q_1 = \mathbf{r}_1 = y_1i + u_1j + vk$$
$$q_2 = \mathbf{r}_2 = y_2i + u_2j + v_2k,$$

то

$$q_1q_2 = -(y_1y_2 + u_1u_2 + v_1v_2) + (u_1v_2 - v_1u_2)i + (v_1y_2 - y_1v_2)j + (y_1u_2 - u_1y_2)k.$$

Как видно из последней формулы, скалярная часть произведения q_1q_2 равна скалярному произведению $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ с обратным знаком. Векторная же часть q_1q_2 — это наш старый знакомый — векторное произведение $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, записанное в координатах (см. (4)).

Объединяя все рассмотренные случаи, получим общую формулу для умножения кватернионов. Если $q_1 = x_1 + \mathbf{r}_1$ и $q_2 = x_2 + \mathbf{r}_2$, то

$$\boxed{q_1q_2 = (x_1x_2 - \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2) + (x_1\mathbf{r}_2 + x_2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)}$$

А как же триплеты?

Почему Гамильтону все-таки не удалось найти удовлетворительного способа для умножения триплетов? Не из-за недостаточного остроумия или трудолюбия — выше мы уже отмечали, что задачу построения «трехмерных чисел» решить нельзя. Действительно, доказано, что попросту не существует способа умножения точек пространства, удовлетворяющего нашим требованиям (ассоциативности, дистрибутивности относительно покоординатного сложения, возможности деления на ненулевые элементы). Более того, сейчас известны все случаи, когда можно ввести такое умножение. Как доказал немецкий математик Ф. Г. Фробениус (1849—1917), этих случаев три: в размерности один (обычные действительные числа), в размерности два (комплексные числа) и в «размерности четыре» (кватернионы).

Что было дальше

Гамильтон и его последователи возлагали большие надежды на кватернионы. От кватернионов ожидали таких же результатов, как от комплексных чисел, и даже больше. И действительно, с помощью исчисления кватернионов были обнаружены совершенные в их математической красоте формулы, описывающие ряд важных физических явлений. Но дальнейшие надежды на развитие алгебраического и функционального исчисления кватернионов не оправдались.

Для кватернионов не имеет места основная теорема алгебры о существовании корней у многочлена с кватернионными коэффициентами, а, с другой стороны, существует такой многочлен с кватернионными коэффициентами от одной переменной, для которого любой кватернион является корнем.

Оптимизм сменился скепсисом. В начале нашего века математики перестали интересоваться кватернионами. Но время шло, и физики упорно искали математический формализм для некоторых эффектов, связанных с так называемым *спином* элементарных частиц. Кватернионы снова получили признание, когда была понята их роль в построении различных геометрических преобразований пространства, используемых в квантовой физике. Геометрические свойства кватернионов — это особая большая тема, о которой мы надеемся рассказать в дальнейшем.

Почему вода выливается из ведра?

Е. Н. КУДРЯВЦЕВА,
С. С. ХИЛЬКЕВИЧ

Мы хотим привести пример того, как иногда за объяснение принимается то, что в действительности ничего не объясняет. Такие ситуации в физике встречаются нередко, но случай, о котором будет идти речь, особенно интересен своей простотой. Дело касается явления, с которым мы сталкиваемся настолько часто, что нам не приходит в голову задуматься над ним. Но стоит присмотреться чуть-чуть внимательнее — и начинаются странные вещи...

Впрочем, судите сами.

«Загадка»

Опять ничего не могу я понять,
Опилки мои в беспорядке.
Везде и повсюду, опять и опять
Меня окружают загадки.

А. А. Милн. «Винни-Пух и все-все-все».

Трудно сосчитать, сколько раз вам приходилось выливать воду из ведер, стаканов, кувшинов и прочих сосудов. А задумывались ли вы хоть раз, почему она оттуда выливается?

Мы предвидим недоумение: «А над чем тут думать? Это же совершенно ясно! На воду действует сила тяжести, и если сосуд перевернуть, то под действием этой силы вода потечет вниз. Что тут может быть непонятного?»

Проделаем несколько несложных экспериментов, которые покажут вам, что не все так просто.

Опыт 1. Наливаем воду в стакан и переворачиваем его вверх дном. Как и следовало ожидать, вода выливается.

Опыт 2. Наливаем воду в тот же стакан, накрываем его листком бумаги, плотно прижимаем листок к краю стакана, переворачиваем стакан и отпускаем листок. Вода не выливается.

Этот опыт хорошо известен, и объясняется он просто: вода не выливается потому, что этому препятствует атмосферное давление. Под действием веса воды листок прогибается, уровень воды в перевернутом стакане понижается, объем, занимаемый в стакане воздухом, увеличивается, поэтому давление воздуха уменьшается и становится ниже атмосферного (рисунок 1). Разность сил давления атмосферного воздуха и воздуха внутри стакана направлена вверх и уравновешивает силу тяжести, действующую на воду. Вот вода и не выливается, хотя за исключением листка бумаги условия этого опыта — размеры сосуда, количество наливаемой воды, атмосферное давление, температура и т. д. — полностью повторяют условия опыта 1.

Опыт 3. Наливаем воду во флакон из-под духов и переворачиваем его. Вода не выливается.

Результат этого опыта широко известен, но обычно ему не придают значения. Однако если обратить на него внимание, то после некоторого размышления проблема вытекания жидкости из перевернутого сосуда перестанет казаться простой.

В самом деле, возникает какая-то странная ситуация. Сила тяжести на воду действует, а вода не выливается, хотя, казалось бы, ничто ее не удерживает. Это непонятно.

Правда, у нас уже есть пример аналогичной ситуации — это опыт 2. Но если по аналогии с опытом 2 попытаться объяснить невыливание воды в опыте 3 действием атмосферного давления, то моментально возникает вопрос: почему атмосферное давление удерживает воду в перевернутом флаконе, но не может удержать ее в перевернутом стакане? И дальше лавина вопросов начинает стремительно нарастать.

Зачем нужен листок в опыте 2? Почему атмосферное давление удерживает воду в перевернутом стакане с листочком, но не может удержать такое же количество воды в том же стакане без листочка? При каких условиях атмосферное давление может удержать воду в перевернутом сосуде без листка бумаги? Почему эти условия выполняются во флаконе и почему они не выполняются в ведре? Иными словами, почему вода выливается из ведра?

Видите, все не так просто. И если вы попытаетесь найти ответы на эти вопросы самостоятельно, то задуматься придется надолго.

Вернемся теперь к объяснению «вода выливается потому, что действует сила тяжести». Недостаточность этого объяснения совершенно очевидна. Хотя бы потому, что оно не учитывает влияния атмосферного давления. С точки зрения такого объяснения результаты опытов 2 и 3 совершенно непонятны: сила тяжести действует, а вода не выливается.

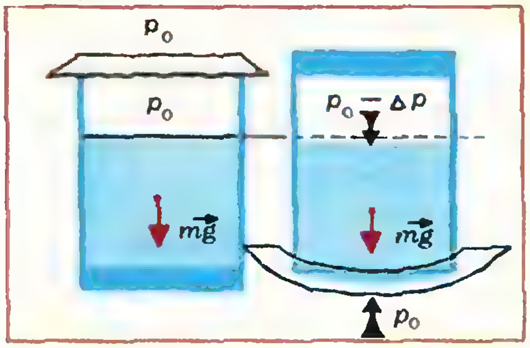


Рис. 1.

Вот и возникла ситуация, о которой мы говорили в начале статьи: привычное объяснение на самом деле не является объяснением, и надо искать что-то другое. Этим мы сейчас и займемся.

Разгадка

Наконец Грифон сказал Деликатесу: «Ну ладно, старик, давай. Поехали. Нельзя же весь день толочь воду в ступе».

Л. Кэрролл. «Алиса в стране чудес».

Вы уже почувствовали, что с помощью только атмосферного давления и силы тяжести объяснить процесс вытекания жидкости не удается. Нужно учитывать еще один фактор — поверхностное натяжение.

Какую же роль играет поверхностное натяжение при выливании жидкости из сосуда? Оказывается, оно определяет свойства волн на нижней поверхности перевернутой жидкости. От поведения этих волн и зависит, выльется жидкость или нет. Немного позже мы проведем количественный анализ, а пока расскажем о происходящем на качественном уровне.

Вы знаете, что волны, возникающие на свободной поверхности жидкости, постепенно затухают. Это происходит из-за внутреннего трения в жидкости, которое называют вязкостью. Но если жидкость находится в перевернутом сосуде, то волны на ее нижней свободной поверхности при определенных условиях не затухают; наоборот, амплитуда волн возрастает. Такие волны мы в дальнейшем будем называть неустойчивыми.

Если на нижней поверхности жидкости создаются условия для возникновения неустойчивой волны, то жидкость выльется из перевернутого сосуда, как это происходит в опыте 1. Если с помощью листа бумаги воспрепятствовать возникновению таких волн, как это было сделано в опыте 2, то атмосферное давление удержит воду и она не вытечет. В опыте 3 неустойчивая волна не возникает, амплитуда волн на нижней поверхности убывает с течением времени, и вода не вытекает.

При каких условиях возникает неустойчивая волна? Ответ на этот вопрос будет получен в следующем параграфе, но, забегая немного вперед, скажем, что решающее значение имеет длина волны. Если она меньше некоторого критического значения, то волна постепенно затухает, если больше — волна неустойчива. Это объясняет, почему вода не выливается из флакона и других сосудов с узким горлом: если диаметр отверстия меньше критической длины, то неустойчивые волны не возникают — они просто «не помещаются» в отверстии с маленьким диаметром.

Подчеркнем, что основным «удерживающим» фактором является атмосферное давление. Причина выливания воды — возникновение на нижней поверхности перевернутой жидкости неустойчивой волны.

Займемся теперь более подробным изучением неустойчивых волн.

Немного математики

Даже немножечко,
чайная ложечка,
— это уже хорошо!

А. А. Милн. «Винни-Пух и все-все-все».

К сожалению, полный анализ процессов, происходящих на нижней поверхности перевернутой жидкости, довольно сложен. Поэтому мы ограничимся рассмотрением упрощенной модели, которая, тем не менее, дает возможность разобраться в происходящем.

Представим себе, что мы перевернули сосуд, накрытый листом бумаги, и силы атмосферного давления уравновесили силу тяжести, действующую на воду (это происходило в опыте 2). Представим теперь, что лист бумаги мгновенно исчез, и на нижней границе жидкости образовалась свободная поверхность. В первый момент атмосферное давление еще удерживает жидкость, но в силу случайных колебаний воздуха и сосуда на невозмущенной поверхности начинают образовываться волны. Поведение этих волн и будет интересовать нас в первую очередь.

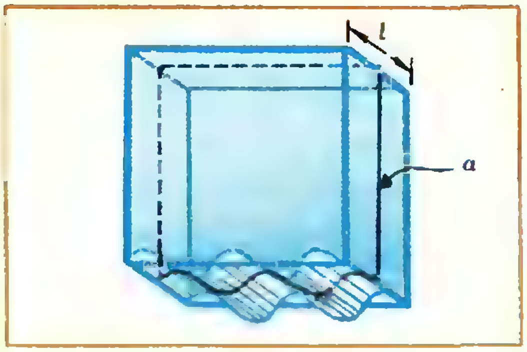


Рис. 2.

Мы рассмотрим только один тип волн: плоские волны в сосуде с отверстием прямоугольной формы. При этом мы будем предполагать, что сечение волны плоскостью a, изображенной на рисунке 2, состоит из полуокружностей радиуса R. Этот тип волн выбран в основном из соображений простоты расчетов. Рассмотрение других типов волн приводит к аналогичным выводам.

При возникновении на нижней поверхности жидкости волны меняется поверхностная энергия жидкости и ее потенциальная энергия.

Как мы уже говорили, свойства волн на нижней поверхности жидкости определяются поверхностным натяжением. При возникновении волны площадь свободной поверхности увеличивается. Следовательно, увеличивается поверхностная энергия.

Напомним, что молекулы на поверхности обладают большей энергией, чем молекулы внутри жидкости. Силы притяжения, действующие на молекулу внутри жидкости со стороны ее соседей, направлены во все стороны, и их равнодействующая равна нулю. А равнодействующая сил притяжения, действующих на молекулу на поверхности жидкости, не равна нулю. Для перемещения молекулы из глубины на поверхность необходимо совершить работу против этой силы. Следовательно, молекулы вблизи поверхности обладают некоторым избытком энергии по сравнению с молекулами, находящимися внутри жидкости. Этот

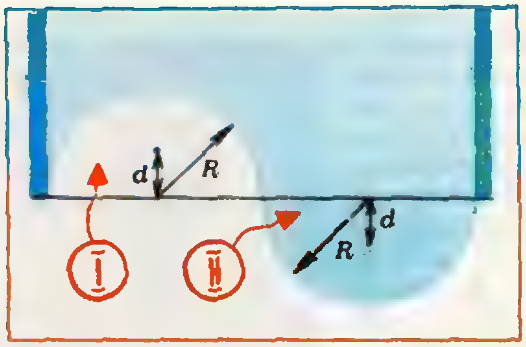


Рис. 3.

избыток и называют поверхностной энергией. Понятно, что поверхностная энергия пропорциональна площади поверхности: $W=\sigma S$, где коэффициент пропорциональности σ называется коэффициентом поверхностного натяжения.

Представим себе, что на нижней поверхности жидкости в перевернутом сосуде образовалась волна, длина которой равна линейному размеру отверстия в сосуде (рисунок 3). Подсчитаем изменение энергии жидкости, то есть разницу между энергиями до и после возникновения волны.

Площадь поверхности жидкости (см. рисунок 3) увеличилась на

$$\Delta S=S_2-S_1=4\pi Rl-4Rl.$$

Увеличение поверхностной энергии за счет увеличения площади поверхности равно

$$\Delta W_1=\sigma(2\pi Rl-4Rl)=2\sigma(\pi-2)Rl.$$

С другой стороны, при возникновении волны часть жидкости опустилась, и соответствующее изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta W_2=-mgh,$$

где m — масса опустившейся жидкости, h — расстояние, на которое опустился ее центр тяжести, g — ускорение свободного падения (минус в этой формуле означает, что изменение энергии отрицательно, то есть энергия уменьшилась).

Массу опустившейся жидкости m найти легко — это произведение плотности жидкости ϱ на объем половины круглого цилиндра радиуса R и высоты l. Расстояние, на которое опустился центр тяжести жидкости, — $h=2d$, где d — расстояние от центра тяжести половины цилиндра до невозмущенной поверхности. Для круглого цилиндра это расстояние оказывается равным $\frac{4}{3\pi}R$.

Итак, изменение потенциальной энергии жидкости равно

$$\Delta W_2=-\varrho g\frac{\pi R^2 l}{2}\cdot\frac{4R}{3\pi}\cdot 2=-\frac{4}{3}\varrho gR^3 l.$$

Полное изменение энергии запишется в виде

$$\Delta W=\Delta W_1+\Delta W=$$

$$=2(\pi-2)\sigma Rl-\varrho gl\frac{4}{3}R^3=$$

$$=2Rl[(\pi-2)\sigma-\frac{2}{3}\varrho gR^2].$$

На рисунке 4 приведен график зависимости ΔW от R. Посмотрите на этот график повнимательнее. Именно он дает ответ на все непонятные вопросы, связанные с выливанием воды. Для начала сравните его с графиком на рисунке 5, где изображена зависимость потенциальной энергии от координаты для шарика, который находится на вершине горы в небольшой яме. Похоже, не правда ли?

И поведение этих столь не похожих друг на друга систем во многом оказывается аналогичным. Шарик, как и любая система, стремится

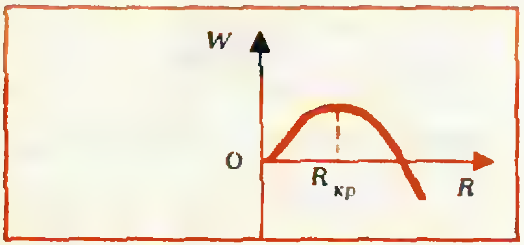


Рис. 4.

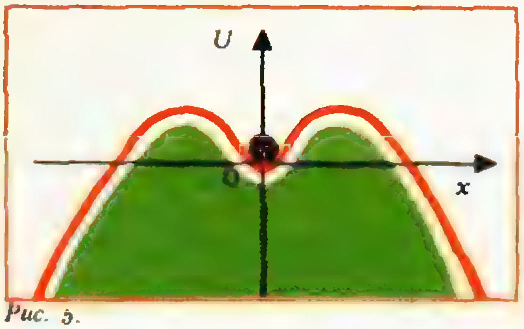


Рис. 5.

занять положение с минимальной потенциальной энергией. Поэтому при малых отклонениях от положения равновесия он вернется обратно, на дно ямы. Но если отклонение будет достаточно велико, то шарик начнет скатываться с горы и уже не вернется в первоначальное положение равновесия. Перевалив через наивысшую точку, он будет стремиться к другому минимуму потенциальной энергии.

Аналогичная картина происходит и при выливании жидкости. Невозмущенная нижняя граница соответствует нулевому значению R (точка 0 на рисунке 4). При возникновении волн с $R<R_{кр}$ поверхность жидкости будет стремиться вернуться в невозмущенное состояние. Но как только R превысит $R_{кр}$, амплитуда волн будет стремиться неограниченно возрастать. Уменьшение энергии за счет понижения центра тяжести окажется больше, чем увеличение энергии, связанное с увеличением площади поверхности. Поэтому волне энергетически выгодно увеличивать амплитуду. Это и приведет к выливанию жидкости из сосуда.

Вычислим теперь критическое значение $R_{кр}$. Из рисунка 4 видно, что максимум потенциальной энергии достигается только в одной точке. Те, кто уже умеет исследовать функции на максимум и минимум с помощью производных, легко найдут, что

$$R_{кр} = \sqrt{\frac{(\pi-2)}{2}\,\frac{\sigma}{\varrho g}}\,.$$

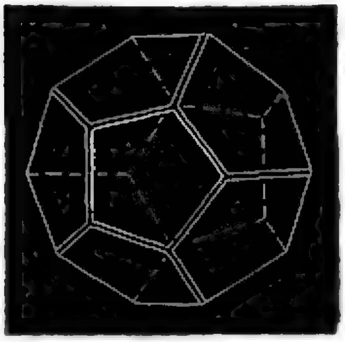
Остальным придется поверить нам на слово.

Таким образом, наша простая модель позволяет объяснить важнейшие черты исследуемого явления. Недостаток ее заключается в том, что параметр R характеризует у нас и длину волны, и ее амплитуду. Гораздо последовательнее было бы независимо задавать все параметры волны, но это усложнило бы подсчет изменения энергии. Для тех, кто не умеет интегрировать, трудности стали бы непреодолимыми, а мы стремились максимально упростить все вычисления. Тем не менее подстановка численных значений для воды — $\varrho = 10^3$ кг/м^3 и $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Дж/м^2 — дает значение критического радиуса $R_{кр} = 2 \cdot 10^{-3}$ м $=2$ мм. Учитывая, что длина волны равна $\lambda = 4R$, мы получим, что вода будет вытекать из перевернутого сосуда, если размер отверстия превышает 8 мм, что находится в разумном согласии с экспериментом.

* * *

Итак, мы выяснили роль различных факторов, которые влияют на выливание воды и прочих жидкостей из сосуда. Это простое, на первый взгляд, явление оказалось сложным и интересным.

И в заключение вернемся к самому началу. Как же все-таки ответить на вопрос: «почему вода выливается из ведра?» Правильный ответ можно сформулировать примерно так: радиус ведра гораздо больше критического радиуса, начиная с которого на нижней поверхности воды могут образовываться неустойчивые волны. Поэтому волнения, случайно возникающие на нижней поверхности воды, имеют тенденцию неограниченно увеличивать свою амплитуду, что и приводит к выливанию воды из перевернутого ведра.



Химическая геометрия

Химические соединения, особенно органические, имеют сложное строение. Наглядный тому пример — молекула дезоксирибонуклеиновой кислоты, представляющая собой две полимерные цепочки, закрученные в двойную спираль (см., например, статьи М. Д. Франк-Каменецкого «Самая главная молекула» в «Кванте» № 8 за 1982 год и «Левая спираль ДНК» в «Кванте» № 6 за 1983 год).

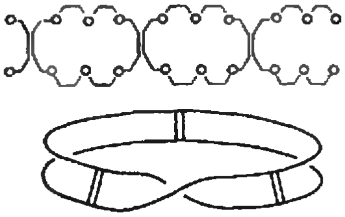
Выяснить строение сложных молекул, созданных природой, разобраться в их геометрии не так-то просто. Однако сейчас химики научились не только расшифровывать известные соединения, но и создавать новые, геометрия которых весьма необычна. О двух осуществленных геометрических «проектах» и пойдет речь. Сообщения о них появились в научных журналах в конце 1982 года.

Первое такое соединение получило название «додекаэдран». Его молекулы имеют форму додекаэдра — правильного двенадцатигранника (см. рисунок в начале статьи). Каждая молекула состоит из 40 атомов: 20 атомов углерода, расположенных в вершинах додекаэдра, и 20 атомов водорода, присоединенных к атомам углерода.

История о том, как «собрать» такой многогранник, как следить за правильностью «сборки» на каждом этапе, заслуживает отдельного рассказа. Заметим только, что молекул с такой симметрией до сих пор известно не было и в книгах о такой симметрии говорилось лишь для полноты картины. Теперь же это не так, додекаэдран — вполне реальное вещество, хотя и полученное пока в очень небольшом количестве. Это порошок белого цвета, который начинает плавиться при температуре 450 °C.

Молекулы второго необычного соединения, полученного химиками, имеют вид ленты Мёбиуса. Попробуем объяснить, как они устроены.

Среди органических соединений есть много таких, молекулы которых представляют собой кольца. Например, некоторые эфиры. Эфирные кольца часто объединяются по несколько штук, образуя цепочку-мономер, связанную перемычками двойных связей. В нашем примере (см. рисунок ниже) мономер состоит из трех колец. Эти короткие цепочки, благодаря тому, что на их концах находятся активные группы, могут объединяться в лентообразные цепочки-полимеры. Однако, если в растворе мономеров мало, они, изгибаясь, могут соединяться просто сами с собой, образуя кольцо. При этом примерно в половине случаев образуется не простое кольцо, а перекрученное. Так устроен первый химический лист Мёбиуса.



К нашей геометрической коллекции следует добавить еще катенаны — недавно полученные кольцеобразные молекулы, в которых кольца сцеплены не химически, а соединены, как в ювелирной цепочке.

Можно надеяться, что с течением времени коллекция будет пополняться все новыми и новыми экспонатами.

Я. С.

Сравнительный вискозиметр Жуковского

Кандидат физико-математических наук
А. Э. АРИНШТЕЙН

Всем хорошо известно, что, согласно законам Ньютона, для поддержания движения тел с постоянной скоростью не требуется никаких сил. Однако на практике мы убеждаемся как раз в обратном: если к движущемуся телу не прикладывать сил, поддерживающих это движение, то тело рано или поздно остановится.

Кажущееся противоречие объяснить очень легко. И дело, конечно же, не в нарушении законов Ньютона. Просто в реальных ситуациях практически на любое движущееся тело действуют силы сопротивления, направленные против движения. Природа этих сил может быть различной, но результат их действия один и тот же: для поддержания движения необходима дополнительная сила, в противном случае тело остановится.

Одно из свойств материальных тел, которое приводит к возникновению сил сопротивления движению, — это вязкость. Рассмотрим такой пример. Если жидкость течет по горизонтальной трубе постоянного сечения, то по закону Бернулли давление жидкости должно быть одинаковым по всей длине трубы. В действительности давление вдоль направления движения жидкости падает, и для сохранения устойчивого течения на концах трубы надо поддерживать определенную разность давлений. Это связано с тем, что скорости движения жидкости на различных расстояниях от стенок трубы неодинаковы, и между отдельными слоями движущейся жидкости возникают силы, называемые силами вязкости. Они стремятся затормозить тот из двух соприкасающихся слоев, который движется быстрее, и ускорить тот, который движется медленнее.

У разных жидкостей этот эффект проявляется по-разному. У густых жидкостей, подобных меду, он выражен сильнее, чем у жидкостей типа воды. Первые жидкости называют, соответственно, более вязкими, а вторые — менее вязкими. (Для тел, находящихся в аморфном состоянии, вязкое течение, хотя и очень слабое, тоже имеет место. Известно, например, что поставленная вертикально стеклянная пластинка через несколько десятков, а иногда сотен, лет принимает форму сильно вытянутой капли. Аналогично происхождение сталактитов — натеков причудливой формы, свешивающихся с потолка и стен пещер.)

Существует и количественная оценка вязких свойств — вязкость, величина, которая может быть измерена (а это очень важно для физиков). Что же под этим понимается?

Мысленно поместим жидкость (договоримся впредь этим словом назы-

Сравнительный вискозиметр Жуковского

Кандидат физико-математических наук
А. Э. АРИНШТЕЙН

Всем хорошо известно, что, согласно законам Ньютона, для поддержания движения тел с постоянной скоростью не требуется никаких сил. Однако на практике мы убеждаемся как раз [illegible] обратном: если [illegible] движущемуся телу не прикладывать сил, поддерживающих это движение, то тело рано или поздно остановится.

Кажущееся противоречие объяснить очень легко. И дело, конечно же, не в нарушении законов Ньютона. Просто [illegible] реальных ситуациях практически на любое движущееся тело действуют силы сопротивления, направленные против движения. Природа этих сил может быть различной, но результат их действия один и тот же: для поддержания движения необходима дополнительная сила, в противном случае тело остановится.

Одно из свойств материальных тел, которое приводит [illegible] возникновению сил сопротивления движению, — это вязкость. Рассмотрим такой пример. Если жидкость течет по горизонтальной трубе постоянного сечения, то по закону Бернулли давление жидкости должно быть одинаковым по всей длине трубы. В действительности давление вдоль направления движения жидкости падает, и для сохранения устойчивого течения на концах трубы надо поддерживать определенную разность давлений. Это связано с тем, что скорости движения жидкости на различных расстояниях от стенок трубы неодинаковы, [illegible] между отдельными слоями движущейся жидкости возникают силы, называемые силами вязкости. Они стремятся затормозить тот из двух соприкасающихся слоев, который движется быстрее, и ускорить тот, который движется медленнее.

У разных жидкостей этот эффект проявляется по-разному. У густых жидкостей, подобных меду, он выражен сильнее, чем у жидкостей типа воды. Первые жидкости называют, соответственно, более вязкими, [illegible] вторые — менее вязкими. (Для тел, находящихся в аморфном состоянии, вязкое течение, хотя [illegible] очень слабое, тоже имеет место. Известно, например, что поставленная вертикально стеклянная пластинка через несколько десятков, а иногда сотен, лет принимает форму сильно вытянутой капли. Аналогично происхождение сталактитов — натеков причудливой формы, свешивающихся с потолка [illegible] стен пещер.)

Существует и количественная оценка вязких свойств — вязкость, величина, которая может быть измерена (а это очень важно для физиков). Что же под этим понимается?

Мысленно поместим жидкость (договоримся впредь этим словом назы-

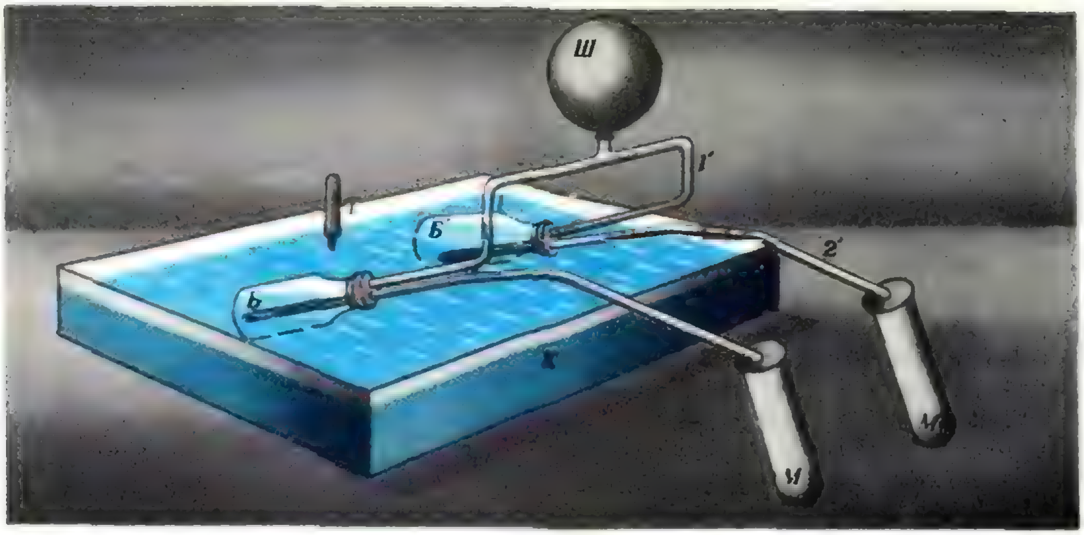


Рис. 4.

ки) $Б$ и $Б'$, закрытые гуттаперчевыми пробками. В каждую пробку входит по две трубки: одна изогнутая, другая прямая. Изогнутые трубки 1 и $1'$, оканчивающиеся в горловинах сосудов, посредством тройника соединены с резиновым шаром $Ш$ (годится, например, футбольная камера или медицинская спринцовка). Прямые трубки 2 и $2'$ одним концом доходят до дна соответствующего сосуда, а другим входят в мензурки $М$ и $М'$ (проградуированные в кубических сантиметрах). Выступающие участки этих трубок можно плавно изогнуть так, чтобы их концы были почти вровень (чуть выше) с уровнем жидкостей в сосудах $Б$ и $Б'$. Это делается для того, чтобы уменьшить погрешность измерения за счет разной плотности жидкостей (не надо преодолевать различную силу давления столбиков самих жидкостей).

Наполним сосуд $Б$ жидкостью с известной вязкостью, а сосуд $Б'$ — исследуемой жидкостью, опустим их в сосуд $К$ и зальем туда воду определенной температуры. Через некоторое время, когда этой же температуры достигнет все содержимое сосуда $К$, начинаем сжимать шарик $Ш$ и гнать из него воздух в сосуды $Б$ и $Б'$. Он попадает в верхние части этих сосудов и давит на жидкости с равными силами давления. Под давлением воздуха жидкости частично вытесняются из сосудов и через прямые трубки попадают в мензурки.

Как показывает опыт, объем V жидкости, протекающий через трубку постоянного сечения за некоторое время τ, тем больше, чем меньше вязкость жидкости, то есть

$$\frac{V}{\tau}=\frac{A}{\eta},$$

где коэффициент A зависит от условий опыта, к которым относятся перепад давлений и параметры трубок (подробнее об этом будет рассказано в Приложении к статье). Если трубки 2 и $2'$ одинаковы, то отношение объемов вытесненных жидкостей будет равно обратному отношению их вязкостей:

$$\frac{V}{V'}=\frac{\eta'}{\eta}$$

(ведь все условия протекания обеих жидкостей одинаковы). Отсюда, зная вязкость η известной жидкости и измерив на опыте объемы V и V', легко найти вязкость исследуемой жидкости:

$$\eta'=\eta\frac{V}{V'}.$$

А как быть, если нельзя гарантировать идентичность трубок 2 и $2'$ (в домашних условиях это сделать, действительно, практически невозможно)? Это затруднение можно преодолеть, несколько изменив методику проведения эксперимента.

Проведем опыт два раза: сначала так, как было описано выше, а затем — поменяв местами трубки 2 и $2'$. Из первого опыта получим

$$\frac{V_1}{\tau_1}=\frac{A}{\eta},\quad \frac{V_1'}{\tau_1}=\frac{A'}{\eta'},$$

или

$$\frac{V_1}{V_1'}=\frac{A}{A'}\,\frac{\eta'}{\eta},$$

из второго —

$$\frac{V_2}{\tau_2}=\frac{A'}{\eta},\quad \frac{V_2'}{\tau_2}=\frac{A}{\eta},$$

или

$$\frac{V_2}{V_2'}=\frac{A'}{A}\,\frac{\eta'}{\eta}.$$

Откуда, почленно перемножив два полученных равенства, найдем

$$\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2=\frac{V_1V_2}{V_1'V_2'},$$

или

$$\eta'=\eta\sqrt{\frac{V_1V_2}{V_1'V_2'}}.$$

Меняя температуру воды в сосуде K, можно измерить вязкость исследуемой жидкости при разных температурах и построить соответствующую кривую зависимости вязкости от температуры.

В заключение — один практический совет. Лучше сравнивать жидкости с близкими значениями вязкости, тогда объемы вытесненных жидкостей будут примерно одинаковыми (в противном случае один объем окажется малым по сравнению с другим, что увеличит погрешность измерений). Для исследования жидкостей с малой вязкостью за эталон удобно взять воду, а для более вязких жидкостей — оливковое масло (напомним, что соответствующие кривые $\eta=\eta(t)$ приведены на рисунках 2 и 3).

Приложение

Объем жидкости, протекающий через трубу постоянного сечения в единицу времени, определяется формулой

$$\frac{V}{\tau}=\frac{\Delta p S^2}{8\pi l\eta},$$

где Δp — разность давлений на концах трубы, S — площадь сечения трубы, l — ее длина, η — вязкость жидкости. Приведенная формула называется формулой Пуазейля, в честь французского ученого, который впервые экспериментально исследовал явление протекания жидкости по узким трубкам — капиллярам. С именем Пуазейля связана также одна из единиц измерения вязкости жидкости — пуаз (1 пуаз = 1 г/(см · с) = 0,1 кг/(м · с)).

Формулу Пуазейля, с точностью до безразмерного коэффициента, можно вывести, исходя из соображений размерностей. Поскольку для равномерного течения вязкой жидкости необходим перепад давлений на концах трубы, ясно, что объем вытекающей жидкости за единицу времени будет тем больше, чем больше перепад давлений, приходящийся на единицу длины трубы. Кроме того, количество вытекшей жидкости тем больше, чем больше площадь поперечного сечения трубы и чем меньше вязкость жидкости. Таким образом, получаем

$$\frac{V}{\tau}=k\left(\frac{\Delta p}{l}\right)^{\alpha}\frac{S^{\beta}}{\eta^{\gamma}},$$

где k — некий безразмерный коэффициент. Вид этой формулы выбран из соображений, что $V/\tau=0$ либо при $\Delta p/l=0$, либо при $S=0$, либо при $\eta\to\infty$. Теперь подставим соответствующие размерности физических величин:

$$\frac{\text{м}^3}{\text{с}}=\left(\frac{\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}^2)}{\text{м}}\right)^{\alpha}\frac{(\text{м}^2)^{\beta}}{(\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}))^{\gamma}},$$

или

$$\text{м}^3=\text{м}^{-2\alpha+2\beta+\gamma},$$
$$\text{с}^{-1}=\text{с}^{-2\alpha+\gamma},$$
$$0=\text{кг}^{\alpha-\gamma}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha=\gamma=1 \quad \text{и} \quad \beta=2,$$

то есть

$$\frac{V}{\tau}=k\frac{\Delta p}{l}\,\frac{S^2}{\eta}.$$

В коллекции филателистов

Коллекция почтовых марок с портретами выдающихся советских физиков, механиков, математиков и астрономов пополнилась еще одной новой маркой. Она посвящена выдающемуся советскому механику академику Борису Николаевичу Петрову. Он был академиком-секретарем отделения механики и процессов управления АН СССР, председателем Совета по международному сотрудничеству в области исследования и использования космического пространства («Интеркосмос»).

В. Р

1913
1980
Б Н ПЕТРОВ

Квадратный трехчлен

Кандидат физико-математических наук А. А. БОЛИБРУХ,
кандидат физико-математических наук В. М. УРОЕВ,
профессор М. И. ШАБУНИН

Квадратным трехчленом относительно x называется выражение вида

$$ax^2+bx+c,$$

где a, b, c — заданные числа, причем $a \neq 0$. Значения x, при которых квадратный трехчлен обращается в нуль, называются *корнями* трехчлена.

Задачи, при решении которых требуется знание свойств квадратного трехчлена, нередко встречаются на вступительных экзаменах в вузы. Многие школьники без затруднений выписывают различные формулы, умеют изобразить график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, знают ее основные свойства. Однако эти знания часто бывают формальными, абитуриентам не удается их применить при решении задач, относящихся к рассматриваемой теме.

Мы покажем на примерах, как важно бывает умение сочетать алгебраические и геометрические соображения при решении таких задач.

1. *Найдите наибольшее значение квадратного трехчлена* $y=-2x^2+4x-5$.

Для решения этой задачи можно, конечно, пользоваться производной, но можно обойтись и без нее. Применим метод выделения полного квадрата:

$$y=-2x^2+4x-5=$$
$$=-2(x^2-2x+1)+2-5=$$
$$=-2(x-1)^2-3.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение квадратного трехчлена равно -3 и достигается при $x=1$.

Заметим, что метод выделения полного квадрата применяется для получения формулы корней квадратного уравнения, а также для построения графика квадратичной функции $y=ax^2+bc+c$. Выделяя полный квадрат, получаем

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{2a},$$

откуда следует, что график функции $y=ax^2+bx+c$ получается параллельным переносом параболы $y=ax^2$ на вектор $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{2a}\right)$.

2. *Определите знаки чисел a, b, c исходя из расположения параболы $y=ax^2+bx+c$ относительно координатных осей в каждом из случаев, показанных на рисунке 1.*

Рассмотрим подробно случай *а*). Коэффициент a меньше 0, так как ветви параболы направлены вниз. Абсцисса вершины параболы, равная $-\frac{b}{2a}$, меньше нуля, откуда следует, что $b<0$. Ордината точки пересечения оси Oy с параболой равна значению функции $f(x)=ax^2+bx+c$ при $x=0$. Следовательно, коэффициент $c=f(0)$ положителен. Итак, $a<0$, $b<0$, $c>0$.

Этот же результат можно получить иначе, если воспользоваться формулами Виета: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$. Однако такой способ исследования уже нельзя применить в случае *б*), когда корней нет.

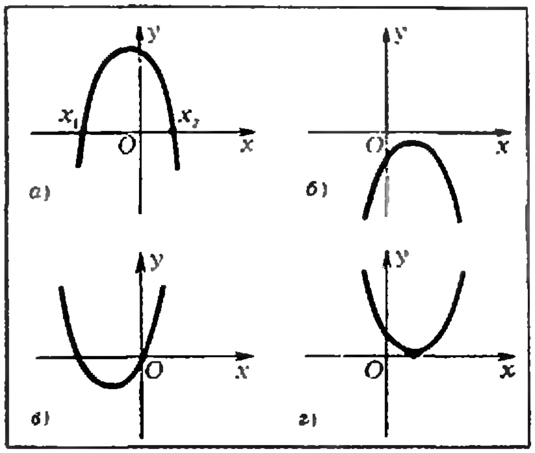


Рис. 1.

Предлагаем читателям самостоятельно разобрать случаи *б, в, г.*

3. *Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2-2rx-7r^2=0$ удовлетворяют условию $x_1^2+x_2^2=18$. Найдите r.*

Сначала выразим $x_1^2+x_2^2$ через сумму и произведение корней, а затем воспользуемся теоремой Виета. Имеем

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=$$
$$=(2r)^2-2\cdot(-7r^2)=18r^2.$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения $r^2=1$, откуда $r_1=1$, $r_2=-1$.

4. *Найдите необходимые и достаточные условия того, что корни x_1 и x_2 уравнения $f(x)=x^2+px+q=0$ больше 1 по абсолютной величине и различны по знаку.*

Решение, основанное на применении известных формул для дискриминанта и корней квадратного уравнения, является трудоемким и технически сложным. Задача легко решается, если использовать геометрические соображения.

Найдем сначала необходимые условия. Пусть $x_1<x_2$ (корни различны). По условию задачи $x_1<-1$, $x_2>1$, то есть отрезок $[-1, 1]$ лежит внутри промежутка $]x_1, x_2[$ (рис. 2). Последнее условие эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(-1)<0, \\ f(1)<0. \end{cases} \qquad (1)$$

Подставляя 1 и -1 в выражение для $f(x)$ получаем необходимые условия:

$$\begin{cases} -p+q<-1, \\ p+q<-1. \end{cases} \qquad (2)$$

Связь между найденными значениями p и q удобно представить графически, изобразив на координатной плоскости (p, q) множество точек, координаты которых удовлетворяют полученным неравенствам (рис. 3).

Покажем, что необходимые условия (2), являются достаточными, то есть при выполнении неравенств (2) квадратный трехчлен $f(x)=$ $=x^2+px+q$ имеет такие корни x_1 и x_2, что $x_1<-1$, а $x_2>1$. Так как условия (2) эквивалентны условиям (1), в двух различных точках ($x=1$ и $x=-1$) функция $y=f(x)$ принимает отрицательные значения. Так как коэффициент при x^2 положителен, ветви параболы $y=f(x)$ направлены вверх. Следовательно, парабола пересекает ось Ox в двух различных точках x_1 и x_2 ($x_1<x_2$), причем точки -1 и 1 лежат на интервале $]x_1, x_2[$, то есть $x_1<-1$, $x_2>1$.

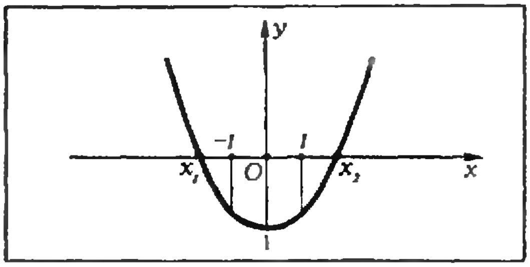


Рис. 2.

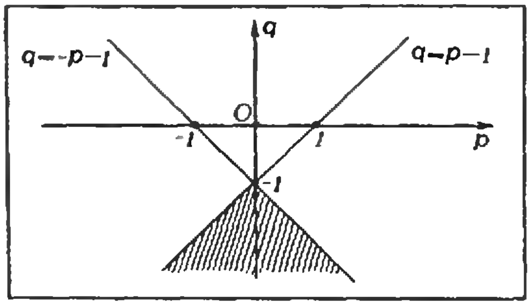


Рис. 3.

5. *Найдите все значения r, при которых корни уравнения $(r-4)x^2-$ $-2(r-3)x+r=0$ больше -1.*

Сначала отдельно рассмотрим случай $r=4$. Тогда уравнение имеет вид $-2x+4=0$, откуда $x=2$. Так как $2>-1$, значение $r=4$ нам подходит.

Если $r\neq 4$, то уравнение является квадратным.

Решим задачу в более общем виде: *найдем необходимые и достаточные условия, при которых корни квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ существуют и оба больше заданного числа d.*

Геометрическое решение. Корни x_1 и x_2 должны существовать, поэтому (1) $D=b^2-4ac\geqslant 0$.

Построим эскиз графика функции $y=f(x)$. Возможна одна из двух ситуаций, представленных на рисунке 4. Так как оба корня больше d, абсцисса вершины параболы больше d, то есть $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}>d$, или по формулам Виета

$$-\frac{b}{2a}>d \qquad (2)$$

Точка $x=d$ должна лежать вне отрезка $[x_1, x_2]$. Это означает, что либо ветви параболы направлены

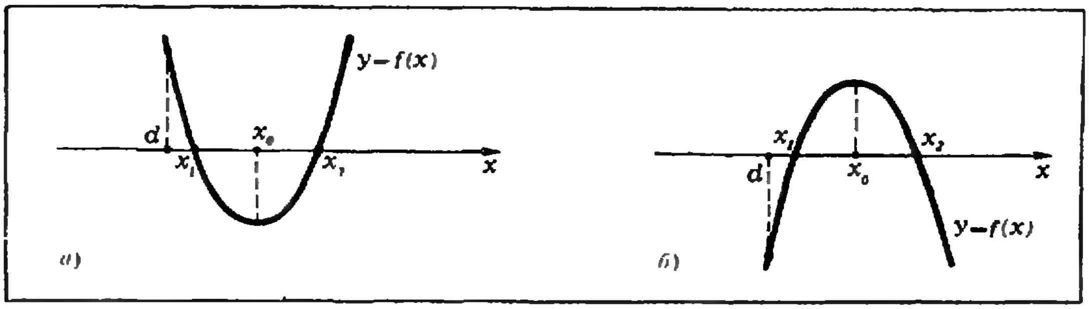


Рис. 4.

вверх ($a>0$) и $f(d)>0$ (рис. 4, *а*), либо ветви параболы направлены вниз ($a<0$) и $f(d)<0$ (рис. 4, *б*). Следовательно, числа a и $f(d)$ — одного знака, то есть

$$af(d)>0. \qquad (3)$$

Проверьте самостоятельно, что условия (1) — (3) в совокупности являются не только необходимыми, но и достаточными.

Алгебраическое решение. Два действительных числа x_1-d и x_2-d положительные тогда и только тогда, когда их сумма и произведение положительны. Поэтому условие задачи равносильно совокупности следующих трех условий:

$$D=b^2-4ac>0,$$
$$(x_1-d)+(x_2-d)>0,$$
$$(x_1-d)(x_2-d)>0.$$

Пользуясь формулами Виета, второе условие можно переписать в виде

$$x_1+x_2-2d>0,\ \frac{x_1+x_2}{2}>d,\ -\frac{b}{2a}>d.$$

Третье — переписывается так:

$$x_1x_2-(x_1+x_2)d+d^2>0,$$
$$a(ad^2+bd+c)>0,\ af(d)>0.$$

Таким образом, мы вновь доказали, что совокупность условий (1) — (3) равносильна условиям рассмотренной общей задачи.

Возвращаясь к задаче **5**, выпишем для нее условия (1) — (3). Получим систему неравенств

$$\begin{cases} (r-3)^2-r(r-4)=9-2r\geqslant 0, \\ \dfrac{r-3}{r-4}>-1, \\ (r-4)(4r-10)>0. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $r<5/2$, $4<r\leqslant 9/2$. К этим решениям надо добавить решение $r=4$. Ответ:

$$\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[\cup \left[4, \frac{9}{2}\right].$$

Задачи

6. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найдите p и q, если известно, что x_1+1 и x_2+1 являются корнями уравнения $x^2-p^2x+pq=0$.

7. График квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ высекает на двух параллельных прямых отрезки $[AB]$ и $[CD]$. Докажите, что прямая, проходящая через середины этих отрезков, параллельна оси ординат.

8. Известно, что квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ не имеет корней и его коэффициенты связаны соотношением $a-b+c<0$. Определите знак c.

9. Пусть корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c различны. Докажите, что число x_0 находится между x_1 и x_2 тогда и только тогда, когда $a(ax_0^2+bx_0+c)<0$.

10. Пусть уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет неотрицательных корней и $a<0$. Определите знак c.

11. Пусть коэффициенты уравнений $x^2+p_1x+q_1=0$ и $x^2+p_2x+q_2=0$ связаны соотношением $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. Докажите, что по крайней мере одно из этих уравнений имеет корни.

12. Может ли уравнение $x^2+px+q=0$, где p и q — рациональные числа, иметь следующие корни:

а) $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$?

б) $x_1=\sqrt{3}+2$, $x_2=2-\sqrt{3}$?

13. Докажите, что любой рациональный корень уравнения $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q является целым числом.

14. Уравнения $x^2+p_1x+q_1=0$ и $x^2+p_2x+q_2=0$ с целыми коэффициентами p_i, q_i ($i=1, 2$) имеют общий нецелый корень. Докажите, что $p_1=p_2$, $q_1=q_2$.

15. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ и $S_m=x_1^m+x_2^m$ (m — целое положительное). Докажите формулу $aS_m+bS_{m-1}+cS_{m-2}=0$.

Физика 8, 9, 10

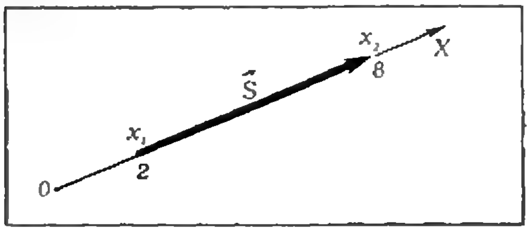
С этого номера раздел «Школа и «Кванте» начинает публиковать небольшие заметки по физике для учащихся 8–10 классов. В них будут разъясняться некоторые вопросы школьной программы. Читатель узнает также, как можно по-другому вывести известные школьные формулы. Некоторые статьи будут посвящены вопросам, которые не уместились в школьном учебнике. Редакция надеется, что эти материалы послужат дополнением к учебнику и помогут читателям лучше усвоить школьную программу.

Публикуемая ниже заметка «О выборе координатной оси» предназначена восьмиклассникам, заметка «Простой способ определения размеров молекул» — девятиклассникам, и заметка «О законе колебательного движения» — десятиклассникам.

Материалы подготовил И. К. Белкин.

О выборе координатной оси

При рассмотрении прямолинейного движения точки координатную ось X обычно направляют вдоль направления движения, то есть вдоль направления вектора перемещения (рис. 1).



Рсп. 1.

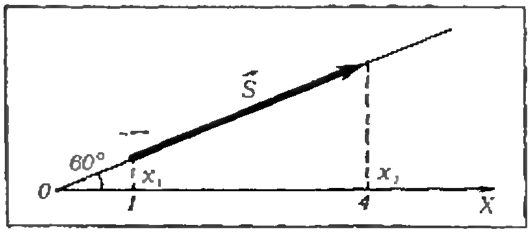


Рис. 2.

Тогда проекция S_x вектора $\vec{S}$ на ось просто равна модулю S этого вектора:

$$S_x = x_2 - x_1 = S.$$

В случае, показанном на рисунке 1,

$$S = 8\ \text{м} - 2\ \text{м} = 6\ \text{м}.$$

Но не нужно думать, что такой выбор оси обязателен. Ось X можно направить произвольным образом, под любым углом к направлению вектора $\vec{S}$. Например, так, как это показано на рисунке 2, где ось X образует с вектором $\vec{S}$ угол $\alpha = 60°$. От этого результат (модуль вектора перемещения) не может измениться. Из рисунка 2 видно, что

$$S_x = x_2 - x_1,$$

и

$$\frac{x_2 - x_1}{S} = \cos\alpha, \quad \text{или} \quad x_2 - x_1 = S\cos\alpha,$$

откуда

$$S = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha}.$$

В нашем случае

$$S = \frac{4\ \text{м} - 1\ \text{м}}{0{,}5} = 6\ \text{м}.$$

Таким образом, результат не зависит от того, как направлена координатная ось. Выбор направления оси диктуется только соображением удобства.

Простой способ определения размеров молекул

В молекулярной физике главные «действующие лица» — это молекулы, невообразимо маленькие частицы, из которых состоят все на свете вещества. Ясно, что для изучения многих явлений важно знать, каковы они, молекулы. В частности — каковы их размеры.

Когда говорят о молекулах, их обычно считают маленькими упругими твердыми шариками. Следовательно, знать размер молекул — значит знать их радиус.

Несмотря на малость молекулярных размеров, физики сумели разработать множество способов их определения. В «Физике 9» рассказывается о двух из них. В одном используется свойство некоторых (очень немногих) жидкостей растекаться в виде пленки толщиной в одну молекулу. В другом размер частицы определяется с помощью сложного прибора — ионного проектора.

Существует, однако, очень простой, хотя и не самый точный, способ вычисления радиусов молекул (или атомов). Он основан на том, что молекулы вещества, когда оно находится в твердом или жидком состоянии, можно считать плотно прилегающими друг к другу. В таком случае для грубой оценки можно считать, что объем V некоторой массы m вещества просто равен сумме объемов содержащихся в нем молекул. Тогда объем одной молекулы мы получим, разделив объем V на число молекул N.

Число молекул в теле массой m равно, как известно, $N_A m/M$, где M — молярная масса вещества и N_A — число Авогадро. Отсюда объем V_0 одной молекулы определяется из равенства

$$V_0 = \frac{V}{N} = \frac{VM}{mN_A}.$$

В это выражение входит отношение объема вещества к его массе. Обратное же отношение $m/V = \varrho$ есть плотность вещества, так что

$$V_0 = \frac{M}{\varrho N_A}.$$

Плотность практически любого вещества можно найти в доступных всем таблицах. Молярную массу легко определить, если известна химическая формула вещества.

Объем одной молекулы, если считать ее шариком, равен $\frac{4}{3}\pi r^3$, где r — радиус шарика. Поэтому

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{\varrho N_A},$$

откуда мы и получаем выражение для радиуса молекулы:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\varrho N_A}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi N_A}}\,\sqrt[3]{\frac{M}{\varrho}}.$$

Первый из этих двух корней — постоянная величина, равная $\approx 7{,}4 \cdot 10^{-9}$ моль$^{1/3}$, поэтому формула для r принимает вид

$$r \approx 7{,}4 \cdot 10^{-9}\sqrt[3]{\frac{M}{\varrho}}\ (\text{м}).$$

Например, радиус молекулы воды, вычисленный по этой формуле, равен $r_в \approx 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.

Описанный способ определения радиусов молекул не может быть точным уже потому, что шарики нельзя уложить так, чтобы между ними не было промежутков, даже если они соприкасаются друг с другом. Кроме того, при такой «упаковке» молекул-шариков были бы невозможны молекулярные движения. Тем не менее вычисления размеров молекул по формуле, приведенной выше, дают результаты, почти совпадающие с результатами других методов, несравненно более точных.

О законе колебательного движения

Колебательное движение способно совершать всякое тело (точка), если на него действует упругая сила, например сила упругости пружины (или сила, «похожая» на упругую).

Для вывода закона движения, то есть зависимости координаты от

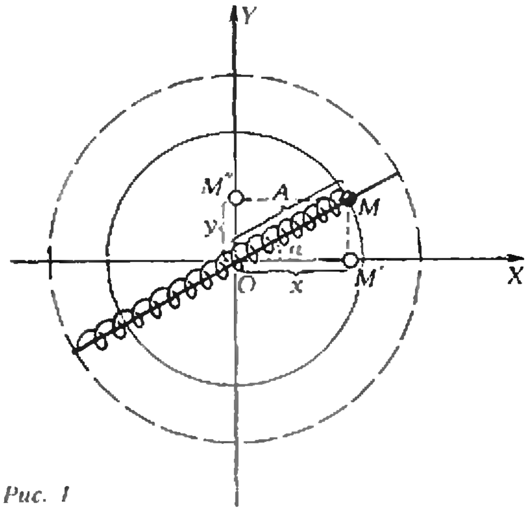


Рис. 1

времени, приходится пользоваться дифференциальным исчислением, решать дифференциальное уравнение (см. «Физику 10»). Можно получить этот закон и более простым образом. Покажем это.

Пусть некоторая материальная точка M движется по окружности радиуса A под действием пружины (рис. 1). Пружина надета на стержень, который может вращаться вокруг точки O. Один конец пружины связан с точкой M, а другой закреплен на краю стержня. Если стержень привести во вращение с угловой частотой ω, то пружина растянется на длину A и возникнет сила упругости, которая будет действовать на точку M. Эта сила сообщит точке центростремительное ускорение, равное $\omega^2 A$, где A — радиус окружности, по которой будет двигаться точка. Модуль силы упругости равен, как известно, kA, где k — жесткость пружины. Значит, согласно второму закону Ньютона,

$$m\omega^2 A = kA,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (*)$$

Время, в течение которого точка совершает один оборот, называется периодом обращения точки и обозначается буквой T. Мы легко получим значение T, если разделим длину окружности $2\pi A$ на скорость v, которая может быть выражена через ω: $v = \omega A$, так что

$$T = \frac{2\pi A}{\omega A} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Отсюда период обращения точки M, согласно равенству (*), равен

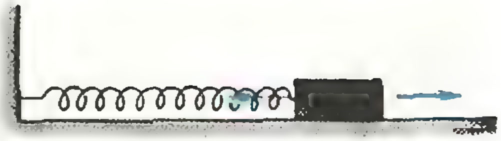


Рис. 2.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Однако движение точки по окружности, хотя оно и периодическое, не есть колебательное движение. Наиболее наглядный пример колебательного движения — это движение тела, прикрепленного к пружине, которая при колебаниях растягивается или сжимается (рис. 2). В нашем примере с вращающейся точкой (см. рис. 1) такое движение совершает не точка M, а ее проекция M' на ось X (или проекция M'' на ось Y). Положение точки M' на оси X, как видно из рисунка 1, задается ее координатой x, которая определяется равенством

$$x = A\cos\alpha,$$

где α — угол, образованный осью X и радиусом A, проведенным из центра O (начало координат) к точке M. Так как α при движении изменяется по формуле $\alpha = \omega t$, то

$$x = A\cos\omega t.$$

Это и есть закон колебательного движения. Легко видеть, что колебательное движение совершает и проекция M'' на ось Y. Закон движения этой точки имеет вид

$$y = A\sin\omega t.$$

Что касается периода T и частоты ω колебаний проекций M' и M'', то из рисунка 1 ясно, что они равны периоду и частоте обращения точки M по окружности.

Бим и Бом

На арене цирка выступал феноменальный вычислитель Бим, который мог перемножать в уме многозначные числа. Только что на глазах у изумленной публики он возвел два в двадцать девятую степень. Получилось девятизначное число, в котором все цифры были различны. У Бима было десять карточек, на которых были написаны все десять цифр. Из девяти карточек Бим выложил на арене нужное число, а десятую положил в карман. Придя после выступления домой, Бим рассказал своему брату математику Бому все, что написано выше, и хотел уже достать из кармана карточку, но Бом остановил его:

— Хоть я и не умею так хорошо считать в уме, как ты, но могу сказать, что у тебя в кармане четверка.

Как Бом это узнал, не вычисляя девятизначного числа?

Г. А. Гать

КВАНТ для младших школьников

Задачи

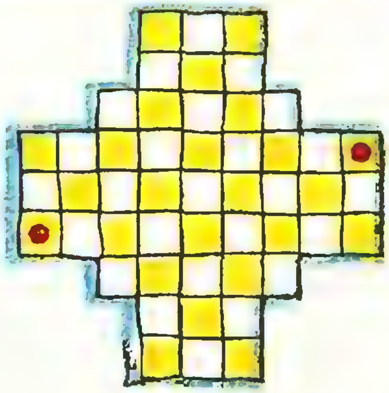
1. Гена вырезал из бумаги десять карточек и на каждой из них написал по цифре: 0, 1, 2, ..., 9. Затем он разложил их на столе по две и обнаружил, что получившиеся двузначные числа относятся как 1:2:3:4:5. Вечером он захотел показать свой результат отцу, но не нашел карточку с цифрой 0. Однако, подумав, он разложил карточки так, что новые числа также относились, как 1:2:3:4:5. Как раскладывал Гена карточки в первый раз и как — во второй?

2. На ежегодном «конкурсе тыкв», проводимом в Великобритании, очередной «чемпион» имел массу 109 килограмм и 2,5 метра в обхвате. Будет ли она плавать в воде? Сможет ли на ней, как на плоту, плавать мальчик, если его масса 20 килограмм? При расчетах считайте тыкву шаром, объем шара радиуса R равен $\frac{4\pi R^3}{3}$.

3. В обычном наборе домино 28 косточек. Сколько косточек содержало бы домино, у которого значения, указанные на косточках, изменялись бы не от 0 до 6, а от 0 до 12?

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AE. Сравните по величине углы AEB и AEC, если известно, что $|AB| > |AC|$.

5. Коля сделал доску (для игры, называемой «Йога») и раскрасил ее на манер шахматной, как показано на рисунке. Как-то раз он решил обойти все поля этой доски одной шашкой, побывав на каждом поле по одному разу и переходя с поля на поле через сторону соответствующего квадратика. Он заметил, что если он начинает с белого поля, то такой обход ему удается, а если с рыжего поля — то не удается. Почему?



Эти задачи нам предложили
А. Л. Кабризон, Н. А. Родина, А. П. Савин, Л. З. Карелин, Н. И. Авилов.

Кубик в картинках

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

Наверное, кубик Рубика уже не нуждается в представлении — только «Квант» посвятил ему четыре большие статьи *), и даже по телевидению его показывали! А самое главное — наконец, он стал появляться в продаже. Теперь повсюду можно встретить людей (обычно весьма юных), пытающихся *собрать* кубик — упорно, но не всегда успешно. Вот мы и решили еще раз рассказать, а точнее — показать на картинках, как это делается.

Повороты граней мы будем изображать с помощью стрелок в квадрате 3×3, изображающем переднюю грань кубика (рис. 0).

Каждый этап сборки задается рисунками, на которых показаны исходное положение *кубичков*, которые переставляются на этом этапе, последовательность поворотов этого этапа и вид кубика после его завершения.

Договоримся, что при сборке грань с синим центральным квадратом всегда будет у нас верхней. Центральный квадрат противоположной грани в разных экземплярах кубика бывает разным; для определенности будем считать его зеленым. Итак, в результате сборки верхняя грань кубика должна стать у нас синей, нижняя — зеленой. Передней гранью по ходу сборки может служить любая из четырех остальных (боковых) граней.

Если вы хоть немного крутили кубик, вы поняли, что центральные кубички всех граней сразу можно считать стоящими на своем месте (поскольку их взаимное расположение жестко установлено конструкцией кубика), а для каждого из остальных кубичков имеется вполне определенное окончательное положение: каждая грань кубичка должна примыкать (по стороне или вершине) к центральному квадрату того же цвета.

Кубик мы будем собирать послойно — сначала нижний слой (первые два шага), потом средний (третий шаг) и, наконец, верхний (последние четыре шага).

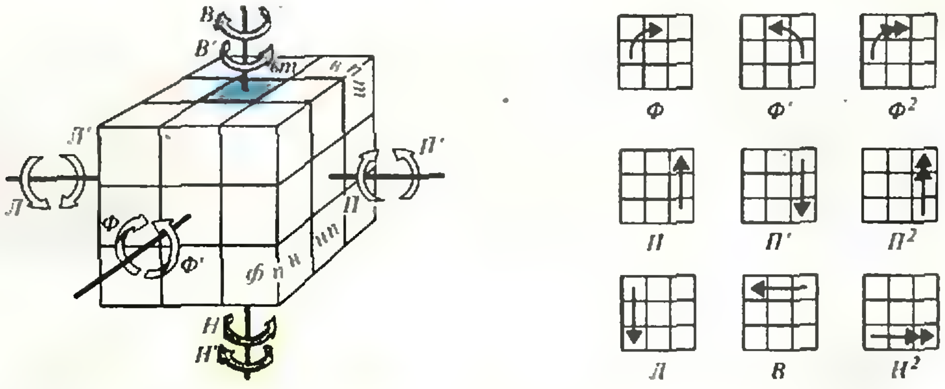


*Рис. 0. «Стрелочные» и «буквенные» обозначения поворотов пяти граней (задняя грань нам не понадобится). Например, буква Ф обозначает поворот передней (**Фасад**) грани на 90° по часовой стрелке, Ф' — ее поворот на 90° против часовой стрелки. Ф² — ее поворот на 180°. На этом и следующих рисунках незакрашенные грани кубичков — это грани, цвет которых на данном рисунке мы не желаем фиксировать.*

---

*) В. Залгаллер, С. Залгаллер «Венгерский шарнирный кубик» (1980, № 12), М. Евграфов «Механика волшебного кубика» (1982, № 3), В. Дубровский «Алгоритм волшебного кубика» (1982, № 7) и «Математика волшебного кубика» (1982, № 8). См. также заметку «Игра, задача или спорт?» (1982, №7, с. 25) и статью Ю. Демкова «Поворачиваем кубики» (1981, № 12).

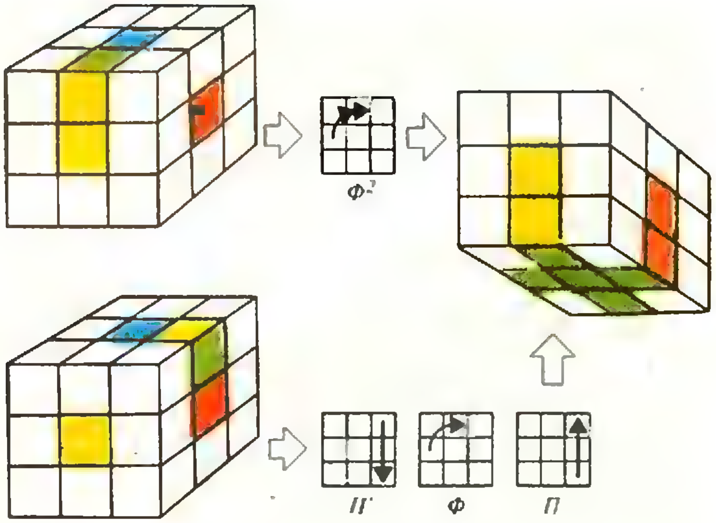


Рис. 1. Первый шаг: установка нижнего реберного кубичка.

Итак, начинаем!

Первый шаг. **Нижний крест:** *устанавливаем нижние реберные кубички* (рис. 1). Выберите какой-нибудь реберный кубичек с зеленой гранью, не стоящий в окончательном положении, и поворотом боковой грани, в которой он находится, переведите его в верхнюю грань. Пусть вторая грань выбранного кубичка — желтая; поворотом кубика сделайте грань с желтым центральным квадратом передней и поворотом верхней грани приведите кубик в какое-то из двух исходных положений рисунка 1. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положении. Устанавливая каждый следующий реберный кубик, нельзя портить уже достигнутое (подумайте, как это сделать!).

В дальнейшем на всех рисунках мы тоже будем переднюю грань изображать желтой (то есть с жел-

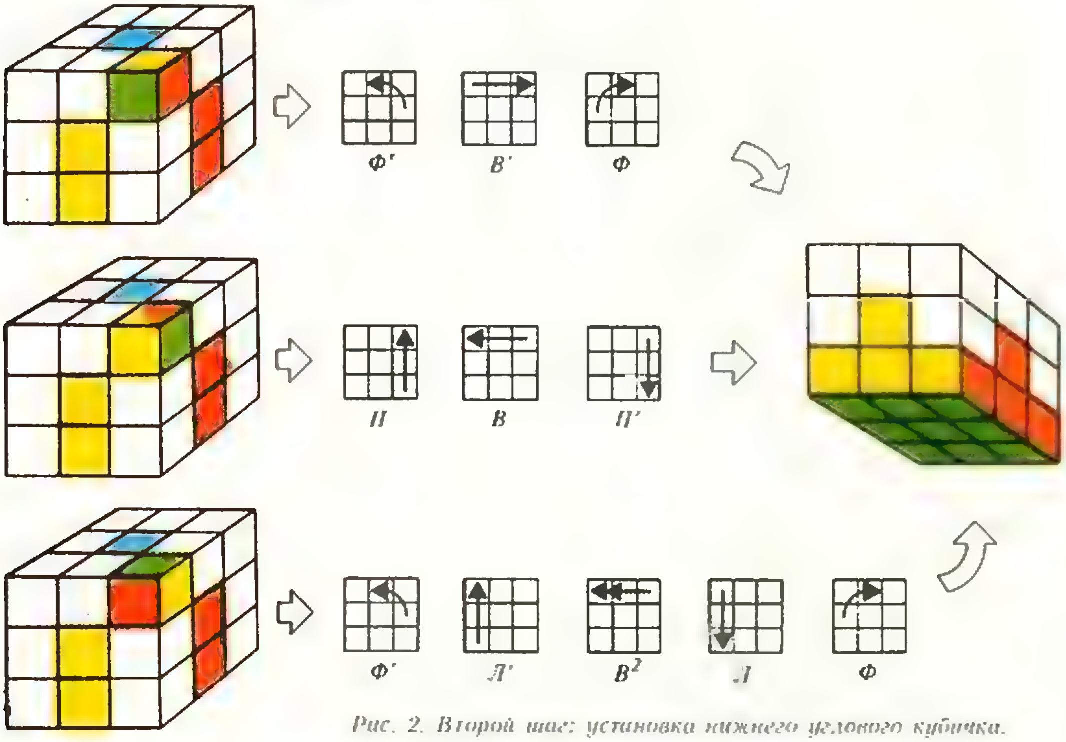


Рис. 2. Второй шаг: установка нижнего углового кубичка.

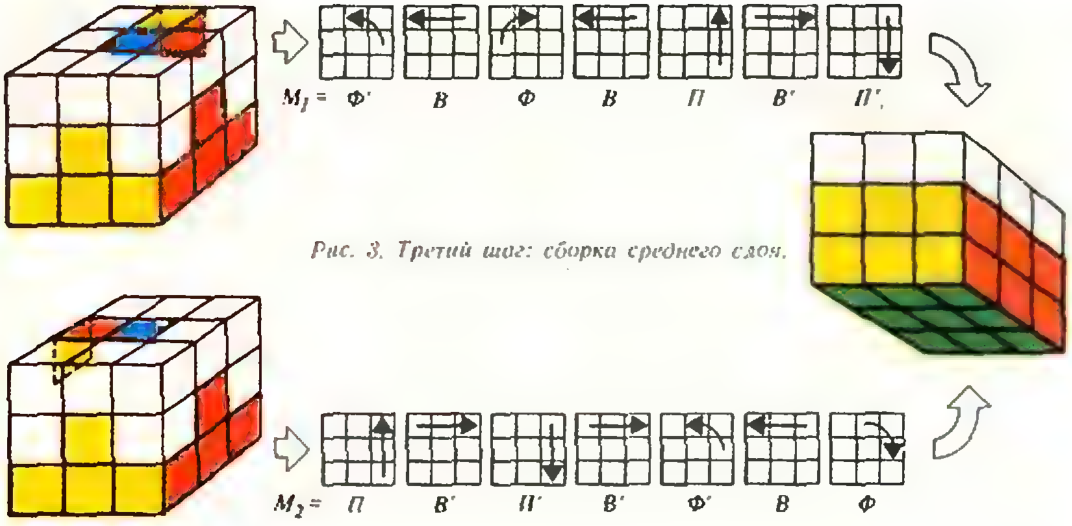


Рис. 3. Третий шаг: сборка среднего слоя.

тым центральным квадратом), правую — оранжевой. Но, разумеется, на каждом шаге, приводя кубик к исходному положению соответствующего рисунка, вам самим придется соображать, какую грань принять за переднюю.

Второй шаг. Нижние углы: *устанавливаем нижние угловые кубички* (рис. 2). Выберите какой-нибудь угловой кубичек с зеленой гранью, находящийся в верхнем слое, и поворотом верхней грани поставьте его точно над его местом в нижнем слое. При этом выбранный кубичек займет какое-то из трех исходных положений рисунка 2. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положении. Если в верхнем слое не осталось угловых кубичков с зеленой гранью, но в нижнем слое какой-то угловой кубичек не стоит в окончательном положении, поверните кубик так, чтобы этот кубичек оказался «передним-правым-нижним», и проделайте любую из операций рисунка 2 — он окажется в верхнем слое.

Третий шаг. Средний слой: *устанавливаем средние реберные кубички* (рис. 3). Выберите какой-нибудь реберный кубичек без синих граней, находящийся в верхнем слое. Поворотом верхней грани приведите кубик в какое-то из двух исходных положений рисунка 3. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положе-

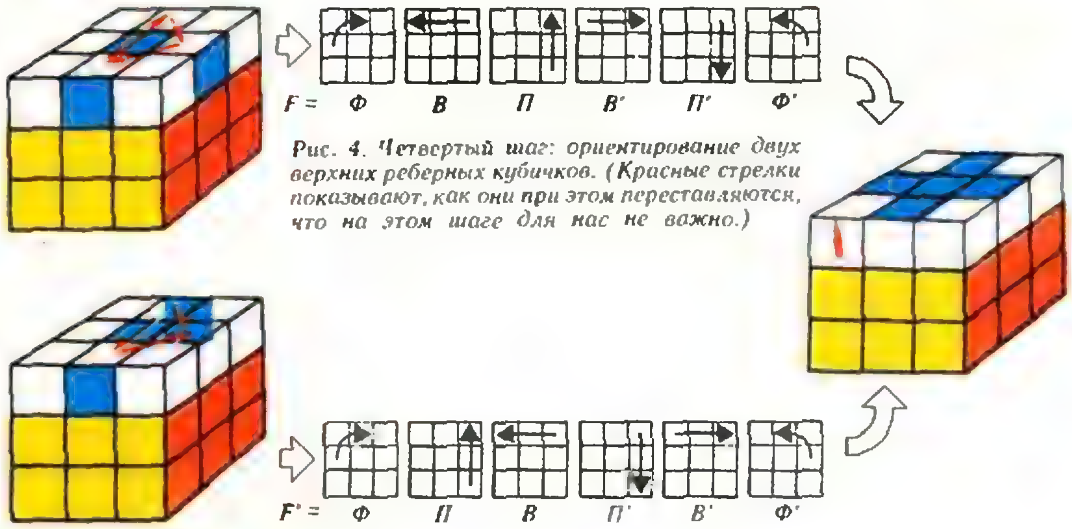


Рис. 4. Четвертый шаг: ориентирование двух верхних реберных кубичков. (Красные стрелки показывают, как они при этом переставляются, что на этом шаге для нас не важно.)

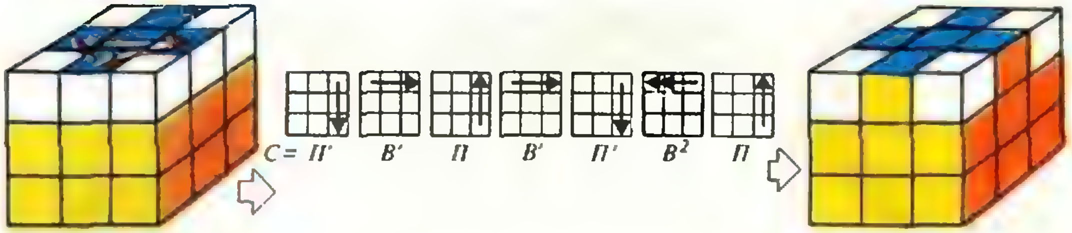


Рис. 5. *Пятый шаг: перестановка трех верхних реберных кубичков.*

нии. Если в верхнем слое не осталось реберных кубичков без синих граней, но какой-то из средних реберных кубичков не находится в окончательном положении, поверните кубик так, чтобы этот кубичек оказался «передним-правым», и проделайте любую из операций рисунка 3 — он окажется в верхнем слое.

Четвертый шаг. **Ориентирование верхних реберных кубичков:** *устанавливаем верхние реберные кубички синими гранями вверх* (рис. 4). Неправильно повернутыми могут быть только два или четыре кубичка — поэтому достаточно уметь переворачивать любую пару. В зависимости от того, хотите вы перевернуть пару соседних или пару противоположных кубичков, выполните одну из двух операций рисунка 4 *) — выбранные кубички перевернутся. (При этом они еще и переставятся.)

Пятый шаг. **Перестановка верхних реберных кубичков:** *расставляем верхние реберные кубички по своим местам, не переворачивая их* (рис. 5). Если один из них уже стоит правильно, а три других надо переставить по направлению часовой стрелки (случай А), поместите кубик в исходное положение рисунка 5 и действуйте согласно рисунку — кубички расставятся по своим местам. В противном случае поверните верхнюю грань так, чтобы какие-то два ее реберных кубичка встали правильно. (Это всегда возможно. Почему?) Если два других правильно не встанут, то дальше действуем в зависимости от того, являются ли «правильные» кубички соседними (случай Б) или противоположными (случай В). В случае Б поверните верхнюю грань еще на 90° против часовой стрелки — получится случай А. В случае В действуйте согласно рисунку 5, приняв за переднюю любую боковую грань кубика; после этого, повернув верхнюю грань на 90° в нужном направлении, опять придем к А. (Между прочим, случай В встречается в 5 раз реже случая Б — докажите!)

Остается уже немного.

Шестой шаг. **Ориентирование верхних угловых кубичков:** *устанавливаем верхние угловые кубички синими гранями вверх* (рис. 6). После пятого шага неправильно повернутыми могут быть два, три или все четыре кубичка*). В случае трех «неправильных» кубичков поместите кубик в одно из двух исходных положений рисунка 6 и действуйте согласно рисунку — кубичка повернутся. (При этом они еще и переставятся.) Если надо перевернуть два или четыре кубичка, расположите кубик так, чтобы левый верхний угол передней грани был синим и выполните операцию T' для случая двух кубичков или T для четырех. После этого выполните операцию T, приняв за переднюю соответствующую боковую грань кубика.

И, наконец:

Седьмой шаг. **Перестановка верхних угловых кубичков:** *расставляем верхние угловые кубички по своим местам, не переворачивая их*

---

*) Присмотревшись к буквенной записи операций F и F', легко увидеть, что они являются взаимно обратными: $F' = F^{-1}$, кроме того, F' можно заменить на F^3. Аналогичные утверждения верны для операций T, T' (шестой шаг) и для операций Z, Z' (седьмой шаг).

*) Причем, например, в случае трех неправильно повернутых кубичков их синие грани должны обязательно выходить на разные боковые грани кубика. Аналогичные утверждения выполняются и для двух или четырех кубичков. Об этом подробно рассказано в статье «Математика волшебного кубика».

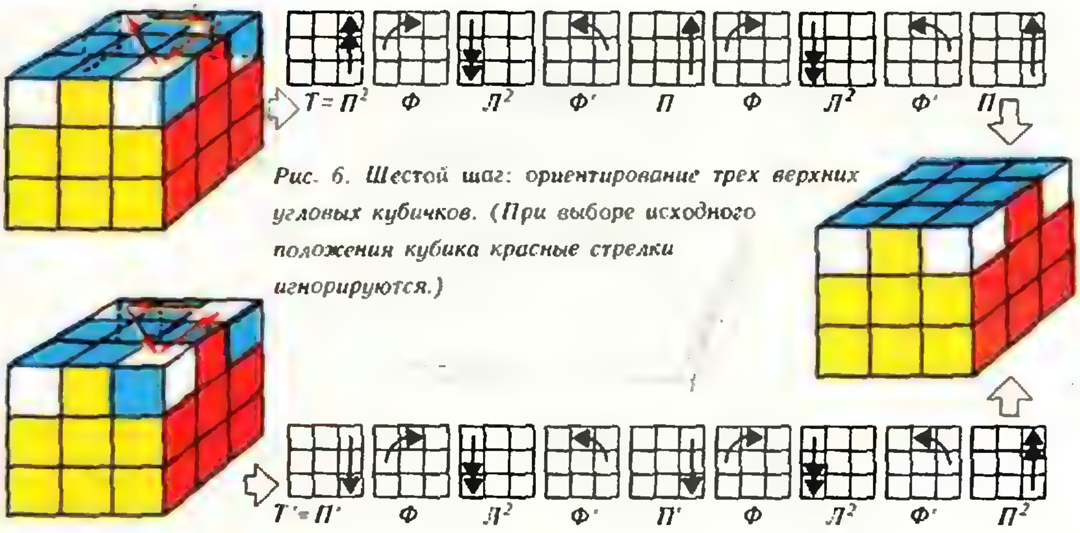


Рис. 6. Шестой шаг: ориентирование трех верхних угловых кубичков. (При выборе исходного положения кубика красные стрелки игнорируются.)

(рис. 7). После шестого шага либо все верхние угловые кубички встанут правильно, либо один из них встанет правильно, а три других надо циклически переставить, либо все они будут стоять неправильно. В первом случае все в порядке — кубик собран. Во втором случае, в зависимости от того, надо ли переставить «неправильные» кубички против часовой стрелки или по часовой стрелке, выполните одну из двух операций рисунка 7 — кубички расставятся по своим местам. В третьем случае выполните любую из операций рисунка 7, приняв за переднюю любую боковую грань кубика, — один угловой кубичек встанет правильно, и мы получим предыдущий случай*).

Все. Можно вздохнуть с облегчением — кубик собран!

* * *

Читатель нашего журнала вряд ли удовлетворится тем, что научится собирать кубик по шпаргалке. Как же без нее обойтись? Конечно, все нужные операции можно просто запомнить. И подобраны они так, чтобы это было не слишком трудно.

---

*) Попробуйте доказать, что в любом случае можно обойтись не более чем двукратным применением операции Z.

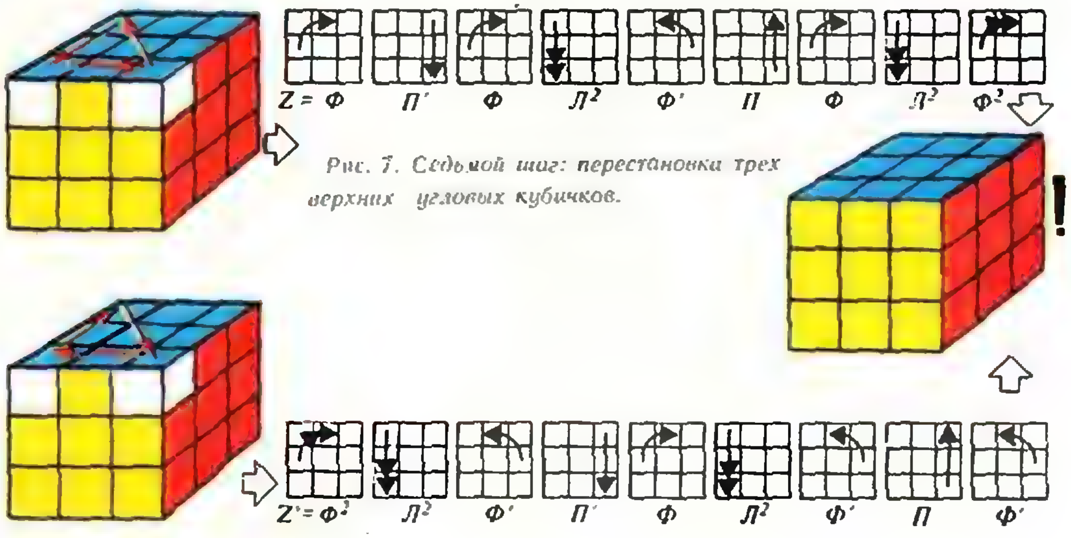


Рис. 7. Седьмой шаг: перестановка трех верхних угловых кубичков.

Операции первых двух шагов совсем короткие. Советуем вам проделать их медленно, поворот за поворотом, и проследить за передвижениями тех кубичков, которые устанавливаются в правильное положение с их помощью, — вы поймете, как эти операции «работают», и научитесь выполнять их не задумываясь. Для каждого из следующих шагов можно запомнить только одну операцию; вторую (там, где она есть) всегда можно заменить на дважды проделанную первую. Отметим еще, что 5 последних ходов операции M_1 (3-й шаг) совпадают с 5-ю первыми ходами F (4-й шаг) и что операция Z (7-й шаг) получается из T (6-й шаг) заменой первого хода $П^2=П'П'$ на $ФП'$ и двух последних — $Ф°П$ — на $Ф'Ф'=Ф^2$. Так что по сути дела надо выучить только три основные операции M_1, C, T и некоторые их варианты.

Однако гораздо интереснее и полезнее проникнуть в «принцип действия» этих операций.

Рассмотрим для начала операцию $M_1=Ф'ВФ \cdot В \cdot ПВ'П'$. Первые три ее поворота $Ф'ВФ$ аналогичны трехходовкам 2-го шага и переводят кубичек *фпн* (способ обозначения кубичков см. на рис. 0) из нижнего слоя в верхний, причем так, что он правильным образом приставляется к соответствующему реберному кубичку (проверьте!); похожи на них и последние три поворота $ПВ'П'$, возвращающие кубичек *фпн* (вместе с приставленным к нему реберным) на место; промежуточный поворот $В$ готовит исходную позицию для последних трех поворотов. Проанализируйте самостоятельно операцию M_2 и операцию $M_3=Ф'ВФВ^2ПВ^2П'$, которую можно применять вместо M_1. После этого попробуйте на той же основе придумать операции, аналогичные M_1 и M_2, для случая, когда кубичек *фпн* стоит на своем месте, но ориентирован неправильно. Можно пойти дальше и разработать операции, позволяющие объединить 2-й и 3-й шаги, то есть одновременно с каждым нижним угловым кубичком устанавливать и примыкающий к нему реберный кубичек среднего слоя.

Операции 4-го и 5-го шагов построены на основе так называемых *коммутаторов*, то есть последовательностей вида $xyx^{-1}y^{-1}$ (x^{-1} — это поворот, обратный к x: $Ф^{-1}=Ф'$, $(Ф')^{-1}=Ф$, $(Ф^2)^{-1}=Ф^2$). Если x и y — это повороты двух смежных граней кубика X и Y (на ±90° или 180°), то коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$ циклически переставляет три реберных кубичка: один — из грани X, другой — из Y, третий — на общем ребре X и Y (проверьте!); при этом переставляются и некоторые угловые кубички, но здесь это нас почти не интересует[*]. Например, коммутатор $ВПВ'П'$ осуществляет перестановку *фл*→*вт*→*вп*→*фл*. Если же перед ним выполнить поворот $Ф$, а после него $Ф'$, то есть операцию $F=Ф \cdot ВПВ'П \cdot Ф'$, то в этой перестановке вместо кубичка *фл* будет участвовать *фв* (он занимает место *фл* при повороте $Ф$). В результате переставляются три реберных кубичка одной грани — верхней: *фв*→*вт*→*вп*→*фв*, причем два из них, *фв* и *вп*, переворачиваются (это нам и нужно на 4-ом шаге); существенно также и то, что нижние угловые кубички остаются на своих местах. Аналогично устроены операции $F'=Ф \cdot ПВП'В' \cdot Ф'$ и $C=П'В' \cdot ПВ'П'В \cdot ВП$. Придумайте сами другие аналогичные операции; попробуйте научиться сразу составлять верхний крест (шаги 4-й и 5-й), используя не более двух операций такого типа.

Описанный прием преобразования операций (в данном случае — коммутаторов) называется *сопряжением*; в общем виде: $g=a \cdot f \cdot a^{-1}$ — операция, *сопряженная* с f. Этот же прием использован для образования операций двух последних шагов T и Z; обе они сопряжены с $Y=П'ФЛ^2Ф'ПФЛ^2Ф'$: $T=П'YП$, и $Z=Ф'YФ$. Операция Y переставляет три угловых кубичка (*фпв*→*нпф*→*лвт*→*фпв*), оставляя все остальные кубички на местах.

Рекомендуем читателю самостоятельно составить и проделать другие операции по общей схеме $A \cdot BCB^{-1} \cdot A^{-1} \cdot BC^{-1}B^{-1}$, где A и C — повороты двух противоположных граней (на любые из углов ±90°, 180°), а B — поворот перпендикулярной им грани (на ±90°). Можете ли вы объяснить, почему все они циклически переставляют какие-то три угловых кубичка? (Заметьте, что при операции BCB^{-1} в грани A заменяется ровно один кубичек (угловой) — на кубичек из грани C; ср. операции 2-го шага.) Для того чтобы сразу выполнить оба последних шага сборки кубика, всегда достаточно трех и почти всегда — двух операций такого вида (или сопряженных с ними).

Мы раскрыли все секреты описанного метода сборки кубика Рубика и объяснили, как его можно сократить. Остальное — дело рук самих читателей.

---

[*] Алгоритм сборки кубика, целиком основанный на коммутаторах, был опубликован в статье «Венгерский шарнирный кубик».

Задачник Кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 ноября 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М821, М822» или «Ф833». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М824, М825 и Ф833—Ф837 предлагались на заключительном этапе Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

Задачи

М821—М825; Ф833—Ф837

М821. Решите уравнение $x^3+x^2+x=-\frac{1}{3}$.

Ю. И. Ионин

М822. Карточки четырех цветов — n зеленых, n красных, n синих и n желтых — сложены стопкой так, что через четыре карточки цвет повторяется (например, 1-я, 5-я, 9-я, ... карточки — красные, 2-я, 6-я, ... — желтые и т. д.). Несколько карточек сверху сняли, не перекладывая перевернули и произвольным образом вставили между оставшимися (рис. 1). После этого стопку разделили на n маленьких стопок по четыре карточки. Докажите, что в каждой из этих четверок встретятся карточки всех четырех цветов.

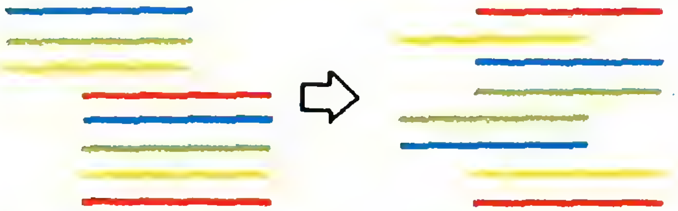


Рис. 1.

С. Б. Шлосман

М823. С фотографии срисован (рис. 2) контур дома длиной 60 м и шириной 15 м, причем более длинная стена на фотографии слева (остальные части контура на фотографии загорожены веткой дерева). Требуется:

а) дорисовать контур;

б) нарисовать точную карту (проекцию на горизонтальную плоскость), на которой указать контур дома и точку съемки;

в) определить высоту дома и высоту, с которой производилась съемка.

Д. Б. Фукс

М824. В сетке, изображенной на рисунке 3, каждая ячейка имеет размер 1×1. Можно ли эту сетку представить в виде объединения

а) 8 ломаных длины 5;

б) 5 ломаных длины 8? (8)

Н. И. Авилов

М825. Множество M состоит из k попарно не пересекающихся отрезков, лежащих на одной

Напоминаем читателям, что в декабре мы подведем итоги конкурса на решение задач из «Задачника «Кванта» (учитываться будут письма, присланные до 10 декабря). Победители получают право участвовать в республиканских олимпиадах, соответственно, по математике или физике. При оценке успехов школьников по математике будут приниматься во внимание также письма по поводу «задач для исследования» (см. № 5, с. 37, «Разложения на различные множители»; № 7, с. 33)

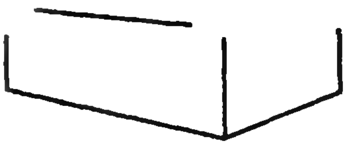


Рис. 2.

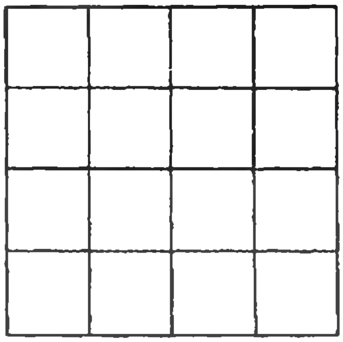


Рис. 3.

прямой. Известно, что любой отрезок длины, не большей 1, можно расположить на прямой так, чтобы его концы принадлежали множеству M. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, не меньше $1/k$. (10)

Е. И. Хухро

Ф833. На ленту транспортера, ползущую со скоростью $v_0 = 1$ м/с, сбоку сталкивают коробку. Скорость коробки сразу после попадания на ленту равна $u_0 = 2$ м/с и перпендикулярна скорости ленты. Какую минимальную скорость относительно Земли будет иметь коробка во время движения? Сила трения достаточно велика, и коробка не соскальзывает с ленты. (8)

С. С. Кротов

Ф834. На очень длинной невесомой нити подвешен к потолку шарик массы $m_1 = 0{,}1$ кг, к нему прикреплен на нити длины $l = 0{,}2$ м шарик массы $m_2 = 0{,}05$ кг. Нижнему шарику толчком сообщают скорость v_0 в горизонтальном направлении. При какой величине v_0 шарики могут оказаться на одной высоте? (9)

Е. И. Бутиков

Ф835. В стакан с водой опустили нагреватель и сняли зависимость температуры воды от времени (см. таблицу).

1) На сколько градусов остынет вода за 1 мин, если нагреватель отключить от сети при температуре $t_1 = 50$ °C?

2) Закипит ли вода, если нагреватель не выключать достаточно долго?

Мощность нагревателя считать неизменной. (8)

Время, τ мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура, t °C	20	26,2	31,8	36,8	41,4	45,6	49,3	52,7	55,8	58,5	61,1

А. Р. Зильберман

Ф836. Пластина A плоского конденсатора неподвижна, пластина $Б$ прикреплена к стенке пружиной и может двигаться, оставаясь параллельной пластине A (рис. 4). После замыкания ключа K пластина $Б$ начала двигаться и остановилась в новом положении равновесия. При этом расстояние между пластинами уменьшилось на $\alpha_1 = 10\%$. На сколько изменилось бы равновесное расстояние между пластинами, если бы ключ K замкнули на короткое время? Предполагается, что за это время пластина $Б$ не успевает заметно сдвинуться. (9)

А. И. Буздин

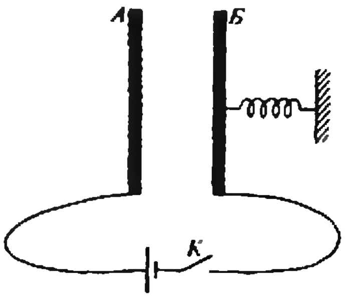


Рис. 4.

Ф837. Для измерения скоростей частиц используется лазерный анемометр, в котором движу-

щиеся частицы освещаются двумя пересекающимися лазерными когерентными пучками света (рис. 5). Отраженный частицами свет улавливается фотоэлементом *Ф* и преобразуется в электрический сигнал. Частицы движутся по перпендикуляру к биссектрисе угла $\alpha=60°$ между пучками. С какой скоростью двигалась частица, если при длине волны лазерного излучения $\lambda=0{,}63$ мкм был зарегистрирован периодический сигнал с частотой $\nu=320$ кГц? (10)

В. В. Можаев

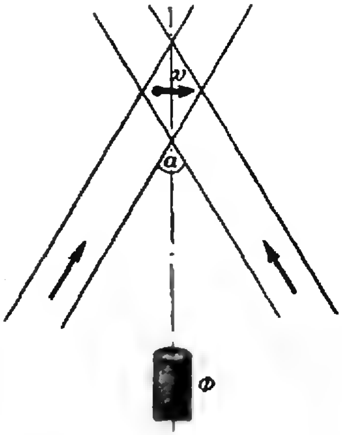


Рис. 5.

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that November 30th 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. One the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems

M821—M825; P833—P837

M821. Solve the equation $x^3+x^2+x=-1/3$.

Yu. I. Ionin

M822. Cards of four colours — n green, n red, n blue and n yellow ones — are stacked in a deck so that any colour is repeated every four cards (e. g., the first, fifth, ... ninth, ... cards are red, the second, sixth, ... are yellow, etc.). Several cards are taken off the top, turned over (all together as a whole) and slipped in somewhere between the others (see figure Рис. 1). After that, the deck is divided in succession into n groups of four cards each.

Prove that the four cards in each group will be of four different colours.

S. B. Shlosman

M823. The outline of a rectangular house of length 60 *m* and width 15 *m* is copied from a photograph (see figure Рис. 2), the longer wall being on the left of the photograph (the other parts of the outline are hidden by tree branches). It is required

a) to draw the rest of the outline;

b) to draw an exact map (i. e. the projection on the horizontal plane) showing the outline of the house and the point where the photograph was taken;

c) to determine the height of the house and the elevation of the camera above the horizontal plane.

D. B. Fuchs

M824. Each square of the lattice shown on figure Рис. 3 is of size 1×1. Can this lattice be represented as the union of

a) 8 polygonal lines of length 5;

b) 5 polygonal lines of lingth 8?

A. I. Avilov

M825. The set M consists of k non-intersecting line segments all contained in one line. It is known that any segment of length less than 1 may be placed on the line so that its end points belong to the set M. Prove that the total length of the line segments in M is not less than $1/k$.

E. I. Hukro

P833. A box is pushed sideways on a conveyor belt moving with velocity $v_0=1$ m/s. The velocity of the box immediately after it comes into contact with the belt is directed perpendicularly to the belt's motion and is $u_0=2$ m/s. What will the minimal velocity of the box with respect to the Earth be? The force of friction is large enough to ensure that the box does not slide off the conveyor belt.

S. S. Krotov

P834. A ball of mass $m_1=0.1$ kg is suspended from the ceiling by a very long weightless string. Another ball,

Problems M824, M825 and R833—R837 were proposed at the final round of the All-Union School Olympiad.

of mass $m_2=0.05$ kg is tied to the first one by a string of length $l=0.2$ m. The lower ball is given a push after which it moves horizontally with velocity v_0. For what values of v_0 can the two balls reach the same horizontal level?

E. I. Butikov

P835. A heater was placed in a glass of water and the water temperature registered as a function of time (see table).

1) By how many degrees will the water cool in 1 min, if the heater is turned off when the temperature is $t_1=50$ °C?

2) Will the water boil, if the heater is turned on long enough? The power of the heater is assumed constant.

Time, τ min	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperature, t °C	20	26.2	31.8	36.8	41.4	45.6	49.3	52.7	55.8	58.5	61.1

A. R. Zilberman

P836. The plate A of a flat capacitor is motionless, the plate Б is joined by a spring to the wall and can move, remaining parallel to A (see figure Рис. 4). After the switch K is turned on, the plate Б begins to move and stops in a new equilibrium position, the distance between the plates decreasing by $\alpha_1=10\%$. How would the equilibrium distance between the plates have changed if the switch K was turned on only for a brief period of time? It is assumed that the plate Б does not have enough time to move noticeably during this period.

A. I. Buzdin

P837. A laser anemometer is used to measure the velocity of particles which move through two intersecting coherent laser light beams (see figure Рис. 5). The light reflected by the particles is registered by the photoelement Ф and is transformed into an electric impulse. The particles move perpendicularly to the bissector of the angle $\alpha=60°$ between the beams. In what direction did a particle move, if a periodic signal of frequency $\nu=320$ kHz was registered (for laser beam wavelength $\lambda=0.63$ mkm).

V. V. Mojaev

Решения задач

M806—M810; Ф818—Ф822

M806. *а) Докажите, что если* $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n}=0$, *то многочлен* $a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_2x+a_1$ *имеет корень между 0 и 1.*

б) Докажите, что если для некоторого $p>0$

$$\frac{a_1}{p+1}+\frac{a_2}{p+2}+\frac{a_3}{p+3}+\ldots+\frac{a_n}{p+n}=0,$$

то этот многочлен также имеет корень между 0 и 1.

Докажем сначала такое утверждение: *если дифференцируемая функция $f(x)$ обращается в ноль в точках $x=0$ и $x=1$, то ее производная должна обратиться в ноль в некоторой внутренней точке отрезка* [0; 1].

Это очевидно, если функция $f(x)$ тождественно равна 0 на отрезке [0; 1]. В противном случае рассмотрим точки, в которых она принимает свое наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке. (Такие точки существуют по теореме Вейерштрасса — см. учебник «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 28 — ибо функция $f(x)$, будучи дифференцируемой, непрерывна.) Одно из этих значений должно быть отлично от нуля и, следовательно, принимается в точке x_0, лежащей *внутри* отрезка [0; 1]. Таким образом, x_0 — точка экстремума функции $f(x)$ на интервале]0; 1[, и по теореме Ферма («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 26) $f'(x_0)=0$.

Воспользуемся доказанным утверждением для решения задачи.

а) Рассмотрим функцию $f(x)=a_1x+\frac{a_2}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n}x^n$. По условию $f(1)=a_1+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n}=0$, кроме того, $f(0)=0$.

Согласно доказанному утверждению $f'(x_0)=0$ при некотором x_0 из интервала $]0;1[$. Остается заметить, что $f'(x)=$ $=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}$.

б) Доказательство такое же, как в п. а) с той разницей, что вместо функции $f(x)$ надо взять $g(x)=\frac{a_1}{p+1}x^{p+1}+$ $+\frac{a_2}{p+2}x^{p+2}+\ldots+\frac{a_n}{p+n}x^{p+n}$ и учесть, что в равенстве $g'(x_0)=x_0^p(a_1+a_2x_0+\ldots+a_nx_0^{n-1})=0$ множитель x_0^p ненулевой.

А. Гохберг, М. Овецкий

◆

М807. *а) Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3 на его стороны. Докажите, что сумма векторов $\vec{MK_1}+\vec{MK_2}+\vec{MK_3}$ равна $\frac{3}{2}\vec{MO}$, где O — центр треугольника.*

б) Из произвольной точки M опущены перпендикуляры $MK_1, \ldots, MK_n$ на все стороны правильного n-угольника или их продолжения. Докажите, что

$$\vec{MK_1}+\ldots+\vec{MK_n}=\frac{n}{2}\vec{MO},$$

где O — центр n-угольника.

в) Из произвольной точки M внутри правильного тетраэдра опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3, MK_4 на его грани. Докажите, что

$$\vec{MK_1}+\vec{MK_2}+\vec{MK_3}+\vec{MK_4}=\frac{4}{3}\vec{MO},$$

где O — центр тетраэдра.

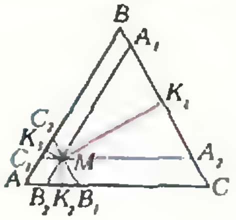


Рис. 1.

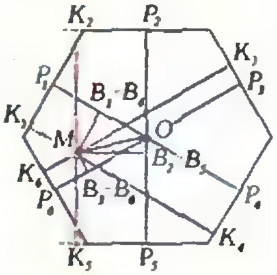


Рис. 2.

а) Проведем через точку M прямые, параллельные сторонам треугольника и обозначим точки пересечения этих прямых со сторонами треугольника, как показано на рисунке 1.

Ясно, что $2\vec{MK_1}=\vec{MA_1}+\vec{MA_2}$, $2\vec{MK_2}=\vec{MB_1}+\vec{MB_2}$, $2\vec{MK_3}=\vec{MC_1}+\vec{MC_2}$ и, в то же время, $\vec{MC_1}+\vec{MB_2}=\vec{MA}$; $\vec{MC_2}+\vec{MA_1}=\vec{MB}$ и $\vec{MA_2}+\vec{MB_1}=\vec{MC}$. Поэтому

$$2(\vec{MK_1}+\vec{MK_2}+\vec{MK_3})=\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=$$
$$=3\vec{MO}+\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}.$$

Но, очевидно, $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}$, следовательно, $2(\vec{MK_1}+\vec{MK_2}+\vec{MK_3})=3\vec{MO}$, что и требовалось.

б) Докажем сначала, что *если O — центр правильного многоугольника $A_1\ldots A_n$, то $\vec{OA_1}+\ldots+\vec{OA_n}=\vec{0}$.*

В самом деле, при повороте на $\frac{360^\circ}{n}$ вокруг O вершина A_1, перейдет в A_2, A_2 — в A_3, ..., A_n — в A_1, а вектор $\vec{s}=\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\ldots+\vec{OA_n}$ — в $\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\ldots+\vec{OA_n}+\vec{OA_1}=\vec{s}$, то есть не изменится. Поэтому $\vec{s}=\vec{0}$.

Опустим перпендикуляры $OP_1, \ldots, OP_n$ на стороны данного правильного многоугольника ($OP_i \| MK_i$), затем опустим из точки M перпендикуляры MB_i на прямые OP_i (при четном n прямые OP_i и $OP_{i+n/2}$, $i=1, 2, \ldots, n/2$, совпадают и $B_i=B_{i+n/2}$; см. рис. 2 для $n=6$). Поскольку $\vec{MK_i}=\vec{B_iP_i}=\vec{B_iO}+\vec{OP_i}$ и $P_1P_2\ldots P_n$ — правильный n-угольник с центром O,

$$\vec{MK_1}+\vec{MK_2}+\ldots+\vec{MK_n}=(\vec{B_1O}+\vec{B_2O}+\ldots+\vec{B_nO})+$$
$$+(\vec{OP_1}+\vec{OP_2}+\ldots+\vec{OP_n})=\vec{B_1O}+\vec{B_2O}+\ldots+\vec{B_nO}. \quad (1)$$

Докажем, что точки $B_1, \ldots, B_n$ лежат в вершинах правильного m-угольника (где $m=n$, если n нечетно, и $m=n/2$, если n четно) с центром в середине O_1 отрезка MO.

Точки $B_1, \ldots, B_n$ лежат на окружности с диаметром MO (ибо $\widehat{MB_iO}=90^\circ$), *поэтому достаточно доказать, что* угловая величина любой из дуг, на которые эта окружность разбивается точками $B_1, \ldots, B_n$, равна $360^\circ/n$. Пусть $\overset{\frown}{B_iB_j}$ — одна из этих дуг и она не содержит точку O. Тогда $\angle B_iOB_j$ есть один из $2m$ равных углов, на которые разбивается плоскость m прямыми $OB_i=OP_i$ (см. рис. 3, где $n=m=5$, $i=2$, $j=4$). Следовательно, $\widehat{B_iOB_j}=180^\circ/m$ и $\overset{\frown}{B_iB_j}=360^\circ/m$. Дуга, содержащая точку O, также имеет величину $360^\circ-(m-1)\cdot360^\circ/m=360^\circ/m$.

Из доказанного вытекает, что $\vec{O_1B_1}+\ldots+\vec{O_1B_n}=\vec{0}$, и согласно (1)

$$\vec{MK_1}+\ldots+\vec{MK_n}=\vec{B_1O_1}+\vec{B_2O_1}+\ldots+\vec{B_nO_1}+n\vec{O_1O}=\frac{n}{2}\vec{MO}.$$

Отметим, что эту задачу можно решить также методом пункта а).

в) Достаточно доказать, что проекции векторов $\vec{MK_1}+\ldots+\vec{MK_4}$ и $\frac{4}{3}\vec{MO}$ на какие-то две пересекающиеся плоскости совпадают. (Действительно, отсюда следует,

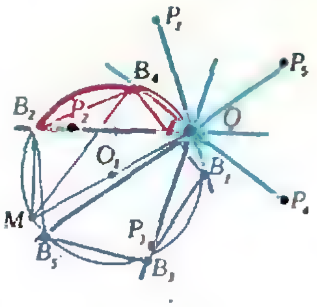


Рис. 3.

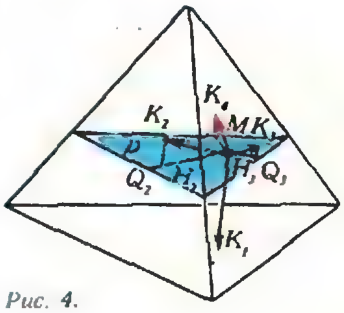


Рис. 4.

что две проекции разности $\vec{d}$ этих векторов равны нуль-вектору, то есть вектор $\vec{d}$ перпендикулярен одновременно двум пересекающимся плоскостям, и значит, $\vec{d}=0$).

Эти плоскости можно выбрать так, чтобы доказательство свелось к плоскому случаю — задаче а). Именно, проведем через точку M плоскость p, перпендикулярную, скажем, $\overrightarrow{MK_4}$, и спроектируем на нее векторы $\overrightarrow{MK_i}$, $i=1, 2, 3$ (рис. 4). Каждый из них образует с плоскостью p угол γ, равный углу между высотой и боковой гранью правильного тетраэдра $\left(\cos^2\gamma=\frac{8}{9}\right)$, поэтому проекция вектора $\overrightarrow{MK_i}$ равна $\overrightarrow{MH_i}=\frac{8}{9}\overrightarrow{MQ_i}$, где Q_i — проекция точки M на соответствующую сторону треугольника, получающегося в сечении тетраэдра плоскостью p. Пусть O' — центр этого треугольника, тогда, согласно а),

$$\overrightarrow{MH_1}+\overrightarrow{MH_2}+\overrightarrow{MH_3}=\frac{8}{9}(\overrightarrow{MP_1}+\overrightarrow{MP_2}+\overrightarrow{MP_3})=$$

$$=\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{MO'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{MO'}.$$

Остается заметить, что левая часть этого равенства есть проекция суммы $\overrightarrow{MK_1}+\ldots+\overrightarrow{MK_4}$ на плоскость p (проекция суммы векторов равна сумме их проекций), а правая — проекция вектора $\frac{4}{3}\overrightarrow{MO}$. Это же рассуждение годится и для плоскостей, параллельных другим граням тетраэдра.

Попробуйте решить задачу а) аналогичным способом, сведя двумерный случай к одномерному с помощью проекции.

Наметим еще одно решение задачи в) (которое можно приспособить и к задачам а) и б)). Рассмотрим вектор разности $\vec{d}=(\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}+\overrightarrow{MK_4})-\frac{4}{3}\overrightarrow{MO}$ как функцию от вектора $\vec{a}=\overrightarrow{MO}$. Легко проверить, что утверждение задачи справедливо для вершин A_1, A_2, A_3, A_4 тетраэдра, значит, $\vec{d}(\overrightarrow{A_iO})=\vec{0}$. Кроме того, $\vec{d}(\vec{a})$ — *линейная векторная функция*, то есть $\vec{d}(\vec{a}+\vec{b})=\vec{d}(\vec{a})+\vec{d}(\vec{b})$ и $\vec{d}(k\vec{a})=k\vec{d}(\vec{a})$. (Действительно, сумма векторов $\overrightarrow{MK_i}$ равна сумме проекций вектора $\overrightarrow{MO}$ на четыре прямые, перпендикулярные граням тетраэдра, — это доказывается так же, как равенство (1) в пункте б), в котором векторы $\overrightarrow{B_iO}$ как раз и являются проекциями $\overrightarrow{MO}$ на прямые, перпендикулярные сторонам n-угольника. Но легко видеть, что проекция вектора на прямую является линейной функцией этого вектора.) Отсюда вытекает, что $\vec{d}(\vec{a})=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$, поскольку его всегда можно представить в виде $k_1\overrightarrow{A_1O}+k_2\overrightarrow{A_2O}+k_3\overrightarrow{A_3O}$.

В. В. Прасолов

◆

M808. *На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает какую-нибудь клетку в красный цвет, второй — k (неокрашенных) клеток в синий цвет, затем снова первый одну (неокрашенную) — в красный, второй — k клеток в синий и т. д. Первый стремится к тому, чтобы какие-нибудь четыре красные клетки расположились в вершинах квадрата (со сторонами, параллельными ли-*

Ответ: второй игрок не сможет помешать первому ни при каком k.

Решать задачу удобно с конца. Ясно, что первый игрок (будем называть его K — «красный») выиграет, если каким-то своим ходом он построит сразу $k+1$ «неполных» квадратов, в трех вершинах каждого из которых стоят красные клетки, а в четвертой — неокрашенная. Тогда после ответа второго игрока (назовем его C — «синий») хотя бы одна из четвертых вершин останется неокрашенной и, окрасив ее, K получит «красный квадрат». Примеры таких выигрышных позиций приведены на рисунках 1, *а* — для общего случая — и 1, *б* — для $k=1$ (в последнем случае K может действовать так же, как и в общем, при произвольном $k>1$, но у него есть и более экономный путь к победе, использующий симметрию квадратной решетки).

ниям сетки). Сможет ли второй ему помешать а) при $k=1$; б) при $k=2$; в)* при каком-либо $k>2$?*

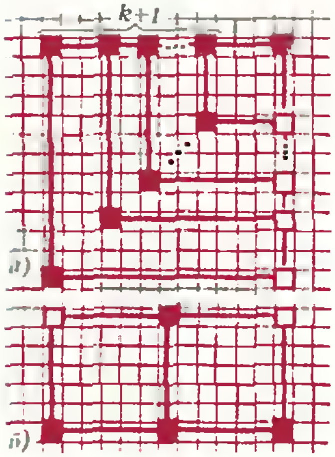


Рис. 1. Выигрышные позиции для первого игрока а) при произвольном $k\geqslant 1$; б) при $k=1$. Клетки, обведенные рамками, не окрашены ни красным, ни синим цветом. Звездочкой помечена последняя клетка, окрашенная первым игроком.

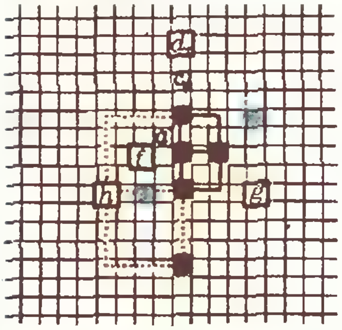


Рис. 2.

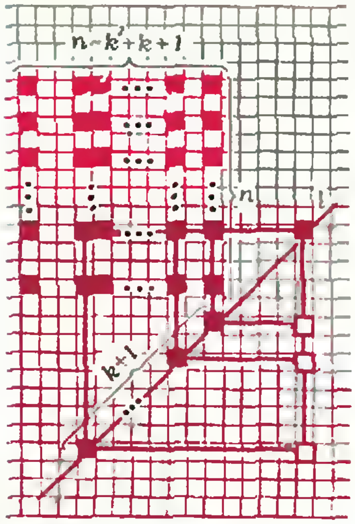


Рис. 3.

Объясним, как должен играть K, чтобы получить эти позиции.

а) Пусть a и a' — первые клетки, окрашенные, соответственно, игроками K и C (рис. 2). Вторым ходом K окрашивает клетку b, стоящую в одном столбце с a так, что расстояние между клетками b и a больше, чем между a' и a. После ответного хода C одна из клеток c и c_1 того же столбца (см. рисунок 2), например, c, останется неокрашенной. Ее окрашивает K третьим ходом. Аналогично, четвертым ходом K окрашивает клетку d или d_1. Допустим, он окрасил d, тогда рассмотрим столбцы, содержащие клетки e, f, g и h. Один из них, например, содержащий e, свободен от синих клеток, потому что синих клеток всего четыре и одна из них — a' — заведомо не стоит в этих столбцах. Окрасив e, игрок K получит позицию рисунка 1, а (клетки a, b, c и e на рисунке 2).

б), в) Игрок K начинает с того, что окрашивает N клеток одной строки, не обращая внимания на расстояния между ними *(число N зависит от k; мы уточним его ниже)*. Затем под первой строкой K выбирает строку, в которой нет синих клеток, и окрашивает в ней клетки, стоящие точно под красными клетками первой строки (пока среди них еще есть неокрашенные красным или синим цветом). Под второй строкой K выбирает третью (свободную от синих клеток) и окрашивает в ней клетки, стоящие под красными клетками второй строки, и т. д. Заполнив таким образом n строк (число n определим позже), K должен выбрать прямую l, проходящую по диагоналям клеток (рис. 3) под всеми окрашенными клетками (красными и синими), и окрасить на ней $k+1$ клеток, стоящих точно под клетками последней, n-й строки. Поскольку на каждую новую красную клетку приходится k синих, для этого достаточно, чтобы в n-й строке было k^2+k+1 красных клеток. (Тогда в ответ на первые k клеток прямой l, которые окрасит K, C окрасит k^2 клеток, после чего под красными клетками n-й строки на прямой l останется еще хотя бы одна неокрашенная клетка.) Красные клетки на прямой l вместе с лежащими над ними клетками одной из n строк и клеткой a на пересечении этой строки с прямой l (рис. 3) и образуют выигрышный «клин», показанный на рисунке 1, a. Надо только выбрать эту строку так, чтобы клетка a и все клетки под ней не были синими. А это всегда можно сделать, если число строк n больше числа синих клеток на прямой l и под ней, которое не превосходит $(k+1)k=k^2+k$, например, при $n=k^2+k+1$.

Итак, число N должно быть настолько велико, чтобы игрок K смог заполнить указанным образом $n=k^2+k+1$ строк и окрасить в последней n клеток. Можно взять $N=(k+1)^n\cdot k+1$. Действительно, как мы видели, чтобы K мог окрасить $k+1$ клеток на прямой l, в n-й строке надо было окрасить $(k+1)\cdot k+1$ клеток красным цветом; аналогично доказывается, что для этого в $(n-1)$-й строке должно находиться $(k+1)^2\cdot k+1$ красных клеток, в $(n-2)$-й — $(k+1)^3\cdot k+1$, ..., и в первой — $(k+1)^n\cdot k+1$ красных клеток.

Отметим, что это решение идейно близко к решению задачи М750 («Квант», 1982, № 12; см. также статью С. Н. Беспамятных в «Кванте» № [illegible] за этот год).

Д. Г. Азов

M809. *Найдите сумму*

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}$$

(через $k!$ обозначается произведение $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k$).

Ответ: $1-\frac{1}{n!}$. Получить ответ совсем легко, если представить k-е слагаемое искомой суммы в виде $\frac{k}{(k+1)!}=$ $=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$. Имеем

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)=1-\frac{1}{n!}.$$

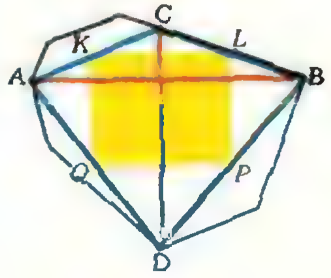
В. В. Произволов

◆

M810*. *Докажите, что в любой выпуклый многоугольник M можно поместить прямоугольник, площадь которого не меньше $1/4$ площади многоугольника M.*

Пусть A и B — наиболее удаленные друг от друга вершины многоугольника M, $|AB|=d$ (отрезок AB может быть диагональю или стороной). Возьмем на отрезке AB точку на расстоянии x от A $(0\leqslant x\leqslant d)$ и проведем через нее прямую перпендикулярно AB. Поскольку многоугольник M выпуклый, эта прямая пересечется с ним по отрезку (возможно, вырождающемуся в точку), длину которого обозначим $l(x)$. Пусть CD — наибольший из таких отрезков, $|CD|=l_0$ (см. рисунок). Ясно, что

$$S(M)=\int_0^d l(x)\,dx\leqslant\int_0^d l_0dx=l_0\cdot d.$$



Рассмотрим четырехугольник $KLPQ$ с вершинами в серединах сторон четырехугольника $ABCD$. Две из его сторон (на рисунке — KL и PQ) являются средними линиями в треугольниках ABC и ABD и потому параллельны AB и равны по длине $d/2$; аналогично, две другие стороны параллельны CD и равны по длине $l_0/2$. Поэтому $KLPQ$ — прямоугольник площади $dl_0/4$ и $S_{KLPQ}\geqslant S(M)/4$.

Остается заметить, что прямоугольник $KLPQ$ содержится в $ACBD$, а $ACBD$ — в M, так как M — выпуклый многоугольник.

Полученная оценка, по-видимому, не является точной. Однако автору не удалось ее улучшить. Возможно, это сделают читатели.

Ф. В. Вайнштейн

◆

Ф818. *Два жестких стержня длины l каждый шарнирно скреплены в точке A (см. рисунок). Стержень BA жестко закреплен в точке B, а точка C стержня AC может скользить без трения по направляющей BC. Стержень BA начинают вращать в плоскости рисунка вокруг точки B с постоянной угловой скоростью ω. Чему будут равны максимальная скорость и ускорение точки C, если в начальный момент стержни вытянуты вдоль направляющей ($\widehat{BAC}=\pi$)?*

Поскольку стержни жесткие, в любой момент времени проекции скоростей точек A и C на направление AC должны быть равны, то есть (см. рисунок)

$$v_A\cos\beta=v_C\cos\alpha.$$

Здесь $v_A=\omega l$ — скорость точки A, v_C — скорость точки C в данный момент времени, $\alpha=\omega t$ — угол, который составляет стержень BA (AC) с направляющей BC в данный момент времени ($\alpha<\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{2}-2\alpha$; при $\alpha>\frac{\pi}{4}$ $\beta=2\alpha-\frac{\pi}{4}$). Итак,

$$v_A\sin2\alpha=v_C\cos\alpha\ \Rightarrow\ v_C=2v_A\sin\alpha=2v_A\sin\omega t,$$

то есть скорость точки C меняется со временем по гармоническому закону. Значение v_C максимально при $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то есть когда точка C совпадает с точкой B:

$$v_{C\,\max}=2v_A=2\omega l.$$

Ускорение точки C в любой момент времени равно

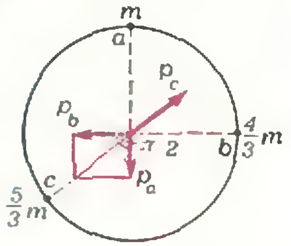
$$a_C=(v_C)'=2v_A\omega\cos\omega t.$$

Значение a_C максимально при $t=0$, то есть в начальный момент времени:

$$a_{C\,\max}=2v_A\omega=2\omega^2l.$$

Л. Г. Маркович

Ф819. *Три небольших тела, массы которых относятся как 3:4:5 (масса самого легкого тела равна m), удерживаются в трех различных точках на внутренней поверхности гладкой полусферической чаши радиуса R, которая в нижней точке закреплена на горизонтальной поверхности. В некоторый момент тела отпускают и предоставляют самим себе. Какое максимальное количество тепла может выделиться в такой системе? При каком начальном положении тел это осуществится? Все соударения тел абсолютно неупругие.*



Для того чтобы выделившееся количество тепла было максимальным, необходимо выполнение следующих условий:

1) потенциальная энергия тел в начальный момент должна быть возможно максимальной;

2) тела должны столкнуться одновременно в нижней точке чаши;

3) скорость тел сразу после столкновения должна быть равна нулю.

При выполнении этих условий весь запас начальной потенциальной энергии перейдет в тепло.

Следовательно, тела в начальный момент должны быть расположены на кромке чаши на высоте R над ее нижней точкой. Расположение тел должно быть таким, чтобы их суммарный импульс перед соударением был равен нулю (тогда после соударения слипшееся тело останется неподвижным в нижней точке чаши). Поскольку значения импульсов тел в любой момент времени относятся как 3:4:5, расположение тел в начальный момент должно быть таким, как на рисунке (на рисунке приведен вид сверху). Количество тепла, которое выделится при этом в системе, максимально и равно $4mgR$.

С. К. Строков

◆

Ф820. *Процесс A—B—C—A производит над одним молем идеального одноатомного газа (рис. 1). Определить КПД цикла.*

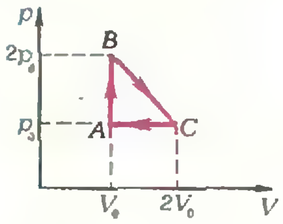


Рис. 1.

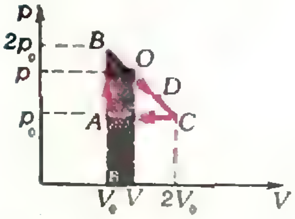


Рис. 2.

КПД цикла η определяется отношением работы A, совершаемой газом за время цикла, к количеству теплоты Q, подведенному к газу за это время:

$$\eta = A/Q.$$

Работа газа численно равна площади треугольника ABC (см. рис. 1):

$$A = p_0V_0/2$$

Чтобы найти Q, рассмотрим каждый участок цикла по отдельности. На участке AB идет изохорный процесс. Газ работы не совершает, а его внутренняя энергия увеличивается на величину

$$\Delta U_{AB} = 3/2R(T_B - T_A) = 3/2p_0V_0.$$

Согласно первому закону термодинамики, это увеличение внутренней энергии происходит за счет подвода некоторого количества теплоты

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = 3/2p_0V_0.$$

На участке CA идет изобарный процесс, при котором газ сжимается, то есть совершает отрицательную работу, а внутренняя энергия газа уменьшается. Таким образом, на этом участке газ отдает тепло, а не получает.

Выясним теперь, что происходит на участке BC. Здесь газ расширяется и поэтому совершает положительную работу. Внутренняя же энергия газа сначала увеличивается, а потом уменьшается. Следовательно, до некоторого момента газ получает тепло извне, а затем отдает тепло наружу. Обозначим «граничную» точку буквой D и найдем ее параметры. Пусть точка O — текущая точка участка BC (рис. 2) и ее параметры — p, V и T. На отрезке BO газ совершает работу, численно равную площади заштрихованной на рисунке 2 трапеции:

$$A_{BO} = (p_0 + p/2)(V - V_0).$$

при этом его внутренняя энергия изменяется на величину

$$\Delta U_{BO} = 3/2R(T - T_B) = 3/2(pV - 2p_0V_0).$$

Согласно первому закону термодинамики, газу должно быть передано количество теплоты

$$Q_{BO} = A_{BO} + \Delta U_{BO} = (p_0 + p/2)(V - V_0) + 3/2(pV - 2p_0V_0).$$

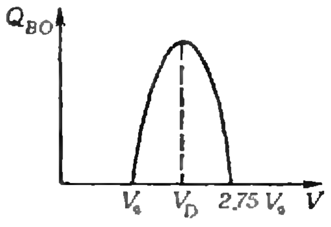


Рис. 3.

Давление и объем на отрезке BO, входящем в отрезок BC, связаны зависимостью

$$p = p_0(3 - V/V_0),$$

откуда

$$Q_{BO} = -\frac{p_0}{2}\left(4\frac{V^2}{V_0} - 15V + 11V_0\right).$$

На рисунке 3 представлен график зависимости $Q_{BO} = Q_{BO}(V)$. Это участок параболы, пересекающей ось V в точках с координатами

$$V_1 = V_0 \text{ и } V_2 = 11/4V_0 = 2{,}75V_0;$$

вершине параболы отвечает значение объема

$$V = V_D = (V_1 + V_2)/2 = 15/8V_0.$$

Итак, во время процесса BC при изменении объема от V_0 до V_D количество теплоты, переданное газу, монотонно растет, и к моменту, когда точка O совместится с точкой D, газ получит количество теплоты

$$Q_{BD} = 49/32p_0V_0.$$

Когда же точка O находится в пределах отрезка DC и приближается к точке C, величина Q_{BO} монотонно убывает. Это означает, что на отрезке DC газ отдает тепло, а не получает.

Таким образом, газ получает тепло на участках AB и BD, поэтому переданное газу за время цикла количество теплоты равно

$$Q = Q_{AB} + Q_{BD} = 97/32p_0V_0,$$

и коэффициент полезного действия цикла равен

$$\eta = 16/97, \text{ или } \eta \approx 16{,}5\%.$$

А. Г. Изергин, Ю. П. Малышев, В. Р. Саулин

Ф821. *В схеме, приведенной на рисунке, трансформатор идеальный. Параметры схемы указаны на рисунке. Найти амплитуду тока и сдвиг фаз в первичной цепи.*

◆

Напряжения обмоток трансформатора связаны соотношением

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Поскольку трансформатор идеальный, мгновенная мощность во вторичной цепи равна мощности первичной. Значит, токи обмоток связаны соотношением

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ток I_2 и напряжение U_2 сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$: такой же сдвиг будет и между I_1 и U_1. Отсюда видно, что трансформатор с подключенным к нему конденсатором емкости C можно заменить конденсатором, емкость которого равна

$$C_1 = C\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = 4\cdot 10^{-6}\ \text{Ф}.$$

После такого преобразования наша схема представляет собой обычную цепь, содержащую сопротивление R и емкость C_1. Амплитуда тока в цепи равна

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi\nu C_1}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{n_1^4}{4\pi^2\nu^2 n_2^4 C^2}}} \approx 0{,}17\ \text{А}.$$

Сдвиг фаз —

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{R}{1/2\pi\nu C_1} = \operatorname{arctg}\left(2\pi\nu\frac{n_2^2}{n_1^2}RC\right) \approx 0{,}9\ \text{рад}.$$

Р. З. Александров

Ф822. *Ваш собеседник, с которым вы сидите друг напротив друга, носит очки. Сможете ли вы определить, каким дефектом зрения — близорукостью или дальнозоркостью — он обладает? (Естественно, вы не станете просить собеседника дать примерить его очки и не будете заводить о них разговор).*

У близорукого человека оптическая сила глаз больше нормальной, а у дальнозоркого — меньше. Поэтому при близорукости носят очки с рассеивающими линзами, а при дальнозоркости — с собирающими.

В принципе об оптической силе очков можно было бы судить по изменению видимого размера глаз собеседника за стеклами: за рассеивающими линзами глаза кажутся меньше их истинной величины, а за собирающими — больше. Однако, если оптическая сила очков невелика или если вы не видели своего собеседника без очков, то данный способ непригоден.

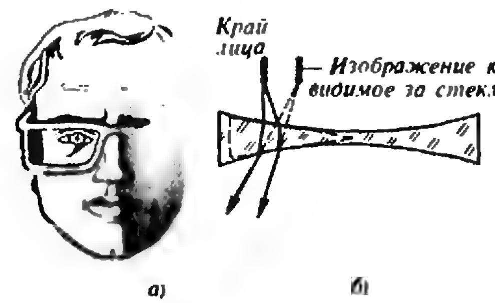


Рис. 1.

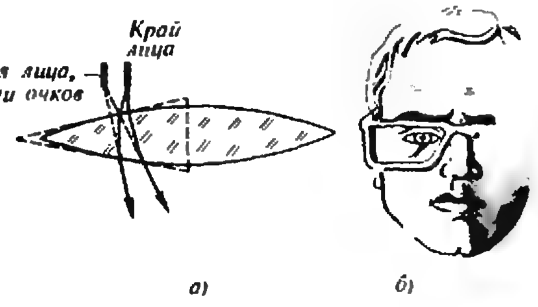


Рис. 2.

Проще всего ответить на вопрос задачи, наблюдая за смещением видимого за стеклами очков края лица по отношению к частям лица, не прикрытым очками: у близорукого человека — внутрь (рис. 1, *а*), а у дальнозоркого — наружу (рис. 2, *б*). Край стекла очков можно представить как призму, отклоняющую лучи. На рисунках 1, *б* и 2, *а* показан ход лучей, падающих на край, соответственно, рассеивающей и собирающей линз.

М. В. Семенов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М776—М790 и Ф788—Ф802, справились с задачами М776, М781, М782, М784, М786—М788 и Ф791, Ф794, Ф798—Ф800. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Астрелин (Новосибирск) 83, 85, 89; *А. Ахвледиани* (Тбилиси) 85; *Я. Бабкин* (Петрозаводск) 89; *В. Базуев* (Москва) 89; *Л. Байрак* (Белгород) 78; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 77; *Ю. Баркаган* (Пенза) 79; *В. Белов* (Новосибирск) 89; *М. Бенце* (Сацеле, СРР) 79; *А. Беренштейн* (Москва) 79; *А. Биргер* (Иваново) 77, 79; *И. Богуславский* (Москва) 77, 79; *В. Булавас* (Паневежис) 77, 83, 85; *И. Вайнштейн* (Калинин) 79; *Э. Велиметов* (Баку) 89; *А. Гаджимагомедов* (с. Новый Фриг Даг. АССР) 89; *М. Гараев* (Физули) 77, 79, 85; *О. Гарифуллин* (Пенза) 79; *Р. Гафициану* (Плоешти, СРР) 89; *Р. Гендлер* (Ташкент) 77, 89; *Н. Джурелов* (Ямбол, НРБ) 0; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) 77, 78, 83, 85, 89, 90; *Д. Земляной* (Севастополь) 79, 83; *Л. Зосин* (Киев) 89; *М. Йотов* (София, НРБ) 83, 89; *Д. Каледин* (Москва) 80, 83, 85; *Н. Карпенко* (Ленинград) 83, 89; *А. Карпович* (Киев) 77, 79, 83, 85, 89; *А. Карташев* (Витебск) 77; *З. Касенов* (Силистра, НРБ) 79; *М. Кваша* (Москва) 89; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 77, 79, 83, 89; *С. Корокчеев* (Севастополь) 83; *С. Корщунов* (Целиноград) 89; *А. Костюк* (Бердичев) 89; *Л. Котыченко* (Рудный) 89; *В. Кудряшов* (Пенза) 79; *А. Кучкаров* (Ургенч) 89; *А. Лазарев* (Москва) 89; *О. Леонтьева* (Ленинград) 79; *Г. Лось* (Хмельницкий) 79; *К. Макарчук* (Киев) 89; *Е. Малеванец* (Киев) 89; *М. Маринов* (Ямбол, НРБ) 77, 79, 80; *О. Матвеев* (Свердловск) 90; *Р. Мисявичюс* (д. Повилаускай Лит. ССР) 83, 85; *В. Михайлюк* (Киев) 89; *И. Мишинев* (Ямбол, НРБ) 77, 79, 80, 89; *Ф. Назаров* (Ленинград) 77, 79, 83, 85; *С. Найден* (Днепропетровск) 85; *М. Натальченко* (Алма-Ата) 83; *Д. Незяков* (Ямбол, НРБ) 79, 80; *И. Нестеров* (Пскент) 79; *В. Николаев* (Хабаровск) 89; *А. Никольцев* (Севастополь) 77; *О. Овецкая* (Донецк) 89; *Л. Оридорога* (Донецк) 77; *М. Осипова* (Владивосток) 89; *С. Пиунихин* (Москва) 89; *А. Пустовой* (Кишинев) 89; *К. Родзин* (Донецк) 77; *Ю. Руденко* (Киев) 89; *И. Святодух* (Красноармейск Донецкой обл.) **89**; *Ф. Серженко* (Запорожье) **83, 89**; *Г. Сигалов* (Ростов-на-Дону) **89**; *А. Сидорович* (Шяуляй) **89**; *С. Струков* (Воронеж) **77—79, 83, 85, 89, 90**; *Ю. Таранников* (Новосибирск) **89**; *М. Тейтель* (Киев) **89**; *И. Терещак* (Стражке, ЧССР) **79, 80, 83, 85**; *С. Токарь* (Яготин) **83, 89**; *Г. Трунов* (Москва) **89**; *Н. Федин* (Омск) **78**; *Д. Федотов* (Новокузнецк) **83, 89**; Б. Фридман (Москва) **83, 85, 89**; *К. Хлебаров* (Ямбол, НРБ) **77, 79, 80**; *М. Холмянский* (Москва) **89**; *В. Хрычиков* (Севастополь) **77—79, 83**; *С. Чернышев* (Александров) **83, 85, 89**; *В. Шаптала* (Днепропетровск) **79**; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) **77, 80, 83, 85, 89, 90**; *П. Этингоф* (Киев) **77, 79, 83, 85, 90**; *А. Юдаев* (Москва) **83**.

Физика

А. Абанов (Красноярск) **90, 93, 95, 97, 01, 02**; *Е. Авдеев* (Бор) **93, 96**; *С. Андреев* (Москва) **01, 02**; *В. Апальков* (Харьков) **93, 95—97, 01, 02**; *Т. Аширмамедов* (Новосибирск) **01, 02**; *Б. Бабаев* (Баку) **95**; *Э. Багдасарян* (Баку) **93, 01**; *Л. Байрак* (Белгород) **93, 01**; *А. Барабаш* (Киев) **96**; *Н. Барановская* (Винница) **89**; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **88—90, 93, 96, 97, 01, 02**; *А. Барчунов* (Алма-Ата) **01, 02**; *Е. Бельтюкова* (Белорецк) **96**; *А. Беренштейн* (Москва) **01, 02**; *И. Берхим* (Донецк) **88, 90, 93—97, 02**; *Е. Беспалов* (Курган) **90, 02**; *А. Билюков* (Мытищи) **00**; *М. Бияк* (Краснодар) **01**; *О. Богучаров* (Тула) **88—90**; *С. Бойко* (Винница) **01**; *В. Бражников* (Запорожье) **93, 97, 01, 02**; *А. Брезгунов* (Новосибирск) **96, 97**; *В. Булавас* (Паневежис) **88**; *Г. Буламбаев* (Алма-Ата) **01**; *Н. Бурдейная* (Винница) **93, 02**; *И. Бушуев* (Кемерово) **88, 90, 93, 95, 96**; *О. Важаевский* (Москва) **88, 90, 93, 95—97, 01, 02**; *Б. Вайсман* (Куйбышев) **95**; *Т. Валиахметов* (Челябинск) **92**; *В. Вангелов* (Бургас, НРБ) **88, 90, 93, 96, 01**; *В. Викторов* (Рязань) **93, 96**; *М. Вислая* (Донецк) **93, 95—97**; *А. Выродов* (Осинники) **90, 96, 97, 02**; *Д. Выдрин* (Златоуст) **97**; *Е. Гисич* (Винница) **89**; *О. Гаврилов* (Киев) **02**; *В. Глаголев* (Тула) **93**; *О. Голинский* (Тамбов) **90, 93, 01, 02**; *Ю. Гордиенко* (Винница) **96, 01, 02**; *Э. Горячковский* (Кишинев) **90**; *А. Грабчак* (с. Ободовка Винницкой обл.) **96**; *С. Гребенщиков*)п. Черноголовка Московской обл.) **90, 93, 96, 97, 01, 02**; *М. Гринберг* (Красноярск) **01**; *О. Гришин* (Тула) **90**; *А. Данейко* (Минск) **93, 95, 96, 01, 02**; *Г. Данелия* (Тбилиси) **90, 01, 02**; *Л. Демидова* (Винница) **01, 02**; *В. Дерендяев* (Березники) **89, 90, 92, 95, 97, 02**; *В. Димов* (Бургас, НРБ) **88, 90**; *Г. Долгопятов* (Донецк) **93, 95—97, 01, 02**; *Л. Доросинский* (п. Черноголовка Московской обл.) **88, 90, 92**; *М. Дурдин* (Иваново) **93, 96**; *А. Ежов* (Ленинград) **02**; *А. Ефимов* (Москва) **93, 97**; *А. Ефремов* (Воронеж) **88, 90, 93, 97, 02**; *В. Житомирский* (Харьков) **88, 89, 93, 95—97, 01, 02**; *Н. Жохов* (Александров) **93, 95—97, 01, 02**; *Г. Жуков* (Куйбышев) **02**; *Р. Жямайтис* (Вильнюс) **90, 92, 93, 96, 97, 02**; *Б. Задбинов* (Лида) **93**; *А. Зайцев* (Целиноград) **90, 01, 02**; *Д. Зайцев* (Горький) **88—90, 92**; *А. Зеленюк* (Здолбунов) **93, 95**; *М. Зиманов* (Алма-Ата) **88, 90, 02**; *С. Зинченко* (Краматорск) **02**; *Т. Иваненко* (Киев) **95, 02**; *Э. Иванов* (Орджоникидзе) **95**; *М. Имас* (Донецк) **95, 96, 01**; *Л. Йосыпив* (Ивано-Франковская обл.) **90**; *С. Казарян* (Ереван) **93, 96, 97**; *Д. Калатози* (Кутаиси) **97, 01**; *Д. Каледин* (Москва) **88, 89, 92, 93, 96, 02**; *И. Калиновский* (Киев) **93, 96, 02**; *Д. Каменецкий* (Москва) **90**; *Е. Канцыпер* (Таллин) **96, 97**; *В. Каральник* (Алма-Ата) **93**; *А. Карнаухов* (Ижевск) **93, 96, 02**; *С. Карнаухова* (Свердловск) **93**; *А. Карпович* (Киев) **95**; *С. Кастелли* (Болград) **88—90, 93, 95, 96**; *В. Кашин* (Москва) **97**; *Е. Кичковская* (Винница) **02**; *Ю. Кившарь* (Харьков) **93, 96, 97, 01, 02**; *А. Кириченко* (Пермь) **01, 02**; *А. Климачев* (Минск) **93, 95**; *А. Клишин* (Киев) **02**; *М. Кныш* (Краснодар) **02**; *М. Коваль* (Киев) **90, 93**; *Ю. Коваль* (Киев) **93**; *Э. Ковнацкий* (Червоноград) **88, 93**; *М. Козлов* (Москва) **95, 97**; *Е. Козулин* (Пермь) **97**; *В. Коломиец* (Днепропетровск) **90**; *А. Коломейский* (Винница) **93, 96**; *В. Комов* (Александров) **88, 90, 92, 93, 96, 97**; *С. Коняшкин* (Брянск) **93, 01**; *Е. Корнилова* (Ефремов) **88, 01, 02**; *А. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) **88—90, 92**; *А. Коршак* (Киев) **02**; *И. Коршун* (Коммунарск) **01, 02**; *Н. Косматов* (Москва) **90**; *А. Котляр* (Минск) **93, 01, 02**; *А. Кравцов* (Москва) **93, 95—97, 01, 02**; *Д. Кравчук* (Киев) **97**; *С. Кравчук* (Москва) **90**; *А. Крапивин* (Киев) **01, 02**; *А. Краснов* (Ташкент) **93, 01, 02**; *О. Краснояров* (Грозный) **93, 01, 02**; *В. Кретив* (Винница) **00**; *В. Криман* (Винница) **88, 89**; *А. Кругов* (Киев) **02**; *Е. Крылов* (Ленинград) **90**; *И. Крылов* (Куйбышев) **01, 02**; *С. Крылова* (Пущино) **99**; *В. Кубатин* (Ленинград) **88, 90**; *В. Кудашов* (п. Вуктыл Коми АССР) **88, 90, 02**; *Д. Кузютин* (Алма-Ата) **93, 01, 02**; *М. Кулдашева* (Учкурган) **02**; *С. Кулев* (Москва) **02**; *А. Кулишин* (Киев) **02**; *Д. Купцов* (Москва) **88, 90, 92, 93, 95, 97, 02**; *П. Курганидзе* (Кутаиси) **90**; *Н. Кухаркин* (Москва) **88—90, 93, 96, 97, 02**; *Д. Лабадзе* (Тбилиси) **96**; *Г. Ландсберг* (Серпухов) **90**; *А. Лапатанов* (Винница) **01**; *С. Лауриновичюс* (Мажейкяй) **01, 02**; *И. Левин* (Донецк) **93, 95—97, 02**; *А. Лихачев* (Барнаул) **02**; *И. Лорман* (Киев) **88—90, 96, 97**; *Д. Лунц* (Саратов) **95, 01, 02**; *В. Лыткин* (Чита) **01**; *К. Макагон* (Запорожье) **88, 90**; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) **88—90, 92, 93, 96, 97, 01, 02**; *К. Макарчук* (Киев) **93, 95, 02**; *А. Малай* (Каушаны) **88, 90, 93, 96, 02**; *Д. Малугашвили* (Тбилиси) **02**; *И. Мамедов* (Баку) **93, 95, 01, 02**; *Е. Мамчиц* (Днепропетровск) **01, 02**; *Л. Маркович* (Минск) **88—90, 93, 95, 02**; *О. Мароо* (Канев) **01, 02**; *А. Мартюшенко* (Днепропетровск) **02**; *В. Марущак* (Краматорск) **93, 96**; *П. Милютин* (Хабаровск) **88, 90**; *В. Михайлов* (Братск) **90, 01**; *А. Михеев* (Златоуст) **88, 93, 02**; *К. Мишин* (Днепропетровск) **88, 90, 93, 96**; *П. Молодчик* (Киев) **93**; *С. Молчанов* (Саратов) **01, 02**; *С. Мусаев* (Баку) **88, 90**; *Д. Набишев* (Фергана) **88, 90, 93, 96, 01**; *Д. Набутовский* (Новосибирск) **88—90, 92**; *Ш. Насыров* (с. Кульмач Красноводской обл.) **88**; *В. Никитин* (Одесса) **90**; *С. Никольский* (Иркутск) **02**; *С. Никоненко* (Киев) **93**; *А. Носков* (Москва) **93, 96, 97**; *Р. Овчарек* (Варшава, ПНР) **88**; *О. Овчинский* (Запорожье) **88, 90, 93, 96**; *О. Огнев* (Новосибирск) **88**; *С. Орлов* (Зеленоград) **88, 90**; *В. Осипов* (Гайсин) **93**; *К. Осланов* (Чимкентская обл.) **02**; *О. Оцвера* (Винница)

02; *А. Павельев* (Фрязино) **88, 90, 95, 96, 02**; *Д. Павловский* (Ташкент) **93**; *А. Панасенко* (Новосибирск) **90**; *Е. Пархоменко* (Чернигов) **90, 01, 02**; *К. Первушин* (Ташкент) **93, 95, 96**; *О. Петренко* (Кировское) **01**; *Д. Петунин* (Кзыл-Ординская обл.) **93, 96**; *И. Пильников* (Тамбов) **88, 90, 93, 95, 96, 01**; *А. Погорелов* (Алма-Ата) **88—90, 93, 02**; *Р. Погосян* (Баку) **00**; *Ш. Поладов* (с. Гиль Аз. ССР) **90**; *А. Просвиров* (Волгоград) **90**; *И. Прудников* (Москва) **97**; *М. Пустильник* (Свердловск) **93, 95—97, 01, 02**; *С. Рекун* (Виниица) **02**; *А. Розенвайн* (Киев) **93, 96, 97**; *М. Романенко* (Владимир) **01, 02**; *С. Рудаков* (Фергана) **97**; *Д. Русинов* (Ленинград) **88, 90, 95, 01**; *И. Савыков* (Первоуральск) **90, 93, 96, 97, 01, 02**; *А. Садыков* (п. Черский Як. АССР) **88, 93, 96, 97, 02**; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) **88, 90, 93, 01, 02**; *В. Самойленко* (Находка) **88, 90**; *А. Самойлович* (Донецк) **93, 95—97**; *М. Самсонов* (Ленинград) **90, 95, 01**; *С. Сахарук* (Брест) **90**; *В. Свинарчук* (с. Садки Тернопольской обл.) **02**; *В. Семененко* (Киев) **90, 93, 96**; *Ф. Серженко* (Запорожье) **88, 93, 95—97, 02**; *Н. Серяков* (п. Малаховка Московской обл.) **93**; *А. Сидорович* (Шяуляй) **93, 96**; *С. Симанов* (Долгопрудный) **88, 90, 93, 95—97, 01, 02**; *А. Симонов* (Улан-Удэ) **90**; *К. Скляров* (Севастополь) **01, 02**; *М. Скорик* (Киев) **88, 90, 93, 95—97**; *А. Соловьев* (Куйбышев) **93, 95, 97, 01, 02**; *Д. Соловьев* (Фрязино) **93, 96, 97, 01, 02**; *В. Срюбас* (Алитус) **01**; *Е. Стародубцев* (п. Фоминополь Минской обл.) **93**; *И. Стомахин* (Москва) **90, 93, 95**; *Н. Сторожук* (Курск) **90, 02**; *А. Сурков* (Ленинград) **88, 90**; *И. Тетко* (Кодыма) **96, 01, 02**; *В. Томчук* (Винница) **01, 02**; *Д. Третьяков* (Винница) **89, 93, 96, 97, 01, 02**; *И. Тухватуллин* (п. Лопатино Московской обл.) **93**; *О. Фатьянов* (Курск) **88—90, 92**; *Н. Федин* (Омск) **90, 92, 93, 96**; *В. Фельдман* (Саратов) **88—90, 92, 93, 95, 96, 02**; *Л. Фельдман* (Саратов) **88—90, 92, 93, 95—97, 02**; *Б. Хайкович* (Ленинград) **93**; *А. Хомяков* (Белорецк) **90**; *Д. Худяков* (Первоуральск) **02**; *А. Черепнин* (Винница) **01**; *В. Черных* (Хабаровск) **93, 95**; *О. Чернышев* (Тольятти) **93, 95, 01, 02**; *И. Чечеткин* (Киев) **93, 96, 01, 02**; *А. Чудновский* (Киев) **90, 92, 93, 96, 97, 02**; *А. Шнирман* (Донецк) **95—97, 02**; *И. Шойхет* (Ташкент) **90**; *В. Шядуйкис* (Зарасай) **90**; *Ю. Щербаков* (Запорожье) **88, 90, 93, 97**; *И. Эльберт* (Киев) **01, 02**; *И. Эрхарт* (Биловец, ЧССР) **88, 90**; *О. Юдин* (Ленинград) **90**; *Г. Яшин* (п. Черноголовка Московской обл.) **90, 93, 96, 01, 02**.

Наша обложка

На первой странице обложки вы видите фотографию гипсовой модели поверхности третьего порядка (*кубической поверхности*) — поверхности, заданной многочленом третьей степени от трех переменных. На ней отчетливо видны 27 прямых, целиком на ней лежащих.

Теорема, утверждающая, что в общем случае на любой кубической поверхности обязательно имеется ровно 27 прямых (если считать также «мнимые» и «бесконечно удаленные» прямые), появится на одной из «Геометрических страничек», которые со следующего номера будут регулярно печататься в «Кванте». На каждой такой страничке, кроме чертежа с объяснениями, будут задания — графические и математические. Геометрические странички могут украсить математический кабинет школы или, обогащенные самостоятельными графическими и математическими работами учащихся, появляться в школьной стенгазете.

В свое время теорема о 27 прямых была крупной математической сенсацией. Вот что написал об этом в своей книге английский математик А. Гендерсон: «В 1849 году Кейли и Сальмон открыли 27 прямых. В 1869 году Христиан Винер изготовил модель кубической поверхности, показывающую 27 действительных прямых на ней. Выдающийся геометр Сильвестер счел, что работа Винера принадлежит к числу открытий «на вечные времена вписавших 1869 год в Анналы Науки». На Всемирной выставке 1894 года в Чикаго Клейн демонстрировал полный набор кубических поверхностей, в том числе поверхность Х. Винера.»

С тех пор шума вокруг сенсации поубавилось, прошла и мода на гипсовые поверхности — сфотографированный нами экземпляр теперь считается уникальным (он хранится на кафедре дифференциальной геометрии механико - математического факультета МГУ). Как писал уже в наши дни советский математик Ю. И. Манин, «книга Гендерсона вышла в 1911 году, когда красноречие Сильвестра и гипсовые модели уходили вместе с викторианской эпохой».

Но красота открытых в эту эпоху 27 прямых — непреходящая.

Ученье — мученье

Говорят: нет ученья без мученья, математика — не исключенье. По-видимому, больше всех мучаются поэты. А может, у них просто больше таланта про свои мучения рассказывать.

Никак не мог справиться с простенькими арифметическими задачами Е. Винокуров:

Я чуть не плакал. Не было удачи!
Задача не решалась — хоть убей.
Условье было трудным у задачи.
Дано:
«Летела стая лебедей...»
Я, щеку грустно подперев рукою,
Делил, слагал — не шли дела на лад!
Но, лишь глаза усталые закрою,
Я видел ясно:
вот они — летят...

Не меньший ужас вызывают школьные задачи у И. Снеговой:

Математика — это трудно.
Это дар. С первых лет. От бога.
Слишком промахи в ней подсудны,
Слишком взыскивает с итога.
Уравненья, в которых скопом
Корни, степень, неравенств бездна.
Суть, замкнувшаяся по скобкам,
И до дьявола неизвестных.
Или дроби... Ох эти дроби!
Жизнь, как дробь, и точна, и — мимо..
В ней делитель упрям и злобен,
А делимое — неделимо.
Темь задач! Легкость прегрешений,
Груз просчетов... Но зло не в этом:
Ни одно из моих решений
Не сходилось вовек с ответом.

Не очень большая, но явная обида сохранилась у Н. Глазкова на школьных учителей:

Я мог бы это доказать,
Да мне не дали досказать.

Намаялся с геометрией и тригонометрией А. Поперечный:

Я постигал с трудом
Неясный смысл
Великих чисел и простых затей.
Но часто
Над руками коромысел
Мне снился треугольник журавлей.
И, сложные фигуры начертая,
Зубря тригонометрию
В зарю,
Я говорил себе:
А на черта я
Ее, тригонометрию, зубрю?!
И, презирая точные науки
(В них коренное коренилось зло),
Я корень извлекал,
Идя на муки,
Не извлекая истины зерно.
Я рисовал квадраты дальних окон,
В них силуэт знакомый различал,
Но Пифагор недремлющее око
Вперил в меня и ярость излучал.
«Пифагоровы штаны
На все стороны равны.»
Так я тихо напевал
И врага в нем наживал.

Явно излишнее почтение к школьной программе демонстрирует Б. Слуцкий:

...интересно
Наблюдать, как, словно пена,
Опадают наши рифмы
И величие степенно
Отступает в логарифмы.

А некоторые поэты даже — страшно сказать! — арифметики не знают. Цепенеет перед простейшей цифрой Б. Окуджава:

Магическое «два». Его высоты,
его глубины... Как мне превозмочь?

Не решается пойти дальше таблицы умножения Ю. Мориц:

Пятью пять двадцать пять,
Дважды два четыре.

Еще скромнее О. Мандельштам:

Дважды два — четыре,
Два да три — пять.
Вот и все, что мы можем,
Что мы можем знать.

И уж, наверное, все рекорды побил И. Эренбург:

Я не знал, что дважды два — четыре.
И учитель двойку мне поставил...
Правила менялись, только бойко,
С той же снисходительной улыбкой
Неизменно ставили мне двойку
За допущенную вновь ошибку.
Не был я учеником примерным...

После таких откровений поэтов нельзя не пожалеть, и в чем-то и простить.

Э. П. Казанджан

Характерные ошибки на экзаменах по физике

Кандидат физико-математических наук
Л. В. ТАРАСОВ,
А. Н. ТАРАСОВА

Из огромного количества вопросов, предлагаемых на вступительных экзаменах по физике в различных вузах, можно выделить вопросы довольно сложные и совсем простые. Неудивительно, когда неправильные ответы даются на сложные вопросы. Но, как показывает практика, ошибиться можно и при ответе на самый простой вопрос, если не очень задумываться над правильным применением физических понятий и законов. Более того, есть вопросы, на которые абитуриенты из года в год дают неправильные ответы. Ниже приводятся примеры подобных вопросов вместе с характерными неправильными ответами и анализом типичных ошибок.

Вопрос 1. В некоторый момент времени скорость тела равна нулю. Можно ли утверждать, что ускорение в этот момент тоже равно нулю?

Характерный неправильный ответ. Да, можно.

Анализ ошибки. Ускорение в любой момент времени определяется не скоростью, а быстротой ее изменения в этот момент. Поэтому из того факта, что скорость обратилась в нуль, вовсе не следует, что ускорение тоже должно обратиться в нуль. Простой пример: скорость брошенного вертикально вверх тела в самой верхней точке траектории полета равна нулю, ускорение же в этой точке равно (как, впрочем, и во всех других точках траектории) ускорению свободного падения g. Другой пример: когда любой транспорт трогается с места, его начальная скорость равна нулю, а ускорение отлично от нуля.

Вопрос 2. Два тела с разными массами подняли на одинаковые высоты над полом и одновременно отпустили. Одновременно ли они упадут на пол, если сила сопротивления воздуха для обоих тел одна и та же и с течением времени не изменяется?

Характерный неправильный ответ. Тела упадут на пол одновременно, поскольку для обоих тел сила сопротивления воздуха одна и та же и ее можно не принимать во внимание.

Анализ ошибки. Пусть $F_\text{с}$ — сила сопротивления воздуха, m — масса тела, g — ускорение свободного падения, $F_\text{т}=mg$ — сила тяжести, a — ускорение падающего тела (здесь и далее под словами «сила» и «ускорение» мы будем иметь в виду «модуль силы» и «модуль ускорения»). Записав второй закон Ньютона

$$F_\text{т}-F_\text{с}=ma,$$

находим

$$a=(F_\text{т}-F_\text{с})/m=g-(F_\text{с}/m).$$

Отсюда следует, что тело с большей массой будет иметь большее ускорение и, следовательно, скорее достигнет пола. Тела упали бы одновременно лишь в том случае, если бы сила сопротивления воздуха равнялась нулю.

Вопрос 3. Тело брошено под углом к горизонту. Какие силы действуют на летящее тело? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Характерный неправильный ответ. На тело действуют две силы: сила тяжести (направленная вертикально вверх) и сила бросания (направленная по касательной к траектории).

Анализ ошибки. На летящее тело действует только одна сила — сила тяжести (коль скоро мы пренебрегаем сопротивлением воздуха). Никакой «силы бросания» в данном случае нет. Как показывает практика, указанная ошибка очень распространена. По-видимому, это связано с двумя обстоятельствами.

Во-первых, не все экзаменующиеся достаточно твердо усвоили тот факт, что сила возникает лишь при взаимодействии тел. Летящее тело взаимодействует только с Землей, и на него действует только сила притяжения к Земле. Конечно, когда тело бросали, к нему прикладывали некоторую силу (ее можно было бы назвать силой бросания). Однако мы рассматриваем тело не во время бросания, а уже после того, как его бросили, то есть во время полета. Важно понимать, что силу нельзя «накопить»: есть взаимодействие тел — есть соответствующая сила, кончилось взаимодействие — сила тут же исчезла.

Во-вторых, довольно распространено заблуждение, будто характер и траектория движения тела определяются только действующими на него силами. В действительности же силой обусловлено ускорение тела, то есть изменение скорости. Сама же скорость в каждый момент времени определяется двумя факторами — изменением скорости и начальной скоростью. Иначе говоря, характер движения тела зависит не только от действующих на тело сил, но и от начальных условий. Во всех задачах механики начальные условия — это начальная координата и начальная скорость тела. В данном случае под начальными условиями следует понимать угол, под которым брошено тело, и модуль скорости, с какой оно было брошено.

Вопрос 4. Тело (камень на веревке) совершает движение по окружности в вертикальной плоскости. Какие силы действуют на тело? Как они направлены в тот момент, когда тело оказывается в точке A траектории (рис. 1, *а*)?

Характерный неправильный ответ. На тело действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_т$, сила упругости веревки $\vec{N}$ и центростремительная сила $\vec{F}$, удерживающая тело на окружности (рис. 1, *б*).

Анализ ошибки. Рассматриваемое тело взаимодействует с Землей (результат — сила тяжести $\vec{F}_т$) и с веревкой (результат — сила упругости веревки $\vec{N}$). Таким образом, на тело действуют лишь две силы. Сила же, удерживающая тело на окружности и сообщающая ему центростремительное ускорение $a_ц$, есть сумма проекций указанных сил на направление радиуса (рис. 1, *в*):

$$ma_ц = N - F_т \cos\alpha.$$

Эти же силы, точнее — сумма проекций этих сил на направление касательной к окружности, сообщают телу и касательное ускорение $a_к$:

$$ma_к = F_т \sin\alpha.$$

Вопрос 5. Находящийся на горизонтальной плоскости ящик с песком массой M начинает двигаться поступательно после того, как в него попадает пуля массой m, летевшая горизонтально со скоростью v_0. Найти скорость ящика. Трением ящика о плоскость можно пренебречь.

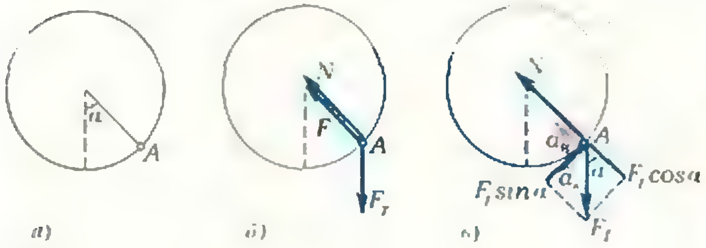
Характерный неправильный ответ. Поскольку трение не учитывается, кинетическая энергия ящика вместе с застрявшей в нем пулей равна первоначальной кинетической энергии пули:

$$(M+m)v^2/2 = mv_0^2/2.$$

Следовательно,

$$v = v_0\sqrt{m/(M+m)}\,.$$

Анализ ошибки. При попадании пули в ящик часть ее первоначальной кинетической энергии превращается в тепло; поэтому $(M+m)v^2/2 < mv_0^2/2$. Чтобы найти скорость ящика, надо воспользоваться законом сохранения импульса



а) б) в)

Рис. 1.

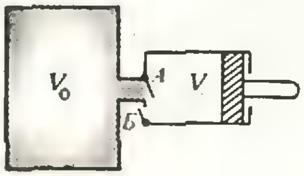


Рис. 2.

(количества движения)

$$(M+m)v = mv_0,$$

откуда

$$v = v_0 m/(M+m).$$

Вопрос 6. Способствует ли повышению уровня воды в реке таяние льдин, плывущих по реке во время ледохода?

Характерный неправильный ответ. Да, способствует.

Анализ ошибки. Когда льдина плавает в воде, ее сила тяжести уравновешена архимедовой силой, равной силе тяжести воды в объеме, вытесняемом льдиной. После того как льдина растает, она превратится в воду, объем которой в точности равен объему подводной части льдины. Отсюда следует, что при таянии льдин уровень воды в реке не изменяется.

Вопрос 7. Газ, находящийся в сосуде объемом V_0 при давлении p_0, откачивают поршневым насосом, имеющим рабочую камеру объемом V (рис. 2). Какое число ходов поршня надо сделать, чтобы давление газа в сосуде понизилось до значения p?

Характерный неправильный ответ. Пусть искомое число ходов есть n. Учитывая, что объем газа увеличился на nV, а температура газа осталась неизменной, в соответствии с законом Бойля — Мариотта получаем

$$p_0 V_0 = p(V_0 + nV).$$

Отсюда и находим n.

Анализ ошибки. Закон Бойля — Мариотта справедлив только тогда, когда не только температура, но и масса газа остаются неизменными. В данном же случае после каждого хода поршня часть газа уходит из системы; когда поршень движется справа налево, он закрывает клапан A и открывает клапан $Б$, через который газ и покидает систему (см. рис. 2). Поэтому надо рассматривать каждый из ходов поршня по отдельности. Начнем с первого хода. Для массы газа, находившейся в сосуде первоначально, запишем закон Бойля — Мариотта:

$$p_0 V_0 = p_1 (V_0 + V),$$

где p_1 — давление газа, когда поршень занимает крайнее правое положение. Когда поршень возвращается в исходное левое положение, в сосуде остается масса газа, меньшая по сравнению с исходной, но ее давление есть p_1. Для этой массы газа

$$p_1 V_0 = p_2 (V_0 + V),$$

где p_2 — давление газа по окончании рабочего хода поршня. Рассматривая последовательно n ходов поршня, получим систему n уравнений:

$$\begin{cases} p_0 V_0 = p_1 (V_0 + V), \\ p_1 V_0 = p_2 (V_0 + V), \\ p_2 V_0 = p_3 (V_0 + V), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n-1} V_0 = p (V_0 + V); \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем

$$p = p_0 (V_0/(V_0+V))^n,$$

откуда

$$n = \log_{V_0/(V_0-V)} (p/p_0).$$

Вопрос 8. Что покажет вольтметр в схеме на рисунке 3 (см. с. 56)? Сопротивление вольтметра считать бесконечно большим, а сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

Характерный неправильный ответ. Вольтметр покажет ЭДС элемента: $U = \mathcal{E}$.

Анализ ошибки. В цепи $ABCD$ (см. рис. 3) течет ток

$$I = 2\mathcal{E}/(2r) = \mathcal{E}/r,$$

где r — внутреннее сопротивление каждого элемента. Вольтметр, подсоединенный к зажимам элемента, показывает напряжение

$$U = \mathcal{E} - Ir = \mathcal{E} - (\mathcal{E}/r)r = \mathcal{E} - \mathcal{E} = 0.$$

Вопрос 9. Вы щелкаете выключателем, и... лампочка вдруг перегорает. Чем это объясняется?

Характерный неправильный ответ. Вследствие явления самоиндукции при отключении от сети возникает дополнительный ток (ток размыкания) того же направления, что и основной ток. В результате полный ток через лампочку резко возрастает, и лампочка может перегореть.

Анализ ошибки. Как показывает практика, лампочка перегорает отнюдь не при выключении, а, напротив, при включении. Ясно, что явление самоиндукции здесь не при чем, поскольку индукционный ток в этом

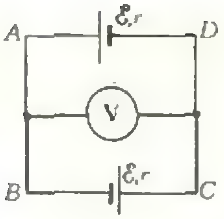


Рис. 3.

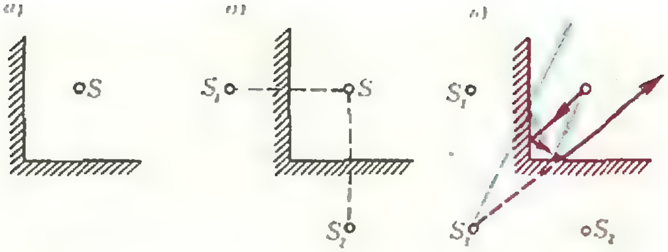


Рис. 4.

случае направлен против основного тока и лишь «тормозит» его нарастание до заданного значения. (Кстати сказать, в бытовой электросети индуктивность незначительна, так что индукционные токи практически никакой роли не играют.)

Что же происходит при включении лампочки? Пока ее нить накаливания не нагреется до температуры порядка 2400°C, ее сопротивление оказывается существенно меньше номинального, соответствующего раскаленной нити. При этом через лампочку течет ток, превышающий расчетное значение. Если в нити случайно появилась некоторая неоднородность, например уменьшение диаметра нити в каком-то месте, то это может привести к местному перегреву и разрушению нити лампочки.*)

Вопрос 10. Сколько изображений точки S получится в системе из двух взаимно перпендикулярных плоских зеркал (рис. 4, *а*)?

Характерный неправильный ответ. Два изображения: S_1 и S_2 (рис. 4, *б*).

Анализ ошибки. Кроме изображений S_1 и S_2, образованных лучами, отраженными только от одного зеркала, есть еще одно изображение — S_3 (рис. 4, *в*). Оно образовано лучами, отраженными сначала от одного зеркала, а потом от другого.

Вопрос 11. Почему при делении ядра урана выделяется энергия?

Характерный неправильный ответ. На каждую частицу в ядре приходится энергия связи около 7,5 МэВ; полная энергия связи составляет около 1800 МэВ. Таким образом, в ядре сосредоточена громадная энергия. Она освобождается при разрушении ядра.

Анализ ошибки. По определению энергия связи — это та энергия, которую надо затратить, чтобы разделить ядро на составляющие его частицы. Или, другими словами, это та энергия, которая выделяется при образовании ядра из отдельных частиц.

Какая же энергия освобождается при делении ядра урана? Дело в том, то энергия связи, приходящаяся на одну частицу в ядре урана, составляет 7,5 МэВ, а на каждую частицу осколков, образовавшихся при делении урана, приходится около 8,5 МэВ. Таким образом, на расщепление ядра урана надо затратить 7,5 МэВ энергии на каждую частицу, а при образовании осколков выделяется энергия 8,5 МэВ на каждую частицу. Разность этих энергий, которая в расчете на ядро составляет приблизительно 200 МэВ, и освобождается при делении ядра урана.

В заключение предлагаем читателям самостоятельно ответить на несколько опять-таки довольно простых вопросов.

1. Первую половину пути тело двигалось со скоростью 20 км/ч, а вторую — со скоростью 30 км/ч. Чему равна средняя скорость за все время движения?

2. В первом случае в шлюзе находится баржа, а во втором — легкая лодка. Одинаковую ли работу совершают в указанных случаях насосы, используемые для подъема уровня воды в шлюзе?

3. В сосуде, наполненном до краев водой, плавает льдинка, в которую вмерз пузырек воздуха. Перельется ли вода через край после того, как льдинка растает?

4. Вольтметр подсоединен к зажимам элемента. Может ли показание вольтметра быть больше ЭДС элемента?

5. Можно ли при помощи плоского зеркала получить на горизонтально лежащем листе бумаги изображение вертикально стоящего объекта?

---

*) Подробно о том, почему и как перегорают лампы накаливания, можно прочитать в статье А. Н. Петоева «Что случилось с лампочкой?» («Квант», 1983, № 8). (*Прим. ред.*)

Библиотечка «Квант»

Начиная с 1981 года издательство «Наука» Академии наук СССР выпускает специально для школьников серию научно-популярных книг Библиотечка «Квант». Авторы этих книг — известные ученые, работающие в самых разных областях физики и математики. Они интересно и доступно рассказывают о науке сегодняшнего дня, о новых идеях, экспериментах и, конечно, о практическом использовании науки. Книги этой серии отличает то, что в них не просто описываются факты и явления, излагаются теоремы и физические законы, но везде, где это можно сделать, даются глубокие объяснения, делаются качественные, а иногда и количественные оценки. Так что книги не только информируют читателя, но и учат его размышлять, формируют правильные физические, математические, мировоззренческие представления. Есть среди книг серии и такие, в которых углубленно рассматриваются вопросы школьных курсов физики и математики. Издано несколько задачников с интересными нестандартными задачами. Сейчас опубликовано уже около 30 выпусков серии. Нам хотелось бы рассказать о некоторых книгах, с которыми читатель сможет познакомиться в 1984 году.

Можно ли представить себе автомобиль, корпус которого после аварии восстанавливает свою форму, если его просто нагреть? Казалось бы, трудно. А между тем такой автомобиль уже сейчас можно сделать из специальных металлических сплавов, «помнящих» исходную форму. Об этом эффекте «памяти» металлов, о новых материалах, о сверхупругости и сверхпластичности рассказывается в книге В. А. Займовского и Т. Л. Колупаевой «Необычные свойства обычных металлов».

В книге М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина «Знакомство с полупроводниками» рассказывается о многих интересных эффектах в полупроводниках, а также о том, как с их помощью измеряют температуру, деформацию, магнитные поля.

Из книги А. Д. Чернина «Звезды и физика» читатель узнает об удивительных астрофизических объектах, недавно открытых учеными, — пульсарах, квазарах, вспыхивающих рентгеновских звездах, о новейших гипотезах, о загадках астрофизики, которые ученым еще предстоит разрешить.

В журнале «Квант» много лет ведется раздел «Квант» для младших школьников». В нем публикуются статьи, для понимания которых нужны знания физики и математики в объеме 6–7 классов. Лучшие статьи из этого раздела отобраны для сборника «Занимательно о физике и математике» (составители С. С. Кротов и А. П. Савин). В книгу включены также около 100 любопытных задач и описания изящных опытов, которые читатели могут воспроизвести в домашних условиях.

Всего в 1984 году издательство «Наука» планирует выпустить 10 книг серии Библиотечка «Квант». Заказы на них можно оформить в книжных магазинах.

Библиотечка «Квант»
Введение в теорию вероятностей
Введение в теорию групп
Задачи по мате... алгебра и
Жидкие кристаллы
Шахматный калейдоскоп
Самая главная молекула
Рассказы о физиках и математиках

С этого номера мы начинаем публиковать материалы XVII Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Ниже приводятся задачи начальных этапов этой олимпиады на примере Московской городской олимпиады по физике и Свердловской областной олимпиады по математике. В следующих номерах будет рассказано о Всероссийской олимпиаде и о заключительном туре XVII Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Напоминаем, что следующая XVIII Всесоюзная олимпиада начнется в ноябре с. г. и будет проходить в несколько этапов: в ноябре — декабре пройдут школьные, районные и городские олимпиады, в январе 1984 г. — республиканские (АССР), краевые и областные, в марте — олимпиады союзных республик, в апреле состоится заключительный тур и закрытие олимпиады.

Мы надеемся, что публикуемые ниже задачи будут полезны вам при подготовке к очередной Всесоюзной олимпиаде школьников.

Московская городская олимпиада по физике 1982/83 года

Районный тур

8 класс

1. На столе лежит круглая коробка внутренним диаметром D, а в ней — шайба радиуса R. Трение между коробкой и шайбой отсутствует. Коробку как целое начинают двигать с постоянной скоростью v_0, направленной вдоль линии центров коробки и шайбы. В момент времени $t=t_0$ шайба ударяется о коробку. Считая все удары абсолютно упругими, найти зависимости от времени положения центра шайбы $x_ш$ и ее скорости $v_ш$ относительно стола, начиная с момента t_0. Построить графики $x_ш(t)$ и $v_ш(t)$.

2. К концу однородной палочки массы 4,4 г подвешен на невесомой нити однородный алюминиевый шарик радиуса 0,5 см. Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь такого положения равновесия, при котором погруженной в воду окажется половина шарика. Определить, в каком отношении делится длина палочки точкой опоры. Плотность алюминия $2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды 10^3 кг/м^3. Силами поверхностного натяжения на границе шарика и воды пренебречь.

3. Две жестко скрепленные в виде буквы Г однородные палочки одинаковой длины с массами m_1 и m_2 образуют прямой угол и лежат на шероховатой горизонтальной поверхности. Систему тянут с помощью нити, прикрепленной к вершине угла и параллельной поверхности. Какой угол α составляет нить с палочкой массы m_1?

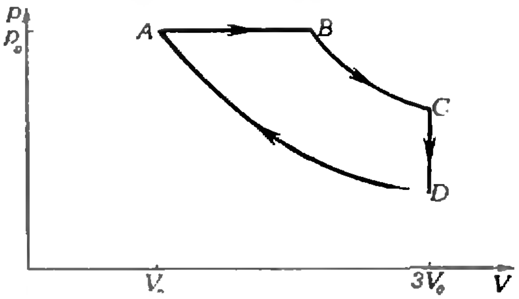
4. К проволочному каркасу в виде тетраэдра в двух вершинах подключено постоянное напряжение U. Сопротивление каждого ребра равно R. Исключение какого из ребер каркаса приведет к наибольшему изменению тока I в цепи? Чему равно это максимальное изменение тока ΔI_{max}? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

9 класс

1. Две жестко связанные однородные палочки одинаковой длины с массами m_1 и m_2 образуют букву Т, лежащую на шероховатой горизонтальной поверхности (палочка массы m_2 прикреплена к середине палочки массы m_1). Систему тянут параллельно поверхности нитью, привязанной к концу палочки массы m_1. Какой угол α составляет нить с палочкой массы m_1?

2. Три небольших тела масс $3m$, $4m$ и $5m$ закреплены в трех различных точках внутри гладкой неподвижной полусферической чаши радиуса R. Большой круг чаши горизонтален. В некоторый момент времени тела отпускают. Все соударения абсолютно неупругие — тела слипаются и далее движутся вместе. Какое максимальное количество теплоты может выделиться в этой системе? При каком начальном расположении тел это осуществится?

3. Состояние идеального газа изменяется по циклу $ABCDA$, изображенному на рисунке.



В таблице указаны состояния этого газа и их параметры, соответствующие точкам цикла A, B, C, D (начальное состояние изображается точкой А).

	p	V	T
A	p_0	V_0	T_0
B	p_0	?	$2T_0$
C	?	$3V_0$	$2T_0$
D	?	$3V_0$	T_0

Определить недостающие параметры состояния газа в точках В, C и D и заполнить таблицу.

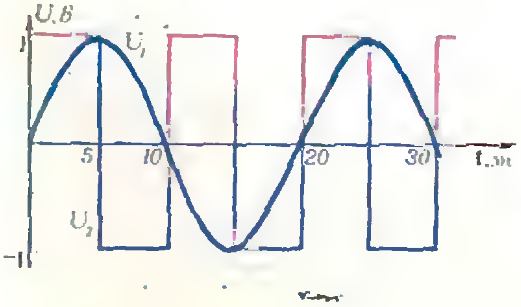
4. В цилиндре под невесомым поршнем содержится азот. Его масса 2,8 г, температура

27 °C и давление в 2 раза больше атмосферного. При закрепленном поршне цилиндр охлаждали, пока давление в нем не сравнялось с атмосферным. Затем поршень освободили и нагрели цилиндр до первоначальной температуры. Определить работу, совершаемую газом. Молярная масса азота 28 г/моль, универсальная газовая постоянная 8,3 Дж/(моль · К).

5. Три конденсатора, емкости которых равны C_1, C_2 и C_3, одними концами соединены вместе в точке O. Потенциалы других концов равны: φ_1 (у конденсатора C_1), φ_2 (у C_2) и φ_3 (у C_3). Определить потенциал общей точки φ_O.

10 класс

1. На пластины горизонтального отклонения луча осциллографа подается напряжение $U_1(t)$, а на пластины вертикального отклонения луча — напряжение $U_2(t)$, графики $U_1(t)$ и $U_2(t)$ изображены на рисунке.



Чувствительность осциллографа по каналам горизонтального и вертикального отклонений одинакова и равна 2 см/В. Нарисовать траекторию луча на экране. Описать подробнее с точки зрения относительной яркости наблюдаемую картину.

2. Сиденье качелей привязано двумя веревками к столбам, длина одной веревки l_1, второй l_2, и первая привязана на b выше другой (веревки прямолинейны). Расстояние между столбами качелей равно a, причем $l_1^2+l_2^2=a^2+b^2$. Найти период малых «качаний» на таких качелях. Размерами человека и сиденья можно пренебречь по сравнению со всеми указанными выше длинами.

3. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем с напряженностью $6 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно линиям напряженности. Определить величину и направление индукции B магнитного поля, которое надо создать в этой области для того, чтобы электрон пролетел ее, не испытывая отклонений. Энергия электрона $1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж, масса $9 \cdot 10^{-31}$ кг.

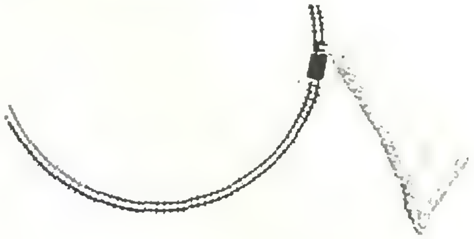
4. Контур состоит из последовательно соединенных конденсатора емкости C, катушки индуктивности L, источника постоянного напряжения с ЭДС, равной $\mathscr{E}$, и ключа К. В начальный момент конденсатор заряжен до напряжения U_0, ключ К разомкнут. Определить, до какого максимального напряжения перезарядится конденсатор после замыкания ключа.

5. Предположим, что ваш собеседник носит очки. Сможете ли вы определить, какой у него дефект зрения — дальнозоркость или близорукость? Естественно, как воспитанный человек, вы при этом не станете просить собеседника дать вам примерить его очки и вообще не будете заводить о них разговор.

I Городской тур

8 класс

1. При движении паровоза по закруглению радиуса $R=200$ м дует горизонтально направленный ветер. Форма дымового следа изображена на рисунке (вид сверху).



Определить, используя рисунок, скорость ветра, если известно, что она постоянна, и скорость паровоза равна 36 км/ч.

2. Из трех точек А, В и С, находящихся на наклонной площадке в поле силы тяжести, одновременно бросают три тела. Известно, что: а) если не бросать тело С, то два других столкнутся в процессе движения; б) если не бросать тело В, то тела А и С также столкнутся, но раньше, чем в первом случае. Столкнутся ли тела В и С, если не бросать тело А? Точки А, В и С в начальный момент расположены на одной прямой, причем В между А и С. Считать, что до поверхности Земли тела долететь не успевают.

3. На шероховатый выступ в форме цифры 1, скругленный сверху, кладут однородный по длине мягкий канат, причем на наклонной части выступа оказывается кусок длины l. При какой минимальной длине вертикально свисающей части канат начнет скользить вправо? Коэффициент трения равен μ. Выступ (канат) образует угол α.

4. Два одинаковых проволочных резистора А и Б соединены параллельно, и последовательно с ними включен амперметр и источник тока. Средняя точка резистора А соединена с подвижным контактом, касающегося резистора Б. Ток, протекающий через амперметр, при неизменном напряжении источника тока зависит от положения подвижного контакта. Во сколько раз максимальный ток амперметра превосходит минимальный? (Сопротивлением амперметра, соединительных проводов и внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.)

9 класс

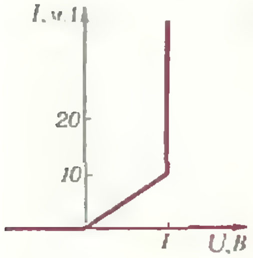
1. В теле массы M сделан канал АБ, все точки которого лежат в одной и той же вертикальной плоскости. Разность высот между точками А и Б канала равна h. Это тело стоит на гладкой горизонтальной поверхности, а другое тело массы m сначала покоится в верхней точке А канала, а затем соскальзывает по каналу. С какой скоростью будет двигаться тело массы M, когда тело массы m покинет канал? (Скорость второго тела при выходе из канала горизонтальна.)

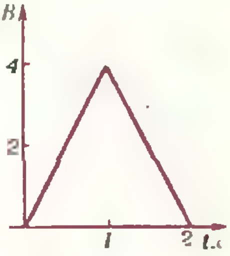
2. Тонкостенный заполненный газом цилиндр массы M, высоты H и площадью основания S плавает в воде. В результате потери герметичности в нижней части цилиндра глубина его погружения увеличилась на ΔH. Каково было начальное давление газа в цилиндре? Атмосферное давление p_A, температура не меняется.

3. Известно, что если обычную воду подсолить, то температура ее кипения станет выше. Как при этом изменится плотность насыщенных водяных паров при температуре кипения?

4. Равномерно заряженная по длине полуокружность радиуса R находится в поле заряда q, равномерно распределенного по поверхности сферы вдвое меньшего радиуса. Определить силу, действующую на сферу, если суммарный заряд полуокружности равен q, и их центры совпадают.

5. Диод соединен последовательно с сопротивлением $R=100$ Ом. Идеализированная вольтамперная характеристика диода приведена на рисунке. На вход схемы подается меняющееся во времени напряжение U (см. рисунок).





Как будет меняться напряжение на сопротивлении R от времени?

10 класс

1. Почему при повороте автомобиль «приседает» на внешние, по отношению к окружности поворота, колеса?

2. Силовая линия выходит из положительного заряда $+q_1$ под углом α к прямой, соединяющей его с отрицательным точечным зарядом $-q_2$. Под каким углом β к той же прямой эта силовая линия войдет в заряд $-q_2$?

3. Вторичная обмотка идеального трансформатора с коэффициентом трансформации $1:n$ замкнута на катушку индуктивности L. Частота тока в первичной обмотке 50 Гц. Найти сдвиг фаз между напряжением и током в первичной обмотке трансформатора. Как изменится сдвиг фаз, если в первичную обмотку включить резистор R?

4. Батарея из двух последовательно соединенных конденсаторов емкости C каждый заряжена до разности потенциалов U и в начальный момент времени подключена к катушке индуктивности L, так что образовался колебательный контур. Спустя время τ один из конденсаторов пробивается, и сопротивление между его обкладками становится равным нулю. Найти амплитуду колебаний заряда после пробоя.

5. В днище судна сделан стеклянный иллюминатор для наблюдения за морскими животными. Диаметр иллюминатора равен 40 см и много больше толщины стекла. Какова площадь обзора дна из такого иллюминатора? Показатель преломления стекла 1,6; воды 1,4; расстояние до дна 5 м.

Публикацию подготовил *С. С. Кротов*

Свердловская областная олимпиада по математике 1982/83 года

Школьный тур

7 класс

1. Около каждой вершины треугольника поставлено некоторое число. Напишите возле каждой стороны этого треугольника число, равное сумме чисел, стоящих у ее концов. Теперь каждое число, стоящее около вершины сложите с числом, стоящим около противоположной стороны. Доказать, что все три полученные суммы будут равны.

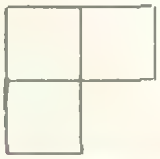
2. Доказать, что $x^4-x+1>0$.

3. Доказать, что средняя линия треугольника делит пополам пересекающую ее медиану.

4. Доказать, что для любого натурального числа n дробь $(n^2+3n+3)/(n+1)$ несократима.

8 класс

1. На листе клетчатой бумаги 1982×1982 в каждой клетке написано число. Известно, что в каждых трех клетках, накрываемых фигурой



сумма чисел равна 3. Доказать, что все числа равны 1.

2. Девять одинаковых книг стоят 11 рублей с копейками, а тринадцать таких книг стоят 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна книга?

3. Внутри треугольника ABC на медиане AM лежит точка O. Доказать, что площади треугольников AOC и AOB равны.

4. Пусть p — простое число. Сколько существует натуральных чисел, меньших p^2 и взаимно простых с p?

9 класс

1. Дано 110 различных натуральных чисел. Доказать, что найдутся 2 числа, совпадающие не менее чем в двух разрядах.

2. Доказать, что $a+b\leqslant4$, если $a^2+b^2\leqslant4$.

3. Пусть средние линии четырехугольника делят его площадь пополам. Доказать, что этот четырехугольник — параллелограмм.

4. Доказать, что в натуральном ряду сразу после простого числа, большего трех, не может стоять точный квадрат.

10 класс

1. Придумать набор из 1982 попарно различных целых чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_{1982}\}$, чтобы множество сумм $S=\{a_1+a_2, a_1+a_3, \ldots, a_{1981}+a_{1982}\}$ содержало как можно меньше различных чисел. Доказать, что найденное вами S не может содержать меньшее количество различных чисел.

2. Доказать, что квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ можно представить в виде разности двух монотонно возрастающих многочленов.

3. Прямоугольник $ABCD$ лежит внутри четверти круга с центром в точке A радиуса 1. Какова наибольшая возможная площадь прямоугольника?

4. Пусть $2a$, $a+b$, c — целые числа. Доказать, что для любого целого x число ax^2+bx+c — также целое.

Районно-городской тур

(по районам области и г. Свердловску)

7 класс

1. Имеется два ведра емкостью 9 и 11 литров. Как с их помощью налить из озера в большее из них 10 литров воды?

2. Доказать, что если

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

то $(a^3+b^3)(a^3+c^3)(b^3+c^3)=0$.

3. Из точки O выходят два луча. Проверить, пользуясь только циркулем, равняется ли угол между ними 72°.

4. Найти все натуральные числа m и n, удовлетворяющие равенству $2^m+1=n^2$.

8 класс

1. Пусть n и k — натуральные числа $(k<n)$, $[a; b]$, $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, ..., $[a_n; b_n]$ — отрезки на числовой прямой. Известно, что число отрезков $[a_i; b_i]$, содержащих точку $x \in [a; b]$, равно k для любой точки $x \in [a; b]$. Доказать, что при любом $i=1, 2, 3, \ldots, n$ $[a; b] \subset [a_i; b_i]$. (Предполагается, что для любого i $[a; b] \cap [a_i; b_i]$ непусто.)

2. Доказать, что $a^4+b^4 \geqslant 1/8$, если $a+b \geqslant 1$.

3. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике сумма длин диагоналей больше суммы длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

4. Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются квадратами некоторых натуральных чисел. Докажите, что число n делится на 8.

9 класс

1. Роща имеет форму круга диаметром 100 м. Расстояние между любыми двумя деревьями в ней больше 10 м. Доказать, что в роще не больше 121 дерева.

2. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^2=2, \\ x^2+xy+y^2-y=0 \end{cases}$$

не имеет решений в действительных числах.

3. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины диагоналей AC и BD. Выразить вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$.

4. Найти четырехзначное натуральное число, у которого две первые и две последние цифры совпадают и которое является квадратом натурального числа.

10 класс

1. Дан числовой интервал $]a; b[$ и семейство интервалов $]a_1; b_1[$, $]a_2; b_2[$, ..., $]a_n; b_n[$, вложенных в $]a; b[$. Известно, что для любой точки $x \in]a; b[$ число интервалов $]a_i; b_i[$, содержащих ее, нечетно. Доказать, что n нечетно.

2. Доказать тождество

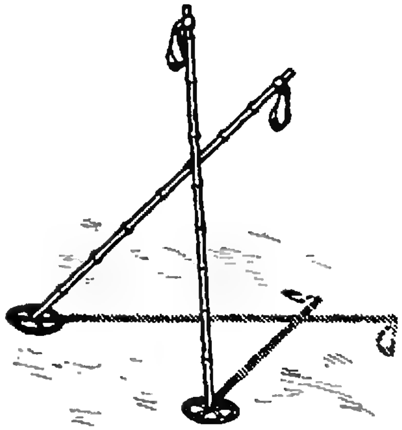
$$\frac{1}{\cos 0 \cos x}+\frac{1}{\cos x \cos 2x}+\ldots+\frac{1}{\cos 9x \cos 10x}=\frac{\operatorname{tg} 10x}{\sin x}.$$

3. Указать, каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять выпуклые четырехугольники единичной площади, сумма диагоналей у которых минимальна.

4. Найти все натуральные числа m, n и k, удовлетворяющие равенству $2^m+1=n^{k+1}$.

Публикацию подготовил
А. Г. Гейн

Лыжи — летом



При помощи теней определите, соприкасаются ли эти лыжные палки.

Квадратный трехчлен

6. Условиям удовлетворяют следующие пары чисел: $\{p=-2,\ q=-1\}$ и $\{p=1,\ q\leqslant 1/4\}$. Указание. Из существования корней следует неотрицательность дискриминантов, значит, $q\leqslant 1/4$. Из формул Виета для первого уравнения $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$ для второго (числа x_1+1 и x_2+1 — его корни) $x_1+x_2+2=p^2$, $(x_1+1)(x_2+1)=pq$. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} p^2+p-2=0, \\ (1-p)(q-1)=0, \end{cases}$$

которую следует решить, учитывая условие $q\leqslant 1/4$.

7. Указание. Из формулы Виета следует, что абсцисса середины отрезка, по которому прямая $y=kx+d$ пересекает параболу, равна $(b-k)/2a$, то есть не зависит от d.

8. $c<0$. Указание. Так как $f(-1)=a-b+c<0$ и корней нет, график целиком лежит в нижней полуплоскости и $f(0)=c<0$.

9. Указание. Нарисуйте график в двух случаях $a>0$ и $a<0$ и заметьте, что знаки $f(x_0)$ и a — противоположны.

10. $c<0$. Указание. У $f(x)$ либо нет корней, тогда $f(0)=c<0$ (ибо $a<0$), либо оба корня отрицательны, тогда $0\notin[x_1, x_2]$, откуда снова $f(0)=c<0$.

11. Указание. Если оба уравнения не имеют корней, то $p_i^2-4q_i<0$, $i=1, 2$. Складывая эти два неравенства и воспользовавшись условием, можно получить противоречие в виде $(p_1-p_2)^2<0$.

12. а) Не может; б) может. Указание. Числа $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$ являются корнями уравнения $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-2x-1=0$.

13. Указание. Подставляя в уравнение корень вида s/r, $s, r\in Z$, $r\neq 1$ (где дробь s/r — несократима), получаем $s^2=-(ps+qr)r$, откуда следует, что s делится на r — противоречие!

14. Пусть x_0 — общий нецелый корень исходных уравнений. Это означает, что $x_0^2+p_1x_0+q_1=0$, $x_0^2+p_2x_0+q_2=0$. Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$x_0(p_1-p_2)+q_1-q_2=0. \quad (*)$$

Рассуждая от противного, предположим, что $p_1\neq p_2$. Тогда из равенства (*) следует, что корень x_0 является числом рациональным, так как $x_0=\dfrac{q_2-q_1}{p_1-p_2}$. Но в задаче 13 доказано, что в этом случае x_0 — обязательно целый корень, а это противоречит условию данной задачи. Следовательно, $p_1=p_2$, а тогда из равенства (*) вытекает, что $q_1-q_2=0$, то есть $q_1=q_2$.

Характерные ошибки на экзаменах по физике

1. Характерный неправильный ответ: 25 км/ч. Правильный ответ: 24 км/ч.

2. Характерный неправильный ответ: в первом случае работа больше. Правильный ответ: в обоих случаях работа одинакова.

3. Характерный неправильный ответ: перельется. Правильный ответ: не перельется.

4. Характерный неправильный ответ: не может. Правильный ответ: может, если ток через элемент течет в направлении, противоположном направлению тока, создаваемого самим элементом.

5. Характерный неправильный ответ: можно, для этого надо наклонить зеркало под углом 45° к плоскости листа. Правильный ответ: нельзя, потому что изображение, создаваемое плоским зеркалом, всегда мнимое.

Лыжи летом

(см. с. 61)

Не соприкасаются. Действительно, прямая, проходящая через точку пересечения теней параллельно прямым, соединяющим концы палок с их тенями, не проходит через точку, где одна палка закрывает другую.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. Пять раз. Перенумеруем лампочки и запишем номера зажженных. Затем начнем последовательно переключать выключатель, каждый раз записывая номера тех из них, которые при этом загораются. Перегоревшими окажутся те лампочки, номера которых ни разу не будут нами записаны после пяти поворотов переключателя.

2. 125 и 375. Запишем условие задачи в виде равенства:

$$100a+10b+c=(10b+c)c.$$

Очевидно, что $c\neq 0$. Перепишем равенство в виде

$$100a=(10b+c)(c-1)$$

Левая часть делится на 25, следовательно, и правая должна делиться на 25. Но если $c-1$ делится на 5, то $10b+c$ уже не делится на 5, что невозможно. Значит, $10b+c$ делится на 25, что возможно, лишь когда это число равно 25 или 75 (вспоминаем, что $c\neq 0$), то есть возможны лишь числа 125 и 375.

3. Когда мы пишем числа в кружочках, то число, стоящее в средней клетке, входит во все четыре суммы, числа, стоящие у середин сторон, входят каждое в две суммы, а угловые числа — каждое лишь в одну сумму. Поэтому, чтобы получить наибольшее окончательное число, нужно в центральную клетку поставить самое большое число — 9, а угловые — самые маленькие числа 1, 2, 3, 4, а в остальные — числа 5, 6, 7, 8. В результате получаем число 49/8.

4. Разлив можно провести, например, в соответствии со следующей таблицей:

Бочка		18	14	14	10	10	6	6	6	2	2	9	9	5	5	1	8	8	4	11	11	7	7	3	3	10	10	6	6
черпак		0	4	0	4	0	4	1	0	4	2	2	0	4	0	4	4	0	4	1	0	4	0	4	2	2	0	4	0
ВЕДРО	1	0	0	0	0	4	4	4	5	5	7	7	7	7	7	7	0	4	4	7	0	1	1	5	5	7	0	2	6
ведро	2	0	0	4	4	4	4	7	7	7	7	0	2	2	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

5. Днем, если в комнате не включено освещение, предметы, находящиеся в ней, освещены гораздо слабее, чем на улице. С улицы мы наблюдаем предметы в комнате через занавеску, освещенность которой больше освещенности предметов. Из комнаты мы видим предметы на улице через почти неосвещенную занавеску, потому что внутренняя сторона занавески освещена очень слабо. Заметьте, что вечером при включенном освещении в комнате эффект будет обратный — с улицы будет видно хорошо все происходящее в комнате.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. $$\begin{array}{r} +\,6823 \\ 6823 \\ \hline 13646 \end{array}$$

2. Пусть шестизначное число будет A, а его первая цифра — a. Если убрать первую цифру, полученное число запишется как $A-100\,000\,a$. Число, полученное из него приставлением сзади цифры a, будет $10(A-100\,000\,a)+a$ или $10\,A-999\,999\,a$. Но $999\,999=7\cdot 11\cdot 13\cdot 37\cdot 27$. Поэтому если число A делилось на какой-либо из этих сомножителей, то на него будет делиться и новое число.

3. Один из возможных способов решения задачи представлен на рисунке 1.

4. Первая комната — 7×3, вторая — 5×3. Обозначим длины сторон первой комнаты через x и y. Тогда из условия задачи $xy=2(x+y)+1$. Отсюда

$$y=\frac{2x+1}{x-2}=2+\frac{5}{x-2}.$$

Чтобы y было целым при целом x, нужно чтобы $x-2=1$ или $x-2=5$. В первом случае получаем $x=3$, $y=7$, и во втором случае $x=7$, $y=3$. Аналогично для второй комнаты.

5. Врач ответил, что холодное зеркальце во рту запотевает, так как на нем конденсируются водяные пары, выдыхаемые пациентом. Если зеркальце нагреть до температуры человеческого тела или выше, то конденсация не будет происходить.

Степа Мошкин путешествует
(см. «Квант» № 8)

Первый вопрос Петра Ивановича. То, что белье на веревке на берегу и флаг над школой висят неподвижно, означает, что погода безветренная. Так как плот перемещается относительно воздуха, на плоту возникает небольшой ветерок, поэтому флаг на плоту полощется.

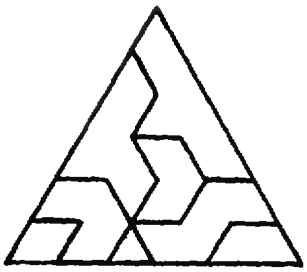


Рис. 1.

Второй вопрос Петра Ивановича. Все плывущие по реке тела перемещаются относительно берегов со скоростью, равной скорости течения реки.

Тот факт, что ветка, плывущая у берега, отстает от плота, означает, что скорость течения у берегов меньше, чем на середине реки. Это связано с тем, что между водой и дном реки существует трение. Чем больше глубина, тем меньше сказывается это трение на скорости течения воды у поверхности.

1. Плот плыл по отношению к берегам со скоростью течения, равной 4 км/ч.

2. Течение несло плот и Гобоя с одной и той же скоростью. Значит, Гобой приближался к плоту со скоростью 5 км/ч.

3. Скорость Гобоя относительно берегов складывается из скорости течения реки и «собственной» скорости Гобоя относительно неподвижной воды. Следовательно, относительно берегов Гобой плыл со скоростью 9 км/ч.

4. 1 км/ч.

5. 5 км/ч. Этот ответ может показаться неверным. Однако он верен. Представьте, что вы идете по движущемуся вагону. Идете ли вы по ходу поезда или в противоположном направлении, скорость ваша по отношению к вагону одна и та же. Реку можно считать своеобразным вагоном, везущим пассажиров и собаку. При этом пассажиры сидят неподвижно, и собака бежит к ним по вагону со скоростью 5 км/ч.

Степина задача про Гобоя. На рисунке 2 $|AB|=50$ м; $|AC|=v\cdot t=\frac{4000}{3600}\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 36\text{с}=40$ м; $|BC|=\sqrt{|AB|^2-|AC|^2}=30$ м. Следовательно, Гобой удалялся от берега со скоростью $u=\frac{|BC|}{t}=\frac{30}{36}\frac{\text{м}}{\text{с}}=3\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

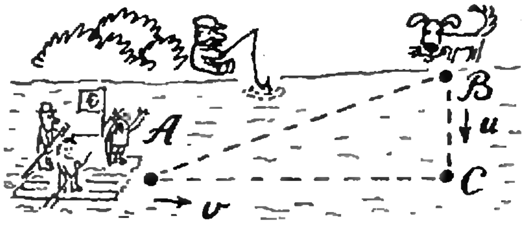


Рис. 2.

6. Скорость света равна 300 000 км/с. На прохождение расстояний, с которыми имели дело путешественники, свету понадобится ничтожно малое время. Поэтому можно считать, что такие малые расстояния свет проходит мгновенно.

7. Нет, так как работа в любом случае равна потенциальной энергии, которой обладает Ваня, сидя на суку.

8. До преграды звук шел 1/2 с, скорость звука — приблизительно 330 м/с; следовательно, расстояние до преграды — примерно 115 м.

Последний вопрос Петра Ивановича. Способ приближенного определения размеров Луны

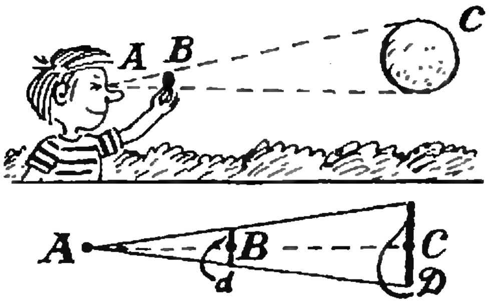


Рис. 3.

ясен из рисунка 3: помещая перед глазами какой-нибудь круглый предмет, добейтесь, чтобы он целиком перекрывал лунный диск. Измерив расстояние AB и размер d предмета, зная расстояние AC от Земли до Луны, легко вычислить размер D Луны:

$$\frac{|AB|}{d}=\frac{|AC|}{D}\Rightarrow D=\frac{|AC|d}{|AB|}.$$

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 6)

Задание 11 (М. Кляцкин, 1924 г.). **1. Л:b3! cb 2.g6! Ф:g8 3.Kpc5 d6+ 4.Kpd4 d5 5.Kpc5 d4 6.Kp:d4 Kpe8 (Фh8)** 7.f7 **(g7)+** и белые выигрывают.

Задание 12 (Г. Заходякин, 1939—40 гг.). **1.g7 h2 2.ghФ h1Ф+ 3.Kpg3! Фg1+ 4.Kpf4 Фf2+ 5.Kpg4 Фg2+ 6.Kpf5! Фf3+ 7.Kpe6 Фd5+ 8.Kpf6 Фd4+ 9.Kpf7 Ф:h8 10.Cd8 Kpd7 11.c8Ф+! Kp:c8 12.Cf6 h6 13.g6!** и черный ферзь в капкане.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
Т. Н. Кольченко, А. М. Кошевой, Н. С. Кузьмина, Ю. П. Мартыненко, И. В. Мудрова, Э. В. Назаров, Н. А. Полянская, Б. М. Скрылев, Е. К. Тенчурина
Фото: А. Н. Виленкин, С. Н. Ермакова, В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 18.7.83. Подписано к печати 12.8.83.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,99 Т-17646
Цена 40 коп. Заказ 1907. Тираж 166 567 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

РЕШИЛ ЖРЕБИЙ

Совсем недавно одновременно завершилось так много крупных шахматных состязаний, что мы просто не могли остаться в стороне от них. В прошлый раз сообщалось о победе Каспарова в его четвертьфинальном матче претендентов. А сейчас вам, наверное, уже известны результаты двух полуфинальных матчей Г. Каспаров — В. Корчной и В. Смыслов — З. Рибли. Любопытно, что впервые в истории борьбы за мировую корону в «борьбу» вмешался жребий. Матч между Смысловым и Хюбнером дал равный счет 5:5, не изменили положение и четыре дополнительные встречи, закончившиеся вничью. Победителя должен был определить жребий. В ход была пущена рулетка — Смыслов поставил на красный цвет, Хюбнер — на черный. Западногерманский гроссмейстер не выдержал испытания и уехал домой. Смыслов мужественно ждал решения судьбы и лично присутствовал на жеребьевке.

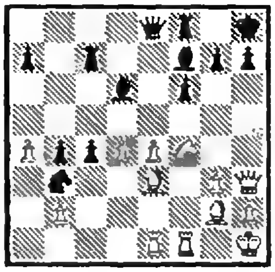
Те, кто видел рулетку (упрощенный вариант ее, под названием «Карусель», продается в магазинах игрушек), знают, что на игровом поле имеются две ничейные зоны, называемые «зеро» (на них записан ноль). Если шарик попадает в эти зоны, то никто не выигрывает. Вероятность такого события очень мала, например, в «Карусели» она равна 1/50 (ноль записан на двух зонах из 100), и все же...

Наверное, вы уже догадались, что, после того как рулетка была закручена и остановилась, шарик оказался в нейтральной зоне, и счет стал $7\frac{1}{2}:7\frac{1}{2}$! Еще одна дополнительная «партия», и на этот раз шарик выбирает красный цвет. Смыслов в полуфинале!

Хотя читатели «Кванта» по своему возрасту должны болеть за молодых шахматистов, надо отдать должное 62-летнему гроссмейстеру, показавшему великолепный образец творческого долголетия.

Посмотрите, с каким юношеским задором провел Смыслов заключительную атаку в четвертой партии матча.

В. Смыслов — Р. Хюбнер



27.e5! fe 28.de C:e5 29.Ce4 g6 30.C:g6 Фa8+31. Kpg1 Cg8 32.C:h7 Л:h7 33.Kg6+Kpg7 34.Фd7+Лf7 35.Л:f7+C:f7 36.K:e5 Фd5 37.Ф:a7 Лh5 38. K:f7 Ф:f7 39.Cd4+K:d4 40.Ф:d4+Kph7 41. Фe4+ Kpg7 42.Лf1 Фa7+ 43. Лf2 Фc5 44.Kpf1 c3 45.bc bc 46.Фe6 Фg5 47.Лf7+Kph8 48.Фc8+. Черные сдались ввиду неизбежного мата.

Напомним полуфинальные пары претенденток: Н. Александрия — И. Левитина, Н. Иоселиани — Л. Семенова. Таким образом, дальнейший розыгрыш шахматной короны среди женщин вновь стал нашим внутренним делом.

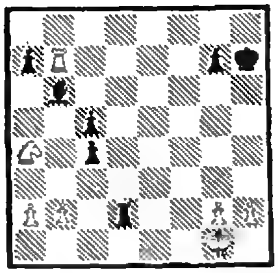
Пока претенденты выясняют, кто из них достойнее, чемпион мира принял участие в юбилейном, 50-м чемпионате страны. В начале турнира А. Карпов, как это часто с ним бывает, держался в тени, но затем увеличил скорость и уверенно завоевал золотую медаль.

А. Карпов — Е. Геллер
Испанская партия

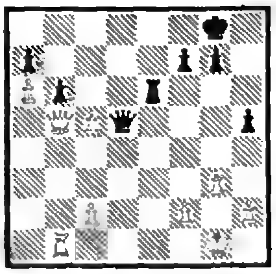
1.e4 e5 2.Kf3 Kc6 3.Cb5 a6 4.Ca4 Kf6 5.0—0 Ce7 6.Лe1 b5 7.Cb3 0—0 8.d3 Cb7 9.Kbd2 h6 10.Kf1 Лe8 11.Ke3 Cf8 12.Cd2 d6 13.a4 Kd7 14.c3 Ke7 15.Фb1 Kc5 16.Cc2 d5. Каждый шахматист с детства знает, что если белые робко действуют в испанской партии, то черные контрударом d6—d5 перехватывают инициативу. Но данная партия представляет собой исключение из правил. Не успели черные провести это программное продвижение, как их позиция стала на глазах разваливаться. **17.ed K:d5 18.Kg4!** Конь как бы повис в воздухе, ведь белая пешка «h» не поддерживает его по старинке. **18...Kf4 19.C:f4 ef 20.Kge5 Cd6 21.d4.** 13 ходов ждала белая пешка «d» своего часа. Теперь, когда она заняла положенное ей место, даже ферзь на b1 оказался при деле, одна из угроз 22.Ch7+Kph8 23.K:f7×.

21...C:e5 22.K:e5 Фg5 23.f3 Лad8 24.ab ab 25.Лa7! Cd5 26.Л:c7 Ka6 27.Лa7 Kc5 28. Ch7+Kpf8 29.b4 Ka4 30.Фd3 Cc4 31.Ф:c4! Эффектный финал: белые жертвуют ферзя, а черные в ответ сдаются.

Конкурсные задания



17. Ход черных. Оцените позицию.

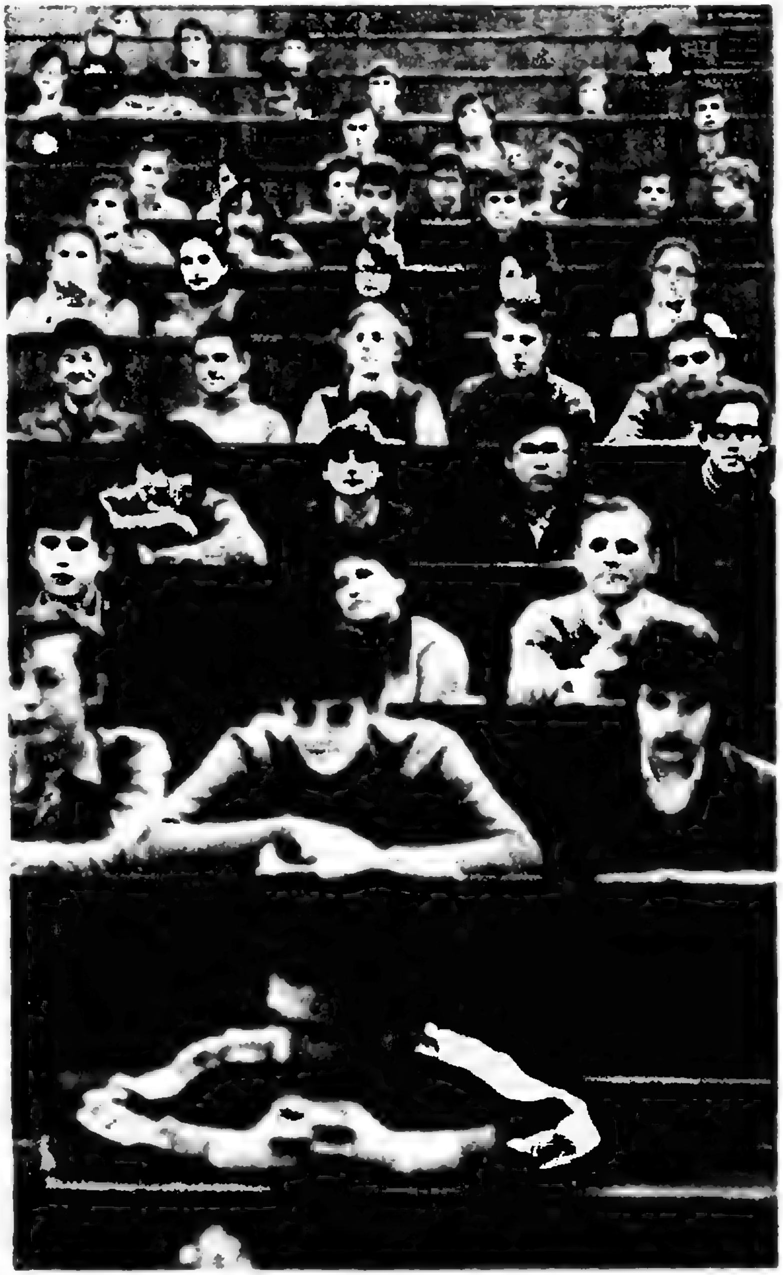


18. Ход белых. Оцените позицию.

Срок отправки решений — 25 ноября 1983 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс», задания 17, 18»).

ВСТРЕЧА С ЧИТАТЕЛЯМИ

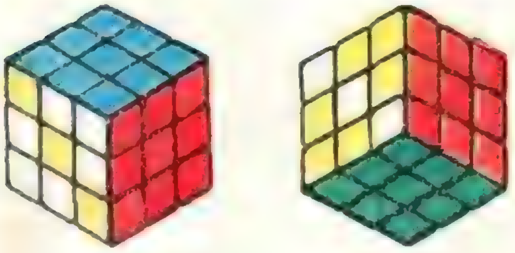
На физическом факультете МГУ состоялась встреча редколлегии и редакции нашего журнала с учащимися физико-математической школы-интерната № 18 при МГУ. На встрече выступил главный редактор «Кванта» академик И. К. Кикоин. Он рассказал о развитии физики в СССР, о том, как проблемы преподавания физики и математики в школе, а также перестройка школьного курса логически привели к необходимости создания в нашей стране специализированного научно-популярного журнала для школьников. Таким журналом и стал наш «Квант». Затем выступали школьники. Круг интересующих их вопросов оказался очень большим: что нового в астрофизике, как решается проблема управляемого термоядерного синтеза, как самому сделать лазер для домашней лаборатории и т. д. Были высказаны пожелания увидеть в «Кванте» статьи по теории относительности, квантовой механике, нелинейной оптике, а также по философским проблемам физики и психологии научного творчества. Пожелания наших читателей будут учтены при подготовке очередных номеров журнала.



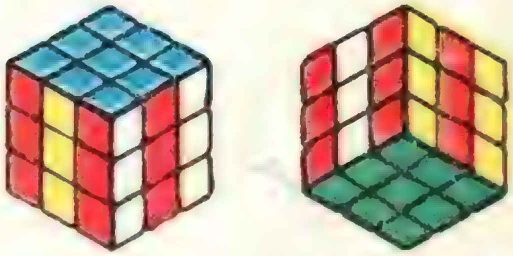
Цена 40 коп.
Индекс 70465

Если вы уже научились собирать кубик Рубика (один из алгоритмов сборки приводится в статье «Кубик в картинках» в этом номере), можно попробовать свои силы в составлении симметричных узоров на его поверхности, например тех, что приводятся на этой странице обложки. В принципе это не так уж трудно, но если вам во всех случаях (кроме одного) удастся уложиться (исходя из «правильного» состояния) в 40 «ходов» — поворотов граней, можете считать себя «гроссмейстером кубика». В исключительном же случае и 1000 ходов не хватит, потому что — да не обидится на нас читатель — один из изображенных нами узоров получить вообще невозможно. (Обнаружить его вам поможет статья «Математика волшебного кубика» — «Квант», 1982, № 8.) Решения будут опубликованы в следующем номере журнала. Если вам удастся найти более короткие решения, пришлите их в редакцию.

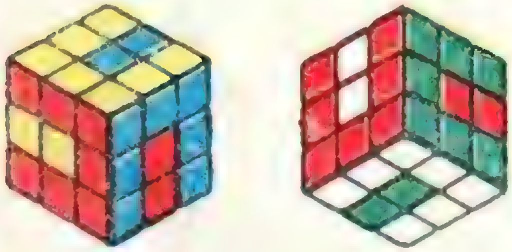
Необходимое пояснение: каждый узор показан с двух сторон, так что видны все шесть граней кубика. Исходная расцветка кубика такова: верхняя грань — синяя, нижняя — зеленая, передняя — желтая, задняя — белая, правая — оранжевая, левая — красная.



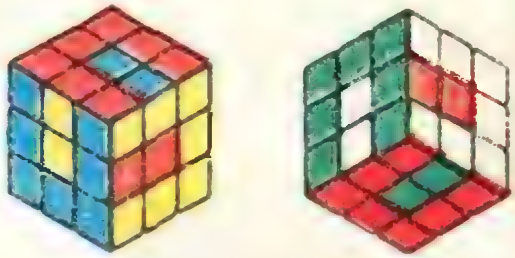
Зигзаг



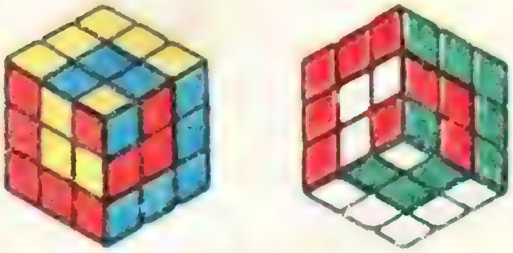
Полосы



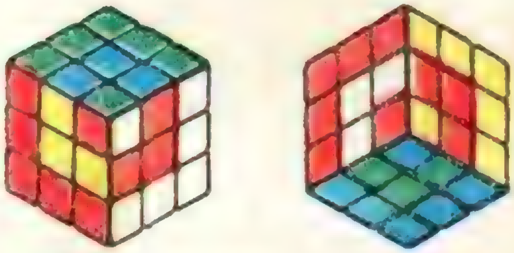
Тройные крюки



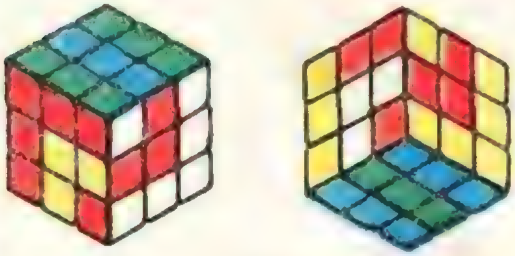
Шесть П



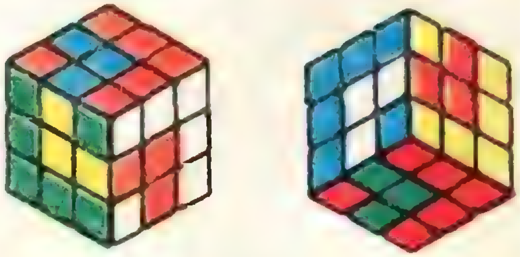
Кольца



Потусторонние кольца



Змея



Червяк

НОМЕР
10

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант 10 1983

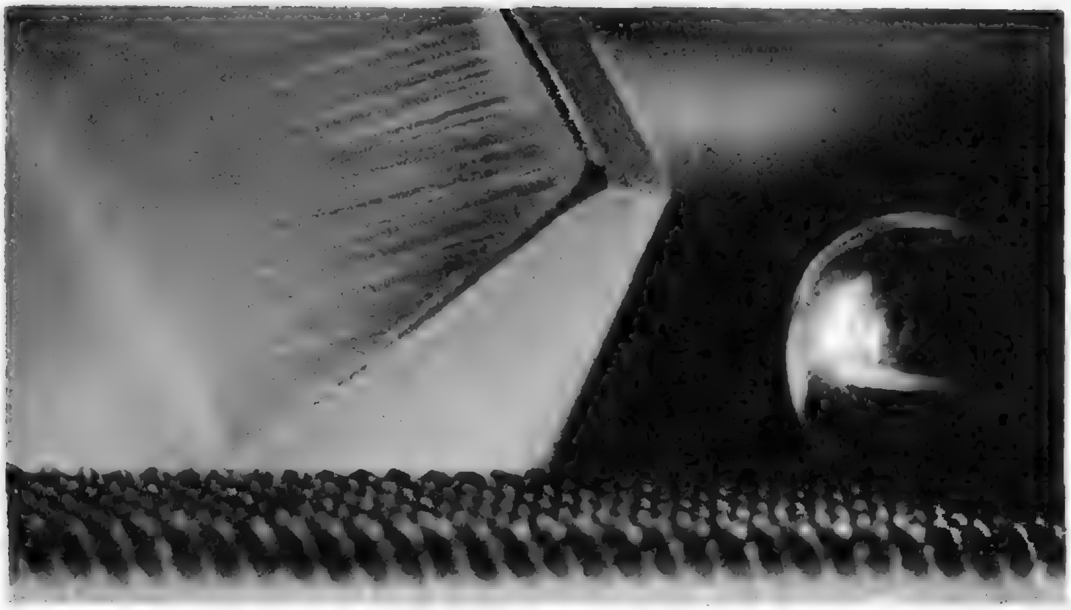
Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ	IN THIS ISSUE
2	*Л. А. Фальковский.* Физика поверхности	*L. A. Falkovski.* Physics of surfaces
9	*Л. Г. Асламазов.* Неинерциальные системы отсчета	*L. G. Aslamazov.* Non-inertial reference systems
17	*С. Г. Гиндикин.* Леонард Эйлер (к 200-летию со дня смерти)	*S. G. Gindikin.* Leonard Euler (200 years since his death)
	Новости науки	**Science news**
25	*А. В. Бялко.* Изменение фигуры Земли и ее вращения	*A. V. Byalko.* Changes in the Earth's shape and its rotation
	Геометрическая страничка	**Geometric page**
26	Прямые на кривой поверхности	Straight lines on curved surfaces
	Математический кружок	**Mathematics circle**
28	*А. Г. Гейн.* Перед школьной олимпиадой	*A. G. Gein.* Before the school Olympiad
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
31	*Л. Б. Печерский.* $n^x = x^n$	*L. B. Pecherski.* $n^x - x^n$
32	*Я. Е. Жак.* Где ошибка?	*Ya. E. Iak.* Where is the error?
32	Физика 8, 9, 10	Rhysics 8, 9, 10
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
38	Задачи	Problems
39	*И. Л. Никольская, Н. Г. Саблина.* А если..., что тогда?	*I. L. Nikolskaya, N. G. Sablina.* And if..., what then?
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
43	Задачи М826 — М830; Ф838 — Ф842	Problems M826 — M830; P838 — P842
46	Решения задач М811 — М815; Ф823 — Ф827	Solutions M811 — M815; P823 — P827
	Игры и головоломки	**Games and puzzles**
52	*В. А. Сапронов.* Рэндзю	*V. A. Sapronov.* Renju
	Олимпиады	**Olympiads**
55	IX Всероссийская олимпиада школьников	The 9th All-Russian school olympiad
58	Призеры IX Всероссийской олимпиады школьников	Prizewinners of the 9th All-Russian school olympiad
	Информация	**Information**
59	V Московский турнир юных физиков	The 5th Moscow young physicists' contest
61	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка *(8)*	**Our cover** *(8)*
	Смесь *(16, 54)*	**Miscellaneous** *(16, 54)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Удивительный маневр *(3-я с. обложки)*	Surprising maneuver *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1983



Физика поверхности

Доктор физико-математических наук
Л. А. ФАЛЬКОВСКИЙ

Как выглядит поверхность твердого тела? Ответ на этот вопрос, пожалуй, очевиден: вид поверхности зависит от способа ее получения. Если взять кристалл и пройтись по его грани наждачной бумагой, то картинка под микроскопом будет напоминать вид горных цепей из окна самолета. А до обработки наждачной бумагой поверхность хорошего кристалла кажется нам идеально ровной, зеркальной. В действительности и на такой поверхности есть неровности, и ее зеркальность означает лишь, что размеры этих неровностей не превышают длины волны видимого света — нашего инструмента. Свет не «видит» дефектов, размеры которых малы по сравнению с его длиной волны. Подобно тому, как мы не замечаем на дороге неровностей, малых по сравнению с нашим шагом. Как обнаружить эти дефекты? Что мы увидим на поверхности при более сильном увеличении? Для того чтобы получить ответ на этот вопрос, в настоящее время разработаны разнообразные и весьма чувствительные методы исследования. Но перед тем, как рассказать о них, — несколько слов о том, зачем нужна столь детальная информация о структуре поверхности.

На первый взгляд может показаться удивительным, что в наше время космических исследований и физики элементарных частиц бурное развитие переживает столь «рядом лежащая» область науки — физика, химия и механика поверхности. Диктуется это, конечно, запросами новой техники. Поведение элементов малых размеров, используемых в микроэлектронике, в значительной степени определяется свойствами их поверхности. Проблема удержания плазмы требует выяснения механизма взаимодействия частиц и излучения с границами того объема, где плазма находится. Конструирование вакуумных насосов, а также разделение и очистка газов сталкиваются с проблемами адсорбции, то есть поглощения газа разветвленной поверхностью твердого тела. Удивительное влияние катализаторов, одно присутствие которых ускоряет течение химических реакций, безусловно связано с происходящими при этом поверхностными явлениями. И, нако-

---

Статья написана трудным языком, но в связи с тем, что проблема строения поверхности весьма актуальна, редакция решила ее опубликовать.

нец, трение. Сколько сил потратили люди, чтобы от него избавиться, а с другой стороны — чтобы его увеличить в тех случаях, когда без трения обойтись невозможно. Силы трения тесно связаны со структурой трущихся поверхностей, и этот вопрос заслуживает специального разговора.

О законах трения

Среди записей Леонардо да Винчи существует и такая: «Трение производит двойное усилие, если вес удваивается». Иными словами, сила трения F пропорциональна действующей перпендикулярно поверхности прижимающей силе (или нагрузке) N. Великий художник заметил также, что сила трения не зависит от площади соприкосновения трущихся тел. Он писал: «Трение, производимое тем же весом, оказывает равное сопротивление в начале движения, несмотря на то, что контакт может иметь разную ширину и длину». Слова «начало движения» здесь не очень существенны, а независимость трения от площади контакта подмечена верно.

Приблизительно через 200 лет, в 1699 году, эти два закона трения были вновь открыты Амонтоном, который сформулировал их следующим образом:

1) Сила трения пропорциональна нагрузке, а коэффициент трения $\mu = F/N$ приблизительно равен 1/3 для большинства тел.

2) Сила трения не зависит от площади соприкосновения тел.

Число 1/3 не надо воспринимать серьезно. Коэффициент μ равнялся 1/3 для большинства тел, бывших у Амонтона под руками.

Прошло еще 100 лет, и законы трения были снова открыты Кулоном, и теперь мы называем их законами Амонтона — Кулона. При попытке объяснить эти законы мы сталкиваемся с серьезными проблемами. Вообразим две соприкасающиеся поверхности, например, в случае, когда одно из тел находится на горизонтальной поверхности другого. Под действием веса первого тела между поверхностями появится сцепление, или адгезия. Поверхности в некотором смысле склеиваются. Интуитивно ясно, что на единицу площади контакта приходится определенная сила сцепления, а ее величина может зависеть лишь от типа соприкасающихся поверхностей. Но тогда полная сила сцепления двух тел пропорциональна площади контакта. Как же быть со вторым законом Амонтона — Кулона?

Чтобы справиться с этой трудностью, надо знать, как устроена реальная поверхность. В любом случае она довольно шероховата. Когда мы сближаем две поверхности, они приходят в соприкосновение вначале всего в нескольких точках. И даже при небольшой нагрузке N сжимающее усилие в точках контакта будет огромным. Давление в местах контакта превысит не только предел упругости $\sigma_{\text{упр}}$, но и предел текучести материалов $\sigma_{\text{т}}$. Вещество в окрестностях контактов начнет растекаться. Этот процесс остановится в тот момент, когда полная площадь реального контакта S окажется такой, чтобы выполнялось условие $\sigma_{\text{т}} = N/S$. При обычных нагрузках N площадь реального контакта S существенно меньше той площади, по которой могли бы соприкасаться рассматриваемые тела, если бы их поверхности были идеально ровными. Например, величина $\sigma_{\text{т}}$ для различных сортов стали лежит в пределах $(2-3)\cdot 10^8$ Н/м^2. Это значит, что стальной брусок массой в 1 кг соприкасается с поверхностью, на которой он находится, по площади $S = N/\sigma_{\text{т}} \approx 5\times 10^{-8}$ м^2, то есть всего 0,05 мм^2.

Для того чтобы сдвинуть одну поверхность относительно другой, надо приложить некоторое сдвиговое усилие F, которое, в соответствии с нашими интуитивными представлениями, пропорционально площади контакта (но реального!), то есть $F = cS$ (очевидно, c — сдвиговое усилие, необходимое при единичной площади контакта). Это усилие необходимо для деформации зацепляющихся и растекающихся шероховатостей. Таким образом, мы можем найти коэффициент трения:

$$\mu = F/N = cS/\sigma_{\text{т}}S = c/\sigma_{\text{т}}.$$

Действительно, коэффициент трения

не зависит ни от площади трущихся поверхностей, ни от величины нагрузки, что соответствует законам Амонтона — Кулона.

При трении двух различных тел коэффициент μ определяется отношением $c/\sigma_т$ для наиболее пластичного из них. Предел текучести $\sigma_т$, а также сдвиговое усилие c можно определить, проведя механические испытания. Определенное таким образом отношение $c/\sigma_т$ для меди, например, оказывается близко к 0,2. Это почти та 1/3, которая предсказывалась Амонтоном. Однако это раза в 3 меньше, чем современное опытное значение коэффициента трения, полученное для случая, когда медный брусок скользит по достаточно гладкой стальной поверхности. Расхождение в 3 раза не должно нас обескураживать в данном случае. Ведь мы не учли ряд факторов. Например, пластическое течение возникает вследствие как сдвиговых напряжений, так и направленных по нормали к поверхности. Современные исследования учитывают и это, и другие обстоятельства и позволяют описать не только вариации коэффициента трения при переходе от одного материала к другому, но и отклонения от законов Амонтона — Кулона для полимеров — веществ, деформацию в которых нельзя считать упругой или пластической.

Однако не будем забывать, что решающим при объяснении законов трения было предположение о шероховатой структуре поверхности. Какова же она на самом деле?

Методы изучения структуры поверхности

Идеальный инструмент для изучения поверхности — электронный микроскоп. Этот микроскоп отличается от обычного тем, что вместо лучей света в нем используются пучки электронов. Как известно, электроны обладают волновыми свойствами, но их длина волны гораздо меньше, чем у света. Это позволяет получить большее увеличение. Сравните две фотографии. Первая (рисунок 1) получена с помощью обычного оптического микроскопа и изображает «свежую» поверхность кристалла NaCl. Чистка поверхности произведена путем травления кислотой. Так избавляются от пленки «грязи», существующей практически на любой поверхности. На поверхности кристалла NaCl видна характерная рябь. Ямки возникают в тех местах, где дефекты кристаллической структуры выходят на поверхность. Образование ямок обусловлено тем, что вблизи дефектов имеются большие внутренние напряжения, ускоряющие травление. Расстояние между ямками — порядка 10^{-3} см, и его можно оценить по известному увеличению микроскопа. Вторая фотография (рисунок 2) получена с помощью электронного микроскопа. Это — поверхность кристалла платины. Увеличение здесь раз в десять больше, чем на предыдущем снимке. Видны холмы, долины и атомные террасы. Заметны и следы периодической структуры.

Периодическую структуру поверхности можно изучать методами дифракции. И опять вместо световых волн удобно использовать пучок электронов, ускоренных до энергии в 100 эВ. Это довольно медленные электроны. Их энергии не хватает на то, чтобы проникнуть в глубь вещества. Такие электроны отражаются практически лишь поверхностным слоем атомов, и внутренняя кристаллическая структура не затеняет картину. Оказалось, что очень часто симметрия в расположении атомов на поверхности отличается от объемной, то есть от той, которую мы получили бы простым срезом кристалла. Силы, действующие на атомы поверхности, отличаются от сил, действующих на те же атомы внутри тела, и атомам на поверхности подчас выгоднее располагаться иначе, чем в объеме.

Интересные задачи приходится решать, когда рассматривается напыление каких-либо атомов на кристаллическую подложку, состоящую из атомов другого сорта. Здесь происходит конкуренция взаимодействия напыляемых атомов между собой и с атомами подложки. Напыляемые атомы образуют структуры различной симметрии. При изменении концентрации атомов на подложке могут происходить переходы от одного сим-

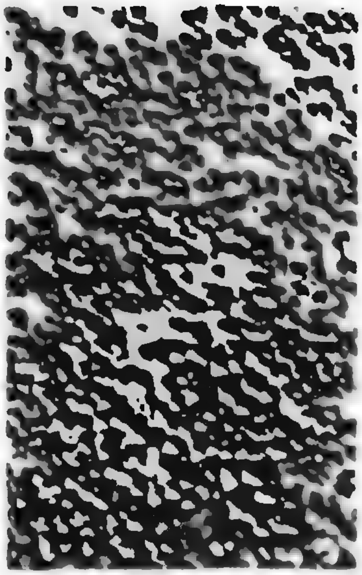


Рис. 1

Рис. 2.

метричного расположения к другому.

До сих пор речь шла о том, как выглядит поверхность твердого тела снаружи. Не менее важно знать, какой она представляется электронам проводимости, подлетающим к ней, так сказать, изнутри. Для этой цели служит недавно предложенный оригинальный метод, который иллюстрирует рисунок 3. В точках a и b к поверхности подсоединены два токовых контакта, и перпендикулярно линии ab в плоскости поверхности приложено постоянное магнитное поле с индукцией B. Электроны, вылетающие из контакта a со скоростью v, будут двигаться в плоскости рисунка по окружности радиуса r, который определяется силой Лоренца и равен mv/eB, где m и e — масса и заряд электрона*). Если расстояние ab меньше диаметра окружности $2r$, то на контакте b будут регистрироваться электроны, вылетающие из a не строго по нормали к поверхности. При $ab>2r$ электроны перестанут приходить на контакт b. Увеличим теперь магнитное поле в два раза. Радиус r уменьшится, соответственно, в два раза. На контакт b теперь могут прилететь электроны, отражающиеся зеркально от поверхности в средней точке c. Количество пришедших в b электронов, то есть электрический ток, определяется, таким образом, условиями отражения. Будет ли отражение от внутренней поверхности зеркальным? Или электрон, налетевший на поверхность, «отскочит» от нее под произвольным углом, не равным углу падения? Как зависит характер отражения от структуры поверхности и свойств самого материала в объеме? Известные нам ответы на эти вопросы пока нельзя считать исчерпывающими. Их нужно знать для понимания многих свойств проводников. Рассмотрим, например, как отражение электронов от внутренней поверхности влияет на сопротивление проводников.

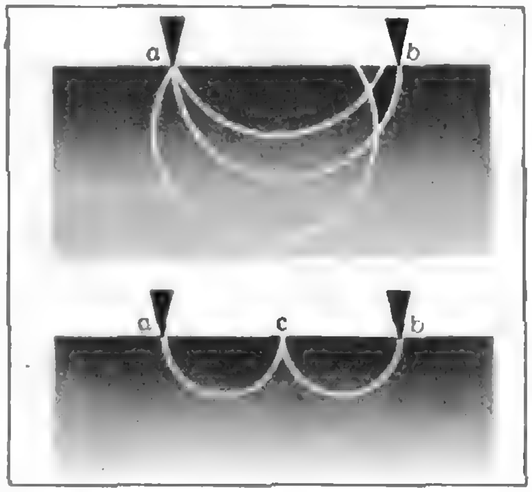


Рис. 3.

---

*) Далеко не в любом реальном металле траектория электрона в магнитном поле представляет собой окружность. Так бывает только в щелочных металлах. В общем случае из-за взаимодействия электрона с кристаллической решеткой его траектория может быть искажена.

О влиянии поверхности на свойства проводников

Хорошо известно, что сопротивление проволоки определяется ее длиной L и диаметром d:

$$R = \varrho L/S = 4\varrho L/\pi d^2.$$

Вопрос, который нас интересует, заключается в следующем: можно ли считать, что удельное сопротивление ϱ зависит только от материала проволоки и не зависит, например, от диаметра d? Мы сейчас увидим, что для ответа на этот вопрос важно знать характер отражения электронов проводимости от внутренней поверхности проводника.

Пусть электрон отражается зеркально, то есть параллельная поверхности проекция его импульса, а также энергия не меняются при отражении (рисунок 4, *а*). Это значит, что присутствие поверхности никак не сказывается на движении электрона в направлении, параллельном поверхности. Электрическое поле мы считаем, как это обычно бывает, направленным вдоль поверхности. Поэтому удельное сопротивление ϱ такого образца — с «зеркальной» внутренней поверхностью — должно совпадать с удельным сопротивлением неограниченного образца. Это сопротивление зависит от концентрации свободных электронов и от характера их движения внутри проводника. Как показывает несложный расчет (мы проделаем его в Приложении в конце статьи), удельное сопротивление неограниченного проводника равно

$$\varrho_0 = m/e^2 n\tau, \qquad (1)$$

где m, e — масса и заряд электрона, n — концентрация электронов в образце, τ — среднее время между двумя последовательными столкновениями электрона с дефектами в объеме проводника.

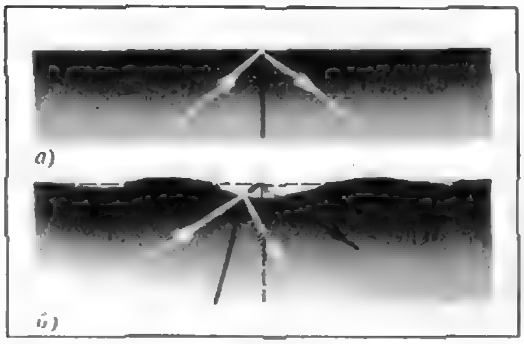


Рис. 4

Однако отражение электронов от реальной поверхности не может быть полностью зеркальным. На рисунке 4, *б* изображено отражение от шероховатой поверхности, которая «в среднем» выглядит плоской. Хотя в каждой точке электрон отражается зеркально, отражение от «средней» плоскости оказывается диффузным.

Понятно, что диффузное отражение препятствует направленному движению электронов и дает свой вклад в сопротивление проводника. В этом случае вместо формулы (1) теория дает такое выражение для удельного сопротивления:

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 + q\frac{l}{d}\right) \qquad (2)$$

(эту формулу мы тоже выведем в Приложении). Здесь l — средняя длина свободного пробега электрона, то есть среднее расстояние, проходимое электроном между двумя последовательными столкновениями с дефектами, а q — величина, определяемая характером столкновения электрона с поверхностью. Значения q лежат в интервале между 0 и 1. При чисто зеркальном отражении $q=0$, и мы приходим к прежней формуле (1). Относительная поправка к ней, то есть величина $\varrho/\varrho_0 = 1 + ql/d$, содержит отношение длины свободного пробега l к толщине образца d. Это довольно естественно, поскольку электрон «забывает» о поверхности на расстоянии l от нее, а ток течет по всему сечению образца.

Для достаточно толстых образцов, то есть при $d \gg ql$, формула (2) практически совпадает с формулой (1). В обратном предельном случае, когда $d \ll ql$, удельное сопротивление определяется лишь диаметром d и вообще не зависит от длины свободного пробега l. Происходит это потому, что электрон часто сталкивается с поверхностями образца и отражается от них диффузно. В этом случае роль длины свободного пробега играет диаметр образца.

Мы видим, что при «незеркальной» поверхности зависимость удельного сопротивления от размера образца определяется соотношением между длиной свободного пробега l и размером d. В совершенных кристаллических образцах величина l существенно меняется при изменении температуры. При комнатной температуре типичное значение l — порядка 10^{-5} см. С понижением температуры длина свободного пробега быстро растет. При температурах жидкого гелия ($\sim$4 К) величина l достигает подчас миллиметров. Сопротивление образцов такого размера и более тонких зависит от рассеяния на поверхности, следовательно — от диаметра d.

Зависимость (2) часто наблюдается в эксперименте, но известны и отклонения от нее. Особого внимания заслуживает ситуация, когда длина свободного пробега l очень велика по сравнению с толщиной d, а отражение близко к зеркальному. Не следует думать, что почти зеркальное отражение не реально. В предельном случае почти скользящего падения, то есть когда угол между направлением движения и поверхностью стремится к нулю, отражение обязательно зеркальное. С этим явлением знаком каждый: если вы смотрите на асфальтированное шоссе под достаточно малым углом, например, поднимаясь в гору, то оно сверкнет зеркалом в тот момент, когда луч зрения пройдет по касательной к шоссе.

Таким образом, мы можем, несколько условно, разделить электроны на две группы: скользящие, которые отражаются почти зеркально, и остальные, отражающиеся диффузно. Каждая из этих групп дает свой вклад в сопротивление проводника.

Теперь нам понятно, что условия отражения от поверхности определяются состоянием самой поверхности и углами, под которыми электроны подлетают к поверхности. Величина q в формуле (2), характеризующая взаимодействие электронов с поверхностью, при малых углах скольжения θ (при углах падения, близких к $\pi/2$) может быть представлена в виде $q = Q\theta$, где Q — некоторый коэффициент, определяемый качеством поверхности. (Такая формула для q наиболее простым образом удовлетворяет требованию $q \to 0$ при $\theta \to 0$, но ее можно получить и путем строгих вычислений.)

Как показывают расчеты, вклад, вносимый скользящими электронами в сопротивление тонкой пластины толщины d, оказывается равным

$$\varrho_{ск} = \varrho_0 \sqrt{Ql/d} \qquad (3)$$

(для тонкой проволочки формула получается иной). Вклад остальных электронов, отражающихся диффузно, дается вторым слагаемым в формуле (2), где q соответствует большим углам скольжения ($\Theta \approx \pi/2$). Для достаточно малых толщин величина (3) меньше, чем это второе слагаемое (легко видеть, что для малой величины $x \sim \sqrt{d/l} \ll 1$ выполняется неравенство $x \gg x^2$). Полное сопротивление образца подсчитывается как сопротивление двух параллельно соединенных проводников.

Мы рассмотрели здесь несколько различных задач, каждая из которых представляет самостоятельный интерес. Объединяет их то, что все они посвящены изучению поверхностных явлений. На наших глазах складывается новая область науки, привлекающая разнообразные методы исследования, которые разработаны и используются в механике, физике и химии.

Приложение

Рассмотрим проводник длины L с площадью сечения S, к которому приложено напряжение U. Электрическое поле внутри проводника равно $E = U/L$.

В отсутствие поля электроны в проводнике двигались хаотически и их средняя скорость равнялась нулю. В результате действия поля у электронов появляется отличная от нуля средняя скорость $\overline{u}$ (так называемая дрейфовая скорость). Эту скорость можно оценить, предположив, что она полностью теряется при столкновении электрона с колеблющимся атомом, с дефектом или с примесным атомом Если среднее время между двумя последовательными столкновениями электрона равно τ, то к моменту столкновения средняя скорость электрона равна

$$\overline{u} \approx a\tau = \frac{eE}{m}\tau = \frac{eU}{mL}\tau,$$

где a — ускорение, приобретаемое электроном в поле E.

Для того чтобы вычислить электрический ток, текущий по проводнику, надо умножить количество электронов, протекающих через сечение проводника за единицу времени, на заряд электрона:

$$I = enS\overline{u}.$$

где n — концентрация электронов. Подставляя сюда u, получаем закон Ома: $I=U/R$, где сопротивление R пропорционально длине l и обратно пропорционально сечению S — $R=\varrho_0 L/S$, а удельное сопротивление ϱ_0 от L и S не зависит:

$$\varrho_0=\frac{m}{ne^2\tau}. \qquad (a)$$

До сих пор мы отвлекались от того факта, что у проводника имеются границы. Теперь учтем его.

Мы видим, что удельное сопротивление массивного проводника определяется величиной, обратной времени между двумя последовательными столкновениями электрона с атомами или с дефектами в проводнике. При наличии границ роль τ играет время между двумя последовательными столкновениями электрона с границами. Это время по порядку величины равно d/v, где v — характерная скорость хаотического движения электронов в металле, d — толщина образца. Вклад, который вносят в удельное сопротивление столкновения с границами, мы можем оценить, подставив в (a) вместо $1/\tau$ величину v/d:

$$\varrho_s=q\frac{mv}{ne^2d}, \qquad (б)$$

где множитель q введен для того, чтобы учесть эффективность столкновений с поверхностью: для идеально зеркальной поверхности $q=0$, в случае полностью диффузного отражения электронов от поверхности $q=1$.

Каждый электрон может, в принципе, испытывать столкновения как на поверхности, так и внутри проводника. Поэтому полное удельное сопротивление образца равно сумме слагаемых (a) и $(б)$:

$$\varrho=\varrho_0+\varrho_s=\varrho_0\left(1+q\frac{v\tau}{d}\right)=\varrho_0\left(1+q\frac{l}{d}\right),$$

где $l=v\tau$ — средняя длина свободного пробега электрона, то есть среднее расстояние, проходимое электроном между двумя последовательными столкновениями.

Наша обложка

Парящий магнит

На первой странице обложки показана демонстрация опыта с парящим магнитом. Внутри блестящего металлического сосуда, над которым висит без всякой поддержки постоянный кольцевой магнит, находится жидкий гелий и в нем — сверхпроводник. Сверхпроводник представляет собой тонкий свинцовый диск диаметром 16 см, поверхность которого сделана слегка вогнутой. (Внешняя стенка сосуда повторяет форму сверхпроводника; вогнутость верхней поверхности обеспечивает устойчивость равновесия магнита.)

Этот опыт подтверждает существование в сверхпроводнике незатухающих (стационарных) токов. Они возникают при приближении магнита к поверхности сверхпроводника вследствие явления электромагнитной индукции. Направление токов индукции в сверхпроводнике определяется правилом Ленца, и создаваемое ими магнитное поле отталкивает кольцевой магнит, уравновешивая действие силы тяжести. Малейшее движение магнита вызывает изменение магнитного поля сверхпроводящих токов — поле «следит» за магнитом; при этом вогнутость поверхности сверхпроводника приводит к тому, что положение равновесия магнита оказывается устойчивым.

Установку с парящим магнитом в шутку называют «гроб Магомета» (по преданию гроб пророка Магомета висел в пространстве без всякой поддержки). Прибор, который изображен на первой странице обложки, нужен не только для демонстрационных целей. Он был изготовлен для выяснения вопроса, насколько хорошо большие полости, окруженные сверхпроводящим материалом, защищены от проникновения внешнего магнитного поля (иными словами, в какой степени магнитное поле сверхпроводящих токов компенсирует внешнее магнитное поле). *) Экран из сверхпроводника может оказаться незаменимым при исследовании физических явлений в слабых магнитных полях (порядка 10^{-13} Тл).

Установку с парящим магнитом, фотография которой приведена на нашей обложке, изготовил сотрудник Института атомной энергии им. И. В. Курчатова А. В. Инюшкин.

---

*) О свойствах сверхпроводников, помещенных в магнитное поле, вы можете прочитать в заметке «Эффект Мейснера» на с. 16 в этом номере журнала.

Неинерциальные системы отсчета

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Когда Коперник заменил геоцентрическую систему мира Птолемея на гелиоцентрическую систему и объяснил в ней движение всех планет, он произвел революцию в человеческом мышлении. В течение многих веков люди рассматривали движение всех тел только относительно Земли. Говоря современным языком, они пользовались единственной, выделенной системой отсчета, связанной с Землей, хотя движение планет и Солнца в ней описывались очень сложным образом.

Позже из трудов Галилея и Ньютона стало понятно, что для описания движения пригодна не только система отсчета, связанная с Солнцем и неподвижными звездами, но и любые другие системы, движущиеся по отношению к ней равномерно и прямолинейно. Так были открыты инерциальные системы отсчета, в которых движением тел управляют простые законы Ньютона.

Ну, а что случилось дальше с земной системой отсчета? Ведь для нас Земля это, все-таки, выделенная система; исследуя движение тел на Земле, чаще всего можно вообще забыть о Солнце и звездах. Строго говоря, эта система отсчета не является инерциальной, так как Земля вращается вокруг своей оси и Солнца. Однако ускорения, связанные с этим движениями, малы, и обычно мы делаем лишь небольшую ошибку, пользуясь для описания движения законами Ньютона. Обычно, но не всегда.

Многие, наверное, бывали в Ленинграде и видели знаменитый маятник в Исаакиевском соборе или, хотя бы, слышали о нем (рис. 1). Этот маятник не только колеблется, но плоскость его колебаний еще и медленно поворачивается. Такое наблюдение впервые провел французский ученый Фуко в 1851 году. Опыт проводился в огромном зале Парижского Пантеона, шар маятника имел массу 28 кг, а длина нити была 67 м. С тех пор такой маятник называют маятником Фуко. Как же объяснить его движение?

Если бы на Земле строго выполнялись законы Ньютона, то, как известно из школьного курса физики, маят-

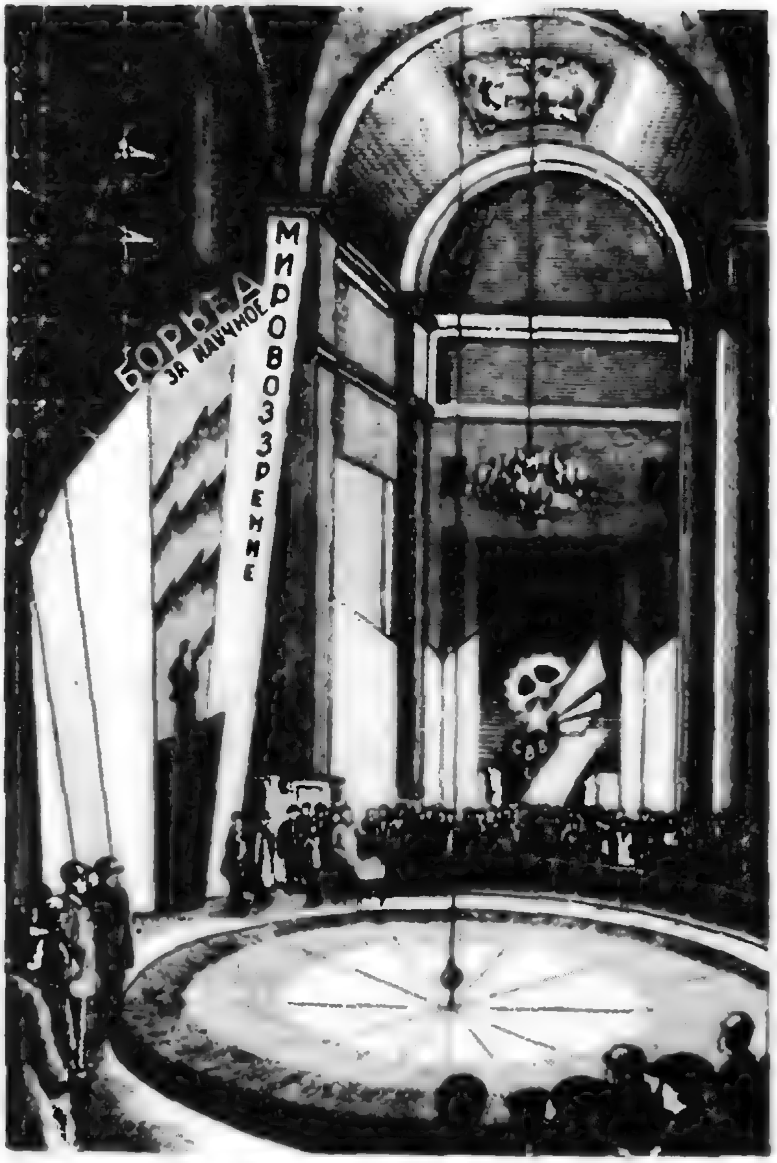


Рис. 1. В марте 1931 года в здании Исаакиевского собора, где тогда находился Ленинградский государственный антирелигиозный музей, состоялся первый пуск маятника Фуко.

ник колебался бы в одной плоскости. Значит, в системе отсчета, связанной с Землей, законы Ньютона надо «исправить». Это делают, вводя специальные силы — силы инерции.

Силы инерции приходится вводить в любой системе отсчета, движущейся относительно инерциальной с ускорением. Такие системы называют неинерциальными системами отсчета.

Чтобы найти силы инерции, надо рассмотреть движение одного и того же тела в двух системах отсчета — неинерциальной и инерциальной. Результат зависит, прежде всего, от того, как движется неинерциальная система. Она может двигаться поступательно, может вращаться, возможны и комбинации этих движений.

Оставим на время маятник Фуко — это довольно сложный случай — и рассмотрим вначале более простой пример.

Система отсчета движется поступательно

Представьте себе, что вы находитесь в кузове грузовика, и грузовик резко трогается с места. Если не успеть схватиться за борт, можно вылететь из кузова. Относительно Земли все понятно: человек остается неподвижным, а пол кузова уходит из-под ног. Но как объяснить это же явление в неинерциальной системе отсчета, связанной с ускоренно движущимся грузовиком? Никаких новых сил на человека, стоящего в кузове, не действует (для простоты будем считать, что силы трения малы), а человек начинает двигаться относительно грузовика с ускорением. Ясно, что просто применять законы Ньютона в этой системе нельзя: есть ускорение, но нет сил. Вот почему приходится вводить фиктивные силы — силы инерции.

Другой пример неинерциальной системы отсчета, который мы разберем более подробно, — это движущийся ускоренно лифт. При движении лифта вверх чувствуется «утяжеление» при разгоне и «облегчение» при резком торможении. Если пользоваться в системе лифта законами Ньютона, то этого понять нельзя. Действительно, на тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. Так как человек покоится, сила реакции должна была бы равняться по модулю силе тяжести. Но из опыта ясно, что это не так. Поэтому (если считать в лифте) к силе тяжести надо добавить какую-то фиктивную силу при разгоне лифта и вычесть ее при замедлении. Это и есть сила инерции.

Чему же равна сила инерции? Для того чтобы выяснить это, сначала найдем силу реакции, действующую на человека при ускорении и замедлении лифта в неподвижной системе отсчета. Относительно такой системы справедлив второй закон Ньютона

$$\pm ma = N - mg,$$

где знак «+» соответствует разгону лифта (ускорение направлено вверх), а знак «—» — относится к случаю его замедления (ускорение направлено вниз). Отсюда сила реакции

$$N = mg \pm ma.$$

В системе, связанной с лифтом, сила реакции должна получиться такой же, поэтому к силе тяжести необходимо добавить силу инерции при разгоне лифта и вычесть ее при замедлении. Из последнего равенства получаем, что сила инерции, действующая на человека в лифте, равна

$$\vec{F}_{и} = -m\vec{a}.$$

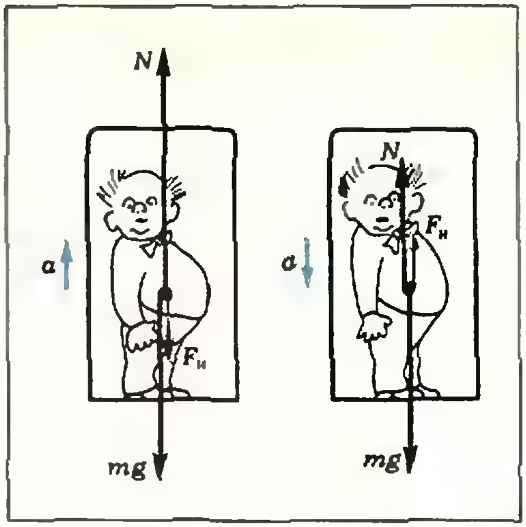


Рис. 2. Сила инерции в лифте, движущемся с ускорением.

Теперь все в порядке: при разгоне лифта сила инерции как бы утяжеляет тело, а при замедлении, наоборот, облегчает его (рис. 2). Обратите внимание, что сила инерции внешне похожа на силу тяжести: обе они пропорциональны массе тела.

Иногда приходится слышать, например, что силы инерции откидывают пассажиров назад при разгоне поезда и толкают их вперед при его замедлении, то есть говорят о силах инерции как об обычных силах. При этом обязательно надо добавлять, что движение рассматривается относительно ускоренно движущейся системы отсчета (в данном случае относительно поезда). Но и в этой системе не следует забывать о происхождении сил инерции. Эти силы принципиально отличаются от обычных сил: они не связаны с взаимодействием тел. Вот почему их часто называют фиктивными силами или псевдосилами. Силы инерции вводятся искусственно, для того чтобы описать изменение ускорения тела в неинерциальной системе отсчета по сравнению с инерциальной при тех же самых действующих на тело реальных силах.

Исследовать движение в неинерциальной системе отсчета, вводя силы инерции, часто оказывается более простым и удобным, чем в инерциальной системе, где таких сил нет, но характер движения может быть

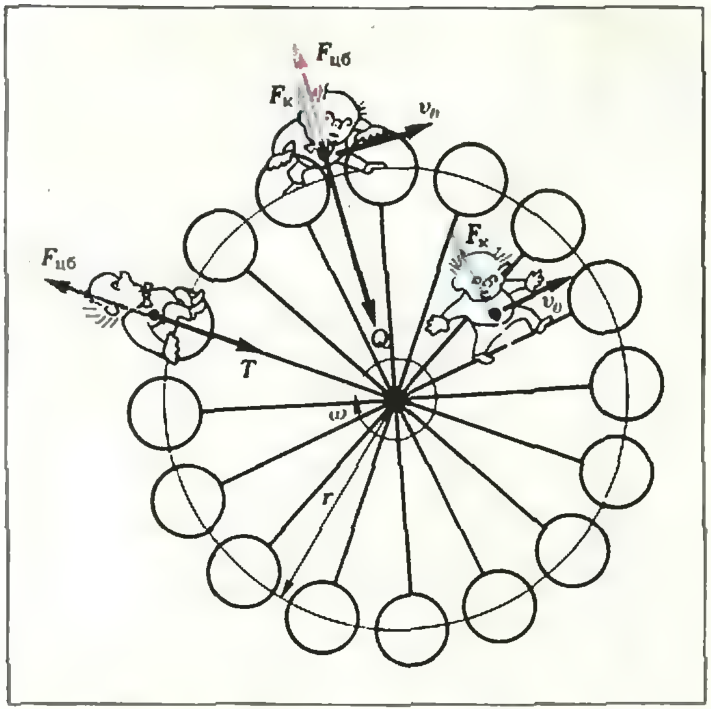


Рис. 3. Силы инерции во вращающейся системе отсчета.

гораздо сложнее. В этом легко убедиться, решив задачи, приведенные в конце статьи.

Система отсчета вращается

Предположим, что уже знакомый нам грузовик с человеком в кузове поворачивает. Тогда человек может стукнуться о борт и даже набить себе шишку. Почему это происходит? Относительно Земли все понятно: человек продолжает двигаться прямолинейно, а борт грузовика, поворачивая, приближается к нему. В системе отсчета, связанной с грузовиком, наоборот, человек приближается к борту, хотя никаких новых реальных сил на человека в этой системе не действует. Для того чтобы объяснить это движение в неинерциальной системе грузовика, приходится ввести фиктивную силу — центробежную силу инерции, направленную по радиусу от центра поворота. Вот так — силы фиктивные, а шишки реальные!

Еще один пример — человек на карусели. Почему он движется по окружности? В инерциальной системе отсчета ответ дает второй закон Ньютона: сила реакции со стороны боковой стенки кресла, направленная к центру, вызывает центростремительное ускорение. Можно ли понять это движение, пользуясь законами Ньютона во вращающейся системе? Опять нет: в этой системе человек покоится, и в то же время на него действует сила реакции со стороны кресла. Но все встает на свои места, если ввести центробежную силу инерции, направленную от центра вращения. Тогда можно объяснить, почему в этой системе движения нет.

Чтобы найти величину центробежной силы инерции, рассмотрим сначала движение человека в неподвижной (инерциальной) системе отсчета. Центростремительное ускорение $a_ц = \omega^2 r$ (ω — частота вращения карусели, r — ее радиус) вызывается действующей на человека силой реакции T со стороны кресла карусели (рис. 3):

$$m\omega^2 r = T.$$

Во вращающейся (неинерциальной) системе отсчета центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб}$ должна быть по модулю равна силе $\vec{T}$, а по направлению — противоположна ей. Поэтому

$$F_{цб} = -m\omega^2 r,$$

где знак «—» указывает, что эта сила направлена от центра вращения. Как видно, и во вращающейся системе отсчета сохраняется характерная особенность сил инерции — эти силы пропорциональны массе тела.

С центробежными силами инерции сталкиваются во многих практических задачах. При этом часто, делая расчеты, забывают об их происхождении и обращаются с ними как с обычными силами. Например, считают, что центробежная сила инерции сушит белье в центрифугах, разделяет изотопы, помогает тренировкам космонавтов; она же может разрушить ротор турбины и вызвать биение колеса при плохой центровке. Еще раз отметим, что такие утверждения имеют смысл лишь во вращающейся системе отсчета. Но и там надо помнить, что силы инерции — фиктивные силы, которые вводятся для того, чтобы описать изменение ускорения тела, вызванное вращением системы отсчета. Все описанные явления можно объяснить, рассматривая их и в инерциальной системе, где справедливы обычные законы Ньютона. Правда, там объяснение будет сложнее.

Кориолисова сила

Теперь обсудим случай, когда человек не просто катается на карусели, а еще и вздумал перебраться из одного кресла в другое (см. рис. 3), то есть начинает двигаться по окружности с некоторой скоростью v_0 в системе карусели, например, в сторону вращения. (Эксперимент чисто мысленный, так как это строжайше запрещено правилами.) Оказывается, тогда необходимо ввести еще одну силу инерции, направленную тоже от центра вращения.

Рассмотрим вначале движение человека относительно Земли. Полная скорость движения v складывается из линейной скорости карусели ωr и скорости относительного движения v_0:

$$v=\omega r+v_0.$$

Центростремительное ускорение определяется известной формулой

$$a_{\text{ц}}=\frac{v^2}{r}=\frac{v_0^2}{r}+\omega^2 r+2v_0\omega.$$

По второму закону Ньютона

$$ma_{\text{ц}}=Q,$$

где Q — сила реакции, действующая на человека со стороны карусели

Теперь рассмотрим это же движение в системе карусели. Там скорость равна v_0, и центростремительное ускорение $a'_{\text{ц}}=v_0^2/r$. Используя предыдущие два равенства, можно записать

$$ma'_{\text{ц}}=\frac{mv_0^2}{r}=Q-m\omega^2 r-2mv_0\omega.$$

Если мы хотим пользоваться законом Ньютона и во вращающейся системе, надо ввести силу инерции

$$F_{\text{ин}}=-(m\omega^2 r+2mv_0\omega),$$

где знак «—» указывает, что эта сила направлена от центра вращения. Первый член — это уже знакомая нам центробежная сила инерции $F_{\text{цб}}$. Она тем больше, чем быстрее вращение и чем дальше отстоит тело от центра. Вторая сила называется кориолисовой силой $F_{\text{к}}$ (по имени французского ученого Кориолиса, впервые рассчитавшего эту силу). Ее приходится вводить только тогда, когда тело движется во вращающейся системе. Она не зависит от положения тела, но зависит от скорости движения тела и от скорости вращения системы отсчета.

Что, если тело во вращающейся системе движется не по окружности, а, например, по радиусу (см. рис. 3)? Оказывается, и в этом случае также необходимо ввести силу Кориолиса, но направлена она будет не вдоль радиуса, а перпендикулярно ему. И вообще при любом движении во вращающейся системе кориолисова сила направлена перпендикулярно оси вращения и скорости тела. Удивительно, но факт: при движении во вращающейся системе сила инерции как бы толкает тело вбок.

Слова «как бы» стоят не случайно. Происхождение силы Кориолиса такое же, как и всех сил инерции — это псевдосила. Вот наглядный тому пример.

Представьте себе, что на полюсе установлена пушка, которая стреляет вдоль меридиана (полюс взят для простоты рассмотрения). Цель находится на том же меридиане. Может ли снаряд попасть в цель? Если смотреть на стрельбу со стороны (пользоваться инерциальной системой от-

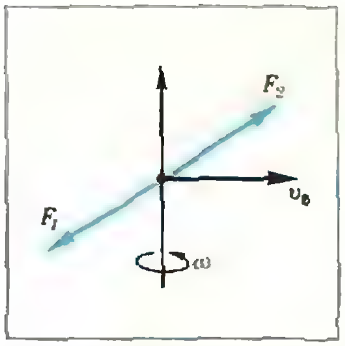


Рис. 4. Два возможных направления силы Кориолиса.

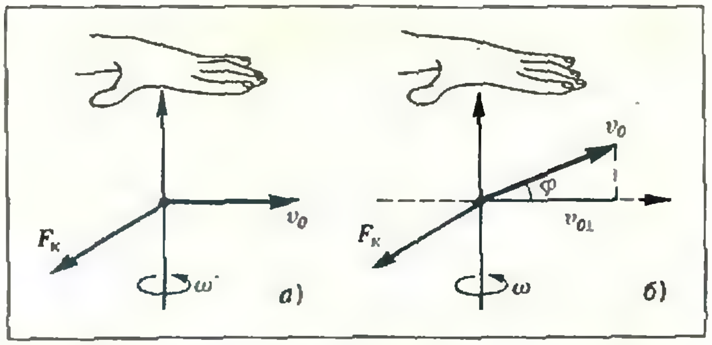


Рис. 5. Правильное направление силы Кориолиса определяется с помощью правила левой руки.

счета, связанной с Солнцем), то ситуация ясная: траектория снаряда лежит в начальной меридиональной плоскости, а цель вместе с Землей поворачивается. Поэтому снаряд никогда не попадет в цель. А как объяснить то же явление в системе, связанной с Землей? Как объяснить эффекты, обусловленные «уходом» цели из плоскости полета снаряда? Для этого и приходится вводить кориолисову силу, направленную перпендикулярно скорости тела и оси вращения. Тогда и на Земле становится понятным, почему снаряд отклоняется и не попадает в цель.

Точно так же объясняется поворот плоскости колебаний маятника Фуко, о котором мы говорили в начале статьи. В инерциальной системе Солнца плоскость колебаний маятника остается неизменной, а Земля вращается. Поэтому относительно Земли плоскость колебаний поворачивается. (Проще всего опять представить себе, что маятник колеблется на полюсе; тогда плоскость колебаний совершит полный оборот как раз за сутки.) А вот в системе отсчета, связанной с Землей, это явление можно объяснить только с помощью силы Кориолиса.*)

Интересные следствия

Сила Кориолиса, возникающая вследствие вращения Земли, приводит к целому ряду весьма важных эффектов. Но прежде чем говорить о них, обсудим подробнее вопрос о направлении силы Кориолиса. Уже было сказано, что сила Кориолиса всегда перпендикулярна оси вращения и скорости тела. Но при таком определении остаются возможными два направления силы Кориолиса, показанные на рисунке 4. Напомним, что аналогичная ситуация возникает при определении направления силы Лоренца, действующей на движущийся заряд со стороны магнитного поля. Как известно из школьного курса физики, эта сила перпендикулярна скорости заряда и индукции магнитного поля. Для того чтобы однозначно определить ее направление, надо воспользоваться правилом левой руки. (Конечно, в действительности электрону нет никакого дела до вашей левой руки; таким способом просто удобно формулировать правило для нахождения направления силы Лоренца.)

Направление кориолисовой силы можно найти с помощью аналогичного правила. Его иллюстрирует рисунок 5, *а*. Прежде всего выберем определенное направление на оси вращения: если смотреть на вращающееся тело в этом направлении, вращение должно происходить по часовой стрелке. Теперь расположим левую руку так, чтобы направление вытянутых четырех пальцев совпадало с направлением скорости тела, а направление оси вращения пронизывало бы ладонь. Тогда отогнутый под углом 90° большой палец покажет направление силы Кориолиса.

Итак, мы подробно обсудили вопрос о силе Кориолиса для случая, когда скорость тела во вращающейся системе отсчета перпендикулярна оси вращения. При этом модуль силы равен $F_к = 2m\omega v_0$, а направление оп-

---

*) Более подробно о движении маятника Фуко рассказано, например, в статье Я. А. Смородинского «Сила Кориолиса» («Квант», 1975, № 4).

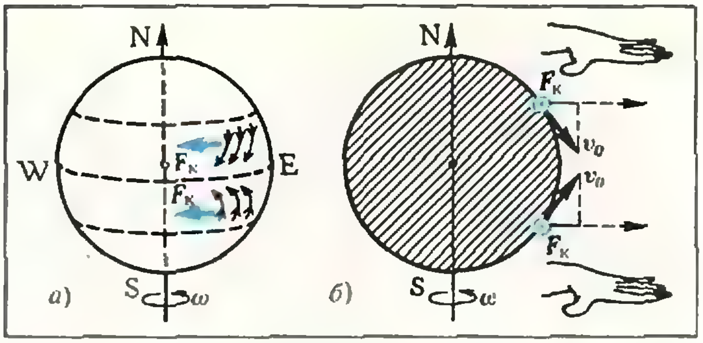


Рис. 6. Сила Кориолиса отклоняет пассаты к западу.

ределяется правилом левой руки. А как быть в общем случае?

Оказывается, если скорость тела v_0 составляет с осью вращения произвольный угол (рис. 5, *б*), то при нахождении силы Кориолиса надо учитывать только проекцию скорости на плоскость, перпендикулярную оси вращения. Тогда модуль кориолисовой силы вычисляется по формуле

$$F_к = 2m\omega v_{0\perp} = 2m\omega v_0 \cos\varphi.$$

Направление этой силы определяется тем же правилом левой руки, но четыре вытянутых пальца нужно располагать не вдоль скорости тела, а по перпендикуляру к оси вращения, как показано на рисунке 5, *б*.

Теперь нам все известно про силу Кориолиса: и как найти ее модуль, и как определить направление. Вооружившись этими знаниями, приступим к объяснению ряда интересных эффектов.

Известно, например, что пассаты — ветры, дующие от тропиков к экватору, — всегда отклоняются к западу. Рисунок 6 объясняет этот эффект. Сначала убедитесь в том, что это действительно так, для северного полушария, где пассаты дуют с севера на юг. Расположите левую руку так, чтобы ось вращения Земли входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца направьте вдоль перпендикуляра к оси вращения (рис. 6, *б*). Вы увидите, что кориолисова сила направлена на вас перпендикулярно чертежу и, следовательно, на запад (рис. 6, *а*). В южном полушарии пассаты дуют, наоборот, с юга на север. Но ни направление оси вращения, ни направление перпендикуляра к ней не изменяются; следовательно, не изменяется и направление силы Кориолиса. Таким образом, эта сила в обоих случаях направлена к западу.

Рисунок 7 иллюстрирует закон Бэра: у рек, текущих в северном полушарии, правый берег более крутой и подмытый, чем левый (в южном полушарии — наоборот). В этом случае действие кориолисовой силы приводит к тому, что вода прижимается к правому берегу. Из-за трения у поверхности скорость течения всегда больше, чем у дна; соответственно, будет большей и сила Кориолиса. В результате возникает циркуляция воды, показанная стрелками на рисунке 8, почва у правого берега подмывается, а у левого — осаждается*) Глубже разо-

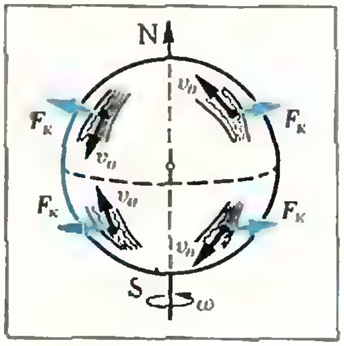


Рис. 7. Сила Кориолиса прижимает воду к реке к правому берегу в северном полушарии и к левому — в южном.

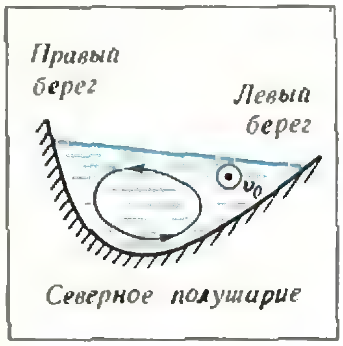


Рис. 8. У рек в северном полушарии правый берег более крутой и подмытый, чем левый.

---

*) Аналогичное явление возникает при повороте реки. О нем подробно рассказывалось в статье «Меандры рек» («Квант», 1983, № 1).

браться в этом явлении можно, решив задачу 7 в конце статьи.

Кориолисова сила приводит к отклонению падающих тел к востоку. (Объяснить этот эффект попробуйте сами.) В 1833 году немецкий физик Фердинанд Райх в Фрейбургской шахте провел очень точные эксперименты и получил, что при свободном падении тел с высоты 158 м их отклонение в среднем (по 106 опытам) составляет 28,3 мм. Это послужило одним из первых экспериментальных доказательств теории Кориолиса.

Задачи

1. В кузове грузовика лежит деревянный ящик, загруженный кирпичами. Дно ящика — квадрат со стороной $l=1$ м; масса ящика пренебрежимо мала по сравнению с массой кирпича. Известно, что ящик начинает скользить, если грузовик трогается с ускорением, большим $a=6$ м/с^2. До какой высоты можно уложить кирпичи в ящик, не опасаясь, что он опрокинется при таком ускорении?

2. При вертикальном взлете ракета движется с ускорением $2g$. Каков период колебаний маятника длины l, расположенного в кабине ракеты? Каким станет период колебаний маятника при вертикальном спуске ракеты с тем же ускорением $2g$?

3. Маятниковые часы установлены в пригородной электричке, которая отправляется от вокзала и через некоторое время возвращается назад. Как будут различаться показания вокзальных часов и часов в электричке? Учесть, что при торможениях и разгонах электричка движется с ускорением.

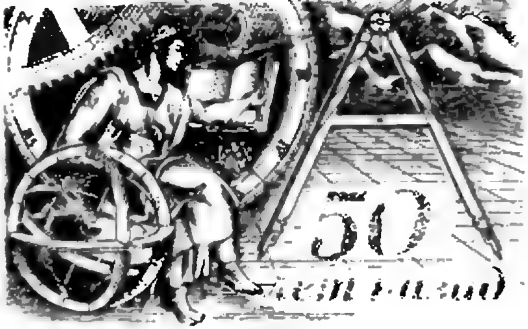
4. Однородный стержень длины $2l$ и массы m вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его середину. Определите, как меняется натяжение стержня в зависимости от расстояния до центра вращения. Найдите максимальное значение этого натяжения.

5. Металлическая цепочка длины l и массы m, концы которой соединены, насажена на диск. Диск вращается в горизонтальной плоскости, делая n оборотов в единицу времени. Определите натяжение цепочки T.

6. В узкую радиальную канавку, расположенную на поверхности горизонтального диска, вставлено лезвие бритвы. В каком направлении — в сторону вращения или против него — будет падать лезвие при вращении диска (лезвие может скользить вдоль канавки)?

7. Река в северном полушарии течет к югу. Ширина русла реки на широте φ равна d, скорость течения v. Выведите формулу для разности уровней воды на восточном и западном берегах реки. Оцените эту величину для реки Волги. Будет ли наблюдаться этот эффект, если река течет вдоль параллели? Что произойдет, если река пересекает экватор?

Наш календарь



Эффект Мейснера

(или Как делаются открытия)

Осенью 1933 года было сделано выдающееся открытие: обнаружено, что магнитное поле не проникает в глубь сверхпроводников, иными словами, магнитная индукция в сверхпроводниках равна нулю.

Как же было сделано это открытие? Видный специалист по физике низких температур В. Мейснер и его сотрудник Р. Оксенфельд решили экспериментально проверить расчеты известного физика, лауреата Нобелевской премии М. Лауэ. Лауэ рассчитал распределение магнитного поля вокруг сверхпроводников простой геометрической формы. Он исходил из следующих соображений. При включении магнитного поля в сверхпроводнике вследствие электромагнитной индукции должны возникать незатухающие вихревые токи. Согласно правилу Ленца, магнитный поток поля, создаваемого этими токами, равен магнитному потоку включенного поля, но имеет противоположный знак. Следовательно, суммарное магнитное поле в сверхпроводнике равняется нулю. Таким образом, включаемое магнитное поле не должно проникать в сверхпроводник.

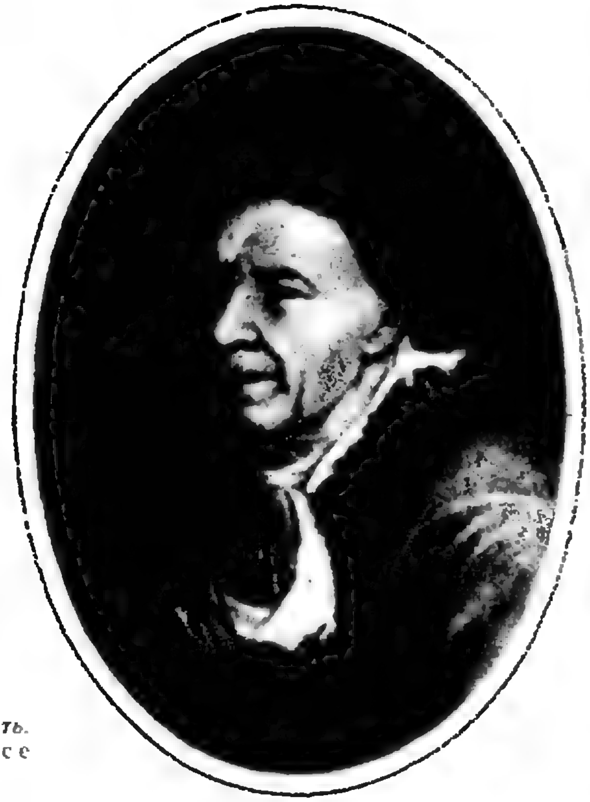
Мейснер и Оксенфельд измерили распределение магнитного поля вокруг сверхпроводящего образца после включения магнитного поля и убедились, что расчеты Лауэ точны. Потом они решили изменить последовательность операций эксперимента. Сначала включили магнитное поле, и в это постоянное магнитное поле поместили при комнатной температуре исследуемый образец. Затем его охладили и тем самым перевели в сверхпроводящее состояние. Снова повторили измерения распределения магнитного поля вокруг образца. К их удивлению оно оказалось таким же, как и в первом опыте. Но ведь магнитное поле не менялось, и электромагнитной индукции не должно быть! Выходит, что и в случае, когда нет электромагнитной индукции, магнитное поле вытеснялось из образца при переходе его в сверхпроводящее состояние. Это уже явно противоречило расчетам Лауэ.

Так было обнаружено фундаментальное свойство сверхпроводников, которое никак нельзя было «вывести» из равенства нулю электросопротивления. Это явление «непроницаемости» сверхпроводника для магнитного поля имеет фундаментальное значение для физики сверхпроводимости. Оно получило название «эффект Мейснера».

Б. Е. Явелов

Леонард Эйлер

(к 200-летию со дня смерти)



Кандидат
физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

Итак, Эйлер перестал вычислять и жить.
Кондорсе

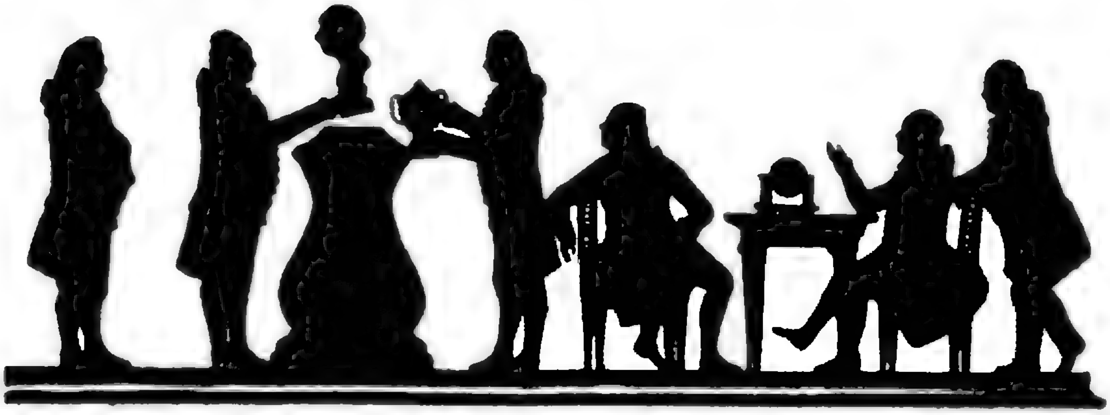
В начале 1783 г. директором Петербургской Академии наук была назначена княгиня Екатерина Романовна Дашкова, которая за 20 лет до того была ближайшей сподвижницей Екатерины II в дни воцарения ее на российском троне. Известная своей изобретательностью княгиня придумывает безошибочный ход, который должен убедить академиков в ее приверженности науке. Она уговаривает сопровождать ее при первом посещении Академии престарелого Эйлера, который давно был не в ладах с академическим начальством и не посещал академических конференций. Слепой Эйлер появляется в сопровождении сына и внука. Дашкова вспоминала впоследствии: «Я сказала им, что просила Эйлера ввести меня в заседание, так как, несмотря на собственное невежество, считаю, что подобным поступком самым торжественным образом свидетельствую о своем уважении к науке и просвещению».

А всего через несколько месяцев в протоколах Академии было записано: «В заседании конференции 11 сентября 1783 г. академик Н. И. Фусс взял на себя обязанности секретаря *), отсутствующего из-за кончины его знаменитого отца, г. Леонарда Эйлера, который умер от апоплексического удара 7 сентября в 11 часов вечера, в возрасте 76 лет, 5 месяцев и 3 дней, совершившего свой долгий и блестящий путь и сделавшего свое бессмертное имя известным всей Европе».

Исключительность личности Эйлера, его беспрецедентная роль в истории Академии заставили искать нестандартные способы почтить его память. 23 октября академик Н. И. Фусс, ученик Эйлера и муж его внучки, произнес «Похвальное слово». Академики решили на свои средства изготовить бюст «бессмертного Эйлера, равно достойного восхищения своим гением и своими достоинствами», а их «прославленный начальник» (Дашкова) «прибавила к этому великолепную колонну, которая служит основанием этому бюсту»; вначале бюст установили в библиотеке, а затем — напротив кресла президента в зале заседаний (а в библиотеке осталась

---

*) Им был Иоганн-Альбрехт, старший сын Л. Эйлера.



картина «Силуэты группы академиков Математического класса, занятых установкой бюста покойного Л. Эйлера»). В больших подробностях (включая качество бумаги) обсуждались вопросы, связанные с изданием трудов покойного.

Слухи о почестях ученому распространились далеко за пределы России. Непременный секретарь Французской Академии наук маркиз Кондорсе (менее чем через 10 лет он примет участие в революции и его имя вычеркнут из списков Петербургской Академии за «достойное порицания поведение... против суверена») сказал в своем «Похвальном слове»: «Итак, народ, который мы в начале этого века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе — как чествовать великих людей при жизни и уважать их память по смерти: и другим нациям приходится в данном случае краснеть, что они не только в этом отношении не могли предупредить Россию, но даже не в силах ей подражать». Хотя в далеком Париже обстановка в Петербурге казалась более благополучной, чем была на самом деле, отношение к науке за 60 лет существования Петербургской Академии стало неузнаваемым.

Первые годы Академии

Петр I думал об организации Академии в России еще в последние годы XVII века. Начиная с 1711 г. от трижды обсуждал свои планы с Лейбницем и даже зачислил последнего на русскую службу. Лейбниц не считал отсутствие наук в России препятствием к созданию Академии и даже находил в этом некоторые преимущества. Однако мало кто в России разделял этот оптимизм. Трудности на пути проекта были многочисленны, но в 1724 г. Сенат принял решение о создании Академии наук. В это время даже слово «наука» еще не существовало в русском языке и Академию назвали «ди сиянс Академия».

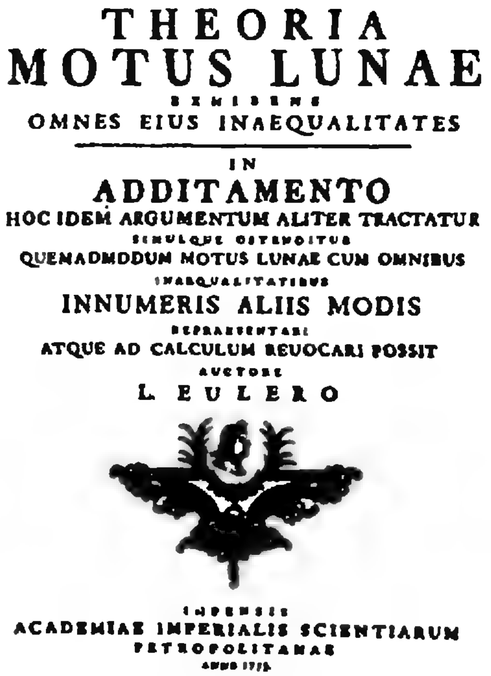
В 1725 г. Петр умер, так и не дождавшись открытия Академии. Екатерина I не без колебаний осуществила замысел мужа, хотя и не разделяла его интереса к науке (как пишет современник, «похвальные речи ученых были непонятны Ее Величеству»). Судьба Академии все время висела на волоске. Она воспринималась как явление исключительно немецкое, и русская партия, в частности Меншиков, была настроена против нее. Академики пытались наладить контакты с русской публикой, плохо понимавшей функции Академии. Два раза в неделю ее двери открывались для посетителей. Иногда там можно было увидеть нечто удивительное. 24 февраля 1729 г. «профессор Лейтман умудрился изменить изображение государственного герба (с помощью призм) в портрет царствующего императора». Академики несколько утвердили себя успехами в организации «потешных огней» и иллюминаций, в сочинении торжественных од. Высокие материи не были в чести, разве что при составлении «ландкарт» да некоторых рекомендаций мореплавателям.

Будущих академиков стали собирать еще при Петре I. Постепенно становилось ясно, что первоклассный состав набрать не удается: именитые ученые считали поездку в Россию мероприятием сомнительным и даже рискованным. Лейбница тогда уже не было в живых, а его ближайший последователь Христиан Вольф отказался принять пост президента. Первым президентом стал лейб-медик Блюментрост. Попробовали вместо именитых ученых приглашать их детей (в надежде, что способности к науке передаются по наследству, да и славное имя украсит академические списки). Так, приглашение знаменитому Иоганну Бернулли (1667—1748) было переадресовано его сыну. В многоступенчатой переписке долго было не ясно, относится ли приглашение к старшему сыну Николаю (1695—1726) или среднему — Даниилу (1700—1782). В конечном счете поехали оба: Николай, прежде бывший профессором римского права, стал профессором математики (с окладом 1000 руб. в год), а Даниил — профессором физиологии (с окладом 800 руб.). Отец напутствовал сыновей словами: «...лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают». Мог ли он думать тогда, что не пройдет и года, как его старшего сына не станет!

Эйлер в Петербурге

С завистью провожал братьев Бернулли в 1726 г. ученик их отца Леонард Эйлер: «У меня явилось неописуемое желание отправиться вместе с ними... Дело, однако, не могло так скоро осуществиться, а между тем... молодые Бернулли крепко пообещали мне по прибытии своем в Петербург похлопотать о пристойном для меня месте.»

Леонард Эйлер родился 4 (15) апреля 1707 г. в Базеле, в Швейцарии. Его отец, Пауль Эйлер, был сельским пастором. В молодости он успешно занимался математикой под руководством Якоба Бернулли (1654—1705), старшего брата Иоганна. Первые уроки Леонард получил от отца, последние классы гимназии он проходил в Базеле и одновременно посещал лекции по математике в университете, где преподавал И. Бернулли. Вскоре Эйлер самостоятельно изучает первоисточники, а по субботам И. Бернулли беседует с талантливым студентом, обсуждает неясные места. Леонард дружит с его сыновьями, особенно с Даниилом.



THEORIA
MOTUS LUNAE
EXHIBENS
OMNES EIUS INAEQUALITATES
IN
ADDITAMENTO
HOC IDEM ARGUMENTUM ALITER TRACTATUR
SIMULQUE OSTENDITUR
QUEMADMODUM MOTUS LUNAE CUM OMNIBUS
INAEQUALITATIBUS
INNUMERIS ALIIS MODIS
REPRAESENTARI
ATQUE AD CALCULUM REUOCARI POSSIT
AUCTORE
L. EULERO

IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
ANNO 1753

Рис. 3.

Титульный лист книги Эйлера «Теория движения Луны», изданной в Санкт-Петербурге в 1753 году.

В 1723 г. Леонард получил степень магистра искусств; на испытании он произнес на латыни речь о сравнении философии Декарта и Ньютона. Пауль Эйлер считал, что сын должен повторить его карьеру, и Леонард покорно изучал богословие. И отец, и сын отчетливо понимали, что научная карьера бесперспективна. Хотя она и не была особенно престижной (в те годы в Швейцарии любили говорить: пусть учатся немцы, а у швейцарцев есть дела поважнее), число претендентов на профессорские места сильно превышало количество вакансий.

В 1727 г. Эйлер предпринял попытку занять кафедру физики в Базеле, заранее обреченную на неудачу. Тем временем он успешно участвует в конкурсе Французской Академии наук на наилучший способ расположения мачт на корабле. Примечательно, что «в гористой Швейцарии, из которой до того времени Эйлер никуда не выезжал, он, конечно, имел случай видеть корабль не иначе, как на картинках...» (акад. А. Н. Крылов).

Даниил Бернулли выполнил обещание, данное при отъезде в Петербург: еще до попытки Эйлера устроиться в Базеле он узнал о возможности получить место адъюнкта по физиологии с окладом 200 рублей. Бернулли торопит, рекомендует ехать «еще этою зимою». Эйлера не смутило, что ему предстоит заниматься медициной. В те годы медицина не воспринималась как наука, далекая от математики. За примерами идти недалеко: его учитель И. Бернулли чередовал занятия математикой с медицинской практикой (как, впрочем, и с преподаванием греческого языка). Эйлер приступает к изучению анатомии и физиологии; позднее он удивлял окружающих медицинскими познаниями. Отъезд не удался столь быстро, как хотелось Д. Бернулли, но весной 1727 г. Эйлер получил «на проезд денег сто тридцать рублей векселем» и уехал в Россию. В Петербург он прибыл в день смерти Екатерины I.

В свои первые петербургские годы вряд ли Эйлер думал, что его жизнь так прочно будет связана с Академией. Само дальнейшее существование Академии казалось тогда крайне проблематичным. Потом Н. И. Фусс напишет: «Эйлер был украшением и славой нашей Академии в продолжение пятидесяти лет. На его глазах она начинала свое существование, несколько раз погибала и воскресала». Очень неуютно чувствовал себя Эйлер, когда гибель Академии представлялась ему реальностью. В один из самых тяжелых моментов, когда после кончины Петра II в 1730 г. началось массовое бегство академиков из России, отчаявшийся Эйлер ведет переговоры о поступлении на морскую службу. Но это не потребовалось. Напротив, освободившаяся вакансия позволила Эйлеру занять место профессора (академика) по кафедре физики (правда, с сравнительно невысоким окладом в 400 рублей). А через два года Д. Бернулли покинул Россию и Эйлер занял его кафедру математики (хотя его оклад — 600 руб.— лишь половина оклада, который получал на этом месте Д. Бернулли).

За эти годы Эйлер стал в Академии заметной фигурой. Большинство академиков не слишком ревностно относились к своим обязанностям, которые к тому же еще и не определились четко. Эйлер не пренебрегал никакими поручениями: он постоянно делает доклады на академических конференциях, читает публичные лекции, пишет учебник по арифметике для академической гимназии и научно-популярные статьи для «Примечаний» к «Санкт-Петербургским ведомостям», он в комиссиях по исследованию пожарного насоса, весов, «пильной машины» и магнитов, принимает разнообразные экзамены. Эйлер подробно вникает в многочисленные технические проекты. Забегая вперед, можно вспомнить исследования Эйлера по гидравлическим турбинам и заключения по проектам мостов через Неву, в том числе об одноарочном деревянном мосте И. П. Кулибина, работавшего в Академии механиком.

Начиная с 1733 г. Эйлер участвует в «экзамене» карт, и постепенно участие в картографической деятельности выходит среди его академических обязанностей на первый план. Встает вопрос о составлении генеральной карты России на основе уже составленных губернских карт, и Эйлер предлагает свой проект, сопровождая его словами: «Я уверен, что география российская через мои и г. профессора Гензиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли». Острые разногласия с академиком Делилем привели Эйлера в 1840 г. к решению прекратить занятия картографией. Вероятно, состояние здоровья ученого тоже сыграло свою роль в принятии этого решения: 21 августа он писал академику Гольдбаху: «География мне гибельна. Вы знаете, что я за нее поплатился глазом, а теперь опять нахожусь в подобной опасности; когда мне сегодня утром послали часть карт на просмотр, то я тотчас же почувствовал новый припадок, потому что эта работа, требуя всегда рассмотрения одновременно большого пространства, сильнее утомляет зрение, чем простое чтение или одно писание». Эйлер потерял правый глаз в 1735 г., когда выполнил в три дня правительственное задание, на которое академики требовали несколько месяцев.

На 1740 г. приходится еще один случай, когда Эйлер уклонился от данного ему поручения (других примеров не известно): он переадресовал придворному астроному составление гороскопа «Ивану-царевичу», будущему недолговечному императору Иоанну Антоновичу. Впрочем, А. С. Пушкин сообщает иную версию этой истории: «Когда родился Иоанн Антонович, то императрица Анна Иоанновна послала к Эйлеру приказание составить гороскоп новорожденному. Эйлер сначала отказывался, но принужден был повиноваться. Он занялся гороскопом вместе с другим академиком. Они составили его по всем правилам астрологии, как добросовестные немцы, хотя и не верили ей. Заключение, выведенное ими, испугало обоих математиков — и они послали императрице другой гороскоп, в котором предсказывали новорожденному всякие благополучия. Эйлер сохранил однако ж первый и показывал его графу К. Г. Разумовскому, когда судьба несчастного Иоанна Антоновича совершилась».

Не перестаешь удивляться, что все эти многочисленные обязанности оставляли Эйлеру время для его главного дела — для занятий математикой. Именно в эти годы он сложился как великий ученый. Критически переосмыслив труды Лейбница и Ньютона по математическому анализу и механике и работы Ферма по теории чисел, он нашел свой собственный путь в науке. Почти все его книги и статьи были опубликованы позднее, но главное в научной судьбе Эйлера решилось в его первое петербургское десятилетие. Только фантастическая работоспособность и поразительная целеустремленность позволили Эйлеру совместить малозаметные миру занятия математикой с повседневными академическими заботами. Позднее он писал, что для молодого ученого необходимо, чтобы его специальность «была у него главным предметом, и он не... отрывался от нее никакими другими занятиями».

В 1733 г. Эйлер женился на Екатерине Гзель, дочери академического живописца родом из Швейцарии, вывезенного Петром I из Голландии. Из тринадцати их детей выжили три сына и две дочери. Для благочестивого сына сельского пастора семья была крепостью, в которой он мог уберечься от вольных нравов северной столицы. Размеренная семейная жизнь, маленькие радости были необходимы Эйлеру для спокойной работы. Никакие научные занятия не могли быть для него поводом пренебречь семейными обязанностями. Например, он никогда не был безразличным к финансовым проблемам (ему приписываются слова «Где больше дадут, туда и служить пойду»).

1740 год был, возможно, самым тяжелым годом в жизни Эйлера. С одной стороны, все признаки благополучия: его академический оклад достиг максимума — 1200 руб.; он успел многое понять в жизни русского общества; ему оказывал «честь своим особливым расположением» фельдмаршал Миних; Эйлер ладил даже со всемогущим управителем академии Шумахером, что удавалось немногим академикам. (Возможность спокойно заниматься наукой была для Эйлера важнейшим делом, да и вообще он всю жизнь избегал конфликтов. Можно вспомнить многолетние добрые отношения с И. Бернулли, который постоянно ссорился не только с учениками, но и с братом Якобом и сыном Даниилом). С другой стороны, великий ученый, только приближавшийся к тридцатитрехлетнему рубежу, успел из-за постоянных перегрузок основательно подорвать свое здоровье. В 1840 г. он оказался в тяжелой депрессии, что было связано не только со здоровьем, но и с постоянным напряжением из-за неустойчивости политической жизни в России. Позже он вспоминал, что «после кончины достославной императрицы Анны — при последовавшем тогда регенстве, дела стали идти плохо». К тому времени появляется возможность переехать в Берлин к Фридриху II и Эйлер подает заявление об отставке: «...того ради нахожусь принужден, как ради слабого здоровья, так и других обстоятельств, искать приятнейшего климата и принять от его королевского величества прусского учиненное мне призывание. Того ради прошу императорскую академию наук всеподданейше меня милостиво уволить и снабдить для моего и домашних моих проезду потребным пашпортом...» Он обещает сохранить контакты с Академией, «а пришедши в лутчее здоровье, из немецкой земли опять в Россию возвратиться». Впрочем, в Пруссию Эйлер писал, что «твердо решился жить под славным правлением» Фридриха. 29 мая 1741 г. Эйлер увольняется со службы, а позднее удовлетворяется его просьба «почетным членом Академии наук учинить, с определением пенсии по двести рублев в год». Такая практика перевода уезжающих членов Академии в почетные с обязательством оказывать помощь Академии была обычной. С Эйлера берется обещание «через всегдашнюю корреспонденцию и другими математическими пиесами более того служить, нежели как он в действительной академической службе был».

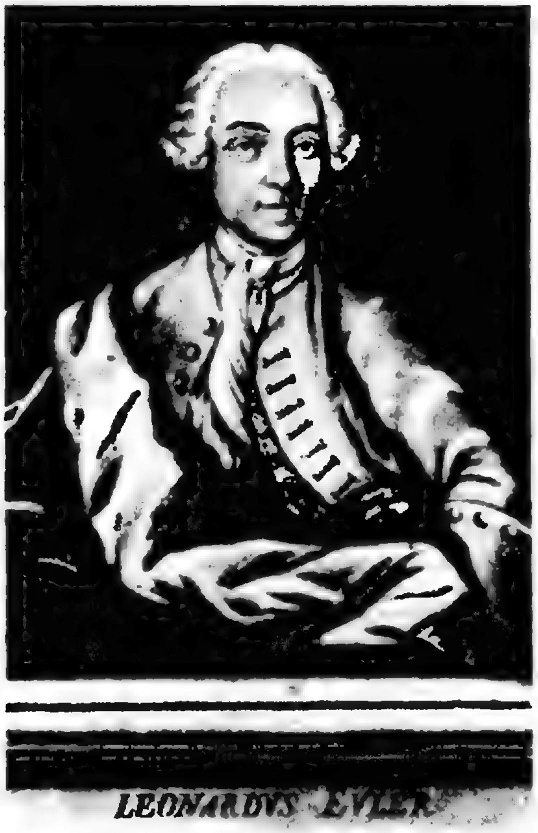
На службе у «коронованного философа».

Итак, Эйлер в Берлине. Постепенно он втягивается в берлинскую жизнь. Поручений здесь не меньше, чем в Петербурге: он рекомендует королю книги по баллистике и сам печатает три тома работ на эту тему, обследует нивелировку канала между Гавелем и Одером и состояние дел в солеварнях, участвует в организации государственных лотерей и реформе вдовьих касс, дает отзывы на множество проектов. Все быстро поняли, что он может хорошо делать разнообразные дела и ни от чего не отказывается. После организации Берлинской Академии наук (1744 г.) Эйлер — директор ее математического департамента.

Однако отношения с королем сложились не самым лучшим образом. Показательно, что оклад Эйлера составлял половину оклада президента Академии Мопертюи. Эйлер редко удостаивался монаршей похвалы.

В Берлине считали, что в обязанности ученых входит служить украшением гостиных, радовать приятиой беседой. Французские ученые Мопертюи и Даржан блестяще владели этим искусством, а Эйлер — нет. В 1746 г. с Эйлером познакомился брат Фридриха Август-Вильгельм, он делится с королем своими впечатлениями: «...г. Мопертюи познакомил меня с математиком Эйлером. Я нашел, что в нем подтверждается та истина, что все вещи несовершенны. Благодаря прилежанию он развил в себе логическое мышление и приобрел тем самым имя, но его внешность и неловкая манера выражаться затемняют все его прекрасные качества и мешают получить от них удовольствие».

Эйлер делил свое время между наукой и домом, но он не принадлежал к категории ученых, не интересовавшихся внешними событиями и избегавших общения с людьми. Его научные познания были энциклопедичны, он много знал по ботанике, химии, анатомии, медицине, хорошо знал языки «древние» и «восточные», владел русским языком. После его смерти вспоминали, что он хорошо знал «лучших писателей древнего мира», «древнюю литературу по математике», «историю всех времен и народов». Н. И. Фусс писал в своих воспоминаниях, что Эйлер знал наизусть «Энеиду», причем помнил, каким стихом начинается и каким кончается каждая страница его экземпляра. Впрочем, для прусского двора культурный уровень Эйлера оказался «недостаточным». Эйлер, прочно завоевавший репутацию одного из крупнейших, а может быть, крупнейшего математика Европы, в окруже-



нии Фридриха был обречен оставаться человеком второго сорта.

После окончания Семилетней войны (1763 г.) Эйлер все решительнее думает о возвращении в Россию. В 1746 и 1750 гг. он уже получал приглашения через президента Академии графа К. Г. Разумовского, но тогда вежливо отложил принятие решения на неопределенный срок.

С восшествием на русский престол Екатерины II (1762 г.) переговоры о переезде возобновились с новой силой. Екатерине II очень хотелось получить Эйлера. Эйлер едва не уехал в Россию в 1763 г., но все же отказался от переезда. Однако через два года Эйлер вызвал гнев короля, заступившись во время ревизии за академического казначея.

Эйлер сообщает в Россию свои условия: оклад в 3000 руб. (такой оклад получал президент, оклад академика обычно не превышал 1200 руб.), место академика по физике для сына Иоганна-Альбрехта, подходящие места для других сыновей (артиллериста и врача), квартира, свободная от солдатского постоя, и, наконец, учреждение для него поста вице-президента с соответствующим чином. Когда-то Фридрих отказался предоставить Эйлеру вакантный пост президента Берлинской Академии. Теперь Эйлер хотел хотя бы отчасти реализовать свои честолюбивые планы в Петербурге (на место президента он не претендовал, считая, что в России его должен занимать вельможа). 6 января 1766 г. Екатерина пишет канцлеру графу Воронцову: «Письмо к Вам г. Эйлера доставило мне большое удовольствие, потому что я узнаю из него о желании его снова вступить в мою службу. Конечно, я нахожу его совершенно достойным желаемого звания вице-президента Академии наук, но для этого следует принять некоторые меры, прежде чем я установлю это звание — говорю установлю, так как доныне его не существовало. При настоящем положении дел там нет денег на жалование в 3000 рублей, но для человека с такими достоинствами, как г. Эйлер, я добавлю к академическому жалованию из государственных доходов, что вместе составит требуемые 3000 рублей. У него будет казенная квартира и ни малейшей тени солдат. ...Я уверена, что моя Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека». Узнав о желании Эйлера принять участие в перестройке Академии, императрица обещает «не предпринимать до его приезда никаких перемен в Академии, на тот конец, чтобы лучше уговориться с ним об улучшениях...». С великим дипломатическим мастерством Эйлеру отказывают в чине: «Я дала бы, когда он хочет, чин, если бы не опасалась, что этот чин сравняет его с множеством людей, которые не стоят г. Эйлера. Поистине его известность лучше чина для оказания ему должного уважения». Эйлер, вероятно, быстро понял, что щедрая императрица умеет четко объяснить границы дозволенного, согласился со всеми условиями и решил «кончить дни свои на службе этой несравненной государыни».

Снова в России

Эйлер прибыл в Петербург 17 июля 1766 года. Он отсутствовал ровно 25 лет и приближался к своему шестидесятилетию. Поначалу Эйлер всерьез принял предложение Екатерины принять участие в реорганизации Академии. Он привез с собой подробный проект, причем он не стремился к автономии Академии, а, напротив, ориентировался на тесное переплетение деятельности Академии и правительственных учреждений. Однако постепенно выяснилось, что императрица не склонна передоверять Эйлеру руководство Академией. Эйлер получил еще один урок того, что просвещенные монархи любят, чтобы их ученые знали свое место.

Эйлер привез с собой в Петербург кипу рукописей, которые не удалось опубликовать в Берлине из-за почти прекратившейся во время войны издательской деятельности. Но еще больше привез он в своей голове почти созревших, но не реализованных замыслов. А жизнь подсказывала ученому, что он должен торопиться. Вскоре после приезда он лишается зрения во втором глазу, но не прекращает работать, диктуя свои сочинения мальчику, не имевшему ни малейшего представления о математике. Приглашенный императрицей окулист барон Вентцель удалил катаракту на одном глазу, но предупредил, что перегрузка неминуемо приведет к возвращению слепоты. Так и случилось вскоре, ибо Эйлер предпочел потерю зрения пассивности. Он пробует привлечь к занятиям других ученых: своего сына, академиков Крафта, Фусса и Лекселя, но больше всего диктует то, что он знал и хотел поведать людям. За полтора десятка лет он продиктовал более 400 статей и 10 больших книг. К слепоте стала присоединяться глухота. В 1766 г. умирает жена и Эйлер женится на ее сестре (так проще всего было сохранить порядок, принятый в доме). Сгорел дом и большая часть имущества. Ничто не может заставить Эйлера прервать работу. Летом 1777 г. Эйлера посетил Иоганн Бернулли (1747—1807), племянник Даниила. Вот его впечатления: «Здоровье его довольно хорошо, и этим он обязан умеренному и правильному образу жизни. Зрением, по большей части утраченным, а одно время вовсе потерянным, он, однако, теперь лучше пользуется, чем многие воображают! Хотя он не может узнать никого в лицо, читать черного на белом и писать пером на бумаге, однако пишет на черном столе свои математические вычисления мелом очень ясно и порядочно в обыкновенную величину. Потом они вписываются в большую книгу одним или другим из его адъюнктов, Фуссом или Головиным (чаще первым из них). И из этих-то материалов составляются под его руководством статьи».

Эйлер сохранил работоспособность до последних дней. Второй петербургский период продолжался 17 лет. В 1783 г. окончил свои дни сын сельского пастора, ставший величайшим математиком Европы. Похоронили Эйлера на Смоленском кладбище. Надпись на памятнике гласила: «Здесь покоятся бренные остатки мудрого, справедливого, знаменитого Леонарда Эйлера». Через 50 лет обнаружилось, что могила утеряна, и лишь случайно (во время похорон невестки ученого) обнаружили «камень, погрузившийся мало-помалу от собственной тяжести в землю и поросший дерном». В Академии почувствовали себя неловко и решили установить новый памятник, «достойный знаменитого геометра». В 1957 г. останки Эйлера были перенесены в Некрополь Александро-Невской Лавры, где и сегодня можно увидеть его могилу.

(Окончание в следующем номере)

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
250

Изменение фигуры Земли и ее вращения

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

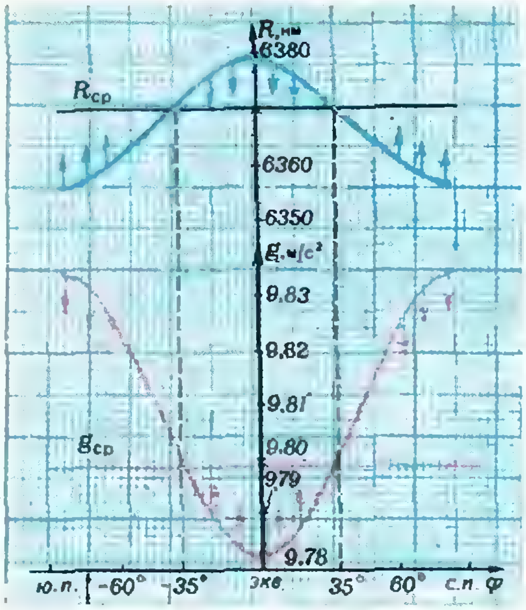
Два года назад в «Докладах Академии наук» и сразу же в журнале «Наука и жизнь» появилось сообщение, от которого сильнее забились сердца физиков. Как показали измерения, проведенные советскими учеными в трех точках Земного шара — в Потсдаме, на станции Лёдово под Москвой и в Новосибирске, ускорение силы тяжести во всех указанных пунктах с течением времени регулярно уменьшается на величину порядка 10^{-7} м/с^2 за год. Недавно известные геофизики Ю. Д. Буланже и Н. Н. Парийский дали объяснение этому удивительному факту. Оказывается, уменьшение ускорения отнюдь не означает, что уменьшается масса Земли или гравитационная постоянная. Причиной всему — изменение фигуры Земли. Попытаемся это объяснить.

Как известно, вращение Земли вокруг своей оси приводит к тому, что наша планета не точный шар, а слегка сплюснутый у полюсов: его экваториальный радиус приблизительно на 21,4 км больше полярного. Кроме того, из-за этого вращения ускорение силы тяжести (чаще называемое ускорением свободного падения), измеряемое в земных условиях, то есть во вращающейся системе отсчета, не есть чисто гравитационное ускорение, а представляет собой разность гравитационного и центростремительного ускорений: $g = GM/R^2 - \omega^2 R\cos\varphi$. Здесь G — гравитационная постоянная, M — масса Земли, R — расстояние до центра Земли, зависящее от широты (см. рисунок), ω — угловая скорость вращения Земли, φ — географическая широта места. Таким образом, измеряемое ускорение меняется с широтой: оно минимально на экваторе и максимально на полюсах.

Еще Лаплас, автор классического «Трактата о небесной механике», подозревал, что вращение Земли не совсем равномерно во времени. Теперь нам известно несколько тому причин. Во-первых, вращение замедляется океанскими приливами, которые вызваны притяжением Луны и Солнца. Величину этого постоянного замедления, называемого вековым (в отличие от других, более кратковременных, изменений угловой скорости), удалось найти, используя данные о полных солнечных затмениях в древности. Она оказалась очень малой.

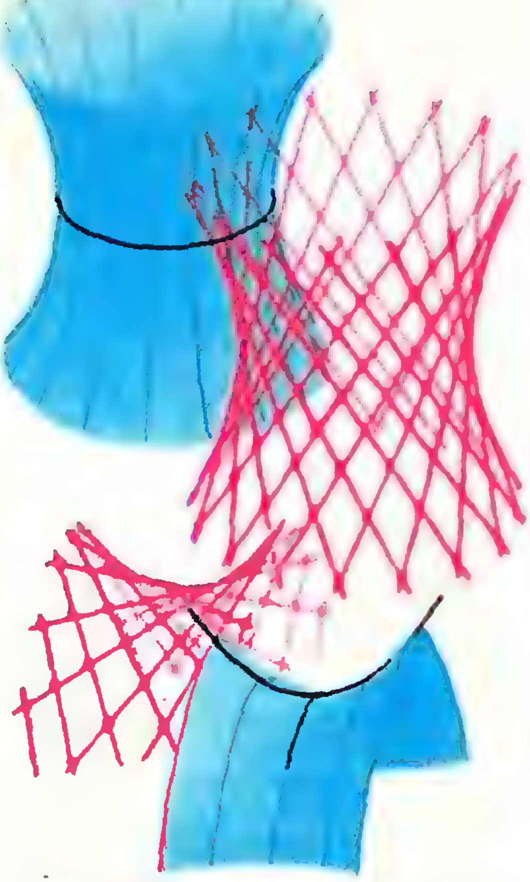
Сохранились сведения о том, например, что одно из полных солнечных затмений наблюдали жители Вавилона 15 апреля 136 г. до н. э. Если сделать соответствующий расчет в предположении, что скорость вращения Земли неизменна, то окажется, что в указанный день действительно должно было бы произойти затмение, но не в Вавилоне, а примерно на 49° западнее его. Однако затмение наблюдалось именно в Вавилоне, откуда можно заключить, что угловое смещение полосы затмения вызвано накопившимся изменением угловой скорости вращения Земли. Для оценки будем считать, что угловая скорость уменьшалась равномерно, то есть с постоянным угловым ускорением $\beta = \Delta\omega/t$. С момента затмения прошло примерно 2100 лет, или $t = 6{,}7 \cdot 10^{10}$ с. По аналогии с равноускоренным прямолинейным движением запишем формулу зависимости углового смещения α ($\alpha = 49° \approx 0{,}85$ рад) от времени: $\alpha = \beta t^2/2$. Отсюда угловое ускорение, то есть быстрота изменения угловой скорости, $\beta = \Delta\omega/t \approx 3{,}8 \times 10^{-22}$ с$^{-2}$.

(Окончание см. на с. 42)



Под редакцией Д. Б. ФУКСА

Прямые на кривой поверхности



То, что на сильно искривленной поверхности могут целиком помещаться прямые, не удивит читателя, рассмотревшего обложку предыдущего номера «Кванта». Мы еще не раз обратимся к этому феномену на наших геометрических страничках; сегодня же мы поговорим о поверхностях, на которых этих прямых особенно много.

Поверхность называется *линейчатой*, если через каждую ее точку проходит целиком содержащаяся в ней прямая; прямые, лежащие на линейчатой поверхности, называются ее ***прямолинейными образующими***. Поверхность называется *двукратно линейчатой*, если через каждую ее точку проходит по крайней мере две различные прямолинейные образующие.

Простейший пример неплоской двукратно линейчатой поверхности — «однополостный гиперболоид вращения». Это — поверхность, получающаяся при вращении гиперболы вокруг не пересекающей ее оси симметрии (рис. 1). В системе координат $OXYZ$ с началом в центре гиперболы и с осью OZ, проходящей по оси вращения, уравнение нашей поверхности имеет вид

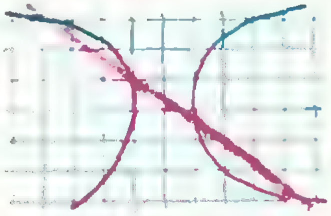
$$x^2+y^2=a^2z^2+b^2, \qquad (1)$$

где a и b — длины отрезков, отмеченных на рисунке 1. Мы не занимаемся выводом этого уравнения, и оно нам почти не понадобится. Важно лишь, что наша поверхность задается многочленом второй степени от x, y, z, то есть наш гиперболоид есть, как говорят, *поверхность второго порядка*.

Следующее свойство нашего гиперболоида является, в действительности, общим для всех поверхностей второго порядка: *если прямая имеет с гиперболоидом по крайней мере три общие точки, то она в нем содержится.*

Доказательство. Пусть l — любая прямая и $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ — любые две ее точки. Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ имеет координаты $(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$. Пусть A — произвольная точка прямой l. Тогда вектор $\overrightarrow{A_1A}$ коллинеарен $\overrightarrow{A_1A_2}$; значит, он имеет координаты $(\lambda(x_2-x_1); \lambda(y_2-y_1); \lambda(z_2-z_1))$, где λ — некоторое число. Значит, точка A, в свою очередь, имеет координаты $(x_1+\lambda(x_2-x_1); y_1+\lambda(y_2-y_1); z_1+\lambda(z_2-z_1))$. Чтобы точка A лежала на нашей поверхности, необходимо, чтобы ее координаты удовлетворяли уравнению поверхности. Подставляя эти координаты в уравнение (1) и перенося все члены в левую часть, мы получаем уравнение относительно λ вида $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma=0$, где коэффициенты α, β, γ легко подсчитываются (они зависят от a, b, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2), но их явное выражение нам не нужно. Если хотя бы один из этих коэффициентов α, β, γ не равен нулю, последнее уравнение имеет не более двух решений, то есть прямая имеет не более двух общих точек с поверхностью, что невозможно по условию. Значит, $\alpha=\beta=\gamma=0$, и при любом λ точка A лежит на поверхности.

Кстати, точно так же доказывается, что кривая *второго порядка* (то есть кривая на плоскости, заданная многочленом второй степени от неизвестных x, y) пересекается с прямой (не содержащейся в ней) не более чем в двух точках. (В школьных тетрадях приходится иногда видеть небрежный рисунок гиперболы в таком роде:



Красная прямая пересекает эту «гиперболу» в 4 точках, что невозможно: ведь гипербола — кривая второго порядка!)

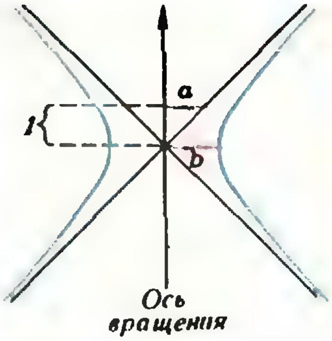


Рис. 1.

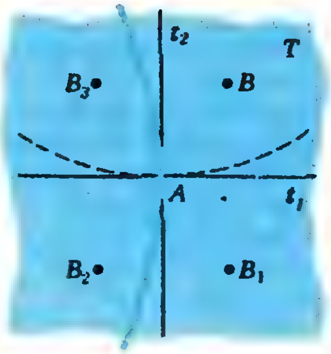


Рис. 2.

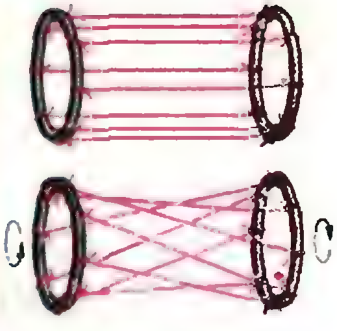
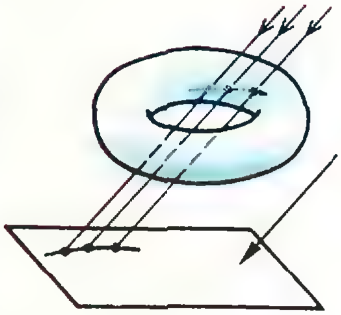


Рис. 3.

Вернемся к нашему гиперболоиду. Возьмем точку A на горловой окружности (то есть на линии пересечения гиперболоида с плоскостью XOY), проведем касательную t_1 к этой окружности и касательную t_2 к соответствующему положению вращаемой гиперболы, а затем проведем через прямые t_1 и t_2 плоскость T. Заметим, что окружность и гипербола, которых касаются прямые t_1 и t_2, лежит по разные стороны от плоскости T. Поэтому в любой из четырех четвертей, на которые прямые t_1 и t_2 делят плоскость T, найдется общая точка гиперболоида и плоскости. Пусть B — одна из таких точек (рис. 2). Так как, очевидно, наш гиперболоид симметричен относительно плоскостей, проведенных через t_1 и t_2 перпендикулярно T, его пересечение с T симметрично относительно t_1 и t_2 и вместе с точкой B ему принадлежат точки B_1, B_2 и B_3, образующие с B прямоугольник с центром A. Каждая из диагоналей t_1, t_2 этого прямоугольника имеет с гиперболоидом три общие точки (соответственно, B, A, B_2 и B_1, A, B_3). Значит, согласно доказанному выше, каждая из них содержится в нашем гиперболоиде. Остается заметить, что это рассуждение применимо к любой точке A горловой окружности. Прямые t_1 и отдельно прямые t_2 заметают весь гиперболоид. Таким образом, *однополостный гиперболоид вращения — двукратно линейчатая поверхность.*

В заключение два замечания. Первое состоит в том, что однополостный *гиперболоид вращения является также поверхностью вращения одной прямой вокруг другой, ей не параллельной* (докажите это!). Из этого видно, что соорудить гиперболоид легче, чем нарисовать гиперболу: достаточно связать нитками два одинаковых обруча, как показано на рисунке, и повернуть один обруч относительно другого, держа все нити в натянутом состоянии (рис. 3). Заменив обручи на картонные круги, посаженные на общую ось, можно соорудить такую модель для школьного математического кабинета. Вопрос на сообразительность: можно ли сделать нитяной гиперболоид, имея два неодинаковых обруча?

Второе замечание. Заключается оно в том, что двукратно линейчатых поверхностей существует немного. Если сжать гиперболоид к любой плоскости, то он, конечно, сохранит свою двукратную линейчатость; возникающая поверхность называется *однополостным гиперболоидом* (не «вращения», а просто). Другой пример линейчатой поверхности второго порядка — *гиперболический параболоид.* Эта поверхность получится, если в каждой точке параболы, ось которой вертикальна и направлена вверх, подвесить за вершину перпендикулярную ей параболу (см. рисунок в начале «странички»; подвешиваемые параболы все одинаковы, парабола подвески может иметь другие размеры). Гиперболический параболоид — тоже поверхность второго порядка, в подходящей системе координат он имеет уравнение $z=xy$. Других связных (то есть состоящих из одного куска) двукратно линейчатых поверхностей не бывает.



Задание к следующему выпуску геометрической странички.

Тор (поверхность вращения окружности вокруг не пересекающей ее оси, лежащей с ней в одной плоскости) пронизывается пучком параллельных прямых, которые пересекают затем плоскость («экран»). Мы рассматриваем только те прямые, которые касаются тора. Точки касания мы отмечаем синим карандашом, точки пересечения наших прямых с экраном — красным. На торе возникает синяя линия, на экране — красная. Попробуйте их нарисовать. (Особенно интересный результат получится, если угол наклона прямых к плоскости осевой окружности тора невелик — меньше 45° — и если расстояние от оси вращения до вращаемой окружности не превышает радиуса окружности.)

Перед школьной олимпиадой

Кандидат физико-математических наук
А. Г. ГЕЙН

Сегодняшнее занятие математического кружка следует рассматривать как подготовительное к олимпиадам.

Для многих школьников математические олимпиады — это первый шаг в знакомстве с внешкольной математикой. На олимпиадах ребята учатся применять свои знания к решению нестандартных задач, соревнуются со сверстниками из других школ и городов. Обычно на олимпиаде предлагаются задачи, которые условно можно назвать алгебраическими, геометрическими, числовыми и логическими. Мы предлагаем вашему вниманию несколько таких задач уровня школьных и районных олимпиад (цифра в скобках указывает класс, в котором предлагалась задача*)). Краткие решения и указания ко всем задачам вы найдете в следующем номере журнала.

Начнем с задач алгебраических и геометрических — они, пожалуй, не нуждаются в комментариях.

1. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов — за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон? (7)

2. Пусть a, b, c, d — целые числа и $a+b+c+d=0$. Докажите, что число $a^2+b^2+c^2+d^2$ можно представить в виде суммы квадратов трех целых чисел. (7)

3. Даны не равные нулю числа a, b, p, q такие, что $p+q=1$ и $\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=\frac{1}{pa+qb}$. Докажите, что $a=b$. (8)

4. Найдите все числа a, b, c, d такие, что

$$\begin{cases} abc=a+b+c, \\ bcd=b+c+d, \\ cda=c+d+a, \\ dab=d+a+b. \end{cases} \qquad (8)$$

5. Найдите все числа x, y, z такие, что

$$\begin{cases} x^4+y^4+z^4=3, \\ x^5+y^5+z^5=3, \\ x^6+y^6+z^6=3. \end{cases} \qquad (9)$$

6. Определите значение параметра k, если известно, что неравенство $\left|\frac{x^2+kx+10}{x^2+3x+10}\right|<1$ выполняется для всех x. (9)

7. При каком α уравнение $1+\sin^2\alpha x=\cos x$ имеет единственное решение? (10)

8. Решите уравнение $x^3-[x]=4$, где $[x]$ — целая часть числа x. (10)

9. Найдите

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right). \qquad (10)$$

10. Докажите, что если каждая диагональ выпуклого четырехугольника разбивает его на два конгруэнтных треугольника, то этот четырехугольник — параллелограмм. (7)

11. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. На первой окружности постройте точку A, а на второй — точку B так, чтобы треугольник ABM был равносторонним. (8)

12. Каково множество центров окружностей, вписанных в треугольник ABM, когда точка M пробегает окружность, а AB — фиксированная хорда этой окружности? (9)

13. Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины пирамиды с точками пересечения медиан противолежащих этим вершинам граней, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины. (10)

---

*) Эти задачи предлагались школьникам Свердловской области в разные годы. Свердловские областные олимпиады по математике организуются учеными Института математики и механики Уральского научного центра АН СССР и Уральского государственного университета им. А. М. Горького. Единое жюри составляет варианты от школьного до областного туров. Об олимпиадах в Свердловске см. «Квант», 1983, № 9.

Числовые задачи — это, в основном, задачи на делимость и решение уравнений в целых числах. Такие задачи в школе практически не встречаются и участнику олимпиады приходится изобретать методы их решения непосредственно в «боевой» обстановке. Начнем с совсем простых задач.

14. Сумма 1982 целых чисел нечетна. Докажите, что произведение этих чисел четно. (7)

15. Докажите, что число 2^9+2^{99} делится на 100. (7)

В задачах на целые числа часто помогает делимость на 3 и на 9.

16. Докажите, что ни при каких натуральных m и n число 10^m+1 не делится на 10^n-1. (7)

17. Найдите все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении на 2. (7)

18. Докажите, что уравнение $x^2+1=3y$ не разрешимо в целых числах. (7)

В последней задаче используется тот факт, что *если сумма квадратов двух целых чисел делится на 3, то каждое слагаемое делится на 3.* Это утверждение верно и для числа 7, и для числа 11, и вообще для всех простых чисел вида $4k+3$. Но это уже — «настоящая» математическая теорема, впервые доказанная П. Ферма. Как видите, от олимпиадной задачи до математической теоремы — один шаг. Только как его сделать?

19. Умножение на 9 изменяет порядок цифр некоторого четырехзначного числа на обратный. Найдите это число. (7)

20. Найдите все натуральные числа x, y, z, для которых выполняется равенство $xyz=x+y$. (7)

21. Найдите все натуральные числа, обладающие следующим свойством: существует такое k, $1<k<8$, что если все цифры квадрата этого числа уменьшить на k единиц, то получится квадрат числа, которое на k меньше, чем исходное. (10)

Логические задачи обычно называют «чисто олимпиадными». Вот несколько таких задач.

22. Докажите, что среди 82 кубиков, каждый из которых выкрашен в определенный цвет, всегда можно выбрать 10 кубиков так, что либо все они выкрашены в разные цвета, либо все они — одного цвета. (7)

23. Плоскость произвольным образом раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 м друг от друга. (7)

24. а) Докажите, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 10.

б) Докажите, что среди любых $k+1$ натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на k. (7)

25. По краю круглого стола равномерно расставлены таблички с фамилиями дипломатов, участвующих в переговорах. После начала переговоров оказалось, что ни один из дипломатов не сидит против своей таблички. Можно ли повернуть стол так, чтобы по крайней мере два дипломата сидели против своих табличек? (8)

Основная идея, используемая при решении этих четырех задач, заключена в следующем легко доказываемом утверждении, называемом *принципом Дирихле: если $kn+1$ предметов разложено в k ящиков, то по крайней мере в одном ящике лежит не менее $n+1$ предметов.* Надо только сообразить, что принять за «предметы», а что — за «ящики».

Та же идея избыточности используется и в следующих трех задачах.

26. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдется прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей. (9)

27. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд, суммарная длина которых больше, чем 7π. Докажите, что найдется диаметр, пересекающий не менее восьми хорд. (9)

28. Внутри круга радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо ширины 1 и внутреннего радиуса 2, содержащее не менее десяти из этих точек. (10)

В задачах, где известные в каком-то смысле равноправны, полезно рассмотреть «экстремальный» (то есть крайний) по отношению к некоторому свойству элемент (самый левый, самый верхний, самый длинный, наибольший, наименьший и т. п.).

29. В каждой вершине десятиугольника записано число, причем каждое число равно полусумме чисел, написанных в соседних вершинах. Докажите, что все десять чисел равны между собой. (7)

30. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике можно выбрать три диагонали так, что из них можно составить треугольник. (8)

31. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_3^2, \\ x_2+x_3=x_4^2, \\ x_3+x_4=x_5^2, \\ x_4+x_5=x_1^2, \\ x_5+x_1=x_2^2. \end{cases} \qquad (10)$$

32. Найдите положительные решения системы уравнений

$$x^2+y^2=1,$$
$$x^y=y^x. \qquad (9)$$

33. Можно ли 44 монеты разложить по 10 кошелькам так, чтобы любые два из них содержали различное число монет? (Считаем, что два пустых кошелька содержат одинаковое число монет.) (8)

34. В квадрате со стороной 1 отмечено 500 различных точек. Докажите, что среди отмеченных точек можно выбрать 12 точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{12}$ так, что длина ломаной $A_1A_2 \ldots A_{12}$ меньше 1. (10)

Часто на олимпиадах предлагаются задачи, в условии которых приводится описание некоторого способа действий и спрашивается, может ли в результате этих действий получиться тот или иной результат. Основным методом решения таких задач является обнаружение свойства исходного объекта, не меняющегося при выполнении действий, указанных в задаче (такое свойство называют *инвариантом*). Если конечный объект задачи не обладает найденным свойством, то он, очевидно, не может быть получен в результате описанных действий.

Вот несколько подобных задач.

35. На чудо-яблоне садовник вырастил 25 бананов и 30 апельсинов. Каждый день он срывает два плода и тут же на яблоне вырастает новый, причем если он срывает два одинаковых плода, то вырастает апельсин, а если он срывает два разных плода, то вырастает банан. Каким окажется последний плод на этом дереве? (7)

36. Даны три числа: 2; $1+\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$.

а) За один ход разрешается написать новые три числа, заменив каждое из исходных чисел полусуммой двух других чисел. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, придти к набору 1; $2+\sqrt{2}$; $2-\sqrt{2}$?

б) За один ход разрешается любые два числа заменить их суммой, деленной на $\sqrt{2}$, и разностью, деленной на $\sqrt{2}$, оставив третье число неизменным. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, прийти к набору 1; $\sqrt{2}$; $1/\sqrt{2}$? (8)

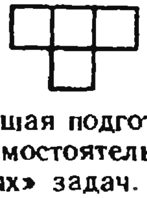
37. Три кузнечика играют в чехарду: если кузнечик из точки *A* прыгает через кузнечика в точке *B*, то он оказывается в точке *C*, симметричной точке *A* относительно точки *B*. В исходном положении кузнечики занимают три вершины квадрата. Могут ли они, играя в чехарду, попасть в четвертую его вершину? (8)

В задачах на клетчатой бумаге или на шахматной доске найти инвариант помогает удачная раскраска.

38. У шахматной доски 8×8 вырезаны левая верхняя и правая нижняя угловые клетки. Можно ли ее замостить косточками домино, покрывающими ровно две клетки доски, так, чтобы покрыть без наложений всю такую доску? (7)

39. Можно ли из четырехклеточных фигурок, изображенных на рисунке, составить квадрат размером 50×50 клеток? (9)

40. Из шахматной доски 8×8 вырезана одна угловая клетка. Можно ли оставшуюся часть покрыть без наложений прямоугольниками, составленными из трех клеток? (9)



Самая лучшая подготовка к олимпиаде — самостоятельное решение «олимпиадных» задач. Желаем вам успеха!

$\mathbf{n^x = x^n}$

Л. Б. ПЕЧЕРСКИЙ

Сколько корней имеет это уравнение, если $n \in \mathbb{N}$ и $n \neq 1$?

С отрицательными корнями все просто и ясно: если n — четное, уравнение имеет один отрицательный корень (набросайте график!); если n — нечетное, таких корней нет. Займемся **положительными** корнями. Данное уравнение равносильно уравнениям

$$\ln(n^x) = \ln(x^n),$$
$$x \cdot \ln n = n \cdot \ln x,$$
$$x \cdot \ln n - n \cdot \ln x = 0.$$

Сколько же нулей*) имеет на $]0; +\infty[$ функция $y(x) = x \cdot \ln n - n \cdot \ln x$?

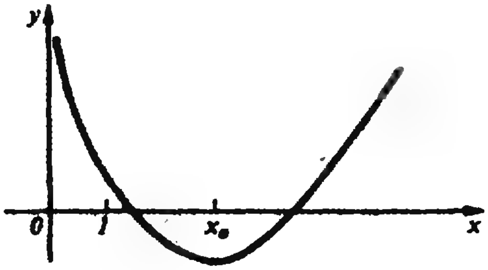
Ее производная $y'(x) = \ln n - \frac{n}{x}$ на $]0; +\infty[$ возрастает (набросайте график!). В точке $x_0 = \frac{n}{\ln n}$ $y'(x_0) = 0$; значит, на $]0; x_0[$ $y'(x) < 0$, на $]x_0; +\infty[$ $y'(x) > 0$. Так как функция y непрерывна в точке x_0, x_0 — точка ее минимума. На $]0; x_0]$ функция y убывает, на $[x_0; +\infty[$ — возрастает.

Какой же знак имеет функция y в точке x_0?

$$y(x_0) = n(1 - \ln n + \ln \ln n).$$

Чтобы определить знак числа $y(x_0)$, исследуем функцию $z(x) = 1 - \ln x + \ln \ln x$. Поскольку $z'(x) = \frac{1 - \ln x}{x \cdot \ln x}$, $x_1 = e$ — точка максимума функции z, причем на $]1; e]$ z возрастает, на $[e; +\infty[$ — убывает. Так как $z(x_1) = 0$, в остальных точках области определения $z(x) < 0$; в частности, при $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ $z(n) < 0$. Значит, $y(x_0) < 0$.

Функция y непрерывна на $]0; +\infty[$. На $]0; x_0]$ она убывает. Поскольку «около нуля» (например, заведомо при $x < 1$) $y(x) > 0$, а $y(x_0) < 0$, на интервале $]0; x_0[$ функция y имеет ровно один нуль (см. рисунок).



Покажем, что при «больших» x («на плюс бесконечности») $y(x) > 0$. Для этого рассмотрим функцию $u(x) = \frac{x}{\ln x}$. Поскольку $u'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, u возрастает на $[e; +\infty[$. Если $n \geqslant 3$, то при $x > n \geqslant 3$

$$\frac{x}{\ln x} > \frac{n}{\ln n},$$
$$x \cdot \ln n > n \cdot \ln x,$$
$$x \cdot \ln n - n \cdot \ln x > 0,$$
$$y(x) > 0.$$

Докажите сами, что и при $n = 2$ $y(x) > 0$ при «больших» x.

Поскольку $y(x_0) < 0$, y возрастает и непрерывна на $[x_0; +\infty[$ и $y(x) > 0$, при «больших» x, на промежутке $]x_0; +\infty[$ функция y тоже имеет ровно один нуль (см. рисунок).

Итак, при $n \geqslant 2$ уравнение, стоящее в заголовке, имеет на $]0; +\infty[$ два корня: один — на $]0; x_0[$, другой — на $]x_0; +\infty[$.

Между прочим, один его корень: $x = n$ — очевиден сразу.

Задачи о числе корней некоторого уравнения $f(x) = g(x)$ встречаются на вступительных экзаменах. Как правило, даются уравнения, недоступные алгебраическим средствам. В подобных случаях часто бывает полезно исследовать функции f, g, входящие в уравнение, а тут уж совершенно естественно использовать средства анализа.

---

*) Число [illegible] называется *нулем* функции f, если $f(a) = 0$

Где ошибка?

Кандидат физико-математических наук
Я. Е. ЖАК

К ученице 10 «А» класса Вале Бессоновой забежала ее подруга из 10 «Б» Катя Сапожникова и сразу же сообщила:

— Что у нас сегодня на уроке математики Воробьев устроил!

— Что же? — спросила Валя.

— Елена Васильевна доказывала, что показательная функция растет быстрее, чем любая степенная функция*). Все было вроде бы понятно. Елена Васильевна закончила доказательство, как вдруг Воробьев заявил, что может привести пример степенной функции, которая растет быстрее, чем показательная. Елена Васильевна послала его к доске, чтобы мы вывели его на чистую воду.

— И вывели? — спросила Валя.

— В том-то и дело, что нет! — ответила Катя. — До конца урока голову ломали над его рассуждением, но так и не нашли ошибки.

И Катя рассказала своей подруге это рассуждение. Вот оно.

Пусть $x_n=2^n/n^8$. Найдем несколько первых членов последовательности x_n:

$$x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2^6},\ x_3=\frac{8}{6561},\ x_4=\frac{1}{2^{12}}$$

Это наводит на мысль, что предел этой последовательности равен нулю. В самом деле, положим $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Заметим, что

$$x_n=2\cdot\frac{2^{n-1}}{(n-1)^8}\left(\frac{n-1}{n}\right)^8=2x_{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^8.$$

Но, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}=x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^8=1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}=2\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}$, откуда $x_0=2x_0$, то есть $x_0=0$. А это значит, что степенная функция n^8 растет быстрее, чем показательная 2^n!

Сообщим читателю, что Валя нашла-таки ошибку в этом рассуждении. В чем же она?

---

*) См. п. 70 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10»

Физика 8, 9, 10

Публикуемые ниже заметки «Перемещение при прямолинейном равноускоренном движении» и «О графике прямолинейного равноускоренного движения» предназначены восьмиклассникам, а заметки «Давление идеального газа» и «Физический смысл универсальной газовой постоянной» — девятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Перемещение при прямолинейном равноускоренном движении

В учебнике «Физика 8» выражение

$$s=v_0t+\frac{at^2}{2}$$

для перемещения тела (материальной точки) при прямолинейном равноускоренном движении выводится из графика зависимости скорости тела от времени. Но то же выражение можно получить и прямым вычислением. Покажем это.

Пусть точка движется вдоль прямой с ускорением a в течение времени t, начиная с некоторого начального момента $t=0$, когда скорость (начальная скорость) была равна v_0. Разделим мысленно все время движения на одинаковые малые промежутки времени Δt, настолько малые, что скорость в течение времени Δt можно считать постоянной. Однако будем считать, что к концу каждого такого промежутка скорость как бы скачком возрастает на величину $a\Delta t$ (движение ведь ускоренное).

За первый промежуток времени Δt перемещение Δs_1 равно $v_0\Delta t$. Во второй промежуток времени скорость уже равна $v_0+a\Delta t$, а перемещение Δs_2 равно $(v_0+a\Delta t)\Delta t=v_0\Delta t+a(\Delta t)^2$, в третий оно равно $(v_0+2a\Delta t)\Delta t=v_0\Delta t+2a(\Delta t)^2$ и т. д.

Таким образом,

$$\Delta s_1 = v_0\Delta t,$$
$$\Delta s_2 = v_0\Delta t + a(\Delta t)^2,$$
$$\Delta s_3 = v_0\Delta t + 2a(\Delta t)^2,$$
$$\Delta s_4 = v_0\Delta t + 3a(\Delta t)^2,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\Delta s_n = v_0\Delta t + (n-1)a(\Delta t)^2,$$

где n — число промежутков, на которые мы разделили время движения t. Так как промежутки Δt малы, n велико, поэтому в правой части последнего равенства можно пренебречь единицей по сравнению с n и считать, что

$$\Delta s_n = v_0\Delta t + na(\Delta t)^2.$$

Общее перемещение s равно сумме всех малых перемещений Δs_i:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \ldots + \Delta s_n,$$

или

$$s = nv_0\Delta t + a\Delta t^2(1+2+3+\ldots+n).$$

Сумма последовательных натуральных чисел равна полусумме крайних слагаемых, умноженной на их число: $1+2+3+\ldots+n = \frac{1+n}{2}n$. Пренебрегая единицей по сравнению с n, получаем

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n^2}{2}.$$

Отсюда

$$s = v_0 n\Delta t + \frac{a(n\Delta t)^2}{2}.$$

Но $n\Delta t = t$, а $(n\Delta t)^2 = t^2$, тогда окончательно

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

О графике прямолинейного равноускоренного движения

При изучении механического движения широко пользуются графиками, показывающими зависимость координаты тела от времени (график движения) и скорости тела от времени (график скорости). Графики, как и соответствующие формулы, полностью описывают движение, то есть позволяют определить координату и скорость в любой момент времени. Но график имеет преимущество наглядности (построив график какой-либо функции, можно как бы «увидеть» функцию).

В учебнике «Физика 8» приведены графики движения и скорости для прямолинейного равномерного движения, а также график скорости для прямолинейного равноускоренного движения. С помощью последнего графика была получена формула для перемещения s, а значит, и для координаты x тела, движущегося равноускоренно:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2},\quad x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Эти формулы, впрочем, можно получить и прямым вычислением (см., например, заметку «Перемещение при прямолинейном равноускоренном движении»). График же движения для этого случая не приведен, а он представляет немалый интерес. О нем и пойдет речь в этой заметке.

Как видно из последней формулы, выражение для координаты при равноускоренном движении — это квадратный трехчлен. В общем случае коэффициенты при t и t^2 и свободный член не равны нулю. График, выражающий такую функцию, называется параболой. Ее вид и расположение относительно осей координат зависит от трех констант — x_0, v_0 и a. На рисунке 1, например, изображена парабола, соответствующая уравнению

$$x = 3 + 12t + 3t^2.$$

Оно описывает прямолинейное равноускоренное движение с начальной скоростью $v_0 = 12$ м/с и ускорением $a = 6$ м/с^2. Начало отсчета времени — это момент времени, когда координата x тела (начальная координата) была равна $x_0 = 3$ м. Графиком такого движения служит, строго говоря, лишь правая часть кривой, показанная на рисунке 1 сплошной линией. Но если бы тело двигалось по той же прямой и с тем же ускорением и до момента времени, принятого за начало отсчета, то графиком его движения была бы и левая часть кривой тоже (она показана на рисунке 1 штриховой линией).

В качестве другого примера рассмотрим движение, представленное

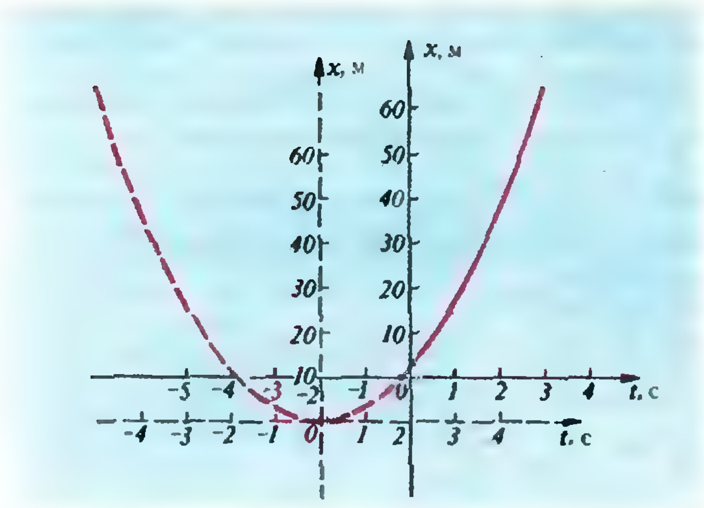


Рис. 1.

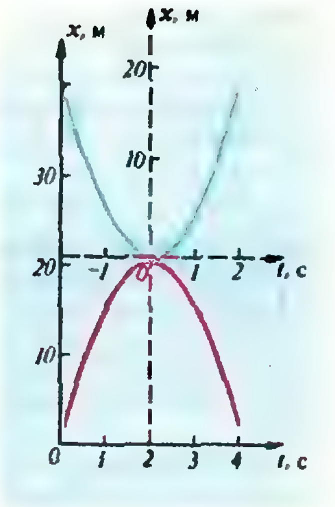


Рис. 2.

формулой

$$x=2+20t-5t^2.$$

Она описывает движение тела, которому в начальный момент времени $t=0$, когда его координата была равна $x_0=2$ м, сообщена начальная скорость $v_0=20$ м/с и которое в дальнейшем движется с постоянным ускорением $a=-10$ м/с^2. Это движение очень близко к движению тела, брошенного вертикально вверх (туда направлена ось X) с начальной скоростью 20 м/с с высоты 2 м над Землей. Мы лишь, для простоты, приняли ускорение свободного падения равным не 9,8 м/с^2, а 10 м/с^2. График этого движения приведен на рисунке 2 сплошной красной линией.

Из рисунка 2 очень ясно видно (яснее, чем из соответствующей формулы), как движется тело. Сначала оно поднимается вверх, быстро удаляясь от Земли. Через 2 секунды оно достигает максимальной высоты 22 м, после чего начинает двигаться вниз (падать). Движению вверх соответствует левая ветвь параболы, падению вниз — правая ветвь. Вообще парабола (с двумя ветвями) всегда изображает движение «туда и обратно». Синей линией на рисунке 2 показан график такого же равноускоренного движения, но с противоположно направленным ускорением.

В математике доказывается, что парабола, выражающая квадратный трехчлен вида

$$x=x_0+v_0t+\frac{at^2}{2},$$

параллельным переносом осей координат может быть преобразована в параболу, выражающую формулу

$$x=\frac{a}{2}t^2.$$

Применительно к нашему случаю для этого нужно ось t перенести вдоль оси X на расстояние, равное $x_0-v_0^2/2a$, а ось X перенести вдоль оси t на расстояние, равное $-v_0/a$. На рисунках 1 и 2 перенесенные по этому правилу оси показаны штриховыми линиями.

Такой перенос осей означает, что за начало отсчета времени теперь принимается тот момент, когда скорость тела равна нулю (при движении «туда и обратно» такой момент обязательно существует), а за начало отсчета координаты выбирается точка, в которой в этот момент находится тело. После переноса осей парабола становится симметричной относительно оси X. Значения координаты x в момент времени t и $-t$ и теперь одинаковы, поскольку в формулу входит только t^2 и замена t на $-t$ ничего не изменяет.

По такой параболе (в новых осях) легко найти ускорение. Ясно, что ордината точки параболы, соответствующей моменту времени $t=1$, равна $a/2$, откуда и находим a. Ускорение a можно найти и другим путем. Если построить график зависимости x не от t, а от t^2, то из формулы $x=at^2/2$ видно, что получится прямая, проходящая через начало координат. На рисунке 3 приведен такой график для нашего случая движения тела, брошенного вверх. Значение $a/2$, а значит и a, можно теперь найти, взяв для любой точки графика отношение ее ординаты к абсциссе. Иначе говоря, $a/2$ равно тангенсу угла наклона прямой к оси t.

Интересна еще одна особенность параболы, позволяющая легко определять и скорость движения тела. Известно, что если график движения представляет собой прямую (прямолинейное равномерное движение), то скорость определяется углом наклона прямой к оси t. График же прямолинейного неравномерного движения — всегда кривая. Если выделить на этой кривой участок, соответствующий промежутку времени Δt и изменению координаты Δx (рис. 4), то отношение $\Delta x/\Delta t$ будет равно средней скорости за время Δt. Как видно из рисунка 4, она определяется углом наклона хорды, стягивающей выделенный участок кривой (она равна тангенсу этого угла). Если беспредельно уменьшать промежуток времени Δt, устремляя его к нулю, то хорда перейдет в касательную к кривой в точке, соответствующей моменту времени t, и угол ее наклона определит уже мгновенную скорость в этот момент времени. Таким образом, чтобы найти по графику движения мгновенную скорость в какой-то момент времени, нужно провести касательную к графику в точке, соответствующей этому моменту, и найти тангенс угла ее наклона к оси t.

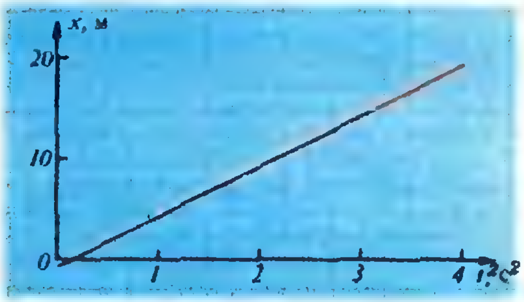


Рис. 3.

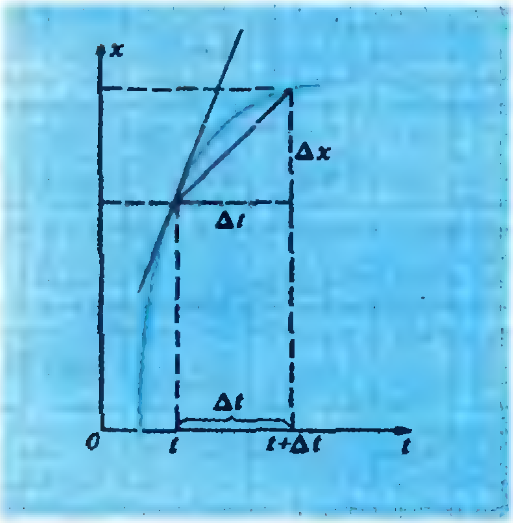


Рис. 4.

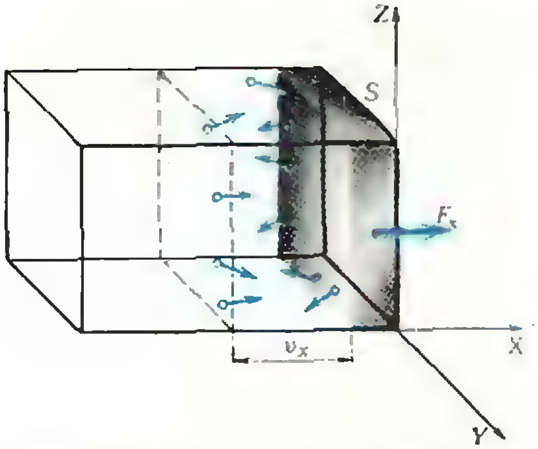
Точное проведение касательной к кривой в заданной точке (если кривая не окружность) — задача не простая. Однако в случае прямолинейного равноускоренного движения, графиком которого является парабола, для определения скорости в любой момент времени касательную можно и не проводить. Эта особенность параболы (квадратного трехчлена) связана с тем обстоятельством, что при прямолинейном равноускоренном движении средняя скорость за любой промежуток времени равна полусумме начальной и конечной скоростей. Поэтому, чтобы, пользуясь параболой, найти мгновенную скорость в какой-то момент времени, нужно выбрать промежуток времени, для которого интересующий нас момент служит серединой. Тогда средняя скорость на этот промежуток оказывается равной мгновенной скорости в середине промежутка. А чтобы найти среднюю скорость, нужно провести хорду, а не касательную, что не представляет большого труда.

Давление идеального газа

Вывод выражения для давления идеального газа

$$p = \frac{1}{3} nm\overline{v^2} = \frac{2}{3} n \frac{m\overline{v^2}}{2},$$

приведенный в учебнике «Физика 9», основан на предположении, что моле-



кулы ударяются о стенку сосуда обязательно упруго. Покажем, что эту же формулу можно получить и не делая никаких предположений о характере ударов молекул о стенку.*)

Достаточно знать, что молекулы движутся хаотически. Это, в частности, означает, что в любой момент времени число молекул, движущихся во взаимно противоположных направлениях, одинаково.

Кроме того, мы знаем, что давление p газа равно по определению

$$p=\frac{F}{S},$$

где F — сила, действующая на перпендикулярную ей поверхность площадью S. Значит, нам предстоит вычислить силу F. Это мы сделаем, пользуясь законами механики Ньютона.

Поместим наш газ в сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда и направим оси координат X, Y и Z вдоль его ребер, как показано на рисунке. Найдем силу, с которой газ действует, например, на правую стенку сосуда. Очевидно, что ее надо обозначить через F_x.

По третьему закону Ньютона эта стенка сама действует на прилегающий к ней слой газа с силой $-F_x$ (на рисунке этот слой газа заштрихован). Из второго закона Ньютона следует, что сила $-F_x$ должна сообщить нашему слою (как и всякому телу) импульс, равный $-F_xt$, где t — время действия силы. Но наш слой газа находится в покое (как и весь газ в сосуде), и импульс этого слоя равен нулю. Значит, этот слой газа получает еще импульс, направленный по оси X, то есть равный F_xt. Откуда он берется?

Этот импульс возникает из-за хаотичности движения молекул. Действительно, вследствие этой хаотичности, число молекул, *влетающих* в наш слой газа через его границу *слева*, равно числу молекул, *вылетающих* из него *справа*.

Легко доказать, что как влетающая в слой газа молекула, так и вылетающая из него сообщают ему импульс, направленный по оси X, то есть положительного знака. В самом деле, если молекула массой m *влетает* в слой слева направо, то проекция ее скорости положительна. Обозначим ее через v_x. Проекция импульса mv_x тоже положительна. Проекция импульса такой же молекулы, *вылетающей* из слоя, отрицательна и равна $-mv_x$. Значит, влетающая молекула *прибавляет* слою газа импульс mv_x, а вылетающая из него — *отнимает* от него отрицательный импульс $-mv_x$. Но отнять отрицательное — это то же, что прибавить положительное.

Так мы убедились, что как влетающие в слой газа молекулы, так и вылетающие из него сообщают ему импульс, проекция которого равна mv_x.

Предположив для простоты, что значения mv_x одинаковы для всех молекул, легко вычислить изменение импульса ΔP всего слоя газа за время t. Оно, очевидно, равно удвоенному произведению mv_x на число z молекул, влетающих в слой газа за время t:

$$\Delta P=2zmv_x.$$

Значение z вычисляется так же, как число соударений молекул со стенкой (см. «Физику 9»):

$$z=\frac{1}{2}nSv_xt,$$

где n — число молекул в единице объема газа. Следовательно,

---

*) Когда говорят об упругом ударе молекул о стенку, предполагают, что стенка вполне гладкая. Но ведь стенка тоже состоит из молекул; следовательно, для налетающих молекул она шероховатая. Даже на самой гладкой стенке эти шероховатости имеют размеры, не меньшие, чем размеры молекул. Поэтому после отражения молекулы будут двигаться случайным образом.

$$\Delta P = 2\cdot\frac{1}{2}\,nSv_x t\cdot mv_x = nSmv_x^2 t.$$

Вот мы и нашли, откуда берется у нашего слоя импульс, направленный по оси X и равный $F_x t$. Значит,

$$F_x t = nSmv_x^2 t.$$

Сократив на t и разделив обе части этого равенства на S, получаем выражение для давления газа на правую стенку сосуда:

$$p=\frac{F_x}{S}=nmv_x^2. \qquad (1)$$

Повторив наши рассуждения для стенок, перпендикулярных осям Y и Z, получим

$$p=nmv_y^2, \qquad (2)$$

$$p=nmv_z^2. \qquad (3)$$

Давления p на все стенки, конечно, одинаковы. Сложив почленно равенства (1), (2) и (3), получаем

$$3p=nm\,(v_x^2+v_y^2+v_z^2),$$

или,

$$p=\frac{1}{3}\,nm\,(v_x^2+v_y^2+v_z^2). \qquad (4)$$

В действительности, значения v_x, v_y и v_z у разных молекул разные (вследствие хаотичности их движения). Поэтому в правой части равенства (4) надо вместо v_x^2, v_y^2 и v_z^2 подставить их средние значения $\overline{v_x^2}$, $\overline{v_y^2}$ и $\overline{v_z^2}$. Сумма $\overline{v_x^2}+\overline{v_y^2}+\overline{v_z^2}$ равна $\overline{v^2}$, тогда окончательно

$$p=\frac{1}{3}\,nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}\,n\,\frac{m\overline{v^2}}{2}.$$

Физический смысл универсальной газовой постоянной

В уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева — Клапейрона)

$$pV=\frac{m}{M}\,RT$$

входит универсальная газовая постоянная R. Она, как известно, равна произведению двух других постоянных — числа Авогадро N_A и постоянной Больцмана k:

$$R=N_A k.$$

Постоянные N_A и k имеют ясный смысл: N_A — это число молекул или атомов в единице количества вещества, то есть моле; k — постоянная, определяющая связь между температурой в кельвинах и температурой в единицах энергии. Но определенный физический смысл (быть может, многим он покажется неожиданным) имеет и комбинация N_A и k — постоянная R.

Представим себе, что 1 моль идеального газа находится в сосуде с подвижным поршнем и что подводом тепла к нему или отводом тепла от него его температуру изменяют на 1 кельвин. Благодаря тому, что сосуд закрыт подвижным поршнем, давление газа будет оставаться постоянным (и равным внешнему давлению).

Напишем уравнение состояния газа до и после нагревания:

до нагревания $pV_1=RT$,

после нагревания $pV_2=R\,(T+\Delta T)$,

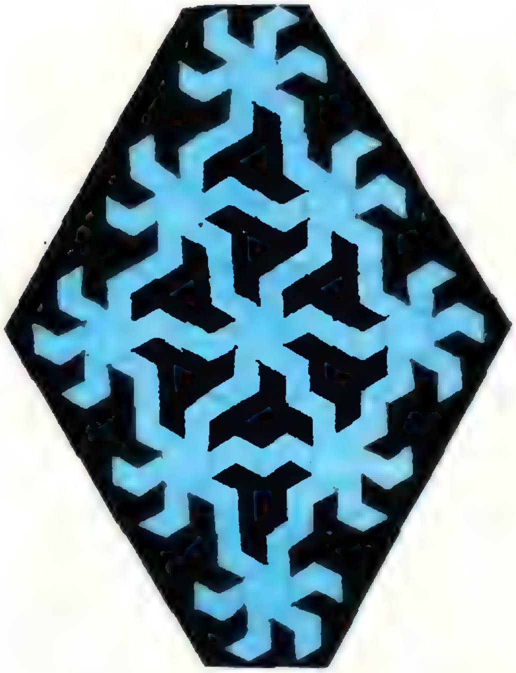
где $\Delta T=1$ К. Вычтя первое равенство из второго, мы получим

$$p\,(V_2-V_1)=RT+R\Delta T-RT=R\Delta T.$$

Левая часть этого равенства представляет собой работу, совершаемую силой давления газа (или внешней силой против силы давления), когда при постоянном давлении p объем газа увеличивается (или уменьшается) от V_1 до V_2. Следовательно, *газовая постоянная R равна работе, которую совершает 1 моль идеального газа, расширяясь при нагревании на 1 К при постоянном давлении.*

Разумеется, при изобарном охлаждении 1 моля газа на 1 К такую же работу совершает внешняя сила, действующая на поршень.

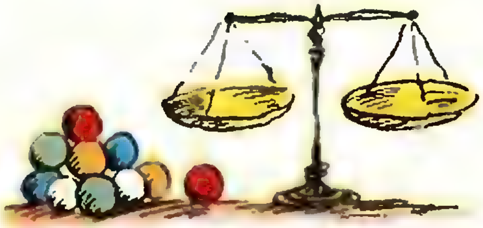
Квант для младших школьников



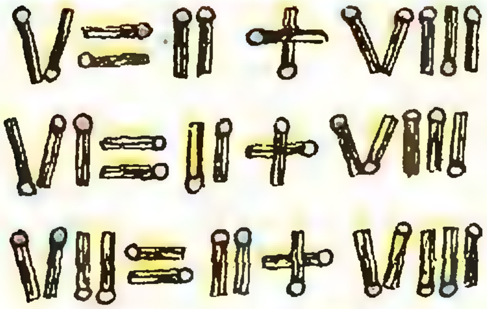
Задачи

1. Симметричен ли узор на рисунке?

2. Имеется два шарика красного цвета, два — синего, два — зеленого, два — желтого и два — белого. На одну чашку весов положили несколько разноцветных шариков, а на другую — вторые шарики этих цветов. При этом перевесила левая чашка весов. Однако было замечено, что какую бы пару шариков одного цвета ни поменять местами, весы либо окажутся в равновесии, либо перетянет правая чашка. При каком количестве шариков на весах это может быть?



3. Переставьте в каждом ряду по одной спичке так (см. рисунок), чтобы везде оказалось верное равенство.



4. Квадрат разрезан на прямоугольники так, что никакая точка квадрата не является вершиной сразу четырех прямоугольников. Докажите, что число точек квадрата, являющихся вершинами прямоугольников,— четно.

5. Стальной шарик плавает в ртути. Увеличится или уменьшится глубина погружения, если повысится температура?

Эти задачи нам предложили *Г. А. Гальперин, В. В. Произволов, Н. А. Родина, Л. М. Салахов, Л. А. Штейнграц*

ЛЕНИНГРАД-МОСКВА

А если..., что тогда?

Кандидат педагогических наук
И. Л. НИКОЛЬСКАЯ,
Н. Г. САБЛИНА

В конце последнего урока в класс, где учится Петя, вошла Татьяна Ивановна, их классный руководитель.

— Ребята,— сказала она,— у меня есть для вас хорошая новость: летом двадцать учеников класса поедут в Москву.

— Ура!— закричали все.

— А кто поедет в Москву? — спросил Петя.

— Для того чтобы поехать в Москву, достаточно окончить учебный год без троек, — ответила Татьяна Ивановна.

Домой Петя пришел взволнованный. Катя это сразу заметила и спросила, в чем дело. Петя рассказал ей про поездку в Москву.

— Ну, — протянула Катя, — уж тебе-то Москвы не видать. Ведь у тебя по русскому за год будет тройка, а может быть, еще и по математике.

— Катька права,— подумал Петя.— По математике я еще смогу получить за год четверку, а вот по русскому... Схожу-ка я к Мите; он — студент, он должен что-нибудь придумать.

Митя внимательно выслушал Петю и посоветовал ему не вешать нос раньше времени.

— Да,— уныло проговорил Петя,— Татьяна Ивановна, знаешь, какая: если уж что сказала, то непременно так и сделает.

— Погоди, давай разберемся,— сказал Митя.— Что означает фраза «Для того чтобы поехать в Москву, достаточно окончить учебный год без троек?» То же самое можно сказать так:

«Если ученик окончит учебный год без троек, то он поедет в Москву». Это сложное предложение образовано с помощью логической связки «если ..., то...» из двух простых предложений: «Ученик окончит учебный год без троек» и «Он поедет в Москву». Обозначим первое из этих предложений буквой *A*, а второе — буквой *B*. Впрочем, так нехорошо — ведь истинность или ложность этих предложений зависит от того, к какому ученику они применяются: один ученик может закончить учебный год с тройками, а другой — без троек; один поедет в Москву, а другой не поедет. Таким образом, эти фразы являются предложениями с переменной, а не высказываниями: помнишь — в «Алгебре 6» ты читал об этом? Поэтому давай обозначим их не через A и B, а через $A(x)$ и $B(x)$, где x может быть любым учеником класса. Теперь при помощи знаков математической логики запишем фразу Татьяны Ивановны так:

$$(\forall x)\,[A(x) \Rightarrow B(x)]; \qquad (1)$$

знак $\forall$ применяется в математике вместо слов «любой», «всякий», «каждый». Таким образом, фразу Татьяны Ивановны в форме (1) можно прочитать так: «Любой ученик, окончивший учебный год без троек, поедет в Москву». Впрочем, в словесной формулировке слова «любой» и т. п. обычно опускаются — их подразумевают. Поэтому-то и можно сказать: «Если ученик окончит учебный год без троек, то он поедет в Москву», то есть

$$A(x) \Rightarrow B(x) \qquad (2)$$

Вместо «Если $A(x)$, то $B(x)$» говорят также «Из $A(x)$ следует $B(x)$». Как по-твоему, когда мы сможем сказать, что учительница не выполнила обещания?

— Если найдется ученик, который окончит год без троек, а в Москву не поедет,— ответил Петя.

— Правильно, для такого ученика высказывание $A(x)$ истинно, а $B(x)$ ложно; поэтому ложно высказывание (2). А теперь скажи, в каких случаях Татьяна Ивановна обещание выполнит.

— Если все ученики, окончившие учебный год без троек, поедут в Москву.

— Верно. А как должна поступить Татьяна Ивановна с учениками, имеющими годовую «тройку»? Если она такого ученика в Москву не возьмет, она, конечно, своего обещания не нарушит (таким образом, когда $A(x)$ и $B(x)$ ложны, $A(x) \Rightarrow B(x)$ истинно). Но, если Татьяна Ивановна такого ученика все-таки возьмет в Москву, она тоже не нарушит своего обещания! Вспомни, что она сказала: «Для того чтобы поехать в Москву, достаточно окончить учебный год без троек». Достаточно, но не обязательно! Можно отличиться в каком-нибудь другом деле. А ведь ты у нас спортсмен!

— Это что ж получается! — воскликнул Петя. — При ложном $A(x)$ и истинном $B(x)$ опять $A(x) \Rightarrow B(x)$ истинно? Значит, у меня все-таки есть шанс поехать в Москву.

— Итак,— продолжал Митя,— высказывание (1) ложно только в одном случае: если найдется такое x, для которого $A(x)$ истинно, а $B(x)$ ложно. Давай запишем наши «исследования» в табличку:

$A(x)$	$B(x)$	$A(x) \Rightarrow B(x)$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Именно в таком смысле употребляется связка «Если..., то...» в математике: высказывание $A \Rightarrow B$ ложно в том и только в том случае, когда A истинно, а B ложно; в остальных трех случаях оно является истинным. Наша таблица как раз и задает определение союза «Если:.., то...». Возьмем, к примеру, утверждение «Всякое число n, делящееся на 4, четно». Ты, конечно, понимаешь, что оно имеет вид (1). В форме (2) оно будет выглядеть так: «Если n делится на 4, то оно четно». Как ты считаешь, это верно?

— Ясно, верно,— ответил Петя,— это и третьекласснику известно.

— Ну, тогда скажи, верно ли утверждение «Если 18 делится на 4, то 18 четно»?

— Но ведь 18 на 4 не делится,— засомневался Петя.

— Ну и что же, что не делится,— возразил Митя,— не в этом дело! Ведь ты сам сказал, что утверждение «Если n делится на 4, то оно четно» верно, то есть верно при любом значении n. А раз так, то верно и утверждение «Если 18 делится на 4, то 18 четно» (третья строка таблицы), и утверждение «Если 17 делится на 4, то 17 четно» (четвертая строка таблицы), и утверждение «Если 16 делится на 4, то 16 четно» (первая строка таблицы). И только случая «$A(n)$ истинно, $B(n)$ ложно» (вторая строка таблицы) для данного утверждения не будет ни при каком значении n; именно поэтому это утверждение верно. Иными словами, из высказывания «Число n делится на 4» следует высказывание «Число n четно». А как ты думаешь, следует ли первое из этих высказываний из второго?

— Нет,— быстро сказал Петя,— ведь 2 четно, а на 4 не делится.

— Молодец,— похвалил друга Митя.

— Разрази меня гром, если я не исправлю тройку по математике!— радостно закричал Петя.

— Конечно же, ты исправишь тройку по математике и гром тебя не разразит,— засмеялся Митя.— Будем надеяться, что твое восклицание — истинное высказывание с ложными *A* и *B*. Подобные истины любил изрекать мудрейший Козьма Прутков. «Если бы тени предметов зависели не от величины сих последних, а имели бы свой произвольный рост, то, может быть, вскоре не осталось бы на всем земном шаре ни одного светлого места», — говаривал он.

Но вернемся к математике. Ты, я вижу, хорошо понял, что значит «Из *A* следует *B*». Если же каждое из двух высказываний следует из другого, то такие высказывания называются *равносильными*.

Знаешь, как-то раз родители сказали нам с сестренкой Галей и братом Колей: «Если мы поедем в дом отдыха, то вы поедете в лагерь». В школе нас спросили, куда мы поедем летом. «Если мы поедем в лагерь, то родители поедут в дом отдыха»,— ответила Галя. Коля сказал «Если папа с мамой не поедут в дом отдыха, то мы не поедем в лагерь». «Вы все перепутали,— сказал я.— Было сказано: «Если мы не поедем в лагерь, то родители не поедут в дом отдыха».

— Да, но ты ведь тоже сказал не так, как родители,— заметил Петя.

— Так-то оно так,— ответил Митя,— но ведь одно и то же можно сказать по-разному. Давай-ка снова составим табличку. Пусть *A* означает высказывание «Родители поедут в дом отдыха», а *B* — «Мы поедем в лагерь». Тогда то, что сказали родители, запишется как «Если *A*, то *B*», ответ Гали запишется как «Если *B*, то *A*», ответ Коли — как «Если не *A*, то не *B*», а мой ответ — как «Если не *B*, то не *A*».

Давай теперь составим таблицу, похожую на предыдущую. Поскольку опять каждое из высказываний *A*, *B* может быть истинным или ложным, в ней снова будет 4 строки. Чтобы нам легче было считать, запишем после столбцов для *A* и *B* столбцы для «не *A*» и «не *B*» («не *A*» истинно, когда *A* ложно, и ложно, когда *A* истинно; аналогично «не *B*»). Столбец для «если *A*, то *B*» просто перепишем из предыдущей таблицы. А столбцы для трех остальных высказываний заполняются по общему правилу: «л» пишется тогда и только тогда, когда *посылка* (то, что стоит между «если» и «то») истинна, а *заключение* (то, что стоит после «то») ложно. В результате мы получим следующую таблицу:

A	*B*	не *A*	не *B*	если *A*, то *B*	если *B*, то *A*	если не *A*, то не *B*	если не *B*, то не *A*
и	и	л	л	и	и	и	и
и	л	л	и	л	и	и	л
л	и	и	л	и	л	л	и
л	л	и	и	и	и	и	и

Ты видишь, что высказыванию «Если *A*, то *B*» (тому, что сказали родители) равносильно только высказывание «Если не *B*, то не *A*» (то, что сказал я). Так что правильно передал смысл сказанного родителями только я. Галя и Коля сказали одно и то же, но не то, что родители.

— А-а,— протянул Петя,— значит, зря я обиделся на Катьку. Мама сказала мне: «Если пойдешь в кино, то сначала сделай все уроки», а Катька съехидничала: «Если не сделаешь уроки, то и в кино не пойдешь». Оказывается, они сказали одно и то же!

— Конечно,— улыбнулся Митя,— Обе они сказали, что для того чтобы пойти в кино, необходимо сначала сделать все уроки.

Петя, быстро сделав уроки, отправился в кино, а тебе, читатель, мы предлагаем решить несколько задач.

Задачи

1. Какие из следующих высказываний истинны, какие ложны?

а) Если Париж расположен на Сене, то Австралия находится в северном полушарии.

б) Если Астралия находится в северном полушарии, то Париж расположен на Сене.

в) Если Австралия находится в северном полушарии, то Париж расположен на Темзе.

г) Если Австралия находится в южном полушарии, то Париж расположен на Сене.

д) Если 1 = 0, то 2 = 1.

е) Если 1 = 0, то 2 = 2.

АВСТРАЛИЯ
Темза
Париж

2. При любых x и y верны утверждения:

а) «Если x — брат y, то y — брат x»?

б) «Если x — брат y, то x и y — родственники»?

3. Следует ли из утверждения «Если ученик много занимается, то он успешно сдает экзамены» утверждение «Ученик, провалившийся на экзамене, занимался мало»?

4. Учительница после математической олимпиады сообщила: «Каждую задачу решил по крайней мере один ученик», а Катя сказала Пете так: «По крайней мере один ученик решил каждую задачу». Правильно ли передала Катя смысл сказанного?

5. Следует ли из первого предложения второе?

а) $(x-2)(x-5)=0$; $x-1>0$.

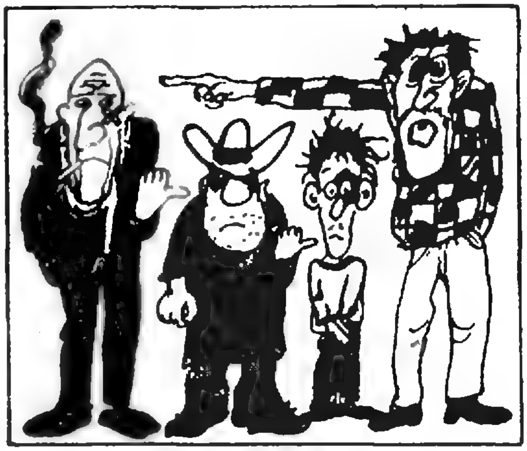
б) $x=2$; $(x+1)^2>0$.

в) $|x|<0$; $x=5$.

6. Докажите теорему «Если число $2k+1$ четно, то число $2k$ нечетно».

7. Докажите, что утверждение «Если диагонали четырехугольника равны, то он — прямоугольник» — неверно.

8. Следователь допрашивал четырех гангстеров по делу о похищении автомобиля. Джек сказал: «Если Том не угонял автомобиля, то его угнал Боб». Боб сказал: «Если Джек не угонял автомобиля, то его угнал Том». Фред сказал: «Если Том не угонял автомобиля, то его угнал Джек». Том сказал: «Если Боб не угонял автомобиля, то его угнал я». Удалось выяснить, что Боб солгал, и Том сказал правду. Правдивы ли показания Джека и Фреда? Кто угнал машину?



Изменение фигуры Земли и ее вращения

(Начало см. на с. 25)

Во-вторых, на это малое, но постоянное увеличение продолжительности суток накладываются сезонные изменения вращения Земли, вызванные различными перемещениями масс атмосферы и океана. В-третьих, скорость вращения Земли изменяется (обычно скачками) при землетрясениях, перемещающих массы земных недр. Направление этих перемещений, как правило, таково, что оно стремится сделать фигуру Земли более шарообразной (как показано стрелками на рисунке), при этом скорость вращения Земли возрастает.

В частности, такое возрастание скорости вращения наблюдалось в период с 1973 по 1978 гг., когда продолжительность суток уменьшилась на 0,006 с. Во время этих наблюдений и были получены сведения о регулярном изменении ускорения свободного падения.

Когда форма Земли приближается к сферической, ускорение силы тяжести стремится к среднему значению, равному 9,7977 м/с², увеличиваясь в низких широтах и уменьшаясь севернее и южнее широты 35°. Теперь понятно, почему первые измерения показали именно уменьшение ускорения: и Москва, и Новосибирск, и Потсдам находятся на широте от 52 до 56°.

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 декабря 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М826, М827» или «Ф838». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М826—М830 и Ф838—Ф842 предлагались на заключительном этапе Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

Задачи

М826—М830; Ф838—Ф842

М826. На доске написали три числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух других чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли первоначально быть написаны числа а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3? (8)

А. А. Берзиньш

М827. Известно, что четыре синих треугольника на рисунке 1 (с. 44) равновелики.

а) Докажите, что три красных четырехугольника на этом рисунке также равновелики.

б) Найдите площадь одного четырехугольника, если площадь одного синего треугольника равна 1. (8)

Б. И. Чиник

М828*. Можно ли в клетках бесконечного листа клетчатой бумаги расставить целые числа так, чтобы сумма чисел в каждом прямоугольнике размера 4×6 клеток, стороны которого идут по линиям сетки, равнялась а) 10; б) 1? (8)

Н. Ю. Нецветаев

М829. Докажите, что среди любых $2m+1$ различных целых чисел, по модулю не превосходящих $2m-1$, найдутся три числа, сумма которых равна 0. (9)

Н. В. Карташов

М830*. Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Выписав какое-то уравнение $x^2+p_1x+q_1=0$, он решает его и, убедившись, что оно имеет два корня, составляет второе уравнение $x^2+p_2x+q_2=0$, в котором p_2 — это меньший, а q_2 — больший корень первого уравнения. По второму уравнению он составляет третье, если это возможно, и т. д.

а) Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго.

б) Найдите наибольшую длину конечной последовательности квадратных трехчленов, удовлетворяющих указанному условию. (10)

М. В. Сапир

Ф838. В 1844 году выдающийся математик и астроном Бессель обнаружил, что собственное (не связанное с движением земного наблю-

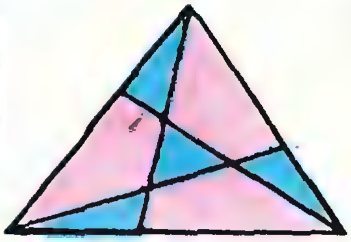


Рис. 1.

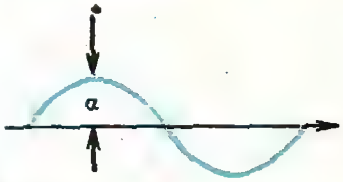


Рис. 2.

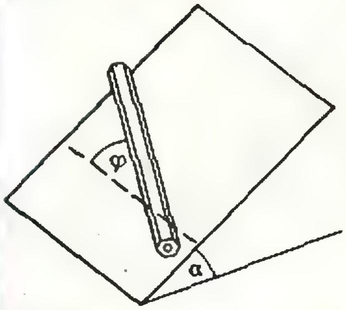


Рис. 3.

дателя) движение Сириуса происходит примерно по синусоиде (рис. 2.). Максимальное угловое отклонение от прямолинейного пути $\alpha=2{,}3''$, период $T=50$ лет. Бессель предположил (через 18 лет это было подтверждено прямыми наблюдениями), что искривление пути Сириуса вызывается наличием спутника — более слабой звезды. Найти отношение массы m спутника (Сириуса B) к массе M_C Солнца, если масса основной звезды (Сириуса A) $M=2{,}3\ M_C$. Известно, что радиус земной орбиты виден с Сириуса под углом $\beta=0{,}376''$. Считать, что орбиты звезд круговые, а плоскость орбит перпендикулярна направлению от Солнечной системы к Сириусу. (10)

В. Е. Белонучкин

Ф839. Если шестигранный карандаш положить на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтальной поверхностью, перпендикулярно ее образующей (линии пересечения плоскости с горизонтальной поверхностью), карандаш будет покоиться. Если его положить параллельно образующей, он будет скатываться вниз. При каких углах φ между осью карандаша и образующей наклонной плоскости (рис. 3) карандаш будет находиться в равновесии? (8)

С. С. Кротов

Ф840. В горизонтально расположенной плоской коробке размером 10×10 см беспорядочно лежат 1000 маленьких стальных шариков массы $m=0{,}5$ мг каждый. Коробку начинают двигать со скоростью $v_0=10$ м/с перпендикулярно одной из боковых стенок. Считая удары шариков о стенки коробки и друг о друга абсолютно упругими, определить: а) какие импульсы передадут шарики каждой из боковых стенок за первые 10 секунд; б) какие импульсы получают стенки за следующие 10 секунд после того, как коробку резко затормозили. (9)

А. Р. Зильберман

Ф841. Спускаемый аппарат космического корабля приближается к поверхности некоторой планеты с постоянной скоростью, передавая на борт корабля данные о наружном давлении. График зависимости давления p (в условных единицах) от времени t приведен на рисунке 4. Опустившись на поверхность планеты, аппарат измерил и передал на борт данные о температуре и ускорении свободного падения: $T=700$ К, $g=10$ м/с^2. Определить скорость спуска аппарата, если известно, что атмосфера планеты состоит из углекислого газа (CO_2). Определить также температуру на высоте $h=15$ км над поверхностью планеты. (9)

А. И. Буздин

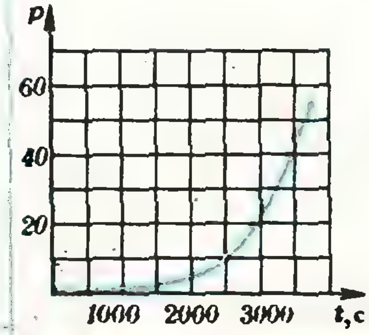


Рис. 4

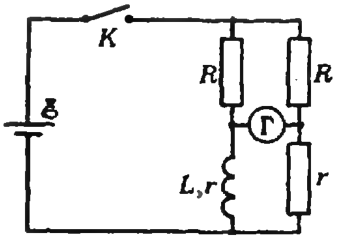


Рис. 5

Ф842. В схеме, изображенной на рисунке 5, в некоторый момент замыкают ключ *K*. Найти установившееся значение тока, текущего через катушку с индуктивностью *L* и активным сопротивлением *r*. Какой заряд протечет через гальванометр Г после замыкания ключа? Параметры элементов, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением гальванометра пренебречь. (10)

В. В. Можаев

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 31st, 1983, to the following adress: USSR, Moscow; 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 31/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Problems P838—P842 and M826—M830 in this issue are taken from the 1983 All-Union School Olympiad.

Problems

M826—M830; P838—P842

M826. Three integers are written on the blackboard. Then one of them is erased and replaced by the sum of the two others minus one. This operation is repeated several times until the following integers are obtained: 17, 1967, 1983. Could the original integers have been a) 2,2,2; b) 3,3,3?

A. A. Berzinsh

M827. The four blue triangles in figure Рис. 1 have the same area.
a) Prove that so do the three red quadrilaterals.
b) Find the area of one quadrilateral if thatof one blue triangle is 1.

[illegible] I. Chinik

M828. Can integers be written in the squares of an infinite square-lined sheet of paper so that the sum of the integers in each 4×6 rectangle (with sides on the lines of the lined paper) is a) 10; b) 1?

N. Yu. Netsvetaev

M829. Prove that among any $2m+1$ different integers whose absolute value is no greater than $2m-1$ there are three with zero sum.

N. V. Kartashov

M830. A secondary school pupil practices solving quadratic equations. Having written the equation $x_2^2+p_1x+q_1=0$ and solved it, he checks that it has two real roots and writes the equation $x^2+p_2x+q_2=0$ in which p_2 is the smaller and q_2 the larger of the two roots of the first equation. Using the second equation he writes a third in the same way (if possible), etc.

a) Prove that this exercise cannot continue indefinitely.

b) Find the greatest possible length of a finite sequence of quadratic trinomials satisfying the above conditions.

M. V. Sapir

P838. In 1844 the outstanding mathematician and astronomer Bessel discovered that the proper (i. e. not retated to the motion of the terrestrial observer) motion of Sirius is approximately sinusoidal (see figure Рис. 2). The maximal deviation from a rectilinear trajectory is $\alpha=2.3''$, the period is $T=50$ years. Bessel conjectured (correctly, as confirmed by direct obesrvation 18 years later) that the deviations in Sirius' trajectory are due to the presence of a sattelite — a smaller star. Find the ratio of the mass m of this sattelite (Sirius B) to the mass $M_\odot$ of the Sun, if the mass of the bigger star (Sirius A) is $M=2.3M_\odot$. It is known that the radius of the earth orbit is seen from Sirius under the angle $\beta=0.376''$. Assume that the orbits of the stars are circular, while their orbit plane is perpendicular to the direction from the solar system to Sirius.

V. E. Belonuchkin

P 839. If a pencil with hexagonal section is placed on an inclined plane (forming the angle α with the horizontal plane) perpendicularly to the intersection l of these planes, the pencil remains motionless. Placed parallel to l, it rolls down. For what angles φ between the axis of the pencil and l (see figure Рис. 3) will the pencil remain in equilibrium?

S. S. Krotov

P840. A flat 10×10 cm box placed horizontally contains 1000 small steel ball-bearings of mass $m=0.5$ mg each, mixed at random. The box starts to move with velocity $v_0=10$ m/s perpendicularly to one of its sides. Assuming the collisions of the ball-bearings with each other and the walls of the box absolutely elastic, determine: a) what impulses will the ball-bearings communicate to each of the walls during the first 10 seconds; b) what impulses will the walls get in the 10 seconds following a sudden braking of the box to a stop.

A. R. Zilberman

P841. A landing craft from a spaceship approaches the surface of a planet with constant velocity, transmitting data on outside pressure to the mother ship. The graph of the pressure p (in conditional units) as a function of time t is plotted on figure Рис. 4. Having landed, the craft measures temperature and gravitational acceleration: $T=700$K, $g=10$ m/s^2. Determine the descent velocity of the landing craft, if it is known that the atmosphere of the planet consists of carbon dioxide (CO_2). Determine the temperature at elevation $h=15$ km above the planet's surface.

A. I. Buzdin

P842. In the circuit shown on figure Рис. 5, the switch K is turned on. Find the established value of the current flowing through the coil of inductivity L and active resistance r. What charge will flow through the galvanometer Г after K is switched on? The parameters of the elements shown on the figure are assumed known. The inner resistance of the source and the resistance of the galvanometer are negligible.

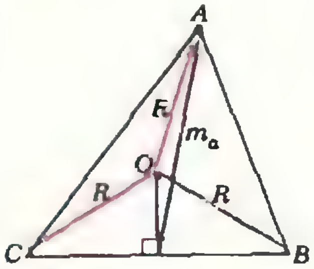
V. V. Mojaev

Решения задач

M811—M815; Ф823—Ф827

M811. *Пусть h_a, h_b, h_c — высоты, а m_a, m_b, m_c — медианы остроугольного треугольника (проведенные к сторонам a, b, c), r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей. Докажите, что*

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leqslant 1+\frac{R}{r}.$$



Умножим обе части доказываемого неравенства на площадь треугольника S и воспользуемся формулами $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}=r\frac{a+b+c}{2}$. Тогда оно приведется к виду

$$\frac{m_a\cdot a}{2}+\frac{m_b\cdot b}{2}+\frac{m_c\cdot c}{2}<S+R\frac{a+b+c}{2}$$

или

$$\frac{(m_a-R)a}{2}+\frac{(m_b-R)b}{2}+\frac{(m_c-R)c}{2}<S. \qquad (*)$$

Ясно, что величина m_a-R не превосходит расстояния от центра O описанной окружности до стороны BC (см. рисунок), то есть высоты треугольника OBC. Следовательно, первое слагаемое в левой части неравенства (*) не больше площади треугольника OBC. Аналогично, два других слагаемых не превосходят площадей треугольников OCA и OAB соответственно. Тем самым доказано неравенство (*), а с ним и неравенство задачи.

Из доказательства видно, что равенство имеет место только для правильного треугольника. Заметим еще, что поскольку медиана всегда не меньше высоты, проведен-

ной из той же вершины, из нашего неравенства вытекает, что $1+\frac{R}{r}\geqslant 3$, то есть известное соотношение $R\geqslant 2r$.

Подумайте, справедливо ли утверждение задачи для тупоугольных треугольников?

Д. М. Милошевич

M812. *Докажите, что при любом натуральном n*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$$

◆

Оценим общий член суммы в левой части:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}=\sqrt{k}\cdot\frac{1}{(k+1)k}=\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$

$$=\sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=$$

$$=\left(1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)<$$

$$<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right),$$

так как $k/(k+1)<1$. Отсюда сразу вытекает, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<$$

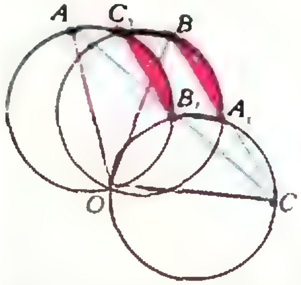
$$<2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2,$$

что и требовалось.

С. И. Майзус

M813. *Даны отрезки OA, OB и OC одинаковой длины (точка B лежит внутри угла AOC). На них как на диаметрах построены окружности. Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку O, равна половине площади (обычного) треугольника ABC.*



◆

Заметим, что вершины A_1, B_1, C_1 рассматриваемого криволинейного треугольника (см. рисунок) являются серединами сторон треугольника ABC (например, $|BA_1|=|A_1C|$ потому, что треугольники BOA_1 и COA_1 конгруэнтны как прямоугольные треугольники с равными гипотенузами OB и OC и общим катетом OA_1). Следовательно, отрезок B_1C_1 — средняя линия треугольника ABC — равен отрезку A_1B, а поскольку эти отрезки являются хордами в конгруэнтных кругах, отсекаемые ими сегменты (на рисунке — красные) конгруэнтны. Точно так же конгруэнтны друг другу черные сегменты, отсекаемые хордами A_1B_1 и C_1B. Отсюда вытекает, что криволинейный треугольник $A_1B_1C_1$ равновелик параллелограмму $A_1B_1C_1B$. Но площадь параллелограмма, очевидно, равна половине площади треугольника ABC.

В. В. Прасолов

M814. *Отметим в натуральном ряду числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Среди отмеченных чисел встречаются тройки последовательных чисел, например,*

$$72=6^2+6^2,\ 73=8^2+3^2,$$
$$74=7^2+5^2.$$

◆

а) Квадрат натурального числа при делении на 4 может давать остаток 0 (если число четно) или 1 (если нечетно). Поэтому сумма двух квадратов натуральных чисел при делении на 4 может давать остатки 0, 1 или 2. Но среди четырех последовательных натуральных чисел есть число, дающее при делении на 4 остаток 3.

б) Ясно, что если квадрат некоторого числа является отмеченным числом, то есть $n^2=a^2+b^2$, то числа n и n^2+1 образуют нужную пару отмеченных чисел $(1=1^2)$. Из одной такой пары можно получить бесконечно много *а) Объясните, почему не могут встретиться четыре последовательных отмеченных числа.*

Докажите, что среди отмеченных чисел встретится бесконечно много б) пар, в) троек последовательных чисел.*

пар, заменяя n на $n \cdot k$, $k=1, 2, 3, \ldots$ $((nk)^2=(ak)^2+(bk)^2)$. Поэтому достаточно указать хотя бы один квадрат, представимый в виде суммы двух квадратов, например, $5^2=3^2+4^2$. Соответствующие пары последовательных отмеченных чисел имеют вид $(25k^2, 25k^2+1)$, $k=1, 2, 3, \ldots$.

в) Приведем три решения этой задачи.

Первое решение. Продолжая рассуждения пункта б), рассмотрим три последовательных числа n^2k^2-1, n^2k^2 и n^2k^2+1, где $n^2=a^2+b^2$. Второе и третье из этих чисел являются суммами двух квадратов при всех $k=1, 2, \ldots$, поэтому задача будет решена, если мы сумеем подобрать такое n, что для бесконечного множества натуральных k число n^2k^2-1 представимо в виде суммы двух квадратов.

Возьмем $n=17$ $(17^2=8^2+15^2)$. Представим число n^2k^2-1 в следующем виде: $n^2k^2-1=(17k)^2-1=(17k-1)^2+(34k-2)$, и покажем, что число $34k-2$ есть точный квадрат для бесконечного множества k.

Пусть $34k-2=(2m)^2$. Тогда $k=(2m^2+1)/17$. Это число целое, если m^2 при делении на 17 дает остаток 8, то есть если $m=17l\pm5$ и, следовательно, $k=34l^2\pm20l+3$. Итак, мы получаем такие тройки последовательных отмеченных чисел: $(578l^2\pm340l+50)^2+(34l\pm10)^2$, $(510l^2\pm300l+45)^2+(272l^2-160l+24)^2$, $(578l^2\pm340l+51)^2+1^2$.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=$$
$$=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

Второе решение опирается на красивое тождество, выписанное на полях. Из этого тождества следует, что *если два числа представимы в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, то их произведение также есть сумма двух квадратов или само является квадратом* (если $ac-bd=0$). В частности, *квадрат нечетного отмеченного числа — отмеченное число* (если $n=a^2+b^2$, то $n^2=(a^2-b^2)^2+(2a^2b^2)^2$, причем $a^2-b^2\neq0$, так как n нечетно).

Пусть $n-1$, n и $n+1$ — отмеченные числа и n нечетно. Тогда n^2-1, n^2 и n^2+1 — тоже три последовательных отмеченных числа. Действительно, n^2-1 — произведение отмеченных чисел $n-1$ и $n+1$, причем само это число, очевидно, не квадрат; n^2 — квадрат нечетного отмеченного числа; $n^2+1=n^2+1^2$. Из чисел n^2-1, n^2 и n^2+1 аналогично получаются отмеченные числа n^4-1, n^4 и n^4+1 и т. д.. Таким образом, тройка отмеченных чисел 72, 73, 74, приведенная в условии, дает бесконечно много троек вида $73^{2^k}-1$, 73^{2^k}, $73^{2^k}+1$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Третье решение. Рассмотрим тройки последовательных чисел вида $8n^2=(2n)^2+(2n)^2$, $8n^2+1$ и $8n^2+2=(2n-1)^2+(2n+1)^2$. Покажем, что при $n=(m^2+m)/2$, где $m=1, 2, \ldots$, все такие числа — отмеченные. Достаточно рассмотреть вторые числа троек:

$$8n^2+1=2(m^2+m)^2+1=2m^4+4m^3+2m^2+1=$$
$$=(m^2-1)^2+(m^2+2m)^2.$$

Это решение самое короткое, но и наиболее искусственное из трех.

Л. Д. Курляндчик

◆

М815.* *На окружности расставлены $4k$ точек, занумерованных в произвольном порядке числами $1, 2, \ldots, 4k$.*

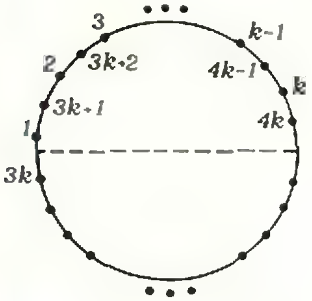
а) Докажите, что при любой расстановке номеров можно соединить точки $2k$ попарно непересекающимися отрезками так, что разность чисел в концах каждого отрезка не превосходит $3k-1$.

а) Разобьем натуральные числа от 1 до $4k$ на две группы по $2k$ чисел. В первую группу включим числа $1, 2, \ldots, k$, $3k+1$, $3k+2$, $\ldots$, $4k$; во вторую — оставшиеся числа $k+1$, $k+2$, $\ldots$, $3k-1$, $3k$. Поскольку разность между любыми двумя числами из разных групп не превосходит $3k-1$, достаточно доказать следующее утверждение: *если на окружности расставлены $2l$ точек, разбитые на две группы по l точек в каждой, то их можно соединить попарно непересекающимися отрезками так, что каждый отрезок соединяет точки из разных групп* (в нашем случае $l=2k$).

Докажем это утверждение индукцией по l. При $l=1$ оно очевидно. Допустим, что для некоторго l оно доказано, *б) Постройте пример расстановки номеров, показывающий, что число $3k-1$ в пункте а) нельзя заменить меньшим.*

и рассмотрим расстановку $2l+2$ точек. Очевидно, что найдутся две соседние точки a и b из разных групп. Соединим их отрезком. Оставшиеся l точек первой группы можно соединить l непересекающимися отрезками с точками второй группы по предположению индукции, причем эти отрезки, очевидно, не пересекаются с отрезком ab. Тем самым, наше утверждение доказано.

б) Воспользуемся тем же разбиением, что и в доказательстве пункта а). Расставим на верхней и нижней полуокружностях по $2k$ точек и занумеруем точки верхней полуокружности числами первой группы в таком порядке: $1, 3k+1, 2, 3k+2, \ldots, k, 4k$, а точки нижней полуокружности — числами второй группы: номер $3k$ поставим рядом с 1, остальные — произвольно (см. рисунок). Докажем, что при любом соединении точек непересекающимися отрезками разность чисел в концах одного из них будет $3k-1$ или больше.



Если какой-то отрезок соединяет две точки a и b верхней полуокружности, то, очевидно, на дуге ab найдутся две соседние точки, соединенные отрезком. Разность их номеров по построению равна $3k-1$ или $3k$.

В противном случае любая точка верхней полуокружности должна быть соединена с точкой нижней полуокружности. Следовательно, каждый из отрезков соединяет числа разных групп. Отрезок, выходящий из точки 1, должен заканчиваться на нижней полуокружности, а отрезок, выходящий из соседней точки $3k$ — на верхней. Поскольку пересекаться они не могут по условию, это должен быть один и тот же отрезок. Он и является искомым, так как разность чисел в его концах равна $3k-1$.

А. А. Разборов

Ф823. *Метеорит, летевший прямо на планету (по прямой, проходящей через центр планеты), попал в автоматическую космическую станцию, вращавшуюся вокруг планеты по круговой орбите радиуса R. В результате столкновения метеорит застрял в станции, которая перешла на новую орбиту с минимальным расстоянием до центра планеты R/2. Определить скорость метеорита перед столкновением. Масса станции в 10 раз превосходит массу метеорита. Масса планеты M. Гравитационная постоянная равна G.*

Пусть u — скорость метеорита, v_1 — скорость станции до столкновения, v_2 — скорость станции и метеорита сразу после столкновения, m — масса метеорита, $10m$ — масса станции.

Запишем уравнение движения станции до столкновения:

$$10m\,\frac{v_1^2}{R}=G\,\frac{10mM}{R^2}.$$

Отсюда находим скорость v_1:

$$v_1=\sqrt{G\,\frac{M}{R}}.$$

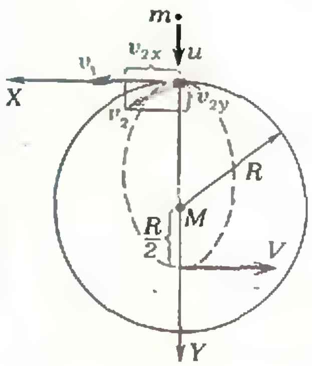
Согласно закону сохранения импульса скорости $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ связаны соотношением

$$m\vec{u}+10m\vec{v}_1=11m\vec{v}_2.$$

Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси X и Y (см. рисунок):

$$10mv_1=11mv_{2x}, \qquad (1)$$

$$mu=11mv_{2y}. \qquad (2)$$



После столкновения станция переходит на эллиптическую орбиту. Механическая энергия станции с застрявшим в ней метеоритом при движении по эллиптической орбите остается постоянной. Следовательно,

$$-G\,\frac{11mM}{R}+\frac{11m}{2}\left(v_{2x}^2+v_{2y}^2\right)=-G\,\frac{11mM}{R/2}+\frac{11m}{2}V^2, \qquad (3)$$

где V — скорость станции в момент наибольшего сближения с планетой. Согласно второму закону Кеплера скорость V и скорость v_2 станции сразу после столкновения связаны соотношением

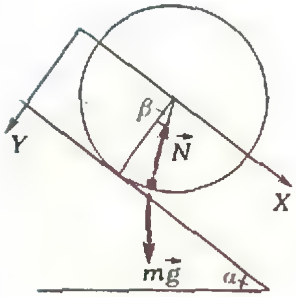
$$VR/2=v_{2x}R. \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (1)—(4) и учитывая, что $v_1=\sqrt{G\,\frac{M}{R}}$, находим скорость метеорита u:

$$u=\sqrt{58G\,\frac{M}{R}}.$$

А. И. Буздин

Ф824. *Полый цилиндр массы M скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=45°$. На абсолютно гладкой внутренней поверхности цилиндра лежит маленькое тело массы $m=M/2$. Чему равен угол β (см. рисунок) во время скатывания?*



Поскольку силы трения отсутствуют, механическая энергия системы цилиндр + тело остается постоянной. Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии поступательного движения цилиндра и тела как целого и кинетической энергии всех точек цилиндра, обладающих в каждый момент некоторой линейной скоростью. Так как проскальзывания нет, эта линейная скорость равна скорости поступательного движения цилиндра.

Запишем закон сохранения энергии:

$$(2M+m)\frac{v_x^2}{2}=(M+m)gx\sin\alpha. \qquad (1)$$

Здесь x (см. рисунок) — координата центра цилиндра в данный момент времени ($x=0$ в начале движения), v_x — скорость движения в данный момент времени ($v_x=0$, когда $x=0$). Учитывая, что $x=v_x^2/2a$, из уравнения (1) находим ускорение системы:

$$(2M+m)a=(M+m)g\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{M+m}{2M+m}g\sin\alpha=\frac{3}{5}g\sin\alpha. \qquad (2)$$

Запишем уравнение движения тела в проекциях на оси X и Y (см. рисунок):

$$mg\sin\alpha-N\sin\beta=ma,$$
$$mg\cos\alpha-N\cos\beta=0.$$

Отсюда с учетом соотношения (2) получаем

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{2}{5}\operatorname{tg}\alpha=0{,}4,\ \beta=21°48'.$$

А. И. Федосов

◆

Ф825. *Лампочку, рассчитанную на напряжение 2,5 В и ток 0,2 А, подключают длинными проводами к батарейке. Амперметр, включенный последовательно с лампочкой, показывает ток $I_1=0{,}2$ А. Когда лампочку подключили к проводам параллельно с амперметром, она накалилась так же, как и в первом случае. Какой ток показывает амперметр? Батарейку считать идеальной, сопротивление проводов равно 2 Ом.*

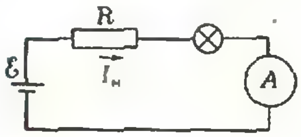


Рис. 1.

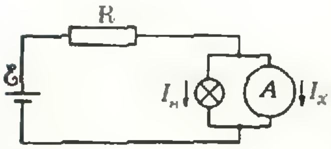


Рис. 2.

При последовательном соединении амперметр показывает ток, текущий через лампу. По условию задачи ток I_1 равен номинальному току $I_н=0{,}2$ А, на который рассчитана лампа. Следовательно, в первом случае напряжение на лампе равно номинальному значению $U_н=2{,}5$ В. Тот факт, что при параллельном соединении лампы и амперметра лампа накалилась так же, как и в первом случае, означает, что ток, текущий через лампу, равен номинальному и напряжение на лампе и на амперметре равно номинальному.

Запишем закон Ома для обоих случаев соединения.

При последовательном соединении (рис. 1) —

$$\mathcal{E}=I_н(R+r)+U_н, \qquad (1)$$

где R — сопротивление проводов, r — сопротивление амперметра.

При параллельном соединении (рис. 2) —

$$\mathcal{E}=(I_н+I_x)R+U_н, \qquad (2)$$

где I_x — ток, текущий через амперметр. Учитывая, что $rI_x=U_н$, преобразуем уравнение (1):

$$\mathcal{E}=I_н\left(R+\frac{U_н}{I_x}\right)+U_н. \qquad (1')$$

Решая совместно уравнения (1′) и (2), находим ток I_x, текущий через амперметр при параллельном соединении лампы и амперметра:

$$I_x=\sqrt{\frac{I_нU_н}{R}}=0{,}5\ \text{А}.$$

А. Р. Зильберман

◆

Ф826. *На достаточно удаленные предметы смотрят через собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=9$ см, располагая глаз на расстоя-*

Пренебрежем сначала размерами зрачка, считая его точечным. Ясно, что из прошедших через линзу лучей в глаз попадут те и только те, которые перед попаданием на линзу прошли через точку B (рис. 1), сопряженную с той точкой, в которой расположен зрачок (две точки называют сопря-

нии $a=36$ см от линзы. Оценить минимальный размер экрана, который нужно расположить за линзой так, чтобы он перекрыл все поле изображения. Где следует расположить экран?

женными, если при помещении точечного предмета в одну из них в другой получается действительное изображение предмета). Расстояние b от линзы до точки B найдем, воспользовавшись формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow b=\frac{aF}{a-F}=12\text{ см}.$$

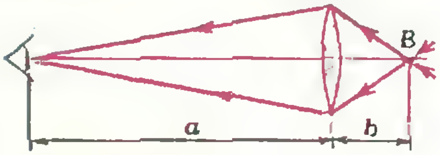


Рис. 1.

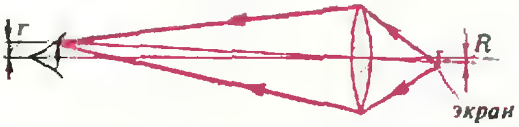


Рис. 2.

Именно в точке B следует расположить малый экран, закрывающий доступ световым лучам в глаз.

Чтобы оценить минимальный радиус R экрана, следует учесть, что зрачок имеет конечный радиус $r\approx1{,}5$ мм. Лучи не будут попадать в глаз, если экран перекроет всю область, сопряженную с поверхностью зрачка. Как видно из рисунка 2,

$$R=\frac{b}{a}r\approx0{,}5\text{ мм}.$$

Д. В. Белов

◆

Ф827. *Куб с ребром длины a движется со скоростью $v=0.8c$ (c — скорость света) в направлении, перпендикулярном одной из граней куба. Что получается на фотографии куба, сделанной удаленным фотоаппаратом с очень короткой выдержкой, если оптическая ось аппарата перпендикулярна грани куба и пересекает траекторию его центра (рис. 1)?*

Мысленно обратим процесс фотографирования во времени: пусть куб движется со скоростью $-\vec{v}$, и в некоторый момент фотоаппарат испускает световую вспышку, которая достигает куб в то время, когда он пересекает оптическую ось. Точки пересечения фронта волны с точками куба будут именно теми точками, изображения которых получатся на снимке (это связано с тем, что от разных частей куба до фотоаппарата свет проходит разные расстояния, а следовательно, за разные времена).

Вблизи куба волну можно считать плоской (поскольку фотоаппарат удален от куба). Расстояние a от ближней до дальней грани куба свет пройдет за время $\tau\approx a/c$.

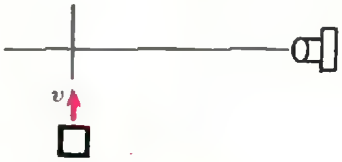


Рис. 1.

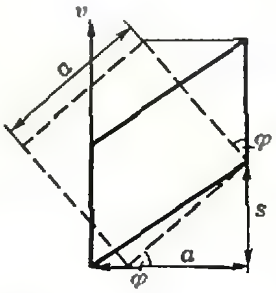


Рис. 2.

Поэтому на фотографии изображения ближних и дальних ребер куба будут смещены в направлении движения куба на расстояние $s=v\tau=0.8a$ друг относительно друга. Куб на фотографии получится как бы повернутым на угол $\varphi=\arcsin\frac{v}{a}$ (рис. 2).

Д. Ю. Григорьев

Рэндзю

В. А. САПРОНОВ

Итак, вы усвоили азы атаки. Но не менее важно уметь защищаться. Лишь искусная оборона позволяет белым выстоять в начальный период партии и создать фундамент для перехода в контрнаступление.

В партии на рисунке 1 белые строят защитную *сеть* (треугольники показывают возможное развитие этой сети), так что четверки черных шашек упираются в ее «узлы». Эффективная в некоторых ситуациях, сеть все же не может стать универсальным средством обороны: во-первых, черные постараются занять какой-нибудь из опорных пунктов белых и выйти на оперативный простор; во-вторых, при таком методе защиты можно добиться только ничьей — перейти к контригре трудно.

Поэтому, если это возможно, защиту следует строить на контрударах. Особенно эффективное средство — контршах. В партии Коцев — Сапронов из первого чемпионата мира по переписке (рис. 2) черные после хода в пункт 1 полагали, что имеют выигрыш в точках *A* и *B*. Однако белые пошли в пункт 2, и черные обнаружили, что атака у них срывается, а удовлетворительной защиты нет.

В результате швед Янсон и я набрали одинаковое количество очков; по лучшему соотношению ходов в выигранных и проигранных партиях японский судья в октябре 1982 г. объявил меня победителем. (В чемпионате участвовали еще 5 человек — по одному человеку из Болгарии, Дании и Канады и два японца.)

Наверное, вы уже обратили внимание, как дорого обходится ошибка в дебюте, особенно белым. Одна неточность — и партию не спасти.

В рэндзю дебюты классифицируются по трем первым ходам.

На втором ходу у белых, с точностью до симметрии, пять вариантов (рис. 3). Разумеется, они вправе сыграть и подальше от центра, но в таком случае их шашка может оказаться слишком далеко от «театра военных действий».

При втором ходе в пункты *A* или *B* черным целесообразно пойти в один из пунктов 1—3, 5—8.

Менее изучены последствия второго хода в пункты *C*, *D*, *E*. Во всяком случае, черные могут пойти в пункты 1 или 2 и перевести игру в русло тех же дебютов, что и после *A* или *B*. Однако многие игроки отвечают атакой на удаленных от белой шашки пунктах. На рисунке 4 (партия Сапронов — Бирюков) после девятого хода у белых нет защиты.

На рисунке 5 (партия Бирюков — Сапронов) черные опрометчивым третьим ходом передали инициативу белым и их шашка осталась в стороне от «поля боя».

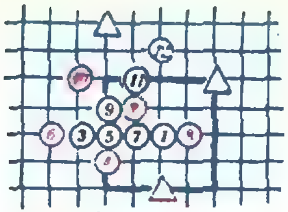


Рис. 1.

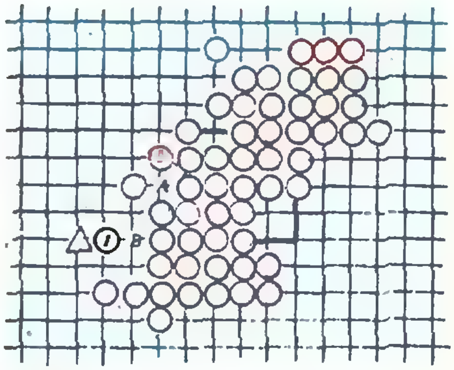


Рис. 2.

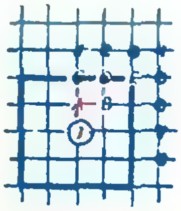


Рис. 3.

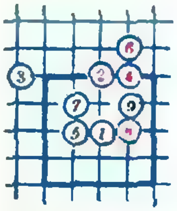


Рис. 4.

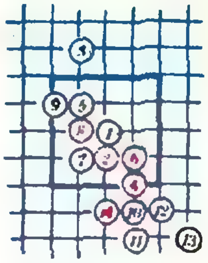


Рис. 5.

На рисунке 5 показаны типичные начала, встречающиеся в партиях рэндзистов. Дальше они распадаются на варианты в зависимости от различных ходов соперников.

Несмотря на древний возраст, рэндзю еще только вступает на путь совершенствования.

Задачи второго тура

В задачах №№ 7—12 черные начинают и выигрывают. В задачах №№ 7—9 достаточно указать первый ход; обоснуйте правильность вашего выбора. В задачах №№ 10, 11 надо указать кратчайший выигрыш (до построения победной вилки). В задаче № 12 надо указать лучший, по вашему мнению, ход черных и наметить план дальнейшей игры.

Решения высылайте до 31 декабря.

Окончание. Начало — в № 8.

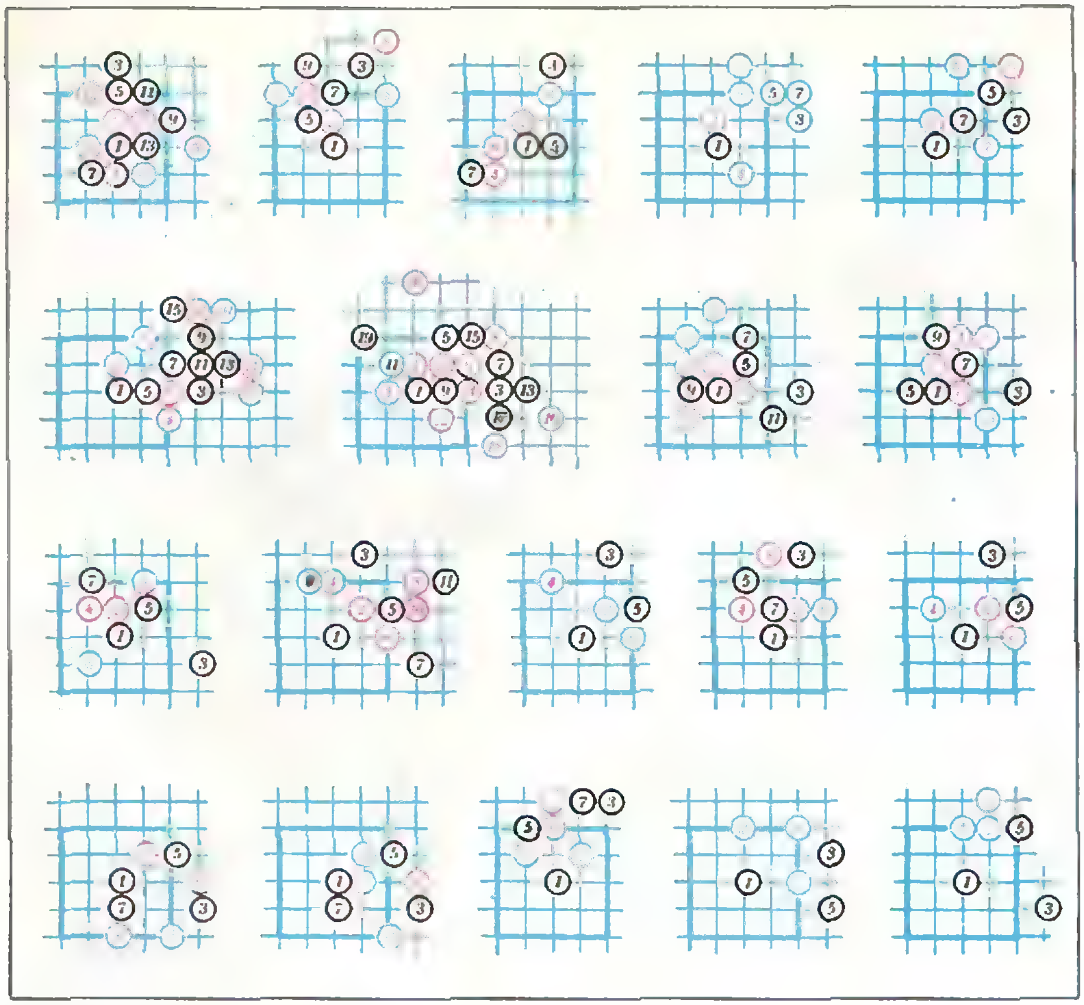
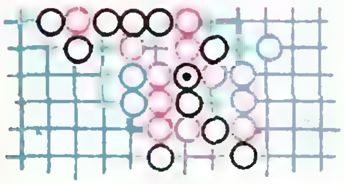
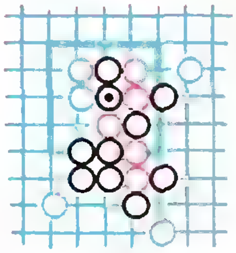


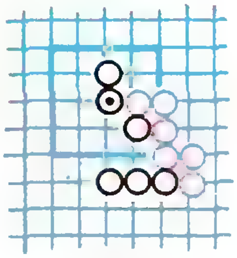
Рис. 6.



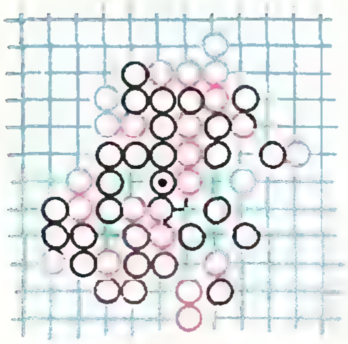
№7



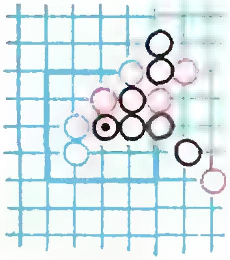
№8



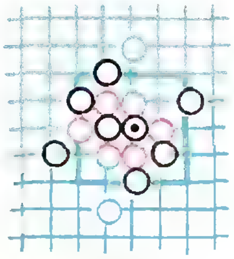
№9



№10



№11



№12

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Наука помогла

Как-то профессор химии А. Бородин, работая над оперой «Князь Игорь», сидел за роялем и, глядя на пустой нотный лист (дело не клеилось), задумчиво перебирал клавиши. Кто-то (кто именно, пока не установлено) положил ему на рояль несколько листков, им же исписанных химическими формулами. И композитор А. Бородин сыграл то, что было на этих листках.

Так родились знаменитые половецкие пляски.

О труде ученого

О рассеянности Ампера до сих пор ходят легенды.

Однажды репортер пришел взять у него интервью.

— Говорят, что вы всегда в поиске? — был вопрос.

— И не говорите! — ответил ученый.— Иногда целый день потратишь, чтобы найти эти проклятущие очки. А они, как всегда, оказываются на лбу... Вот и сегодня с самого утра не могу их найти!

Ответ мэтра

— Почему я стал геометром? — говорил Пифагор своим ученикам.— Наверное, потому, что меня в детстве часто и надолго ставили в угол.

30
Zn
32
Ge
Ку ка ре ку

Дутый факт

Братья Жозеф и Этьенн Монгольфье, как известно, являются изобретателями воздушного шара, который они склеили из плотной бумаги, наполнили горячим воздухом и запустили в 1783 году в Париже. Поэтому именно братьев считают первыми, кто провел операцию по надувательству, хотя испытания шара были успешными.

Е. А. Свистунов

Спокойной ночи!

Известно, что Д. И. Менделеев однажды во сне увидел таблицу, которую потом назвали «Периодической системой элементов Д. И. Менделеева». Это было открытие века.

Но, к сожалению, сон ему до конца досмотреть не дали, разбудили раньше времени. Вот поэтому-то таблица так и осталась с некоторыми пустыми клетками.

IX Всероссийская олимпиада школьников

По традиции в дни весенних школьных каникул проходил заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов. Зональному этапу предшествовали районные, городские и областные (краевые) олимпиады. Каждая область (край) была представлена победителем областного (краевого) этапа по каждому классу.

В этом году заключительный этап олимпиады проводился для Северо-Западной зоны в Калуге, для Центральной зоны в Пензе, для Юго-Западной зоны в Астрахани и для зоны Сибири и Дальнего Востока в Барнауле. Кроме того, в это же время заключительный этап олимпиады проходил в физико-математических школах-интернатах при Московском, Ленинградском и Новосибирском университетах.

Задание заключительного этапа по математике состояло из пяти задач, на решение которых отводилось четыре часа. Как показала проверка, наибольшие трудности у учащихся вызвали задачи по геометрии. Значительные трудности вызвали также задачи комбинаторного типа. Члены жюри подробно обсудили со школьниками конкурсные задачи и проанализировали допущенные учащимися ошибки. Каждый школьник получил полный комплект текстов и решений задач.

Заключительный этап олимпиады по физике проводился в два тура — теоретический и экспериментальный, причем в экспериментальном туре принимали участие все школьники, независимо от результатов теоретического тура. На решение теоретических задач давалось четыре часа, а экспериментальных — три. Наибольшие затруднения у восьмиклассников вызвали теоретические задачи 1 и 3, у девятиклассников — теоретическая задача 2, а у десятиклассников — задача 2 экспериментального тура. В целом все участники олимпиады успешно справились со всеми предложенными задачами.

Школьники, занявшие I—IV места на зональном этапе олимпиады, были награждены дипломами, грамотами и памятными подарками. Из призеров зонального этапа была составлена команда РСФСР для участия во Всесоюзной олимпиаде. Специальными грамотами были награждены учителя, подготовившие призеров олимпиады.

Ниже приводятся задачи по математике и физике заключительного этапа и фамилии призеров IX Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. Сумма ста действительных чисел равна нулю. Докажите, что их можно занумеровать так, что будут выполнены неравенства: $a_1>0$, $a_1+a_2>0$, ..., $a_1+a_2+\ldots+a_{99}>0$.

2. Можно ли в клетках квадратной таблицы размера 6×6 записать натуральные числа от 1 до 36, так, чтобы сумма чисел, записанных в клетках любой фигуры на рисунке 1, делилась на 2?

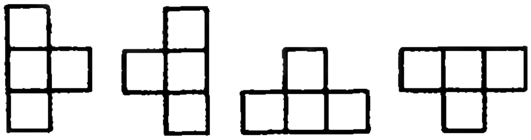


Рис. 1

3. Разложите число $2^{1982}+1$ на два натуральных множителя, каждый из которых не меньше 1000.

4. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. От некоторой точки O откладываются четыре вектора, равные $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, концы которых обозначаются через B_1, C_1, D_1, A_1 соответственно. Всегда ли четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ выпуклый? Чему равна его площадь, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна S?

5. Учитель нарисовал на доске прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и вписанный в него равносторонний треугольник KMP такой, что точки K, M, P лежат на сторонах AB, BC, AC соответственно, и $[KM]\parallel[AC]$. Затем он стер с доски все, кроме точек A, P, C и предложил ученикам при помощи циркуля и линейки восстановить стертые точки и линии. Как это сделать?

9 класс

1. Найдите все простые числа, представимые в виде $\left[\frac{n^2}{3}\right]$, где n — натуральное число. ($[x]$ — целая часть числа x).

2. Упростите выражение $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{99}{100!}$.

3. Можно ли в клетках квадратной таблицы размера 6×6 записать натуральные числа от 1 до 36 так, чтобы сумма чисел, записанных в клетках любой фигуры на рисунке 2, делилась на 9?

4. На координатной плоскости задан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, все вершины которого имеют целочисленные координаты. Докажите, что внутри пятиугольника $ABCDE$

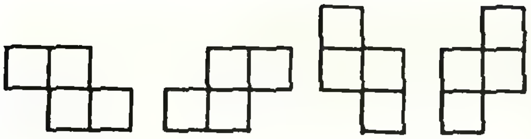


Рис. 2.

найдется хотя бы одна точка с целочисленными координатами. Справедливо ли аналогичное утверждение для невыпуклого пятиугольника?

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x^2-3y=xy^3, \\ x^2+x^3y^2=2y. \end{cases}$$

10 класс

1. По кругу написано несколько различных действительных чисел, каждое из которых равно произведению двух чисел, стоящих по обе стороны от него. Сколько всего чисел написано?

2. Докажите, что для любых действительных чисел $\alpha>1$, $\beta>1$, $\gamma>1$, таких, что $\frac{\alpha}{\beta}\geqslant\frac{\gamma}{\alpha}$, выполнено неравенство

$$\frac{\lg\alpha}{\lg\beta}\geqslant\frac{\lg\gamma}{\lg\alpha}.$$

3. Рассмотрим правильный $(2n+1)$-угольник и всевозможные треугольники с вершинами в вершинах данного $(2n+1)$-угольника. Некоторые из этих треугольников содержат центр $(2n+1)$-угольника. Найдите число таких треугольников.

4. Последовательность (x_n) задана рекуррентно следующим образом: $x_1=0$, $x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}$, $n=1, 2, \ldots$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

5. Правильные пятиугольники $OABCD$ и $OA_1B_1C_1D_1$ расположены в пространстве так, что $A\neq A_1$, $B\neq B_1$, $C\neq C_1$, $D\neq D_1$. Докажите, что прямые (AA_1), (BB_1), (CC_1) и (DD_1) параллельны некоторой плоскости.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. В калориметр наливают ложку горячей воды, при этом его температура увеличивается на 5 градусов. После того как в него добавили еще одну ложку горячей воды, температура возросла еще на 3 градуса. На сколько еще градусов возрастет температура калориметра, если в него добавить еще 48 ложек горячей воды? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

2. Какой из резисторов нужно замкнуть накоротко, чтобы сопротивление между точками A и B изменилось сильнее всего (рис. 1)?

3. В системе, изображенной на рисунке 2, поршень $П$ и подвижная втулка B, вставленная в отверстие в поршне, находятся в равновесии с жидкостью плотности ρ. Трение между скользящими поверхностями отсутствует, зазоры жидкость не пропускают. На поверхность втулки положили перегрузок массы m_0. На сколько сместится втулка относительно первоначального положения? Площадь поперечного сечения сосуда S, площадь отверстия S_0.

4. Низкая двухосная тележка связана нитью с грузом (рис. 3). Тележку отпускают, и она движется по столу с некоторым ускорением. Опыт повторяют, заклинив одну из осей (колеса жестко насажены на ось). При этом ускорение тележки оказывается в k раз меньше, чем в первом опыте. Во сколько раз еще уменьшится ускорение, если отпустить тележку, заклинив обе оси? Задачу решить для $k_1=1{,}5$ и $k_2=3{,}0$.

9 класс

1. Три одинаковых невесомых стержня шарнирно закреплены в точках A и B, лежащих на одной горизонтали (рис. 4). Расстояние между этими точками в два раза превышает длину стержня. К шарниру C подвешен груз массы m. Какую наименьшую силу нужно приложить к шарниру D, чтобы стержень CD был горизонтальным?

2. Теннисный мяч падает со скоростью $\vec{v}_0$ на тяжелую ракетку и упруго отражается от нее. С какой скоростью $\vec{v}_р$ должна двигаться ракетка, чтобы мяч отразился под прямым углом к первоначальной траектории? Какой угол φ составляет скорость $\vec{v}_р$ с перпендикуляром к ракетке, если скорость $\vec{v}_0$ составляет с тем же перпендикуляром угол α? Ракетка и мяч движутся в любой момент времени поступательно.

3. С идеальным газом, взятым в количестве $\nu=\frac{m}{M}=3$ моля, проводят замкнутый процесс (цикл), состоящий из двух изохор и двух изобар. Отношение давлений на изобарах $\alpha=5/4$, отношение объемов на изохорах $\beta=6/5$. Известно, что разность максимальной и минимальной температур в цикле $\Delta T=100$ К. Универсальная газовая постоянная $R=$

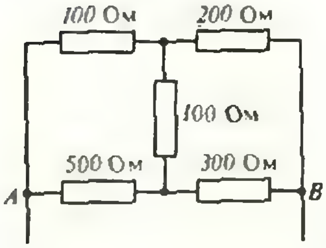


Рис. 1.

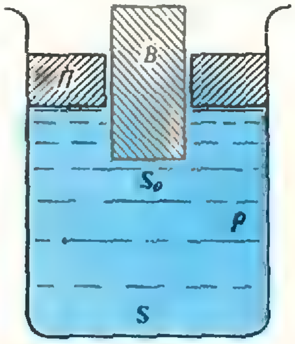


Рис. 2.

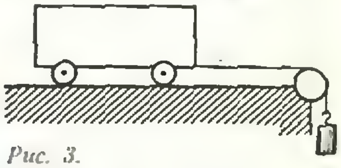


Рис. 3.

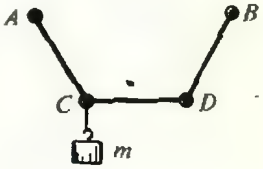


Рис. 4.

$=8{,}32$ Дж/(моль · К). Найдите работу, совершаемую газом за один цикл.

4. Измеряя модуль Юнга материала длинной проволоки по ее удлинению под действием силы, учащийся получил значение $E'=96$ ГПа. При повторных опытах он провел те же измерения, сложив проволоку вдвое (учитывая, разумеется, что длина проволоки уменьшилась, а площадь поперечного сечения увеличилась в два раза). В этих опытах получилось значение $E''=100$ ГПа. Различие результатов было объяснено тем, что проволока состоит из двух равных по размерам кусков из разных материалов. Определите значения E_1 и E_2 модулей Юнга этих материалов.

10 класс

1. Однородная доска массы m симметрично лежит на двух катках, расстояние между осями которых равно l (рис. 5). Коэффициент трения одного из катков о доску равен μ; по другому катку доска может скользить без трения. Шероховатый каток приведен в очень быстрое вращение, и в прежнем положении равновесия доску удерживает пружина жесткости k. При каких значениях μ доска, получив смещение из положения равновесия, сможет совершать гармонические колебания? Какова частота этих колебаний?

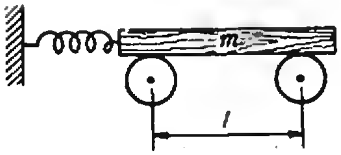


Рис. 5

2. Катушка состоит из n витков, площадь каждого витка S, индуктивность катушки L. Перпендикулярно виткам включают внешнее однородное магнитное поле, возрастающее линейно от 0 до B_0 в течение времени τ_1, затем вновь равномерно убывающее до нуля в течение времени τ_2. Какой заряд протек по катушке, если она была замкнута накоротко? Омическим сопротивлением цепи пренебречь.

3. На горизонтально расположенном плоском зеркале лежит тонкая симметричная двояковыпуклая линза. На оси системы на некотором расстоянии от линзы находится светящаяся точка, причем изображение точки совпадает с ней самой. Где окажется новое изображение точки, если на поверхность зеркала ввести немного жидкости с показателем преломления, равным показателю преломления стекла линзы, так, чтобы весь зазор между линзой и зеркалом был заполнен этой жидкостью?

4. Для обнаружения некоторых полезных ископаемых используют прибор, принцип действия которого основан на изменении периода колебаний математического маятника над залежами руды. Вычислите относительное изменение периода колебаний $\Delta T/T$ маятника над месторождением руды. Принять, что залежи имеют форму шара радиуса $R=1$ км, центр которого находится на глубине $h=1{,}2$ км. Плотность руды в 3 раза больше плотности Земли. Радиус Земли $R_З=6400$ км. Землю считать однородной.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Постройте график зависимости силы трения нити о металлический стержень от числа оборотов нити вокруг стержня. Опыт проведите для числа оборотов от 0 до 4 через 1/2 оборота.

Оборудование: штатив с двумя лапками, нить суровая длиной 1 метр, стержни металлические от штатива (2 шт.), динамометр Бакушинского, линейка, лист миллиметровой бумаги, груз.

2. Определите жесткость пружины.

Оборудование: пружина, мензурка, нить, тело, линейка, сосуд с водой.

9 класс

1. Определите неизвестное сопротивление.

Оборудование: источник тока, катушка, стрелка магнитная на подставке, реостат, соединительные провода, резистор с неизвестным сопротивлением.

2. Определите теплоемкость металлического предмета. (Комнатная температура и атмосферное давление известны). Плотность воздуха 1,3 кг/м^3.

Оборудование: пробирка, трубка стеклянная, калориметр, мензурка, груз массой 100 г, нагретый до температуры 100°С, пластилин.

10 класс

1. Определите массу гайки двумя способами.

Оборудование: штатив с лапкой, подставка с лампочкой, источник тока, линза, экран с миллиметровыми делениями, пластилин, соединительные провода, линейка, гайка, набор монет стоимостью 1, 2 и 3 копейки.

2. Определите зависимость КПД генератора от сопротивления нагрузки.

Оборудование: электромикродвигатели (2 шт.), амперметры (2 шт.), вольтметры (2 шт.), провода соединительные, нипельная резина, реостат.

Б. Б. Буховцев, О. Ю. Овчинников,
С. В. Резниченко, Г. Н. Яковлев

Поправка

В статье «Алгебраические и трансцендентные числа» («Квант», 1983, № 7, с. 2) по вине редакции в формуле (4) на с. [illegible] вместо qm напечатано q^m. Формула (4) должна быть такой:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qm}.$$

Призеры IX Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Бадрин Е. (Рязань, с. ш. № 8),
Иванов Л. (Саратов, с. ш. № 13),
Михайлов В. (Братск, с. ш. № 37),
Филиппов С (Безорецк, с. ш. № 14):

по 9 классам —
Астрелин А. (Новосибирск, с. ш. № 121),
Гочев Г. (Дубна, с. ш. № 9),
Лев М. (Свердловск, с. ш. № 130).
Мисник С. (Воронеж, с. ш. № 62),
Москадынов Е. (Ангарск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Гутмин А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Сорокин М. (Ижевск, с. ш. № 30),
Стаховский В (Капустин Яр, с. ш. № 231).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Басов О. (Владимир, с. ш. поселка Владимир-30),
Есипова Т. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Романов Е. (Димитровград, с. ш. № 25),
Троицкий В. (Южно-Сахалинск, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Веснин Р. (Петрозаводск, с. ш. № 18),
Гарифуллин О. (Пенза, с. ш. № 17),
Струков С. (Воронеж, с. ш. № 85),
Четкова А. (Барнаул, с. ш. № 22);

по 10 классам —
Васильченко Е. (Алексин, с. ш. № 3)
Карнаух С. (Красноярск, с. ш. № 161),
Кочкин Е. (Волжский, с. ш. № 2),
Кузнецов Д. (Горький, с. ш. № 36).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Атиманчук Ю. (Тюменская обл., п. Усть-Юган, с. ш.)
Биргер А. (Иваново, с. ш. № 6),
Никитенко В. (Благодарный, с. ш. № 9),
Писаренко Н. (Владивосток, с. ш. № 51):

по 9 классам —
Лазуткин Е. (Черногорск, с. ш. № 19),
Плакунова Е. (Горький, с. ш. № 40),
Сергиенко А. (Североморск, с. ш. № 12),
Хохлов В. (Саратов, с. ш. № 13);

по 10 классам —
Белов Д. (Тамбов, с. ш. № 29),
Кидысюк В. (Рязань, с. ш. № 58),
Коршунов Д. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Сапегин И. (Пенза, с. ш. № 29).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Климович Г. (п. Болшево Московской обл., с. ш. № 3),
Лобода А. (Прокопьевск, с. ш. № 2),
Павлов Р. (Чебоксары, с. ш. № 4),
Фролов А. (Новочеркасск, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Брезгунов А. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Кузницын К. (Киров, с. ш. № 16),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Паршин Н. (Пенза, с. ш. № 6),
Приходько В. (Ростов-на-Дону, с. ш. 14),
Цырлин А. (Балашиха, с. ш. № 26);

по 10 классам —
Кулябин К. (Челябинск, с. ш. № 127),
Ландсберг Г. (п. Протвино Московской обл., с. ш. № 1),
Поляков М. (Усолье, с. ш. № 15),
Сыскин В. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Фатьянов О. (Курск, с. ш. № 6).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Бенедюк П. (Пятигорск, с. ш. № 5),
Громов Р. (Барнаул, с. ш. № 88),
Дмитриев К. (Гатчина, с. ш. № 9),
Суслов С. (Ульяновск, с. ш. № 35);

по 9 классам —
Богородицкий А. (Саратов, с. ш. № 42),
Король А. (Новокузнецк, с. ш. № 7),
Осипов А. (Смоленск, с. ш. № 7),
Чеботарь О. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1);

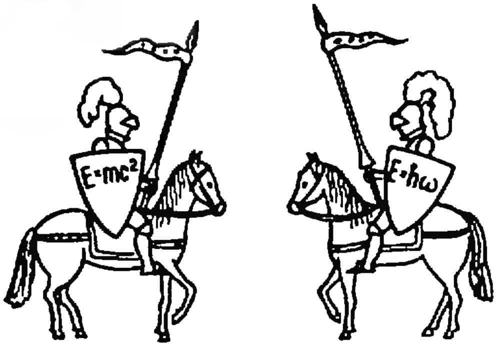
по 10 классам —
Дьячков М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Комин А. (Северодвинск, с. ш. № 17),
Мокеев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Рыяков А (Саратов, с. ш. № 13),
Савров М. (Азов, с. ш. № 13),
Энтелис А. (Свердловск, с. ш. № 9).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Евстифеев А. (Ижевск, с. ш. № 28),
Меньков В. (Мончегорск, с. ш. № 3),
Мотовилов М. (Новосибирск, с. ш. № 136),
Паплев А. (Нальчик, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Лукьянов А (Ангарск, с. ш. № 10),
Макаров Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Нораев Д. (Горький, с. ш. № 66),
Степанец Е. (Астрахань, с. ш. № 46);

по 10 классам —
Катаргин А. (Салават, с. ш. № 6),
Кондратьев С. (Кострома, с. ш. № 32),
Павленко А. (Владивосток, с. ш. № 23),
Чеканов С. (Саратов, с. ш. № 13).



V Московский турнир юных физиков

Я здесь не дам сих тайн истолкованья.—
Вопрос, и не ответ — мое призванье.
Г. Ибсен

V Московский турнир был проведен физическим факультетом МГУ с 20 декабря 1982 г. по 3 апреля 1983 г. Оргкомитет Турнира возглавлял вице-президент АН СССР, академик Е. П. Велихов, жюри — профессор физического факультета МГУ В. Л. Бонч-Бруевич. В этом соревновании старшеклассников приняли участие 40 школ Москвы и Московской области.

Как обычно, турнир проводился в три этапа.

I тур — заочный коллективный конкурс. Школам для коллективного решения предлагались 20 задач сроком на два месяца. По результатам этого конкурса ко II туру были допущены команды 15-ти школ.

II тур — отборочные физбои, которые определили финалистов турнира. Отборочные физбои проводились в московских школах по задачам заочного конкурса.

III тур — финал турнира был проведен на физическом факультете МГУ. В его программу входили: конкурс домашних заданий, конкурс капитанов, физбой трех команд — финалистов турнира, конкурс болельщиков, награждение победителей.

Диплом I степени и переходящий приз турнира был вручен командам школ № 57 и № 7 г. Москвы, диплом II степени — команде школы № 710 г. Москвы, диплом III степени — командам школ № 444 г. Москвы, № 82 пос. Черноголовка и ФМШ № 18 при МГУ. За победу в отдельных конкурсах турнира грамоты и подарки были вручены 17-ти школьникам. Физический факультет МГУ наградил школы, команды которых показали высокие результаты в этом состязании, ценными физическими приборами. Журнал «Квант» наградил ряд школьников книгами серии «Библиотечка «Квант» с автографами авторов.

VI турнир юных физиков начнется 15 октября 1983 г. Ваши вопросы по организации таких соревнований, отзывы и предложения, а также заявки на участие в ТЮФ—VI присылайте по адресу: *117234, Москва, МГУ, физический факультет, Совет по работе со школьниками. Оргкомитет ТЮФ.*

Задачи заочного коллективного конкурса

Условия задач сформулированы максимально кратко. Необходимые дополнительные данные и оговорки следует вводить, опираясь на здравый смысл. Эти задания вы можете использовать при организации в школе викторин, вечеров занимательной науки, турниров юных физиков, использовать в работе физических кружков.

1. **«Гол».** «...сильнейший удар! Го-о-ол!!!» Каково максимальное давление в футбольном мяче при ударе?

2. **«Дождь».** Оцените, во сколько раз уменьшится количество тополиного пуха в воздухе после грозового дождя (Москва, июнь, гроза средней силы и продолжительности).

3. **«Гравитационное поле Земли».** Как зависит напряженность гравитационного поля Земли от расстояния до ее центра?

4. **«Электрическое поле Земли».** Предложите способ и измерьте напряженность электрического поля Земли.

5. **«Взрыв».** На маленьком островке Курильской гряды физик охотился за бабочкой. Вдруг, в момент, когда бабочка сложила крылья, ее резко отнесло на 10 см в сторону. Оказалось, что в 300 км от наблюдательного пункта началось извержение вулкана — произошел первый мощный взрыв с выбросом газов и пепла. Оцените энергию этого взрыва.

6. **«Болото».** Объясните, почему человек может утонуть в болоте, даже если средняя плотность болотной среды существенно больше плотности воды.

7. **«Колодец».** Говорят, что в яркий солнечный день из глубокого колодца можно наблюдать звезды. Объясните, какие звезды можно так наблюдать и каким должен быть для этого колодец.

8. **«Марианский желоб».** Каково давление воды на дне самой глубокой океанской впадины?

9. **«Аэростат».** Аэростат объемом 1000 м^3 находился в равновесии на высоте $H=300$ метров над поверхностью Земли. Вдруг на него сверху сел беркут ($m=10$ кг). Как будет опускаться аэростат?

10. **«Воздушный шарик».** Исследуйте зависимость избыточного давления в воздушном шарике от его диаметра.

11. **«Парафин».** Измерьте коэффициент объемного расширения парафина в интервале температур 0—80°С.

12. **«Прыгающий шарик».** Горизонтальная упругая плита совершает гармонические колебания вверх-вниз с амплитудой A и частотой ν. Определить, на какую максимальную высоту может подскочить стальной шарик, находящийся на этой плите. Оценить, через

какое время t от начала процесса можно ожидать, что шарик подскочит на высоту 0,99 H.

Проведите экспериментальные исследования.

13. «Конан Дойл». «В тот вечер, сидя подле дяди на красном бархатном диванчике, я впервые увидел кое-кого из людей, чья слава и чудачества не забыты миром и по сей день.

— Старик с кислой миной и тонкими ногами — это герцог Куинсберри,— сказал дядя.— В состязании с графом Таафом он проехал в фаэтоне девятнадцать миль за один час, и ему удалось за полчаса передать письмо на расстояние в пятьдесят миль — письмо перебрасывали из рук в руки с крикетным мячом...

— А зачем ему это понадобилось, сэр? — удивленно спросил я. Дядя пожал плечами.

— Так ему вздумалось,— сказал он».

(А. Конан Дойл. «Родни Стоун»).

Придумать и испытать канал передачи материальной информации (теннисный мяч) средствами XVIII века на расстояние 2 км за минимальное время.

14. «Лом». Оцените, какую работу необходимо совершить, чтобы завязать узлом стальной лом.

15. «Линза». Точечный источник света помещен в фокусе собирающей линзы. Каково распределение интенсивности полученного таким образом светового пучка по его диаметру? Предложите способ создания параллельного светового пучка с равномерным распределением интенсивности в поперечном сечении пучка.

16. «Биллиард». При ударе биллиардных шаров слышен звук. Какова высота основного тона? Каковы обертоны?

17. «Магнитный момент». В цилиндрическом сосуде находится электронный газ ($n=10^{13}$ см$^{-3}$, $T=300$ К). Стенки сосуда упруго отражают электроны. Друг с другом электроны не взаимодействуют. Цилиндр помещают в магнитное поле, линии индукции которого параллельны оси цилиндра. Определить суммарный магнитный момент электронного газа.

18. «Водопровод». Как, не разрушая водопроводной трубы, определить, в какую сторону течет в ней вода, если вы имеете доступ только к ограниченному участку ($l=2$ м) этой трубы?

19. «Брызги». Камушек падает в воду с высоты H. Какова при этом максимальная высота подъема водяных брызг?

20. «Кабестан». Канат, одним концом прикрепленный к стене, намотан на вал электродвигателя (n витков). Каково натяжение закрепленного участка каната, если к свободному концу каната приложена сила F? Коэффициент трения канат-вал μ, частота вращения вала ν.

Конкурс домашних заданий

1. «Представление». Разыграть с участием членов команды и болельщиков представление на физическую тему. Длительность представления — 5 минут. Жанр произвольный.

2. «Невесомость». Объяснить принцип действия и продемонстрировать изготовленный в школьной лаборатории прибор, демонстрирующий явление невесомости (например — фонарик, загорающийся, когда он находится в невесомости).

Конкурс главных задач

На решение этих задач с представлением письменных отчетов в жюри Турнира командам отводилось два часа.

1. «Гелий». Экспериментатор делает глубокий выдох, а затем глубоким вдохом наполняет легкие и дыхательные пути гелием (через трубку из газгольдера). После этого экспериментатор произносит вслух несколько фраз. Присутствующих, даже тех, кто ранее не слышал голоса этого человека, поражает необычность звучания его речи. Во-первых, высота тона становится в несколько раз выше. Во-вторых, тембр голоса сильно искажается, делая его неузнаваемым. По мере выдыхания гелия, практически после первого вдоха воздуха, обычное звучание голоса восстанавливается. Объяснить, почему увеличивается высота основного тона человеческого голоса в этом эксперименте. Сделать численные оценки.

2. «Магнит». Известно, что при помощи магнита можно поднимать тяжести. В эксперименте, демонстрирующем подъемную силу магнита, использовались: тороидальный керамический магнит, к которому для удобства была приклеена ручка из немагнитного материала, подъемная платформа в виде двух стальных дисков, связанных вдоль оси стержнем, и набор съемных грузов. Оказалось, что максимальный вес груза, который можно поднять этим магнитом, P_1.

Если теперь на боковую поверхность магнита плотно наложить тонкую полоску жести, то подъемная сила магнита значительно возрастет: $P_2>P_1$. В проведенном эксперименте: внешний диаметр магнита 60 мм, внутренний диаметр 30 мм, ширина 15 мм, толщина жестяной полоски 0,15 мм, $P_1=25$ Н, $P_2=35$ Н. Как объяснить столь значительное увеличение подъемной силы магнита?

3. «Показатель преломления». Определить показатель преломления стекла, из которого изготовлена цилиндрическая палочка. В распоряжении экспериментаторов имеются: цилиндрическая стеклянная палочка диаметром 30 мм и длиной 50 см, штатив для закрепления палочки в любом положении, источник света — гелий-неоновый лазер, диск с калиброванным отверстием ($\varnothing=1$ мм и 2 мм) на штативе, белый экран, штангенциркуль и рулетка (2 метра).

4. «Вода и лед». Можно ли вскипятить чай в ледяном стаканчике? Оказывается, можно! В большой кусок льда вморожены три обычных тонкостенных стакана (200 мл). В стаканы наливают холодную воду, кладут по 2 кусочка сахара и по щепотке чая. Все это на металлическом лотке закладывают в духовку СВЧ печи «Электроника» и включают ее. Через 5 минут капитаны команд получают по стакану сладкого, хорошо заваренного, горячего чая. При этом оказывается, что лед расплавился только в местах соприкосновения с горячими стаканами. Объяснить, почему в СВЧ печи вода нагревается, а лед — нет.

Конкурс капитанов

Капитаны выполняли эти задания с двумя помощниками. Время на обдумывание каждого задания — 5 минут.

1. «Кинематика». Однородный диск катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости со скоростью v. Как определить с помощью циркуля и линейки величину и направление мгновенной скорости некоторой точки A на ободе диска?

2. «Факелы». В середину длинной ($l=1$ м) стеклянной трубки подается светильный газ. Концы трубки являются горелками. При горизонтальном положении трубки получаются факелы одинаковой величины. Как изменится величина факелов, если трубку наклонить?

3. «Проволочка». Тонкая гибкая проволочка, изогнутая случайным образом, концами подсоединена к двум близко расположенным клеммам. Какую форму примет проволочка, если к клеммам подключить:

а) источник постоянного тока;

б) источник переменного тока?

Считать, что эксперимент проводится в невесомости.

4. «Юла». Юла в виде диска, насаженного на заостренный стержень, касается боковым ребром поверхности стола и вращается вокруг вертикальной оси со скоростью ω_0. Какова скорость ω вращения юлы вокруг собственной (в данном случае наклонной) оси? Все необходимые размеры юлы считать известными.

5. «Тепловая машина». Велосипедное колесо, у которого все металлические спицы заменены натянутыми резиновыми жгутами, тщательно сбалансировано на горизонтальной оси. Если мощным источником света облучить резиновые жгуты по одну сторону от оси колеса, то колесо начнет вращаться. В какую сторону и почему начнет вращаться колесо?

6. «Дымоход». Объясните, почему существует тяга в печной (заводской) трубе. Введите параметр, характеризующий тягу, и определите, как он зависит от высоты трубы.

Конкурс болельщиков

Болельщики присылали ответы в пользу одной из команд — финалистов турнира. Время на выполнение каждого задания — 5 минут. Первые 6 заданий — задания конкурса капитанов.

7. «Фигуры Лиссажу». На входы X и Y осциллографа подаются гармонические сигналы с отношением частот $f_X/f_Y=2/3$. Нарисовать осциллограмму.

8. «Пульсации». Простейший однополупериодный выпрямитель, состоящий из диода и последовательно с ним соединенного конденсатора емкостью 50 мкф, нагружен на резистор сопротивлением 2 кОм (подключенный параллельно конденсатору). Напряжение сети 220 В, частота 50 Гц. Определить амплитуду пульсаций на резисторе.

9. «Роса». На стекло подышали так, что оно запотело, и плотно накрыли это место стеклянным колпаком. Через некоторое время стало заметно, что некоторые капельки росы значительно укрупнились за счет исчезновения большого числа соседних мелких росинок. Объяснить это явление. Какова дальнейшая динамика роста или исчезновения отдельных капелек росы?

Зам. председателя оргкомитета турнира
Е. Н. Юносов

Ответы, указания, решения

Где ошибка?

Ошибка — в том, что мы обозначили через x_0 величину ($\lim x_n$), существование которой не доказано. Приведенное рассуждение устанавливает лишь, что *если* предел $x_0=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то он равен нулю. На самом же деле этот предел не существует (выражение $\frac{2^n}{n^8}$ убывает только в начале, потом оно неограниченно возрастает).

А если ..., что тогда?

1. Ложно только предложение а).

2. Утверждение а) ложно, когда y — сестра x; утверждение б) всегда истинно.

3. Эти утверждения даже равносильны.

4. Нет: возможен случай, когда каждая задача кем-нибудь решена, но никто не решил всех задач.

5. Во всех трех случаях из первого предложения следует второе.

7. Опровергающий пример — равнобедренная трапеция.

8. Джек сказал правду, а Фред солгал. Машину угнал Боб.

IX Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

1. *Указание.* Докажите, что если сумма некоторых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неотрицательна, то среди этих чисел можно выбрать такое, что сумма оставшихся чисел будет все равно неотрицательной.

2. Нельзя. *Указание.* Предположите, что требуемая расстановка чисел существует и докажите, что тогда все числа в клетках произвольного креста (рис. 1) имеют одинаковую четность.

3. $2^{1982}+1=(2^{1982}+2^{992}+1)-2^{992}=(2^{991}+1)^2-2^{992}=(2^{991}+2^{496}+1)(2^{991}-2^{496}+1)$.

4. $S_{A_1B_1C_1D_1}=2S$. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ может вырождаться в треугольник и даже быть невыпуклым. Например, если $ABCD$ трапеция, изображенная на рисунке 2, то при $a<1$ четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — выпуклый,

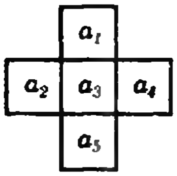


Рис. 1.

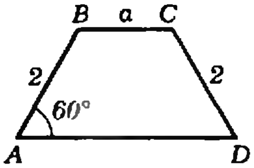


Рис. 2.

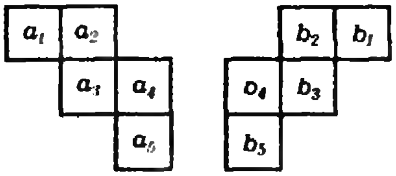


Рис. 3.

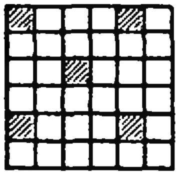


Рис. 4.

при $a>1$ — невыпуклый, и при $a=1$ — вырождается в треугольник.

5. Точка B является точкой пересечения прямой DP, где D — вершина равностороннего треугольника ADC, и полуокружности, построенной на AC как на диаметре по другую сторону от D.

9 класс

1. 3; 5. Указание. Рассмотрите случаи $n=3k$, $n=3k+1$ и $n=3k+2$.

2. $1-\frac{1}{100!}$. Указание. $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$.

3. Нельзя. Указание. С помощью фигур, изображенных на рисунке 3, докажите, что пять чисел, стоящих в клетках квадрата, заштрихованных на рисунке 4, при делении на 9 должны давать одинаковые остатки.

4. Точка M — четвертая вершина параллелограмма, построенного на сторонах AB и CB. Выпуклость пятиугольника $ABCDE$ существенна.

5. $(0,0)$, $(1,1)$, $\left(-\frac{\sqrt[5]{40}}{2}, -\sqrt[5]{50}\right)$.

10 класс

1. 6.

2. Для указанных α, β, γ имеем

$$2\lg\alpha=\lg\alpha^2\geqslant\lg\beta\gamma=\lg\beta+\lg\gamma\geqslant2\sqrt{\lg\beta\cdot\lg\gamma}$$
$$(\lg\alpha>0,\ \lg\beta>0,\ \lg\gamma>0),$$

откуда следует требуемое неравенство.

3. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Указание. Докажите, что число таких треугольников с данной фиксированной вершиной A равно $\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Поскольку для любого $n\geqslant1$ справедливо равенство $x_{n+1}^2-10x_nx_{n+1}+x_n^2-1=0$ и аналогично для $n\geqslant2$ — равенство $x_n^2-10x_nx_{n-1}+x_{n-1}^2-1=0$, числа x_{n+1} и x_{n-1} являются различными $(x_{n+1}>x_n>x_{n-1})$ корнями квадратного уравнения $y^2-10x_ny+x_n^2-1=0$. По теореме Виета находим, что для $n\geqslant2$

$$x_{n+1}+x_{n-1}=10x_n \qquad (*)$$

Поскольку $x_1=0$, $x_2=1$, утверждение задачи следует из формулы $(*)$ по индукции.

5. Пусть $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. В силу подобия пятиугольников $\overrightarrow{OC_1}=\alpha\overrightarrow{OA_1}+\beta\overrightarrow{OB_1}$, откуда $\overrightarrow{CC_1}=\alpha\overrightarrow{AA_1}+\beta\overrightarrow{BB_1}$ и, значит, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны некоторой плоскости. Этой же плоскости параллельна и прямая DD_1.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $\Delta t=10{,}9^\circ$.

2. Закоротить нужно резистор с сопротивлением 300 Ом.

3. $x=\frac{m_0(S-S_0)}{\rho SS_0}$.

4. В первом случае $(k_1=1{,}5)$ ускорение тележки уменьшится еще в 2 раза, во втором случае $(k_2=3)$ тележка вообще не будет двигаться.

9 класс

1. См. решение задачи Ф813 («Квант», 1983, № 8).

2. $v_p=v_0/(2\cos\alpha)$; $\varphi=\pi-2\alpha$.

3. $A=\frac{m}{M}R\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha\beta-1}\Delta T\approx250$ Дж (если цикл проводится против часовой стрелки, работа газа отрицательна).

4. $E_{1,2}=E''(1\pm\sqrt{1-E'/E''})$;
$E_1=120$ ГПа; $E_2=80$ ГПа.

10 класс

1. Если шероховатый каток левый, то при его вращении по часовой стрелке (или при вращении шероховатого правого катка против часовой стрелки) при любом μ частота равна $\omega_1=\sqrt{k/m+\mu g/l}$. Если же направление вращения иное, то колебания возможны лишь при $\mu<kl/(mg)$; при этом частота колебаний равна $\omega_2=\sqrt{k/m-\mu g/l}$.

2. $q=B_0nS(\tau_1+\tau_2)/(2L)$.

3. Изображение окажется в бесконечности.

4. $\frac{\Delta T}{T}\approx\frac{R^3}{R_З h^2}\approx10^{-1}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. В первый раз Гена получил числа 18, 36, 54, 72, 90, и во второй — 9, 18, 27, 36, 45.

2. Плотность тыквы равна примерно 413 кг/м^3. Тыква будет плавать в воде и сможет удержать на себе, как на плоту, мальчика.

3. В новом наборе домино будет 13 дуплей (от 0—0 до 12—12). На остальных костях каждое значение встречается по 12 раз, а так как значений 13, то половинок костей будет 12 · 13, следовательно целых костей домино будет вдвое меньше, то есть 6 · 13 = 78. Прибавив к этому число 13 (число дуплей), получим общее количество костей домино: 91.

4. В треугольнике ABC угол C больше угла B, так как $|AB|>|AC|$. Сравним углы треугольников AEB и AEC: углы при вершине A у них равны, а угол C больше угла B. Поэтому угол AEB больше угла AEC.

5. Нетрудно посчитать, что белых полей на доске на одно больше, чем черных. Если мы начнем обход с черного поля, то получим чередование цветов полей ч—б—ч—б—... В такой цепочке черных полей не меньше, чем белых, поэтому обойти все черные поля таким образом не удается. Если же мы начнем с белого поля, то, закончив цепочку снова на белом поле, получим б—ч—б—ч—...—ч—б; в такой цепочке белых полей на одно больше, чем черных, что согласуется с их общим количеством.

Московская городская олимпиада по физике

(см. «Квант» № 9)

Здесь мы приводим решения или ответы лишь к тем задачам, которые не вошли в Задачник «Кванта».

Районный тур

8 класс

1. Перейдите в систему отсчета, связанную с коробкой, тогда, поскольку удары шайбы с коробкой абсолютно упруги, скорость шайбы относительно коробки будет через интервалы времени $(D-2R)/v_0$ менять свое направление, оставаясь равной по величине v_0.
2. 1: 1,5. **3.** $\operatorname{ctg}\alpha = -m_1/m_2$. **4.** $\Delta I_{\max} = -U/R$, если убрать ребро, соединяющее вершины, к которым подведено напряжение.

9 класс

1. $\operatorname{tg}\alpha = m_2/(m_1+m_2)$. **3.** $p_C = 2p_0/3$, $p_D = p_0/3$, $V_B = 2V_0$. **4.** 124,5 Дж. **5.** $\varphi_0 = (\varphi_1 C_1 + \varphi_2 C_2 + \varphi_3 C_3)/(C_1 + C_2 + C_3)$.

10 класс

1. Луч нарисует квадрат, разделенный вертикальной линией пополам, причем боковые стороны квадрата будут бледными. **2.** Система представляет собой «наклонный математический маятник» — качели вращаются вокруг оси, проходящей через точки подвеса. $T = 2\pi\sqrt{l_1 l_2/(ag)}$. **3.** $3{,}2\cdot 10^{-4}$ Тл. **4.** $U = U_0 + 2\mathcal{E}$.

I городской тур

8 класс

1. Угол на дымовом следе образуется, лишь если скорость ветра равна скорости паровоза. **3.** $l(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$. **4.** 3/2.

9 класс

1. $\sqrt{2ghm^2/(M^2+mM)}$. **2.** $p_0 = (p_A + Mg/S)\times(1-\Delta H/H)$. **3.** Уменьшится. **4.** $q\varphi/(2\pi^2\varepsilon_0 R^2)$. **5.** Пока напряжение на диоде не превышает 1 В, он ведет себя как сопротивление в 10 Ом, а затем на диоде падает напряжение 1 В.

10 класс

1. Рассмотрите сумму моментов (относительно центра масс) всех сил, действующих на автомобиль (внешняя рессора должна дать бóльшую силу реакции, т. е. сильнее сжаться). **2.** $\sin(\beta/2) = \sin(\alpha/2)\,q_1/q_2$; если получающееся значение больше 1, то линия не войдет в заряд $-q_2$. **3.** $\varphi = \pi/2$; φ уменьшается при включении резистора. **4.** $CU\sqrt{2-\cos^2\omega_0\tau}/2$, где $\omega_0 = \sqrt{2/LC}$. **5.** 75 м^2.

Свердловская областная олимпиада по математике

(см. «Квант» № 9)

Школьный тур

7 класс

1. Если около вершин стоят числа a, b, c, то суммы равны $a+b+c$. **2.** Рассмотрите случаи $x \le 0$, $0 < x \le 1$, $x > 1$. **3.** Примените теорему Фалеса. **4.** Если k является общим делителем чисел $n+1$ и n^2+3n+3, то оно является делителем и числа $(n^2+3n+3)-(n+1)^2-(n+1)=1$.

8 класс

1. Рассмотрев разные способы накрытия квадрата 2×2, легко найти, что в клетках, граничащих только по вершине, стоят равные числа. Раскрасьте лист в шахматном порядке и рассмотрите прямоугольник 2×3. **2.** Если x — цена книги, то $11 < 9x < 12$, $15 < 13x < 16$, отсюда $11/9 < x < 6/13$ и $x = 1{,}23$. **3.** Медиана делит треугольник на два равных площадей, отсюда равны площади треугольников ACM и ABM, а также OCM и OBM. **4.** Среди чисел, меньших p^2, на p делятся $p, 2p, \ldots, (p-1)p$. Остается $(p^2-1)-(p-1) = p^2-p$ чисел.

9 класс

1. По крайней мере 101 число больше 9. Эти числа могут кончаться 100 разными парами цифр (от 00 до 99), но чисел больше, значит, найдутся 2 числа, оканчивающиеся одинаково (принцип Дирихле). **2.** Если $a \geq b$, то $a^2 \le a^2+b^2 \le 4$ и $a \le 2$. **3.** Пусть четырехугольник $ABCD$, F — середина стороны CD. Примените задачу 3 из 8 класса к треугольнику AFB и докажите, что высоты, опущенные из точек A и B на сторону CD, одной длины. **4.** Если $p+1=n^2$, то $p = n^2-1 = (n-1)(n+1)$.

10 класс

1. Искомый набор: $\{1, 2, \ldots, 1982\}$. Для произвольного набора $a_1 < a_2 < \ldots < a_{1982}$ рассмотрите суммы вида $a_1 + a_k$ и $a_m + a_{1982}$ ($k = 2, 3, \ldots, 1982$; $m = 1, 2, \ldots, 1981$). **2.** Если $a > 0$, то $f(x) = a\left(\frac{1}{3}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^3 + \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + x\right) - a \times \left(\frac{1}{3}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^3 + x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)$; если $a < 0$, то разность берется с противоположным знаком. **3.** $S = 1/2$. **4.** $ax^2+bx+c = a(x^2-x) + (a+b)x + c$, но число x^2-x четно.

Бим и Бом

(см. «Квант» № 9, с. 31)

Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$ — десятичная запись числа 2^{29} и b — недостающая цифра. Бом применил сравнения по модулю 9 (см., например, приложение 1 в книге М. Н. Аршинова и Л. Е. Садовского «Коды и математика» (М., «Наука», 1983) или статью Н. Я. Виленкина «Сравнения и классы вычетов» («Квант», 1978, № 10)). С одной стороны,

$$2^{29} \equiv -4 \pmod 9$$

(из $2^3 = 8 \equiv -1$ следует $2^{27} = (2^3)^9 \equiv (-1)^9 = -1$, $2^{29} = 2^{27}\cdot 2^2 \equiv (-1)\cdot 4 = -4$). С другой стороны,

$$\overline{a_1a_2\ldots a_9} \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_9 \pmod 9$$

($10 \equiv 1$; значит, для любого k тоже $10^k \equiv 1$; поэтому $\overline{a_1a_2\ldots a_9} = a_1\cdot 10^8 + a_2\cdot 10^7 + \ldots + a_9 \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_9$). Следовательно,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_9 \equiv -4 \pmod 9.$$

Но сумма всех цифр от 0 до 9 равна 45, то есть

$$a_1 + \ldots + a_9 + b \equiv 0 \pmod 9$$

или

$$a_1 + \ldots + a_9 \equiv -b \pmod 9$$

Отсюда $b \equiv 4 \pmod 9$. Так как $0 \le b \le 9$, $b = 4$

4-я страница обложки

(см. «Квант» № 9)

«Зигзаг»: $(ПЛФТ)^3$, (12).

«Тройные крюки»: $[Л'П'\cdot П'Ф'Л'Т'\cdot В\cdot$

$\cdot ТЛФП\cdot В'\cdot ПЛ]\cdot[ПЛ'ФТ'ВН'ПЛ']$, (18).

«Шесть П»: $[Ф^2(ПФ)^2(П'Ф')^3]\cdot[ФНФ^2Н'Л'\cdot Ф'Н'Л^2НЛ'\cdot Т^2П^2Ф^2П^2Т^2]\cdot[Т^2(Л'Т')^2\times(ЛТ)^3]\cdot[ТФ'ЛП'НВ'ТФ']$, (40).

«Кольца»: $[Л'\cdot ТН^2Т'\cdot Н'\cdot ПН^2П'\cdot Н\cdot Л]\cdot[П\cdot Ф'В^2Ф\cdot В\cdot Л'В^2Л\cdot В'\cdot П']\cdot[П'Н^2ПТ'В^2Т]^2$, (31).

«Потусторонние кольца»: $[ПФТ'Н'\cdot Ф^2\cdot НТФ'П'\cdot Ф^2]\cdot[ВП^2В']\cdot[НП^2ФТ\cdot В^2\cdot Т'Ф'П^2Н']$, (22).

«Змея»: в предыдущей операции замените третью скобку на $[НФ^2Н']$, (16).

«Червяк»: $ТВП^2Н'ТФ'ПЛ'Н'П'Т'П^2ТВ^2ПТ^2\times П'Т'В'П'В^2ПТ$. (23).

«Полосы»: невозможное состояние.

Обозначения поворотов граней кубика объясняются в статье «Кубик в картинках» («Квант» № 9) (*Т* — поворот задней — тыльной — грани на 90° по часовой стрелке). После каждой операции указано число составляющих ее поворотов, которое получится, если раскрыть скобки и произвести возможные упрощения (например, если заменить во второй операции последовательность четырех поворотов *ПЛПЛ′* на один — эквивалентный ей — поворот $П^2$). В квадратных скобках стоят более простые, «законченные» операции, действие которых полезно проследить на «собранном» кубике. Точки в скобках помогут вам понять, как эти операции устроены и как они работают.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (О. Фринк, 1923 г.). **1.Cd7! Кре3!** (1...Крf3 2.Крd4 Крf4 3.h4) **2.h4 Кре4 3.h5 Кре5 4.h6 Крf6 5. Се8!** и т. д.

Задание 14 (В. Вукович, 1923 г.). **1.h7 g4 2.hg h3 3.g5 hg 4.g6 g1Ф 5.g7+Кре7 6.Крg8!** (но не 6.g8Ф? Фd4+ 7.Фg7+ Ф:g7+ 8.Кр:g7 g2 9.h8Ф g1Ф+ 10.Крh7 Крf7!) **6...Фf2 7. h8Ф Фf7+8. Крh7 g2 9. Фb8 g1Ф 10. Фc7+ Кре8 11. Фc8+** с вечным шахом.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Даниычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
М. Б. Дубах, В. С. Коваль, Н. С. Кузьмина, А. К. Малкин, Э. В. Назаров, Н. Н. Полянская, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурина, Е. С. Шабельник

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54
Сдано в набор 16.8.83. Подписано к печати 14.9.83
Печать офсетная
Бумага 70×108 ¹/₁₆.
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,22. Т-17699
Тираж 166 162 экз. Цена 40 коп. Заказ 2201

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

УДИВИТЕЛЬНЫЙ МАНЕВР

Одна из самых удивительных и загадочных идей на шахматной доске принадлежит чешскому гроссмейстеру Рихарду Рети.

Р. Рети, 1921 г. Белые: Крh8, п. с6; черные: Кра6, п. h5. Ничья.

Поначалу невозможно поверить в реальность задания. Черный король в двух шагах от белой пешки, а черная пешка неудержимо рвется вперед. И все же белым удается догнать ее! Разумеется если король отправится по прямой — 1. Крh7 h4 2. Крh6 h3, то это вызовет только улыбку. Но он применяет неожиданный и хитрый маневр. **1. Крg7! h4 2. Крf6! Крb6.** На 2...h3 следует 3. Кре7 h2 4. с7 Крb7 5. Крd7 и обе пешки становятся ферзями. **3. Kpe5!** Теперь 3...h3 4. Крd6 h2 5. с7 снова ведет к ничьей, не меняет дела и 3...Кр:с6 4. Крf4 h3 5. Крg3 h2 6. Кр:h2.

Как же случилось, что белые спаслись в этой позиции?! Вся соль в необычной геометрии шахматной доски — кратчайшее расстояние на ней не всегда измеряется по прямой линии. Путь короля между полями h8 и h2 занимает шесть ходов как при прямолинейном движении, так и при зигзагообразном, однако во втором случае черные вынуждены потратить два темпа, и их «неудержимую» пешку удается остановить. В прямоугольном треугольнике h8—е5—h2 с точки зрения короля сумма катетов h8—е5 и е5—h2 равна гипотенузе h8—h2. Такое возможно только в шахматах!

Замысел Рети — одно из самых замечательных шахматных открытий. Создание этого произведения было подготовлено всем развитием шахматной композиции, и наверное, если бы не Рети, то такой же этюд составил бы другой композитор. Здесь можно провести аналогию с наукой, где крупное открытие часто является закономерным итогом общего прогресса.

Пешечный шедевр Рети вызвал настоящую сенсацию в шахматном мире и, конечно, многочисленные отклики у композиторов. Геометрическая идея этюда, которую называют «маневр Рети», в дальнейшем неоднократно совершенствовалась и углублялась, хотя по чистоте формы оригинал превзойти невозможно.

Г. Адамсон, 1921 г. Белые: Крh7, п.с6; черные: Кра6, п.а5. Ничья.

1. Крg6 а4 2. Крf5! Крb6 (2...а3 3. Кре6!) **3. Кре5 Кр:с6** (3...а3 4. Крd6 а2 5. с7) **4. Крd4 Крb5 5. Крс3** с ничьей.

Л. Прокеш, 1947 г. Белые: Крd8, п. а5; черные: Крd6, п. h7. Ничья.

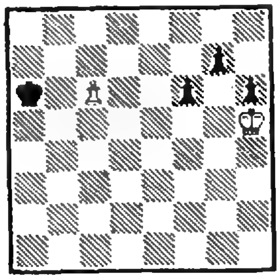
1. Крс8 Крс6 2. Крb8! Крb5 3. Крb7! Кр:а5 4. Крс6 h5 5. Крd5 и белые справились со своей задачей.

И. Моравец, 1952 г. Белые: Крh3, п. d2; черные: Кра4, п. b7. Ничья.

1. Крg4 b5 2. d4 b4 3. d5! Крb5 4.d6! Крс6 5. Крf5!

Король вышел на пересечение дорог. 5...Кр:d6 6. Кре4 или 5...b3 6. Кре6 b2 7.d7 с ничьей.

Спустя семь лет после своего открытия Рети вернулся к нему и придумал еще более парадоксальный сюжет.



Р. Рети. 1928 г. Ничья.

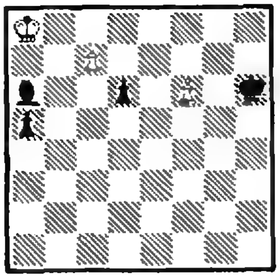
Единственная белая пешка, к тому же не опасная на вид, успешно противостоит трем связанным проходным соперника! **1. Крg6** Крb6 2. Кр:g7 h5 (2...f5 3. Крf6 f4 4. Кре5 f3 5. Крd6) 3. Кр:f6 h4 4. Кре5 со знакомым финалом; 1...h5 2. Кр:g7 h4 3. Кр:f6 и т. д.; 1...f5 2. Кр:g7 f4 3. Крf6 f3 (3...Крb6 4. Кре5) 4. Кре7 с ничьей.

В том же году был составлен еще один знаменитый этюд, имеющий прямое отношение к маневру Рети.

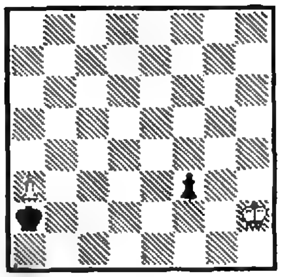
А. и К. Сарычевы, 1928 г. Белые: Крd7, п. с7; черные: Крf3, Сh7, п. b7. Ничья.

1. Крс8!! Фантастический ход! Вместо того, чтобы догонять неприятельскую пешку, белый король удаляется от нее. **1...b5 2. Крd7! b4 3. Крd6! Сf5 4. Кре5! Сс8 5. Крd4** и цель достигнута. Вновь король действовал на два фронта и более чем успешно.

Конкурсные задания

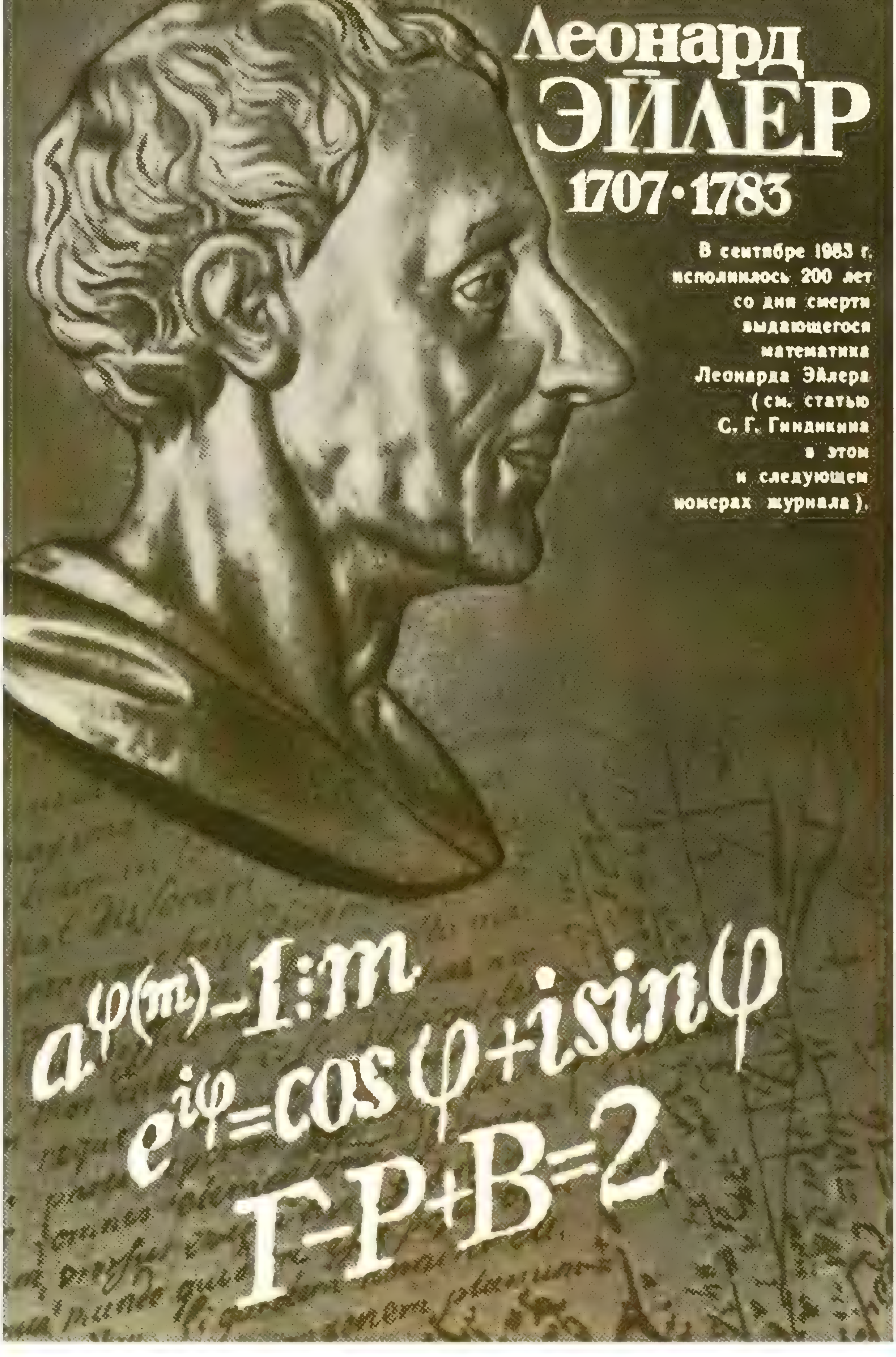


19. Ничья.



20. Выигрыш.

Срок отправки решений — 25 декабря 1983 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20»).



Леонард ЭЙЛЕР

1707 · 1783

В сентябре 1983 г. исполнилось 200 лет со дня смерти выдающегося математика Леонарда Эйлера (см. статью С. Г. Гиндикина в этом и следующем номерах журнала).

$a^{\varphi(m)}-1:m$
$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$
$Г-Р+В=2$

Цена 40 коп.
Индекс 70465

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРОССВОРД

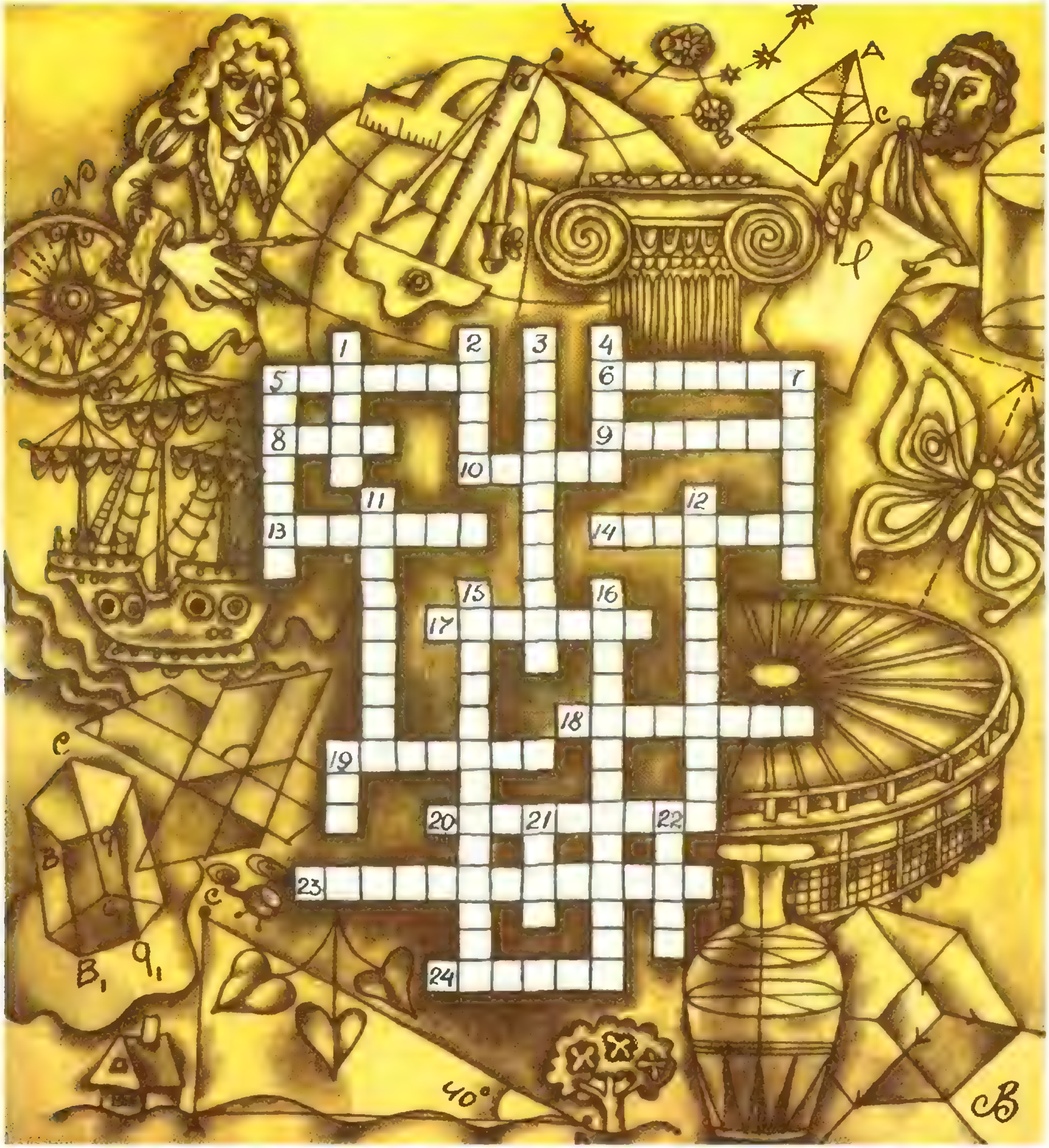
По горизонтали

5. Часть многоугольника. 6. Часть прямой. 8. Часть плоскости внутри окружности. 9. Географическая координата. 10. Одно из основных понятий геометрии. 13. Древнегреческий ученый — физик, математик. 14. Предложение, принимаемое без доказательства. 17. Отрезок в треугольнике. 18. Математическое действие. 19. Результат арифметического действия. 20. Плоская кривая. 23. Четырехугольник. 24. Геометрическое изображение функции.

По вертикали

1. Геометрическое тело. 2. Элемент прямоугольного треугольника. 3. Великий русский математик. 4. Отрезок в окружности. 5. Прямая, имеющая с кривой по меньшей мере две общие точки. 7. Четырехугольник. 11. Кривая второго порядка. 12. Геометрическое место точек. 15. Прямая, пересекающая данную прямую под прямым углом. 16. Замкнутая ломаная линия. 19. Единица времени. 21. Два луча, исходящие из одной точки. 22. Расстояние между концами отрезка.

Н. Антонович



НОМЕР
11

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **11** 1983

Основан в 1970 году

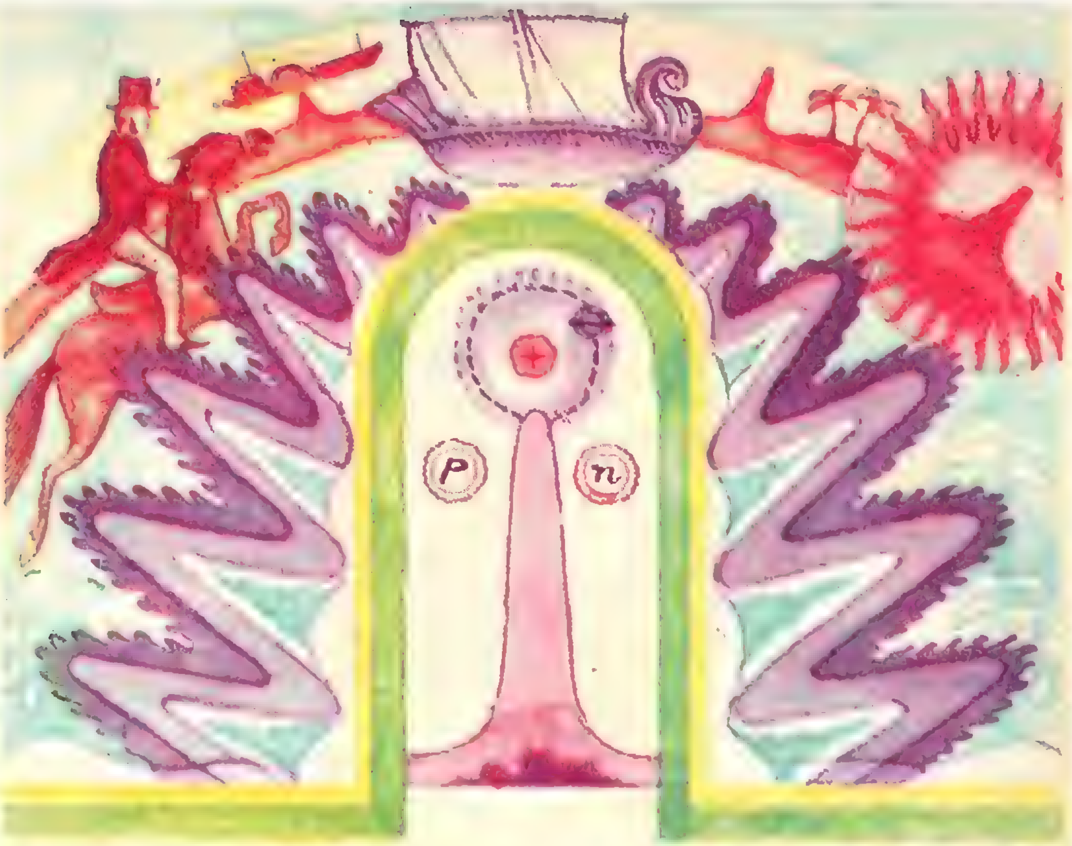
Издательство „Наука“. Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*В. Н. Губанков.* Солитоны	*V. N. Gubankov.* Solitons
10	*Р. В. Галиулин.* Как устроены кристаллы	*R. V. Galiulin.* How are cristals made
17	*С. Г. Гиндикин.* Леонард Эйлер	*S. G. Gindikin.* Leonard Euler
	Новости науки	**Science news**
24	*Л. Г. Асламазов.* ЭВМ на сверхпроводниках	*L. G. Aslamasov.* Computers on superconductors
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
25	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
31	Задачи	Problems
32	*В. С. Данюшенков.* Электронный глаз	*V. S. Danyushenkov.* Electronic eye
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
36	Задачи М831—М835; Ф843—Ф847	Problems M831—M835; P843—P847
39	Решения задач М816, М817, М819, М820; Ф828—Ф832	Solutions M816, M817, M819, M820; P828—P832
	Информация	**Information**
45	Омскому НОУ — 15 лет	15 years of the Omsk school research society
	Олимпиады	**Olympiads**
46	*С. В. Резниченко, А. М. Слинько.* XVII Всесоюзная олимпиада по математике	*S. V. Reznichenko, A. M. Slinko.* The XVIIth All-Union mathematics olympiad
49	*Ю. А. Самарский.* XVII Всесоюзная олимпиада по физике	*Yu. A. Samarski.* The XVIIth All-Union physics olympiad
52	*В. А. Орлов.* Экспериментальный тур олимпиады по физике	*V. A. Orlov.* Experimental round in the physics olympiad
56	Призеры XVII Всесоюзной олимпиады школьников	Prizewinners of the XVIIth All-Union school olympiad
58	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь (*23, 30, 44*)	**Miscellaneous** (*23, 30, 44*)
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Связка (*3-я с. обложки*)	Pinning (*3 rd cover page*)

На первой странице обложки — кристалл исландского шпата (найден на реке Нижняя Тунгуска). О симметрии кристаллов читайте в статье Р. В. Галиулина.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1983



Солитоны

Доктор физико-математических наук
В. Н. ГУБАНКОВ

История исследований солитонов — этих необычных уединенных волн — началась с довольно неожиданного и удивительного события.

В начале 30-х годов прошлого столетия в городе Эдинбурге, в Шотландии, в местном университете читал курс лекций по натурфилософии Джон Скотт Рассел, молодой ученый, будущий известный инженер и кораблестроитель. В то время обсуждались возможности организации пароходного судоходства по внутренним каналам Англии, и к Расселу обратились с просьбой дать консультации и заключения по этому поводу. В этой связи Рассел начал изучать особенности распространения волн на воде. Результаты его наблюдений были затем обобщены им и послужили основой для обширного цикла экспериментальных и теоретических исследований, выполненных впоследствии уже другими учеными.

Однажды Рассел ехал верхом вдоль канала и наблюдал за движением баржи, которую сравнительно быстро тянула пара лошадей. Вдруг баржа резко остановилась; однако масса воды, увлеченная ее движением, по свидетельству самого Рассела, «... собралась у носа судна, ... затем вдруг оторвалась от него и стала перемещаться вперед довольно быстро, принимая форму одиночного, ярко выраженного возвышения, плавного и округлого, которое продолжало двигаться вдоль канала, не изменяя своей формы и не уменьшая скорости. Я последовал за ним на лошади и, догнав, установил, что оно движется со скоростью 8—9 миль в час и сохраняет свою первоначальную форму: около 30 футов длиной по фронту, полтора фута шириной и около фута высотой. Проехав мили три, я потерял его из виду в волнах при повороте канала».

Изучая особенности движения судов в канале, Рассел заметил, что когда скорость баржи приближалась к некоторому критическому значению (в описанных Расселом экспериментах — около 14 км/ч), буксировать баржу становилось все труднее. Однако если эта скорость, наконец, достигалась, картина резко менялась: появлялась уединенная волна, тянуть баржу становилось легче — волна как бы несла ее на себе. При остановке баржи волна отрывалась и уходила вперед — начинала самостоятельную жизнь.

Вопрос об уединенных волнах, возникающих на поверхности воды, активно изучался и теоретически, и экспериментально, начиная с середины XIX века. Причиной пристального внимания к ним исследователей был не только чисто физический интерес, но и практические выводы для судоходства. В истории судостроения известны случаи, когда образование уединенной волны не давало возможности кораблям преодолеть критическую скорость, несмотря на то, что двигатели работали на полную мощность. При этом критическая скорость была намного меньше предельной скорости, предусмотренной при проектировании корабля. Бывали также случаи отрыва уединенной волны от корабля, движущегося на расстоянии нескольких километров от берега. Такая волна достигает в высоту пяти и более метров, она распространяется достаточно быстро и, дойдя до мелководья вблизи берега, сметает все на своем пути.

Родственным видом наблюдавшихся Расселом уединенных волн являются цунами — морские или океанские волны, возникающие, как правило, при сильных подводных землетрясениях. Из-за быстрого сдвига земной коры на дне океана водяной столб, находящийся над местом деформации дна, вследствие пренебрежимо малой сжимаемости воды резко смещается в вертикальном направлении; в результате образуется уединенная волна. Возникающие в океане в области с большой глубиной волны цунами имеют относительно большую скорость — от ста до тысячи километров в час; их высота обычно колеблется от одного до десяти метров. Однако когда волна достигает прибрежных районов с изрезанным рельефом, ее высота увеличивается и может достигать пятидесяти метров. Такие волны особенно хорошо известны в районах Тихого океана, где достаточно часто происходят подводные вулканические извержения и сдвиги земной коры. Цунами не раз обрушивались на берега Камчатки, Северной Америки, островов Японии.

Довольно долгие исследования возникновения и распространения уединенной волны на воде позволили сделать некоторые интересные выводы. Оказалось, что критическая скорость корабля или, что то же самое, скорость движения уединенной волны тем выше, чем больше глубина канала, моря, океана. По приближенным оценкам значение критической скорости близко к величине $\sqrt{gh_0}$, где h_0 — толщина слоя воды в отсутствие волны. (Попробуйте сами получить эту оценку.) Нетрудно подсчитать, что при $h_0 \approx 10$ м скорость уединенной волны приблизительно равна 35 км/ч. Так что на относительно неглубокой воде такая волна образуется при реальных скоростях современных кораблей (порядка нескольких десятков км/ч). Если же корабль пройдет участок мелководья и выйдет на глубокую воду, волна может отделиться от него и начать самостоятельную жизнь.

Уединенные волны, подобные той, что была впервые описана Расселом, получили название солитонов (от английского слова solitary — одинокий, уединенный).

Чем же отличаются солитоны от обычных волн и почему они вызывают большой интерес у ученых, специализирующихся в различных областях физики — от гидродинамики до физики плазмы, твердого тела, элементарных частиц?

Рассмотрим условия образования солитона подробнее.

Предположим, что в результате какого-либо кратковременного импульсного воздействия в среде образуется и перемещается уединенная волна. В простейшем случае, когда все части волны перемещаются с одинаковой скоростью и трение в среде пре-

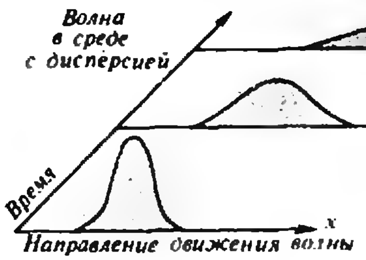


Рис. 1а.

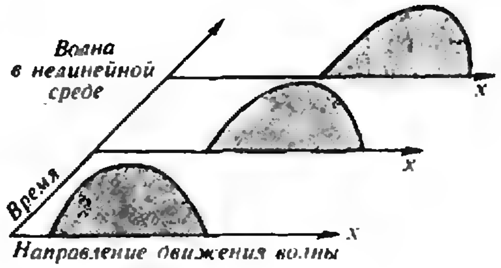


Рис. 1б.

небрежимо мало, форма волны может сохраняться сколь угодно долго. Однако в реальных условиях все происходит сложнее. Чаще всего по мере удаления от источника возбуждения волна «расползается» (рисунок 1а) и в конечном счете затухает. При наличии трения затухание происходит из-за неизбежных потерь энергии. Однако «расползание» и затухание волны наблюдаются и в средах, в которых отсутствует трение. Это возможно в том случае, если волна имеет сложную форму уже в момент ее возникновения и различные ее части движутся с различными скоростями; например, одна часть волны обгоняет ее центр, а другая отстает от него (за центр волны мы принимаем участок, соответствующий амплитуде). Такое расползание волн происходит только в средах, обладающих определенными свойствами. Эти среды называют диспергирующими (от английского слова dispersion, которое означает рассеяние, разбрасывание); при этом волны также называют диспергирующими.*)

Форма волны может изменяться и в недиспергирующей среде в отсутствие трения. Как это происходит, показано на рисунке 1б. В начале движения профиль волны был близок к полупериоду синусоиды. По мере распространения волны профиль заметно меняется: передний фронт становится все более крутым, а задний — пологим (хотя расползания волны нет!). Через некоторое время от синусоидальной волны не остается и следа. Подобное изменение формы волны происходит в средах, которые называют нелинейными. Соответственно, волны, образующиеся в таких средах, называют тоже нелинейными.*)

Нелинейные среды и волны прежде всего привлекают внимание исследователей, интересующихся различными вопросами распространения и взаимодействия волн. Именно в нелинейных средах проявляются разнообразные виды преобразования волн различной природы и различных частотных диапазонов. Нелинейным эффектам обязаны своим существованием многочисленные приборы — генераторы и усилители электромагнитных сигналов, умножители и делители частоты, модуляторы и т. п. Нелинейные волновые явления играют важную, порой определяющую роль при движении кораблей, полете самолетов и ракет, распространении радиоволн в земной атмосфере.

Распространение уединенной волны неизменной формы в среде, не обладающей дисперсией и нелинейными свойствами, представляется совершенно естественным. Самое интересное и удивительное заключается в том, что уединенная волна может распространяться, сохраняя скорость и форму неизменными, в сугубо нелинейной среде с дисперсией! Оказывается, эффект изменения формы волны вследствие дисперсии (расползание) может полностью компенсироваться изменением формы вследствие нелинейности. В результате «наложения» этих двух эффектов в среде распространяется волна, форма которой подобна той, что изображена

---

*) Дисперсией называется зависимость скорости распространения волны от длины волны. Среды, в которых наблюдается эта зависимость, называют диспергирующими.

*) Нелинейными называют среды, свойства которых зависят от состояния среды (например, диэлектрическая проницаемость среды может зависеть от напряженности электрического поля в среде).

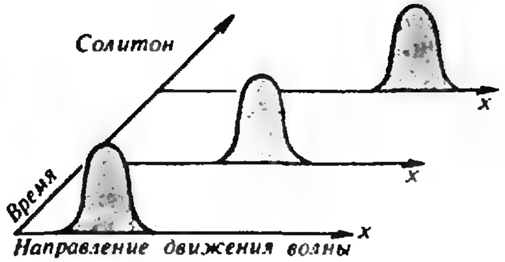


Рис. 1в.

на рисунке 1в. Такие волны и называют солитонами.

Итак, солитон — это уединенная волна, распространяющаяся в нелинейной диспергирующей среде с пренебрежимо малым трением, полностью сохраняющая свою форму.

Тот факт, что свойства уединенной волны в значительной мере зависят от свойств среды, в которой волна распространяется, был установлен теоретически в конце прошлого века математиками Д. Дж. Кортевегом и Г. де Вризом. Они показали, что среди решений уравнения волнового движения в прямоугольном канале с водой содержатся такие, которые описывают нелинейные диспергирующие уединенные волны, форма которых в процессе распространения сохраняется сколь угодно долго при отсутствии трения. Это и есть солитоны.

Следует подчеркнуть, что волна-солитон — лишь одно из довольно многих решений волновой теории Кортевега — де Вриза. Среди остальных решений мы встречаем другие, в том числе периодические, типы волн, распространяющиеся по водной поверхности в различных направлениях и с различными скоростями. Это обстоятельство полностью согласуется с результатами экспериментальных наблюдений. Например, при движении корабля со скоростями, отличными от критического значения, образуются периодические структуры волн, гребни которых направлены почти параллельно или перпендикулярно борту корабля (обычно их называют, соответственно, «косыми» и «поперечными» волнами).

Вообще говоря, решения в виде уединенных волн существуют для многих систем. Однако уединенные волны, которые изучали Кортевег и де Вриз, имеют некоторые отличительные свойства. Эти отличия особенно наглядно проявляются при взаимодействии двух таких волн. Представим себе две уединенные волны с разными амплитудами, движущиеся в одну и ту же сторону с разными скоростями (рисунок 2, *а*). Согласно теории Кортевега—де Вриза более высокие волны движутся быстрее. Следовательно, левая волна на рисунке 2, *а* догонит правую волну. После этого в течение некоторого времени волны будут двигаться как одно целое, взаимодействуя между собой, а затем вновь разъединятся. Так вот, замечательным свойством уединенных волн Кортевега—де Вриза является то, что после взаимодействия их форма полностью сохраняется (рисунок 2, *б*) и каждая волна продолжает двигаться со своей прежней скоростью. (Сохранение формы и скорости после взаимодействия плюс локализация в пространстве — такое поведение уединенных волн Кортевега — де Вриза напоминает свойства некоторых элементарных частиц — электронов, протонов, нейтронов. Вот почему им дали название, похожее на название элементарной частицы.)

Термин «солитон» был предложен сравнительно недавно — в 1965 году. Однако за прошедшее время это название прочно вошло в физику нелинейных волновых процессов. Все чаще область исследований солитонов выделяют в самостоятельное научное направление, называя его условно «солитоникой».

Классическим примером солитонов являются описанные в первых экспериментальных работах Рассела уединенные волны на воде (имеются даже его замечания о сохранении формы

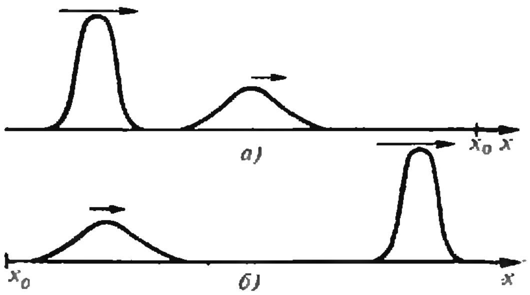


Рис. 2.

наблюдавшихся им уединенных волн после их взаимодействия). Но если бы дело ограничилось существованием солитонов только на водной поверхности, «солитоника» вряд ли привлекла бы внимание специалистов, исследующих волновые процессы в различных областях физики. Между тем солитоны встречаются во многих средах и системах, в которых вообще возможно существование волн: в плазме — ионизированном газе с большой плотностью электронов и ионов, в полупроводниках и сверхпроводниках, в цепочках последовательно соединенных атомов и т. д. Хотя физическая природа волн, возникающих в этих столь разных системах, может быть различна, уравнения, описывающие распространение этих волн, оказываются сходными или даже идентичными по виду. (Разумеется, в каждом конкретном случае входящие в эти уравнения параметры имеют свой собственный физический смысл.)

Типичным примером солитонов в твердых телах служат так называемые электрические домены, образующиеся при определенных условиях в полупроводниках. Они были обнаружены в начале шестидесятых годов английским физиком Ганном. Исследуя поведение образцов арсенида галлия — полупроводника с электронной проводимостью (то есть n-типа) — в достаточно сильных электрических полях, Ганн установил, что когда напряженность поля в образце достигала значения $E \gtrsim 3 \cdot 10^5$ В/м, в нем возникали строго периодические колебания тока с большой амплитудой; частота колебаний достигала значения $\sim 10^9$ Гц*). Дальнейшие экспериментальные исследования прояснили картину появления колебаний. Оказалось, что они связаны с движением по образцу локализованной области сильного электрического поля; эта область и получила название электрического домена**).

В чем причина возникновения и движения электрических доменов и почему они образуются далеко не во всех полупроводниках? Какими отличительными свойствами обладает арсенид галлия n-типа?

Оказывается, в отличие от других полупроводников, арсенид галлия с электронной проводимостью имеет весьма своеобразную вольтамперную характеристику. При увеличении электрического поля ток через образец сначала увеличивается, как это и предсказывает закон Ома. Однако при достижении некоторой пороговой напряженности поля $E_{пор}$ ток начинает уменьшаться и уменьшается до тех пор, пока не достигнет некоторого минимального значения, определяемого свойствами образца; при дальнейшем увеличении электрического поля ток вновь начинает возрастать (рисунок 3,*а*). Такая «нелинейная» вольтамперная характеристика обусловлена зависимостью дрейфовой скорости электронов (так называют среднюю скорость установившегося движения электронов в образце) от напряженности поля в образце. Кривая, описывающая эту зависимость (рисунок 3,*б*), имеет такую же N-образную форму, как и вольтамперная характеристика на рисунке 3,*а*.

Представим себе, что образец из арсенида галлия включен в цепь так, как показано на рисунке 3. Что произойдет, если напряжение на образце

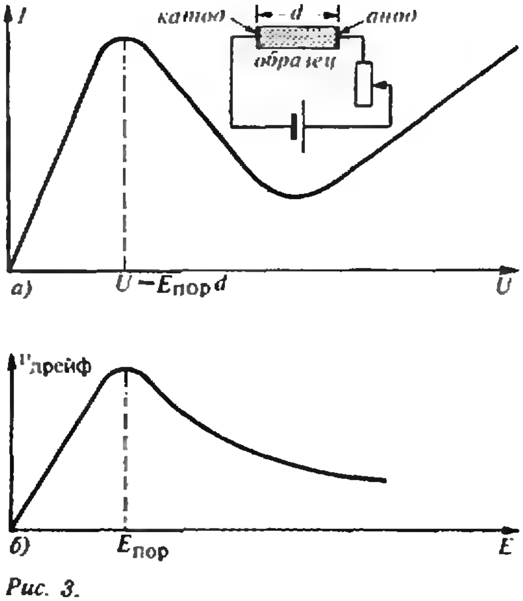


Рис. 3.

---

*) Об этом эффекте, получившем название «эффекта Ганна», было рассказано в статье М. Е. Левинштейна в 10-м номере «Кванта» за 1982 год.

**) Доменом в физике называют ограниченные области, свойства которых резко отличаются от свойств окружающей их среды.

окажется несколько больше значения $U=E_{\text{пор}}d$ и будет соответствовать тому участку вольтамперной характеристики, где ток уменьшается с ростом напряжения? Оказывается, именно при этом условии в образце возникает электрический домен. Разберемся, как это происходит.

Будем считать, что электрическое поле в образце однородно. Предположим, что за счет флуктуаций[*] в каком-либо месте образца плотность электрических зарядов в какой-то момент оказалась больше, нежели средняя плотность зарядов в остальном объеме. Напряженность электрического поля в этом месте тоже возрастает. Дрейфовая скорость электронов, находящихся в этой области сильного поля, станет меньше, чем дрейфовая скорость электронов позади и впереди флуктуации (мы должны помнить, что электроны и, следовательно, флуктуация движутся от катода к аноду образца). Таким образом, электроны, находящиеся позади, будут нагонять флуктуацию, увеличивая ее объемный заряд и напряженность электрического поля. Поэтому область сильного поля будет перемещаться все медленнее, все большее количество электронов сзади будет ее нагонять, все больше станет возрастать электрическое поле в области флуктуации. (На этом этапе формирования электрического домена наглядно проявляются эффекты дисперсии: различные области флуктуации движутся с разными скоростями.) Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока электрическое поле впереди и позади флуктуации не уменьшится до такой степени, что дрейфовая скорость электронов в этих областях начнет уменьшаться. (Понятно, что уменьшение скорости с уменьшением поля начнется с того момента, когда напряженность поля вне флуктуации станет меньше $E_{\text{пор}}$. С этого момента эффекты нелинейности начнут компенсировать эффекты дисперсии.)

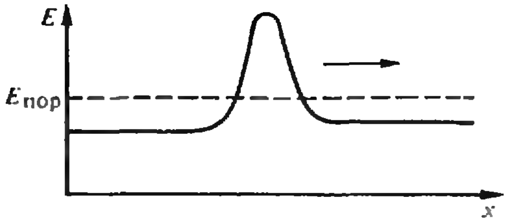


Рис. 4.

Когда скорости электронов в области сильного поля и вне нее сравняются, электрический домен можно считать сформировавшимся. В дальнейшем он будет двигаться по образцу с постоянной скоростью.

Таким образом, в примере с эффектом Ганна проявляются все свойства, присущие солитону: налицо устойчивое образование — уединенная волна (электрический домен), — которое возникает в образце с дисперсией и сильной нелинейностью и, сохраняя свою форму неизменной, движется с постоянной скоростью (рисунок 4).

Нетрудно видеть, что подобное образование и движение доменов сопровождается колебаниями электрического тока. При приложении к образцу электрического поля $E \geqslant E_{\text{пор}}$ вблизи катода образуется домен с высокой напряженностью поля; следовательно, в остальной части образца поле становится меньше, уменьшается и электрический ток. При разрушении домена вблизи анода поле в объеме образца возрастает, следовательно, дрейфовая скорость электронов и электрический ток увеличиваются. Однако возрастание поля до величины $E_{\text{пор}}$ приведет к образованию нового домена вблизи катода, процесс его движения от катода к аноду повторится. Это периодическое повторение вызывает колебания в образце электрического тока, причем период колебаний прямо пропорционален длине образца d.

Эффект Ганна сейчас активно используется в практических целях — на его основе разработаны и выпускаются промышленные образцы полупроводниковых малогабаритных генераторов электромагнитных колебаний сверхвысоких частот. Такие генераторы находят широкое применение в системах радиосвязи, приема и обработки сигналов, в радиолока-

---

[*] Флуктуациями называют случайные отклонения какой-либо физической величины, характеризующей систему из большого числа частиц, от ее среднего значения. Флуктуация плотности зарядов, о которой мы будем говорить, может возникнуть за счет теплового движения электронов.

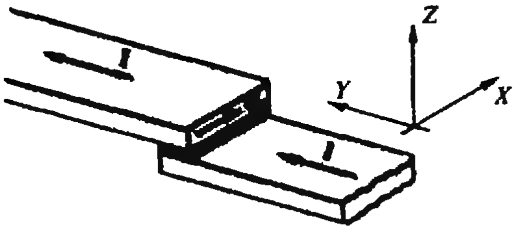


Рис 5

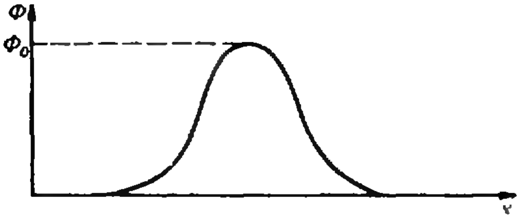


Рис 6

ции, телевидении, космических исследованиях. Можно сказать, что ганновские генераторы служат примером развития прикладной солитоники.

Расскажем еще об одном практическом использовании свойств солитонов. Уединенная волна, не меняющая своей формы при движении,— идеальный носитель информации, который может быть незаменимым при создании логических устройств, элементов памяти, при передаче и обработке информационных сигналов. Для создания логических устройств по переработке и запоминанию информации сейчас начинают использовать магнитные солитоны в слоистых сверхпроводниковых структурах. Оказывается, солитоны в виде «сгустков» магнитного потока могут перемещаться вдоль слоистой структуры, образованной сверхпроводящими электродами и изолирующей прослойкой с толщиной 20—40 ангстрем (1 ангстрем = $1\text{Å} = 10^{-10}$ м). Сгусток можно перемещать вдоль контакта сверхпроводник — изолятор — сверхпроводник (вдоль оси X на рисунке 5), пропуская через слоистую структуру ток. Такой сгусток локализован в пространстве (рисунок 6) и несет малую, но строго определенную порцию магнитного потока Φ_0, равную $h/2e = 2{,}07 \times \times 10^{-15}$ Вб (h — постоянная Планка, e — заряд электрона). Величина Φ_0 носит название кванта магнитного потока. Необычность структуры сверхпроводник — изолятор — сверхпроводник состоит в том, что при малой толщине изолирующего слоя вследствие квантовой природы сверхпроводящих электронов возможно их просачивание через слой изолятора без потерь, то есть без нарушения сверхпроводимости системы. Сверхпроводимость сохраняется до некоторой критической скорости электронов, соответствующей критическому току $I_{\text{к}}$; при токе, большем $I_{\text{к}}$, сверхпроводимость разрушается, появляется сопротивление, и вся структура переходит в нормальное (не сверхпроводящее) состояние. Появление и движение сгустка магнитного потока при действии внешнего магнитного поля сопровождается резким уменьшением $I_{\text{к}}$ и изменением энергии системы в целом. Поэтому квант магнитного потока Φ_0, присущий единичному сгустку, может служить единицей информации: например, в его отсутствие энергии системы можно приписать цифру «0», а при его наличии — цифру «1». Вопрос, однако, заключается в том, как удержать магнитный сгусток внутри слоистой структуры. Оказывается, это можно сделать, если в области изолирующего слоя искусственно создать дефект структуры, например, прямой металлический канал между сверхпроводящими обкладками, имеющий поперечные размеры порядка нескольких десятков ангстрем. Взаимодействуя с таким каналом, сгусток «зацепится» за него и останется в слоистой структуре после выключения магнитного поля. Такой элемент может служить ячейкой обработки и запоминания информации с двумя устойчивыми состояниями: одно — при наличии сгустка с единичным квантом магнитного потока Φ_0, другое — в его отсутствие. Большое число соответствующим образом соединенных элементов дает возможность создавать системы с большой памятью и разнообразными операциями по обработке поступающей информации.

Использование солитонов в сверхпроводящих структурах для создания логических устройств по переработке и запоминанию информации является, пожалуй, одним из наиболее ярких примеров применения этих необычных уединенных волн в практических целях. Важное преимущество создаваемых на этих принципах сверхпроводящих электронно-вычислительных машин состоит в малой величине потребляемой энергии: на одну логическую операцию расходуется не более 10^{-19} Дж. Это обстоятельство даст возможность избежать перегревов твердотельных элементов, из которых будет состоять такая ЭВМ, располагать элементы достаточно близко друг к другу. Размеры самих элементов очень малы: площадь поперечного сечения каждого такого элемента обычно равна сотой или даже тысячной доле квадратного миллиметра. Поэтому сверхпроводящая ЭВМ должна быть очень компактной, ее объем не будет превышать нескольких сотен кубических сантиметров; она будет обладать лучшим быстродействием по сравнению с известными ЭВМ. По мнению ученых, ЭВМ этого типа составят основу для целого будущего поколения сверхбыстродействующих компактных ЭВМ с практически неограниченной памятью. Недаром в научной литературе эти вычислительные машины получили название «суперЭВМ». Однако малые размеры «суперЭВМ», являясь несомненным достоинством, порождают и определенные трудности: для изготовления элементов столь малых, «микронных», размеров требуется проведение целого комплекса сложных технологических операций и дорогостоящее оборудование.*)

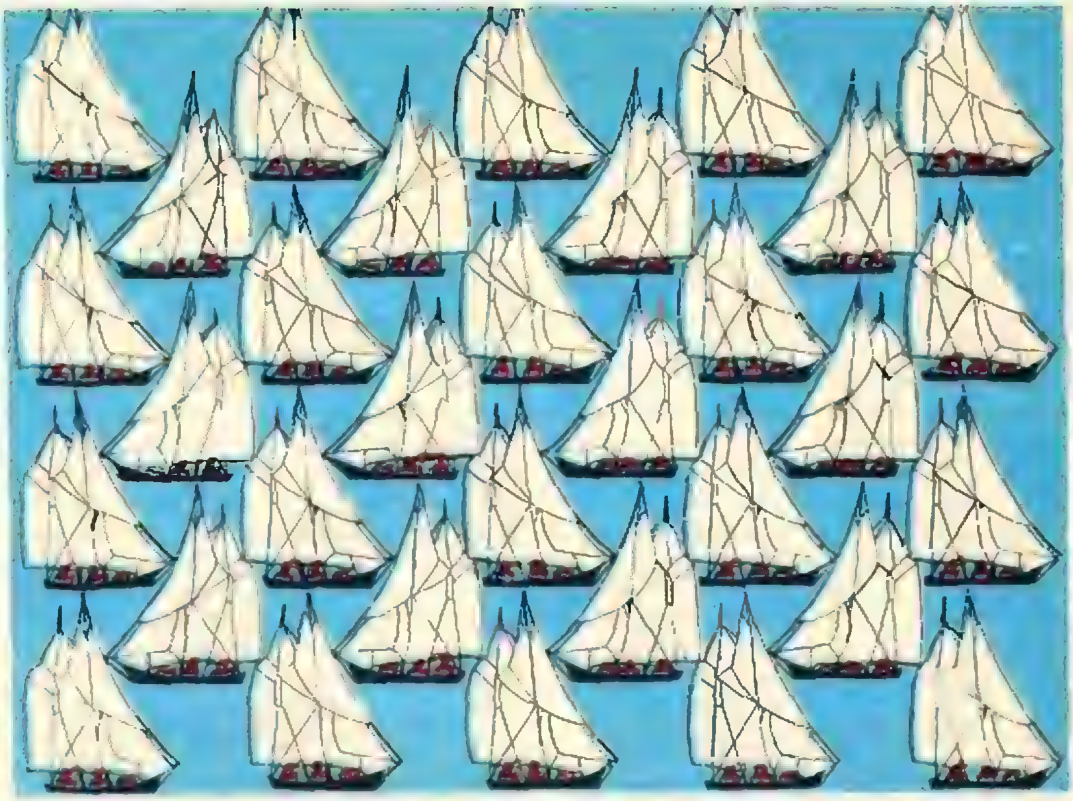
Изучение солитонов в полупроводниках и сверхпроводниках представляет интерес не только для исследователей, специализирующихся в области физики и техники полупроводников и низких температур. Дело в том, что математические уравнения, описывающие движения электрических доменов и магнитных сгустков, имеют тот же вид, что и уравнения движения уединенных волн в некоторых биологических средах, уравнения взаимодействия элементарных частиц, распространения лазерных импульсов. Решения этих уравнений в виде уединенных волн — также одинаковы или близки, хотя, как мы уже говорили, в каждой конкретной ситуации входящие в них величины имеют различный физический смысл: в одних условиях эти решения описывают волны на воде, в других — волны электрического заряда в плазме, в третьих — электромагнитные волны, распространяющиеся по линиям передач. Многообразие этих явлений поневоле приводит нас к мысли о фундаментальности понятия «солитон», а их описание с помощью идентичных или близких по форме уравнений — о возможности моделировать процессы, скажем, в физике элементарных частиц волновыми процессами, происходящими в твердом теле. Так на конкретном примере солитонов можно проследить единство и многообразие изучаемого нами мира природы.

За полтора столетия наука о солитонах прошла большой путь: от наблюдений уединенных волн на воде до сложного и строгого математического описания с помощью солитонов взаимодействий элементарных частиц и, наконец, разработок «суперЭВМ» на сверхпроводниках. Здесь проявляется еще одно свойство фундаментальных физических явлений: за открытием и детальным исследованием, рано или поздно, но обязательно следует их активное использование в практических целях.

И еще одно, последнее. В науке о солитонах в полную меру проявились развитые в последние десятилетия математические методы анализа. Эти методы, отличающиеся строгостью и стройностью сами по себе, позволили получить столь необычное и изящное решение — одиночную волну неизменной формы, распространяющуюся в сложной нелинейной среде с дисперсией. Изящество всегда было отличительной чертой фундаментальных явлений природы, и здесь оно проявляется в полной мере. Наряду с чисто физическим интересом и многими практическими возможностями изящество солитонов составляет одну из наиболее привлекательных их черт для ученых, специализирующихся в разных областях физики, и не только физики.

---

*) Проблеме создания ЭВМ на сверхпроводниках посвящена заметка Л Г Асламазова в этом номере журнала (с 21) *(Прим ред)*



Как устроены кристаллы

Доктор физико-математических наук
Р. В. ГАЛИУЛИН

С древнейших времен кристаллы поражали человеческое воображение своим исключительным геометрическим совершенством. Наши предки видели в них творения ангелов или подземных духов. Первой попыткой научного объяснения формы кристаллов считается произведение Иоганна Кеплера «О шестиугольных снежинках» (1611 г.). Кеплер высказал предположение, что форма снежинок (кристалликов льда) есть следствие особых расположений составляющих их частиц. Спустя три века было окончательно установлено, что специфические особенности кристаллов связаны с особыми расположениями атомов в пространстве, которые аналогичны узорам в калейдоскопах. Все различные законы таких расположений были выведены в 1891 году нашим замечательным соотечественником, родоначальником современной кристаллографии Е. С. Федоровым (1853—1919). Правильные формы кристаллических многогранников легко объясняются в рамках этих законов. И сами эти законы настолько красивы, что не раз служили основой для создания произведений искусства (см. заставку)*).

С геометрической точки зрения расположение атомов в пространстве представляется системой точек, соответствующих их центрам. Поэтому задачу можно поставить так: требуется найти геометрические условия, выделяющие системы точек с «кристаллической структурой», причем эти условия должны быть физически оправданы. Последнее весьма существенно, коль скоро мы хотим выявить причины упорядоченного расположения атомов в кристаллах.

Простейшим геометрическим свойством систем точек, соответствующих центрам атомов в любых атомных совокупностях (а не только в кристаллах), является дискретность.

---

*) На заставке — узор, заимствованный из Канадского минералогического журнала № 19 за 1981 г.

Условие дискретности. *Расстояние между любыми двумя точками системы больше некоторой фиксированной величины r.* Физическая очевидность этого условия не вызывает сомнений.

Стремление атомов равномерно расположиться в пространстве можно отразить следующим ограничением на соответствующую систему точек:

Условие покрытия. *Расстояние от любой точки пространства до ближайшей к ней точки системы меньше некоторой фиксированной величины R.*

Название этого условия объясняется тем, что если система точек ему удовлетворяет, то шары радиуса R с центрами в этих точках покрывают все пространство (докажите!).

Условие дискретности не позволяет точкам системы располагаться слишком густо; а условие покрытия — слишком редко. Совместно эти два требования обеспечивают примерно равномерное расположение точек в пространстве. Системы точек, удовлетворяющие этим двум условиям одновременно, называются *системами Делоне*, в память об известном нашем геометре Б. Н. Делоне (1890—1980), впервые выделившем эти системы.

Простейший пример системы Делоне (на плоскости) — это множество узлов бесконечного листа клетчатой бумаги. В кристаллографии системы такого типа играют очень важную роль и мы еще поговорим о них подробно. Из этой системы можно получить систему Делоне более общего вида, если произвольно сдвинуть каждый узел на расстояние, не превосходящее, скажем, 1/3 расстояния между соседними узлами (рис. 1).

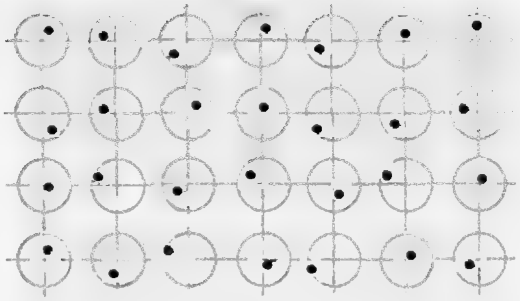


Рис. 1.

Упражнение 1. Докажите, что указанные системы точек действительно удовлетворяют условиям дискретности и покрытия; найдите для них значения r и R.

Системы Делоне служат наиболее общей геометрической моделью расположения атомов в любом атомном образовании. Поэтому любую теорему об этих системах можно интерпретировать как свойство такого расположения. Этим обусловлена важность теории систем Делоне для приложений. Но сейчас нас интересует не общая теория систем Делоне (только начинающая развиваться), а некоторые их частные случаи — системы, описывающие расположе-

Член-корреспондент АН СССР Борис Николаевич Делоне (1890—1980) — известный геометр, ведущий советский «математический кристаллограф», заслуженный мастер альпинизма, организатор первых школьных математических олимпиад. Ему принадлежит одна из первых работ по практическому приложению теории чисел в кристаллографии. «Кристаллограф,— говорил Борис Николаевич,— в силу постоянного общения с кристаллами уже интуитивно является геометром».

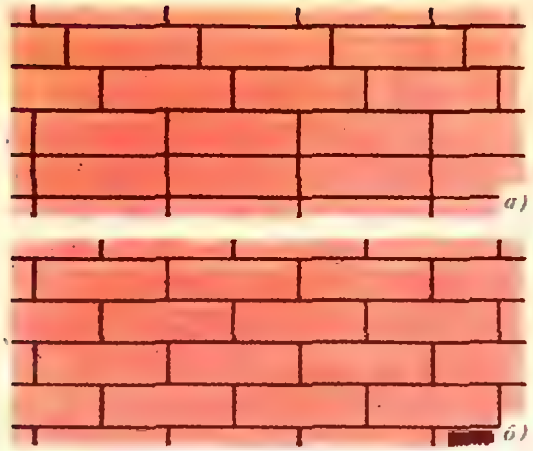


Рис. 2. Кирпичные кладки: а) несимметричная, б) симметричная.

ние центров атомов в кристаллических структурах. Чтобы выделить эти системы, мы воспользуемся главнейшим геометрическим свойством кристаллов — симметрией.

Что такое симметрия? Интуитивно каждый из нас умеет отличать симметричное от несимметричного. Симметричные тела всегда можно разбить на равные части и даже многими способами. Но этого свойства еще не достаточно для определения симметрии. Бесконечная кирпичная кладка, фрагмент которой приведен на рисунке 2,*а*, несимметрична, хотя и составлена из равных кирпичиков. А вот кирпичная кладка рисунка 2,*б* симметрична. В ней каждый кирпич равно окружен всеми другими кирпичами. Равенство (или конгруэнтность) двух частей фигуры означает, что их можно совместить перемещением. Их «равное окружение» — что это перемещение можно выбрать так, чтобы и вся фигура перешла сама в себя. Перемещение, переводящее некоторую фигуру в себя, называется ее *преобразованием симметрии* или *самосовмещением*. Итак, *фигура симметрична, если она имеет хотя бы одно преобразование симметрии* (отличное от тождественного).

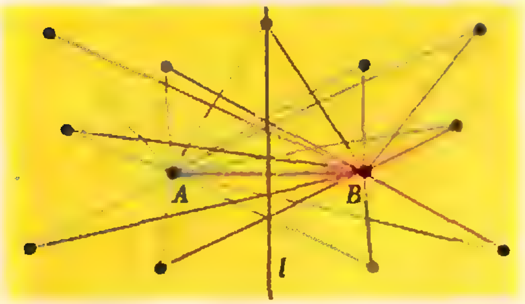


Рис. 3. Фрагмент симметричной системы Делоне. Ее единственное нетождественное преобразование симметрии — это осевая симметрия S_l. Точки A и B имеют равные глобальные звезды.

Упражнение 2. а) Найдите все преобразования симметрии правильного n-угольника. б)* Докажите, что куб имеет 48 преобразований симметрии (с учетом зеркальных перемещений) и найдите их.

Множество всех преобразований симметрии данного объекта, рассматриваемое вместе с операцией композиции этих преобразований, называется *группой симметрий* (или самосовмещений) этого объекта. С этим важным математическим понятием, лежащим на стыке геометрии и алгебры, можно познакомиться, например, по книге П. С. Александрова «Введение в теорию групп» (М., «Наука», 1980).

Итак, системы Делоне, отвечающие кристаллам, должны быть симметричны. Такие системы можно описать и опираясь на понятие равного окружения. Для этого соединим произвольную точку A системы Делоне со всеми остальными ее точками (рис. 3). Так полученную бесконечную совокупность отрезков назовем *глобальной звездой точки A* в данной системе. В общем случае глобальные звезды разных точек системы не равны друг другу. Но ясно, что если в системе окажется хотя бы две точки с равными глобальными звездами, система будет уже симметричной. Верно и обратное утверждение: всякая симметричная система Делоне содержит точки с равными глобальными звездами. Таким образом, равенство глобальных звезд хотя бы у двух точек системы Делоне есть необходимое и достаточное условие симметричности этой системы.

Упражнения

3. Докажите, что в любой симметричной системе Делоне найдется бесконечно много пар точек с равными глобальными звездами.

4. Постройте плоскую систему Делоне, которая переходит в себя при повороте на 90°; на 60°.

5. Докажите, что если поворот на угол α является преобразованием симметрии некоторой плоской фигуры, то повороты на углы

na (где n — любое целое число) с тем же центром — тоже ее преобразования симметрии, а если эта фигура — система Делоне, то отношение a/π должно быть рационально.

Но не всякая симметричная система Делоне соответствует центрам атомов в кристаллических структурах. Симметрия кристаллов специфична. Например, среди кристаллических многогранников нет правильных додекаэдров и икосаэдров и вообще многогранников, имеющих оси симметрии 5-го порядка (то есть «самосовмещающихся» при поворотах на угол $2\pi/5$ около этих осей). Как объяснить такую привередливость кристаллических форм?

В 1783 году французский аббат Р. Ж. Гаюи, минералог по призванию, высказал предположение, что всякий кристалл составлен из параллельно расположенных равных частиц, смежных по целым граням (рис. 4). В 1824 году ученик великого Гаусса, профессор физики во Фрайбурге Л. А. Зеебер для объяснения расширения кристаллов при нагревании предложил заменить многогранники Гаюи их центрами тяжестей. Такие системы точек были названы «решетками».

Более строго, *решеткой* называется множество всех точек с целочисленными координатами относительно произвольной (необязательно прямоугольной) системы координат (рис. 5,*а*—*в*). Точки решетки называют *узлами*. Очевидно, что система координат однозначно определяет решетку. Но обратное утверждение не верно: в данной решетке определяющую её систему координат можно выбрать бесконечным числом способов (рис. 5 ,*б*). Легко проверить, что решетки удовлетворяют условиям дискретности и покрытия, то есть являются системами Делоне. Докажем теперь их симметричность. Справедлива следующая

Лемма о решетке. *Всякая решетка переходит в себя при параллельном переносе на вектор, соединяющий любые два ее узла, а также при центральной симметрии относительно любого узла.*

Для доказательства первого утверждения заметим, что вектор $\vec{AB}$, где A и B — узлы решетки, имеет целые координаты (равные разностям соответствующих координат точек A и B). Перенос на этот вектор равносилен прибавлению к координатам каждого узла целых чисел (координат вектора). Поскольку в результате получаются целые числа, каждый узел переходит в узел той же решетки. Доказательство утверждения о центральной симметрии оставим читателю.

Именно решетчатое строение кристаллов обусловливает специфику их

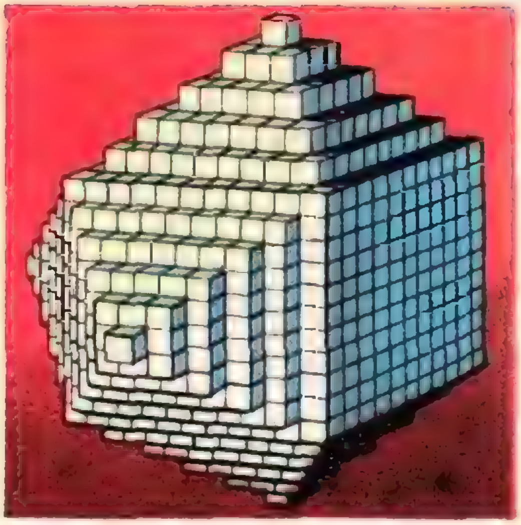


Рис. 4. Строение кристаллов по Р. Ж. Гаюи.

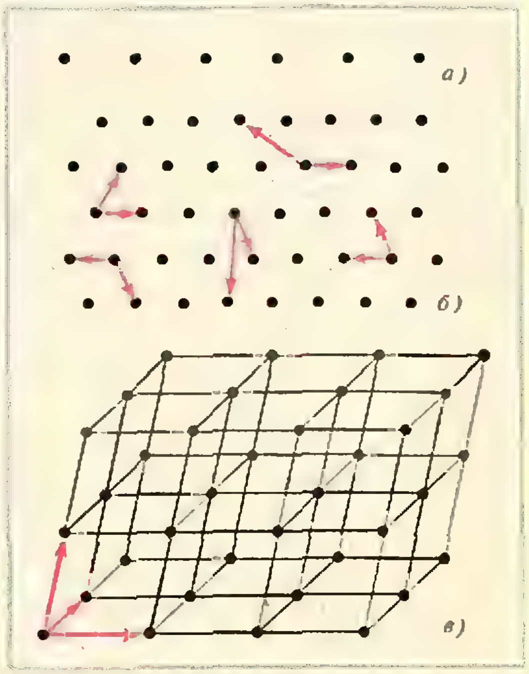


Рис. 5. Решетки: а) одномерная, б) двумерная (плоская сетка), в) трехмерная. Красными стрелками показаны базисные векторы задающих эти решетки систем координат.

симметрии. Всякая решетка бесконечным числом способов разбивается на бесконечные совокупности конгруэнтных и параллельно расположенных плоских сеток (двумерных подрешеток, рис. 5, *в*). Принято считать, что плоскости всех граней кристалла обязательно содержат в себе плоские сетки какой-либо одной общей решетки. Плоские сетки решетки, связанные преобразованиями симметрии, не отличимы друг от друга. Поэтому при росте кристалла соответствующие им грани растут одинаково. Так симметрия кристалла повторяет симметрию решетки.

Докажем теперь, что кристалл не может иметь ось симметрии 5-го порядка. Допустим, что такой кристалл существует. Тогда соответствующая ему решетка тоже имеет ось 5-го порядка l. Проведем через любой узел *плоскость, перпендикулярную* l, и выберем в этой плоскости узел A, ближайший к l (существование такого узла нетрудно вывести из условия дискретности). Поскольку решетка переходит в себя при поворотах на углы, кратные $2\pi/5$, вокруг оси l, образы точки A при поворотах являются узлами решетки. Они образуют правильный пятиугольник $ABCDE$ (рис. 6). Если сдвинуть решетку на вектор $\overrightarrow{AB}$, то по лемме о решетке узел E должен перейти в некоторый узел N, лежащий внутри пятиугольника. Но это невозможно, так как точка N расположена ближе к оси l, чем A.

Упражнение 6. Постройте решетки, имеющие оси симметрии 2-го, 3-го, 4-го, 6-го порядков. Докажите, что осей выше 6-го порядка решетка иметь не может.

Отметим, что в мире растений и мелких организмов (вирусов) часто встречаются индивиды, обладающие осями 5-го порядка. По образному выражению нашего выдающегося кристаллографа академика Н. В. Белова (1891—1982), «пятерная ось является у мелких организмов своеобразным инструментом борьбы за существование, страховкой против окаменения, против кристаллизации, первым шагом которой была бы «поимка» решеткой живого организма».

Но не все известные о кристаллах факты укладывались в рамки решетчатой модели. Один из таких фактов — это существование нецентросимметричных кристаллических многогранников, таких как кристаллы драгоценного камня турмалина (рис. 7) (по лемме о решетке все решетки центросимметричны). Для объяснения подобных явлений потребовалось расширить арсенал допустимых расположений частиц в пространстве. Известный немецкий кристаллограф Л. Зонке в 1879 году высказал предположение, что частицы в кристаллах располагаются по *правильным системам*.

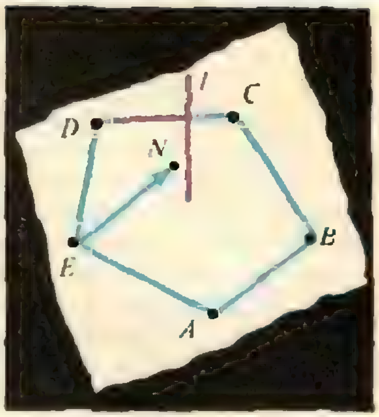


Рис. 6

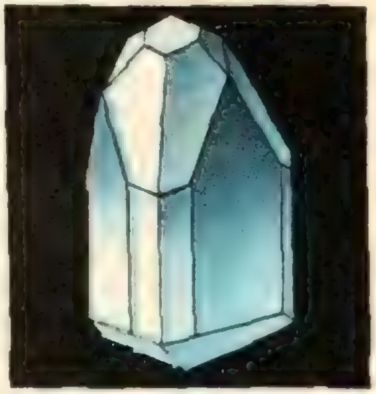


Рис. 7. Кристалл турмалина.

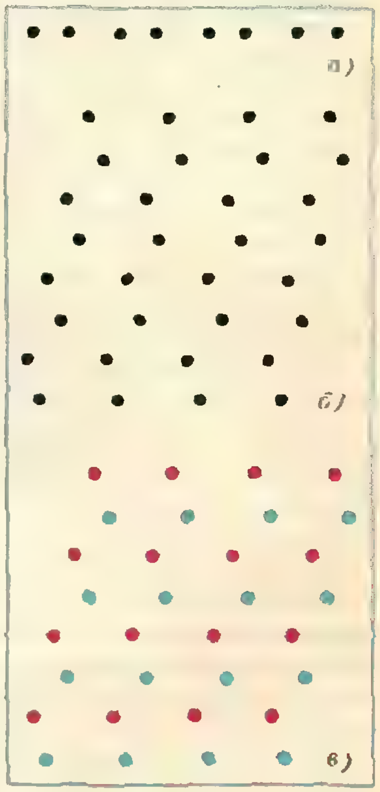


Рис. 8. Правильные системы точек: а) одномерная, б) двумерная, в) разложение правильной системы на решетки.

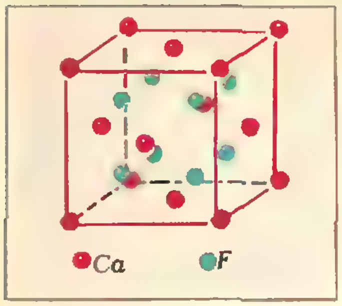


Рис. 9. Структура флюорита, составленная из двух различных правильных систем (зеленые точки — атомы фтора, красные — кальция).

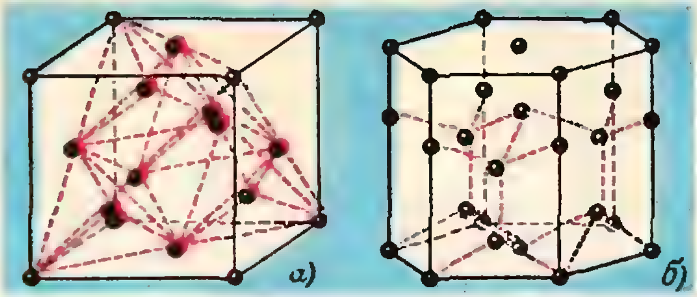


Рис. 10. Структура а) алмаза, б) лонсдейлита.

Система Делоне называется *правильной*, если из каждой ее точки вся система видна одинаково, то есть если глобальные звезды всех точек этой системы равны друг другу (рис. 8,*а*—*в*). Если бы наблюдатель заснул на какой-либо точке правильной системы и в это время его перенесли бы на другую точку этой системы, он бы и не заметил этого. Другими словами, любую точку правильной системы можно перевести в любую другую преобразованием симметрии всей системы. Группы симметрии правильных систем называются *федоровскими или пространственными кристаллографическими группами*. Имеется 230 различных федоровских групп (плоских кристаллографических групп значительно меньше — всего 17; самосовмещения узора, изображенного на заставке, представляют одну из этих групп). Они и задают те законы расположения атомов в кристаллических структурах, о которых мы упоминали в начале статьи.

Упражнение 7. Плоскость можно замостить одинаковыми правильными треугольниками без просветов и перекрытий. Докажите, что их вершины образуют правильную (плоскую) систему Делоне и опишите все ее преобразования симметрии. Сделайте то же самое для квадратов и правильных шестиугольников. Все ли эти системы являются решетками?

Из леммы о решетке следует, что любая решетка является правильной системой. Обратное неверно, но можно показать, что всякая правильная система составлена из конгруэнтных и параллельно расположенных решеток (рис. 8,*в*). Доказательство этого не простого факта наметил Е. С. Федоров в своей знаменитой книге «Начала учения о фигурах», работу над которой он начал 16-летним юношей. Провел это доказательство А. Шенфлис, но оно оказалось настолько сложным, что в первом издании книги о симметрии кристаллических структур в 1891 году он поместил это доказательство в самом конце, дабы не устрашить читателя. Б. Н. Делоне совместно со своим учеником М. И. Штогриным упростили это доказательство, но не настолько, чтобы можно было изложить его здесь.

В начале нашего века было экспериментально подтверждено, что атомы в кристаллических структурах образуют одну или несколько правильных систем с общей федоровской группой (рис. 9). Но это утверждение не вскрывает причин упорядочения, а только констатирует факт его существования. Об этом говорил основатель советской кристаллографии академик А. В. Шубников (1887—1970): «Мы хорошо знаем, как устроен кристалл, но почему он так устроен, этим никто серьезно не занимался».

Представим себе растущий кристалл. Вот очередной атом включается в его структуру. Что заставляет этот атом занять предписанное ему строго определенное место? Для того чтобы не нарушить правильность системы (в смысле данного выше определения), он должен «знать» и «учитывать» положения всех других атомов, в том числе очень далеких. Было бы вполне естественно потребовать, чтобы каждый атом был равно окружен всеми атомами, удаленными от него на какое-то сравнительно небольшое расстояние (определяемое областью действия химических свя-

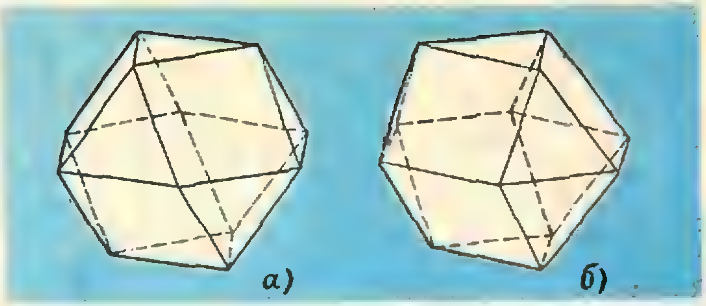


Рис. 11. Вторые координационные сферы в структурах: а) алмаза, б) лонсдейлита.

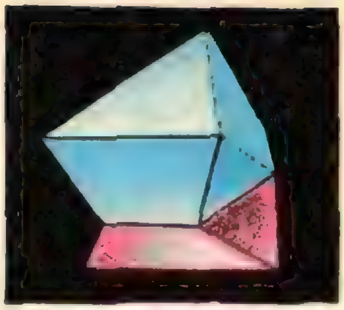


Рис. 12.

зей атомов). Оказывается, что уже такое ослабленное условие обеспечивает правильность системы! Справедлива следующая

Локальная теорема. *Если все точки системы Делоне равно окружены в сфере радиуса kR, где $k = 4$ для плоских систем и $k = 10$ — для пространственных, то эта система правильная.* (Напомним, что R — это параметр из условия покрытия.) Эту теорему доказал М. И. Штогрин. Имеются основания предполагать, что и в трехмерном случае в локальной теореме можно взять $k = 4$. Однако это пока не доказано.

Фундаментальное значение локальной теоремы состоит в том, что требуемая ею область равного окружения примерно такая же, как область действия химических связей атома. Следовательно, образование кристаллических структур можно объяснить, исходя из химического взаимодействия составляющих их атомов.

Теперь можно сформулировать третье естественное условие, которое вместе с условиями дискретности и покрытия выделяет правильные системы Делоне:

Условие локального равенства. *Все точки системы равноокружены в сфере радиуса $10R$.* (Еще раз подчеркнем, что число 10, вероятно, можно заменить здесь на 4.)

Посмотрим теперь на примере алмаза, что произойдет, если уменьшить область равного окружения.

Каждый атом углерода в структуре алмаза окружен ближайшими атомами по правильному тетраэдру (рис. 10,*а*), что хорошо согласуется с устройством его электронной оболочки, способной обеспечить 4 равноценные связи. Но ровно такое же окружение имеют атомы и в другой модификации углерода — лонсдейлите (рис. 10, *б*), микрокристаллики которого пока находят только в кратерах больших метеоритов.

Чем же отличаются друг от друга структуры алмаза и лонсдейлита? В структуре алмаза атомы, находящиеся на второй сфере, окружающей исходный атом (на второй *координационной сфере)*, образуют архимедов кубооктаэдр — куб с отрезанными углами (рис. 11,*а*). В структуре лонсдейлита атомы второй координационной сферы образуют так называемый гексагональный кубооктаэдр, который получается из архимедова поворотом его нижней половины на 180° (рис. 11,*б*). Если потребовать, чтобы атомы углерода имели одинаковое окружение в пределах первых двух координационных сфер, то они образуют одну из этих двух структур в чистом виде — будут получаться монокристаллы.

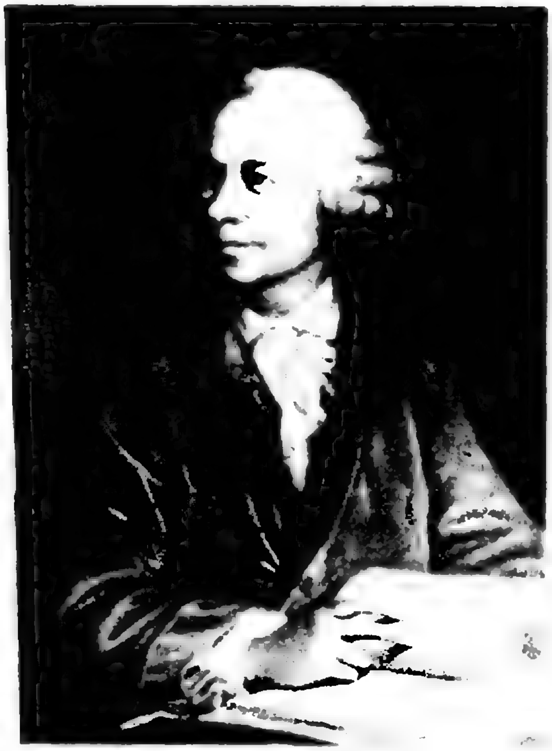
Если же атомы углерода способны установить связи только в пределах первой координационной сферы (то есть образовать только правильные тетраэдры), то могут возникнуть смешанные структуры, в которых слои алмаза чередуются со слоями лонсдейлита. Это происходит, например, в так называемых *двойниках* (рис. 12), в которых два кристалла алмаза соединены друг с другом по слою лонсдейлита.

Конечно, проблема образования кристаллических структур еще далека от полного решения. Мы лишь постарались показать, какую важную роль в этой, казалось бы, чисто физико-химической проблеме, играет математика.

Леонард Эйлер

(к 200-летию со дня смерти)

Кандидат
физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН



Портрет Л. Эйлера работы Э. Хандмана (1756 г.)

Великое наследие

Научное наследие Эйлера поражает совершенно беспрецедентными размерами. При жизни увидели свет его 530 книг и статей. Последние годы жизни академические издания не справлялись с потоком научной продукции слепого ученого, и он шутливо обещал графу В. Н. Орлову, что его работы будут заполнять «Комментарии» Академии в течение 20 лет после его смерти. Эта оценка оказалась «оптимистической»: Академия занималась изданием трудов Эйлера 47 лет. Число работ дошло до 771, но составленная в 1910 г. Энестремом библиография содержала 886 названий, разбитых по рубрикам: философия, математика, механика, астрономия, физика, география, сельское хозяйство. С 1910 г. Швейцарское общество естествоиспытателей издает собрание сочинений Эйлера, распространяемое по международной подписке: по предварительной оценке оно составит 75 томов большого объема. К началу 80-х годов вышло 72 тома. Восемь дополнительных томов должна составить научная переписка Эйлера.

Такой объем отражает не только поразительную скорость, с которой работал Эйлер, но и привычку систематически печатать научные тексты, в том числе и сравнительно спешно подготовленные. Большой разброс тематики отражает не только широту интересов и умение быстро войти в далекие области науки, но и многочисленные академические обязанности как в Петербурге, так и в Берлине. Некоторые публикации носят характер коротких реплик. Эйлер легко входил в научные контакты, давал разнообразные консультации, охотно думал над случайными, изолированными задачами, сообщаемыми его корреспондентами. Может показаться, что ученый разбрасывается, проявлял всеядность, но это только на первый взгляд. Случайные вопросы и задачи служили питательной почвой для хорошо спланированных размышлений. Эйлер умел своевременно останавливаться в своих раздумьях, если не видел реалистической возможности двигаться вперед. Он умел организовать свою жизнь так, чтобы много-

---

Окончание. Начало в предыдущем номере.

численные текущие дела не сильно отражались на основном направлении его работы.

Как это ни парадоксально, без большого преувеличения можно сказать, что всю свою жизнь Эйлер занимался почти исключительно математикой. В других областях науки (например, механике или астрономии) успех его был прежде всего связан с применением математических методов. Его философская установка на протяжении всей его жизни состояла в том, что естественно-научные открытия должны получаться путем теоретической (в значительной степени математической) обработки небольшого числа общих, несомненных принципов. В своей швейцарской диссертации девятнадцатилетний Эйлер пишет: «Я не считал необходимым подтвердить эту новую теорию опытом, потому что она полностью выведена из самых надежных и неопровержимых принципов механики и, таким образом, сомнение в том, верна ли она и имеет ли место в практике, просто не может возникнуть». Даже законы Ньютона Эйлер пытался вывести из более общих принципов, а в небесной механике он стремился не получать эмпирические формулы из обработки результатов наблюдений, а делать выводы непосредственно из закона всемирного тяготения. Как правило, он двигался от теории к практике. Хотя Эйлер и был всю жизнь связан с экспериментом, это не было его сильной стороной. Академик С. И. Вавилов писал: «...гений Эйлера был, по существу, математический... он плохо чувствовал эксперимент (хотя сам и экспериментировал)...»; в другом месте: «Математическому гению Эйлера не хватало физической интуиции Ньютона и Гюйгенса, позволявшей угадывать решение при отсутствии точной математической формулировки задачи или методов ее решения».

Не имея возможности осветить все стороны многогранной деятельности Эйлера, мы подробно остановимся лишь на его арифметических работах, в которых отчетливо проявились характерные особенности его занятий наукой

Ученик Ферма

Первые публикации Эйлера по арифметике (теории чисел) относятся к 1732 году — пятому году пребывания в Петербурге. У Эйлера было два великих предшественника в арифметике: грек Диофант (III век) и француз П. Ферма (1601—1665). Эйлер начинает с того, что продумывает и снабжает доказательствами утверждения Ферма. Его рассмотрения столь систематичны, что кажется, что это заготовки к первому учебнику высшей арифметики (который не был им написан).

В работе 1732 г. исследуется вопрос о делимости «чисел Ферма» (то есть чисел вида $F_n = 2^{2^n} + 1$, где $n \in \mathbf{N}$) и «чисел Мерсенна» (то есть чисел вида $M_p = 2^p - 1$, где p — простое). Неясные вопросы относились к столь большим числам этого вида, что прямой перебор был недоступен даже такому виртуозному вычислителю, как Эйлер.

Эйлер доказал, что делители чисел F_n и M_p могут иметь лишь весьма специальный вид. Именно, делители числа F_n имеют вид $k \cdot 2^{n+2} + 1$; благодаря этому, Эйлер обнаружил, что F_5 делится на $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$, опровергнув утверждение Ферма о простоте всех чисел F_n. Делители же числа M_p должны одновременно иметь вид $2pk - 1$ и $8l \pm 1$. Пользуясь этим, Эйлер доказал простоту числа $M_{32} = 2\,147\,483\,647$ С тех пор простых чисел Ферма не было обнаружено, а рекорды в мире простых чисел Мерсенна постоянно улучшаются (рекорд 1983 г. получается при $p = 86\,243$). В отношении чисел Мерсенна Эйлер заполнил также пробел, остававшийся от Евклида. Евклид знал, что если M_p — простое число, то $M_p \times \times (M_p + 1)/2$ — *совершенное число* (то есть число, равное сумме своих собственных делителей). Эйлер доказал, что каждое четное совершенное число представимо в таком виде (не известно до сих пор, существуют ли нечетные совершенные числа).

Эйлера интересует, существуют ли многочлены $P(n)$, которые при всех $n \in \mathbf{N}$ принимают простые значения. Он получает отрицательный ответ, но замечает, что значения многочлена n^2-n+41 просты при всех $n\leqslant 40$.

Эйлер снабжает доказательством «малую теорему Ферма», утверждающую, что *число $a^{p-1}-1$, где $a\neq 0$ — целое, а p — простое, делится на p.* Но, не ограничившись этим, он находит и доказывает ее обобщение на непростой делитель: *если a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)}-1$ делится на m* (здесь $\varphi(m)$ — число натуральных чисел, взаимно простых с m и меньших m; при простом p, $\varphi(p)=p-1$)*). Обнаружив, что функция натурального аргумента $\varphi(m)$ (ее назовут *функцией Эйлера*) обладает замечательными свойствами, он тем самым открывает важную главу теории чисел — *теорию арифметических функций*. Эйлер двигается очень логично. Он подмечает, что для некоторых a число a^k-1 при $k<p-1$ не делится на p. В этом случае a называют *первообразным корнем* по модулю p. Эксперимент убеждает Эйлера, что первообразные корни существуют для всех простых p, но доказать этого он не смог (доказательство нашли позднее Лежандр и Гаусс). Эйлер умел доказывать трудные теоремы, но он умел и трезво оценивать свои возможности. Он никогда не концентрировал размышления над одной трудной задачей на годы, а наступал на математические тайны широким фронтом.

Еще одно утверждение, сформулированное Ферма без доказательства, привлекло внимание Эйлера. Речь идет о представимости квадратов n^2 в виде $kp-1$, где p — простое, $k\in\mathbf{Z}$. Ферма утверждал, что для всякого простого p вида $4l+1$ существует квадрат вида $kp-1$, а для $p=4l-1$ таких квадратов не существует. В 1747 г. Эйлер доказал это утверждение, а затем выдвинул следующую общую гипотезу: *квадраты вида $kp+a$ (p — простое, $k, a\in\mathbf{Z}$) существуют или не существуют одновременно для всех простых p из арифметической прогрессии $b+4al$* ($l=1, 2, 3, \ldots$). Это утвреждение теперь называется «квадратичным законом взаимности». Доказать его Эйлер не сумел: оно не поддалось ни Лагранжу, ни Лежандру, и лишь 19-летний Гаусс нашел его доказательство.

Медаль Берлинской Академии наук в честь 250-летия со дня рождения Л. Эйлера (1957 г.)

Следующий круг вопросов, унаследованный у Ферма, но идущий еще от Диофанта, — это решение уравнений в целых числах. Эйлер доказал «Великую теорему Ферма» (см., например, «Квант», 1976, № 8, с. 12) для $n=3, 4$.

Однажды Ферма предложил своим соотечественникам Френиклю и Сен-Мартену построить прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами, у которого сумма катетов и гипотенуза — квадраты, то есть решить в целых числах систему уравнений $x+y=u^2$, $x^2+y^2=v^4$. Ферма заподозрили в том, что он дал «невозможную» задачу. Эйлер исследовал эту систему, замечательную тем, что ее наименьшее решение дается 13-значными числами: 1 061 652 293 520, 4 565 486 027 761.

Эйлер рассматривает уравнение $x^2-Dy^2=1$, $D\neq a^2$, которое он называет *уравнением Пелля*. Он обнаруживает связь его наименьшего решения с разложением $\sqrt{D}$ в бесконечную цепную дробь*). Многочисленные примеры убеждают Эйлера, что получается периодическая цепная дробь, но доказательство этого факта лишь позднее нашел Лагранж.

Ферма утверждал, что всякое простое число вида $4k+1$ может быть представлено в виде суммы двух квадратов, причем единственным образом (простые числа вида $4k+3$, как легко показать, не представляются в виде суммы квадратов). Эйлер устанавливает, что верно и обратное:

---

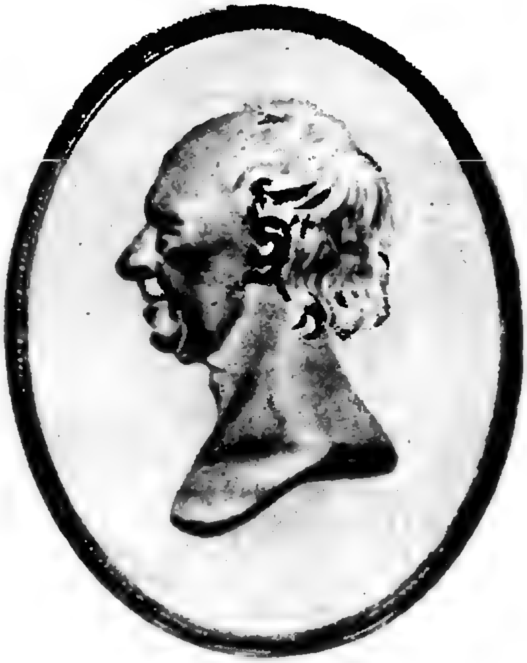
*) См. «Квант», 1972, № 10, с. [illegible].

*) О цепных дробях см. «Квант», 1983, №№ 5, 6.

если представление n в виде суммы квадратов существует и единственно, то n — простое число. Он показывает, что этим свойством иногда можно пользоваться для доказательства простоты n: например, число 1 000 009 — составное, поскольку наряду с представлением 1000^2+3^2 имеется представление 235^2+972^2.

Эйлер занимается простотой чисел, допускающих единственное представление в виде x^2+2y^2, x^2+3y^2 и, вообще, x^2+Dy^2 (D — фиксированное целое число). Он доказывает их простоту для $D \leqslant 10$, но при $D=11$ обнаруживает составное число, допускающее единственное такое представление. Ситуация заинтриговала Эйлера. Он назвал число D *удобным*, если в виде x^2+Dy^2 единственным образом представляются лишь простые числа. Эйлер получил критерий, позволяющий проверять удобство чисел, и с любопытством выписывает удобные числа одно за другим; после 10 идут 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24 ... Постепенно удобные числа встречаются все реже. В первой тысяче их набралось 62, но Эйлер упорно продолжает вычисления, вероятно надеясь подметить закономерность. Он обнаружил еще только три удобных числа: 1320, 1365, 1848, хотя, не теряя терпения, он перебрал все числа до 10 000 и несколько дальше. Эйлер имел все основания высказать гипотезу, что совокупность удобных чисел ограничивается найденными им 65 числами. Гаусс сделал рассмотрения Эйлера более корректными, но новых удобных чисел не нашел. Сейчас доказана конечность множества удобных чисел, но не известно, существуют ли удобные числа, большие 1848.

Этот поиск очень характерен для творческого метода Эйлера, проделавшего огромную экспериментальную вычислительную работу как для проверки гипотез, так и с целью увидеть новые закономерности. Из великих математиков, пожалуй, лишь Гаусс также владел этим индуктивным методом.



Гипсовый барельеф Л. Эйлера работы Д. Рашетта (1781 г.)

На этом мы кончим обзор той стороны арифметической деятельности Эйлера, в которой он был последователем Ферма. Он без пробелов увидел контуры новой арифметики, ее проблематику, тщательно проработал ее технические средства, хотя и не все смог доказать, оставив это на долю своих великих последователей Лагранжа, Лежандра, Гаусса.

Аналитическая теория чисел

Теория чисел обязана Эйлеру идеей, которая вскоре совершенно изменила ее лицо. Речь идет о применении в арифметике математического анализа. Трудно было представить такую возможность. Поначалу она удивила самого Эйлера: «И хотя мы здесь рассматриваем природу целых чисел, к которой Исчисление Бесконечно Малых кажется неприложимым, тем не менее, я пришел к своему заключению с помощью дифференцирований и других уловок».

Эйлер для разных s рассматривает сумму бесконечного ряда

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots \quad (*)$$

(позднее $\zeta(s)$ назовут *дзета-функцией Римана* — она играет в арифметике исключительную роль). Путем нестрогого рассуждения Эйлер доказывает, что эта бесконечная сумма совпадает с бесконечным произведением по простым числам

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)^{-1}\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\cdot\ldots \qquad (**)$$

Эйлер чувствует, что эти рассмотрения ведут к исключительно серьезным арифметическим результатам, но сам может предъявить на этом пути лишь новое доказательство восходящей еще к Евклиду теоремы о бесконечности множества простых чисел! Может показаться, что гора родила мышь, но чутье не обмануло Эйлера. Это стало ясно, когда в конце прошлого века Дирихле, отправляясь именно от намеченного Эйлером доказательства, доказал бесконечность числа простых чисел в арифметической прогрессии $a+dn$ с взаимно простыми a и d (обобщение теоремы Евклида).

Эйлер приоткрывает еще одну тайну в мире простых чисел. Его аналитическое чутье, сильно опережавшее его технические возможности, подсказывает, что сумма по простым числам $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p}$ при больших p близка к $\ln\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}\right)$, а это первый шаг в получении закона распределения простых чисел в натуральном ряду.

Эйлер чувствует, что функцию $\zeta(s)$ можно продолжить даже на те значения s, для которых ее нельзя определять как сумму ряда. Более того, он замечает связь между значениями ζ в точках s и $1-s$ (то, что позднее было сформулировано Риманом в виде знаменитого функционального уравнения). Эйлер исследует значения $\zeta(s)$ в целых точках. Мы расскажем ниже, как он разобрался со случаем четных аргументов, а симметрию между значениями ζ в токах s и $1-s$ он рассчитывал применить к исследованию ζ в нечетных точках, но потерпел неудачу, поняв, что в отрицательных четных точках продолженная ζ равна нулю. Отметим, что об арифметической природе даже числа $\zeta(3)$ стало кое-что известно лишь в самые последние годы.

Бесконечные суммы и бесконечные произведения были любимым объектом Эйлера в анализе. Эйлер смотрит на бесконечные ряды, как на многочлены бесконечной степени, и по аналогии формулирует для них правило разложения в бесконечное произведение линейных множителей. Если сумма ряда $1+a_1x+a_2x^2+\ldots$ равна нулю в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, то она совпадает с бесконечным произведением $\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)\ldots$ Эйлер не дает этому утверждению ни обоснования, ни строгой формулировки, а прямо переходит к примерам. Он исходит из бесконечного ряда

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots;$$

его сумма имеет нули при $\alpha_{\pm k}=\pm\pi k$ $(k=1, 2, \ldots)$, откуда делается вывод

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Формально выполняя умножения скобок, собирая коэффициент при x^2 и сравнивая с коэффициентом в ряду слева, получаем

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Это значение $\zeta(s)$ при $s=2$. Полученный ряд исследовал еще Я. Бернулли, но не смог найти его сумму. Эйлер давно присматривался к этому ряду. Он уже знал его сумму с семью знаками после запятой: 1.6449340, а потом вычислил еще 8 знаков. Понимая, что приведенные им выкладки строго не оправданы, Эйлер прежде всего нашел $\pi^2/6$ с 7 знаками и сравнил с известным ему ответом. Получилось совпадение! Это произошло в 1735 г. Сравнивая коэффициенты при дальнейших степенях в ряду и произведении, Эйлер без труда находит $\zeta(4)=\pi^4/90$, $\zeta(6)=\pi^6/42\cdot 6!$. Он понимает, что $\zeta(2n)=C_{2n}\pi^{2n}$ для некоторых чисел C_{2n}, интересуется их природой и находит для их вычисления рекуррентные формулы.

Эйлера постоянно волновало, что его вычисления чисел $\zeta(2n)$ не обоснованы. Он придумывает еще одно рассуждение, усиливающее выводы из его числовых экспериментов. Среди рассмотренных им примеров был пример, основанный на разложении $1-\sin x$ в ряд и бесконечное произведение. Он приводил к соотношению $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$, которое уже было строго выведено Лейбницем непосредственно из геометрического определения π. Эйлер оценивает это совпадение как очень сильное: «Для нашего метода, который может некоторым показаться недостаточно надежным здесь обнаруживается великое подтвержение. Поэтому мы вообще не должны сомневаться в других результатах, выведенных тем же методом».

Эйлер борется за право публикации и доверия к недоказанным утверждениям, прошедшим серьезную экспериментальную проверку и получившим косвенные подтверждения. Он понимает, что в современной ему ситуации математика потеряет многое, если жестко придерживаться евклидовых правил установления истины.

Аддитивная теория чисел

Задачи о числе представлений натуральных чисел в виде сумм слагаемых некоторой природы (как говорил Эйлер, задачи о «разбиении чисел») долго были в центре его внимания. Возможно, первоначальный толчок дали задачи, содержавшиеся в письме Ноде, фамилия которого ничего не говорит нашему современнику. К этим задачам Эйлер применил аппарат бесконечных произведений. Вот несколько примеров. Эйлер показывает, что

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots}.$$

Рассуждение состоит в том, что если умножать левую часть последовательности на $1-x$, $1-x^3$, $1-x^5$, ..., то постепенно будут исчезать все ненулевые степени, а это и означает тождество (это рассуждение можно сделать строгим при помощи теории пределов). После раскрытия скобок в левой части получается ряд $1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$, где a_k — число представлений k в виде суммы различных натуральных слагаемых. Правая часть при помощи суммы бесконечной геометрической прогрессии записывается в виде

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)\times$$
$$\times(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)\cdot\ldots,$$

откуда вновь получается ряд $1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots$, где b_k — число представлений k в виде суммы нечетных слагаемых, среди которых могут быть одинаковые (почему?). Эйлер делает вывод о совпадении числа представлений $a_k=b_k$. Попробуйте доказать это совпадение непосредственно и вы убедитесь, что не видно, как подойти к этой задаче.

Следующее рассуждение исходит из тождества

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots = 1+x+x^2+x^3+\ldots$$

(чтобы убедиться в его правдоподобии, можно умножить обе части на $1-x$ и проследить, как последовательно исчезают ненулевые степени x в обеих частях). Из него сразу следует, что каждое число одним и только одним способом представляется в виде суммы различных степеней двойки (числа таких представлений — коэффициенты в степенном ряду, полученном после преобразования левого произведения).

Задачи о разбиениях отходили от арифметики Диофанта и Ферма не только по методам, но и по постановкам. Они ознаменовали начало новой области арифметики — *аддитивной теории чисел,* которая развивается и в наши дни.

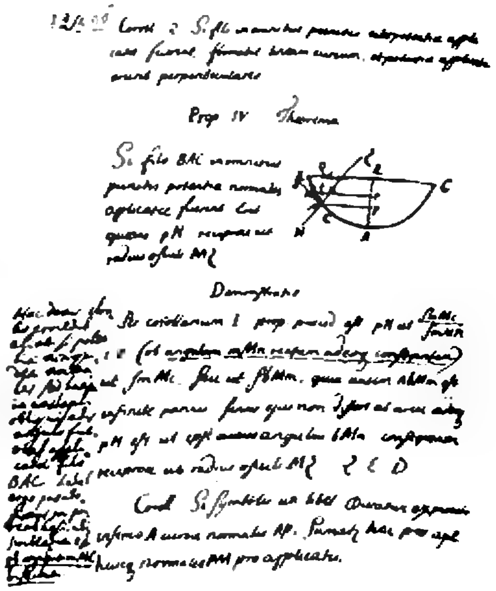
Коротко о других работах

В математике Эйлер был прежде всего аналитиком. Значительная часть его жизни была подчинена созданию систематического (семитомного) курса математического анализа. Эйлер первым работал с общим понятием функции, задаваемой произвольной кривой (графиком), причем он связывал общее понятие функции с задачей о колебании струны. Много сделал Эйлер в рассмотрениях специальных классов функций, важных для приложений. Здесь знаменитая Г-функция, принимающая в точке n натурального ряда значение $n!$, ее двойник В-функция (эйлеровы интегралы), цилиндрические и эллиптические функции. Эйлер систематически вел аналитические рассмотрения в комплексной области, обнаружив замечательную связь между комплексной показательной функцией и тригонометрическими функциями. Его занятия геометрией были более эпизодическими. В основном они относятся к задачам, связанным с картографией, или к применениям анализа в геометрии (началами дифференциальной геометрии). Но можно также вспомнить и о знаменитой формуле Эйлера для многогранников: $B+\Gamma=P+2$, где B — число вершин, Γ — число граней, P — число ребер, а также о задаче о семи кенигсбергских мостах, в которой Эйлер правильно почувствовал проблески новой геометрии (топологии).

В механике Эйлер первым перешел от геометрического языка Ньютона на аналитический язык, позволявший пользоваться чисто математическими приемами из области дифференциальных уравнений. Вслед за Мопертюи Эйлер предложил первую корректную формулировку принципа наименьшего действия, позволявшего выводить законы механики центральных сил из предположения о том, что некоторая величина при движении должна быть минимальной (см. «Квант», 1975, № 12, с. 34). Он же перешел от механики материальной точки к механике твердого тела конечных размеров.

Занятия Эйлера астрономией — продолжение его занятий механикой. Его область интересов — небесная механика. Он смог реализовать здесь свои поразительные вычислительные способности (как писал французский астроном Араго, он «вычислял так, как человек дышит»). Его теория Луны позволила Майеру составить лунные таблицы невиданной точности. Много занимался Эйлер вычислением эллиптических орбит комет, в частности, знаменитой кометы Лекселя (1769 г.).

***



Четвертая страница рукописи Л. Эйлера «О фигурах, которые должны принимать гибкие тела под действием произвольных сил» с пометами Иоганна Бернулли.

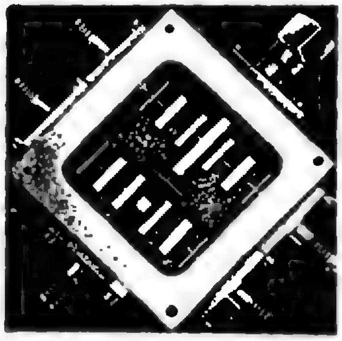
В нашем обзоре мы не имели возможности коснуться многих сторон деятельности Эйлера, например оптики, картографии, баллистики и теории корабля. Мы оставили в стороне и его педагогическое наследие, в частности, его знаменитые «Письма к принцессе» — своеобразную популярную энциклопедию всей современной Эйлеру науки. По работам Эйлера учились великие математики XIX века. «Читайте Эйлера — это наш общий учитель», — говорил Лаплас. По словам Гаусса, «изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить». Эйлера ценили прежде всего те, кто изучал его труды, а не оценивал наследие по «вершинам», кто учился у него и пользовался его провидческими идеями.

Уголок коллекционера

1
1
10
10
10
5
HELVETIA

Почтовых марок, посвященных Леонарду Эйлеру, немного. На приведенном здесь рисунке воспроизведены все марки, выпущенные до 1983 года. Первая из них отпечатана в ГДР в 1950 году к 200-летию Берлинской Академии наук. Остальные выпущены в 1957 году в СССР, ГДР и Швейцарии к 250-летию со дня рождения Эйлера.

В. Р.



ЭВМ на сверхпроводниках

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Термин «поколение» прочно вошел в вычислительную технику. Каждое следующее поколение ЭВМ должно иметь большее быстродействие (число операций в единицу времени), больший объем памяти, меньшие размеры. Есть ли предел на этом пути, и какими станут ЭВМ в будущем? Многие ведущие специалисты в мире сейчас считают, что ЭВМ должны стать сверхпроводящими.

Что такое сверхпроводимость, теперь знает каждый школьник: при очень низких температурах некоторые металлы и сплавы теряют свое сопротивление, и электрический ток течет по таким проводникам без потерь. Идея использования сверхпроводимости для записи информации в ЭВМ имеет давнюю историю. Еще на заре эры вычислительной техники, в 50-х годах были разработаны сверхпроводящие элементы памяти — криотроны. Принцип их действия основан на том, что магнитное поле разрушает сверхпроводимость. Замкнутое кольцо из сверхпроводника может находиться в двух устойчивых состояниях: когда по нему циркулирует незатухающий сверхпроводящий ток, и когда при включении магнитного поля сверхпроводимость разрушается, и кольцо переходит в нормальное состояние. Так можно «записывать» «0» и «1», то есть создать простейший элемент памяти ЭВМ.

Основное преимущество сверхпроводящих криотронов по сравнению с полупроводниковыми элементами памяти заключается в том, что в сверхпроводящем состоянии не происходит выделения тепла. Ведь при работе ЭВМ греется, и чем больше объем памяти, тем больше тепла выделяется. Если вспомнить, какое огромное количество элементов содержат современные ЭВМ, то становится понятным, почему эта проблема имеет первостепенное значение.

Похоже, что альтернативы нет — сверхЭВМ должны быть сверхпроводящими. Однако оказалось, что время переключения криотронов не может быть меньше, чем 10^{-8} с, а для современных ЭВМ даже миллиардные доли секунды не такая уж малая величина. В то же время сделать ЭВМ на сверхпроводящих криотронах оказалось гораздо труднее, чем на полупроводниках. И охлаждать ее надо было бы до очень низких температур — до температур жидкого гелия (только в таких условиях металлы становятся сверхпроводящими). Поэтому сверхпроводящие криотроны на какое-то время были оставлены, и казалось, что это — тупиковая ветвь в эволюции ЭВМ.

Но вот в 1962 году английский физик Джозефсон открыл замечательный эффект, названный его именем (об этом эффекте можно прочитать, например, в статье «Что такое СКВИД?» в «Кванте» № 10 за 1981 год). И как часто бывает, новый физический эффект открыл новые технические возможности. Хотя принцип действия элемента памяти остался в сущности прежним, были разработаны так называемые джозефсоновские криотроны с временем переключения 10^{-10}—10^{-11} с. При этом энергия, выделяемая при каждом переключении, составляет всего 10^{-17} джоуля (предельно возможная величина еще на два порядка меньше).

С такими рекордсменами полупроводниковые элементы памяти конкурировать уже не могут. Преимущества джозефсоновских криотронов окупают затраты на охлаждение, трудности конструирования и многие другие недостатки сверхпроводящих ЭВМ. Сейчас во всем мире ведутся интенсивные работы по созданию таких ЭВМ. И хотя на этом пути еще очень много нерешенных проблем, ученые считают, что тот день, когда заработает первая ЭВМ на сверхпроводниках, не за горами.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Формулы кинематики для вращательного движения» предназначена восьмиклассникам, «Температура. Теплота. Теплоемкость» — девятиклассникам и «Электрические колебания. Колебательный контур» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Формулы кинематики для вращательного движения

Для описания движения материальной точки или поступательного движения твердого тела пользуются следующими кинематическими величинами: перемещением $\vec{s}$, скоростью $\vec{v}$ и ускорением $\vec{a}$. Сами они и их проекции на оси координат связаны между собой кинематическими формулами. Например, для прямолинейного равномерного движения перемещение от времени зависит так:

$$\vec{s}=\vec{v}t, \text{ или } s_x=v_xt,$$

где t — время, отсчитываемое от некоторого начального момента. При прямолинейном равноускоренном движении с начальной скоростью $\vec{v}_0$ формулы кинематики имеют вид:

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t,$$
$$\vec{s}=\vec{v}_0t+\frac{\vec{a}t^2}{2},$$

или

$$v_x=v_{0x}+a_xt,$$
$$s_x=v_{0x}t+\frac{a_xt^2}{2},$$
$$v_x^2-v_{0x}^2=2a_xs_x.$$

Но при вращательном движении тела величинами $\vec{s}$, $\vec{v}$ и $\vec{a}$ пользоваться неудобно, так как различные точки тела за один и тот же промежуток времени совершают разные перемещения и движутся с различными скоростями и ускорениями. Поэтому для описания вращательного движения вводятся специальные, так называемые *угловые величины*: угол поворота φ, угловая скорость ω (о них говорится в учебнике «Физика 8») и угловое ускорение $\alpha=(\omega-\omega_0)/\Delta t=\Delta\omega/\Delta t$ (о нем в учебнике не говорится). Для различных точек вращающегося тела они одинаковы.

Угловые величины связаны с величинами s, v и a, которые, в отличие от угловых, называют *линейными*, простыми соотношениями:

$$s=r\varphi,$$
$$v=r\omega,$$
$$a=r\alpha.$$

Здесь s — модуль перемещения данной точки тела (при малых перемещениях s — это длина дуги), r — радиус окружности, по которой она движется, v — модуль скорости точки, a — модуль касательной проекции ускорения *).

Из-за такой простой связи угловых и линейных величин кинематические формулы для вращательного движения во всем подобны кинематическим формулам, приведенным выше.

При равномерном вращении тела (угловая скорость постоянна) зависимость угла поворота φ от времени имеет вид:

$$\varphi=\omega t.$$

При равноускоренном вращении угловая скорость ω изменяется со временем по формуле

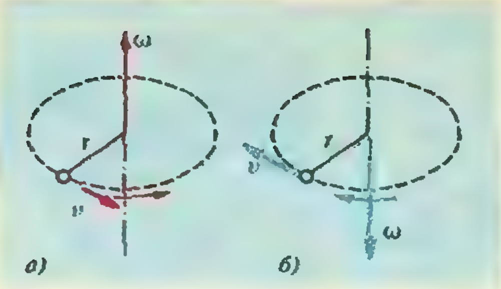
$$\omega=\omega_0+\alpha t,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость. Зависимость угла поворота от времени выражается формулой

$$\varphi=\omega_0t+\frac{\alpha t^2}{2}.$$

---

*) При движении точки по окружности вектор ускорения может иметь две проекции: на направление к центру окружности (центростремительное ускорение) и на направление касательной к окружности (касательная проекция, представляющая собой быстроту изменения модуля скорости точки).



Точно так же между углом поворота и угловой скоростью существует связь:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\varphi.$$

Вообще любая формула кинематики вращательного движения тела получается из соответствующей формулы кинематики точки (или поступательного движения тела) простой заменой линейной величины соответствующей угловой.

В заключение отметим (в учебнике «Физика 8» об этом не говорится), что величины φ, ω и α тоже считаются векторными. (Нужно же отличать повороты или вращения *по* часовой стрелке от поворотов или вращений *против* часовой стрелки!) Принимается, что векторы угловых величин направлены вдоль оси вращения тела по правилу правого винта: если мысленно вращать правый винт так, как вращается тело, то направление поступательного движения винта укажет направление соответствующего вектора (см. рисунок). Правда, для углового ускорения это правило несколько усложняется: вектор ускорения совпадает по направлению с направлением движения винта, если угловая скорость возрастает по модулю, и направлен в противоположную сторону, если угловая скорость уменьшается.

Температура. Теплота. Теплоемкость

(Из истории физики)

Теплоемкость — это величина, характеризующая одно из тепловых свойств тел. Она показывает, какое количество теплоты нужно подвести к телу или отвести от него, чтобы изменить его температуру (соответственно, повысить или понизить ее) на 1 кельвин. Отнесенную к единице массы, ее называют удельной теплоемкостью. Все это хорошо знакомо школьникам.

Но причем тут слово «емкость»? Ведь им обычно пользуются, когда говорят об объеме какого-нибудь сосуда, точнее, — о его вместимости.

Термин «теплоемкость» появился в физике около 200 лет назад, во второй половине XVIII века, и он остался в физике как память о тех кажущихся теперь странными представлениях о тепле, холоде, температуре, которые существовали тогда в науке.

Начиная с XVII века, в физике шла борьба двух представлений о природе теплоты. Борьба эта закончилась сравнительно недавно — в середине прошлого столетия; в результате одна из теорий теплоты была отброшена полностью, а вторая восторжествовала лишь частично.

Первая теория (точнее было бы сказать — гипотеза) состояла в том, что теплота — это особое вещество, способное проникать в любое тело. Чем больше этого вещества в теле, тем выше его температура. Опытным фактом, на котором основывалось это представление, служило то, что при контакте двух по-разному нагретых тел более теплое из них охлаждается, а более холодное нагревается. Дело в самом деле выглядит так, как будто бы нечто переливается из более теплого тела в более холодное. Это нечто, своего рода тепловое вещество, называли по-разному, но чаще всего — теплородом. Считалось, что всякое тело представляет собой смесь вещества самого тела с теплородом, а температура, измеряемая термометром, характеризует концентрацию теплорода в теле. Слово «температура» по-латыни как раз и означает смесь. Бронза, например, называлась температурой (смесью) меди и олова.

Вторая теория (гипотеза), впервые предложенная в начале XVII века английским ученым Фрэнсисом Бэконом, утверждала, что теплота — это движение малых частиц внутри тела (молекул, атомов, или, как тогда говорили, нечувствительных частиц). Эта гипотеза тоже основывалась на опытных наблюдениях, показывающих, например, что движением можно вызвать нагревание. У этой теории было много сторонников, и даже очень знаменитых, таких, как Декарт, Бойль, Гук, Ломоносов.

Обе теории при всем их различии имели и кое-что общее. И та, и другая сходились на том, что теплота — это нечто, содержащееся в теле. По первой гипотезе в теле содержится теплород, по второй — частицы с их «живой силой» (так тогда называли кинетическую энергию). Сходились они и в том, что теплота не пропадает и не появляется: если при контакте двух тел одно из них теряет теплоту, то другое получает ее, так что потерянное одним телом приобретается другим. Тем не менее, подавляющее большинство исследователей вплоть до XIX века придерживались первой, так сказать, вещественной теории теплоты, и XVIII век был, безусловно, веком торжества именно этого представления о теплоте.

Введение понятия теплоемкости тесно связано с решением проблемы распределения тепла при соприкосновении различно нагретых тел.

Исходя из первой гипотезы и из того, что термометр показывает концентрацию теплорода в теле, английский математик Тейлор показал, что если смешать, например, массу m_1 воды при температуре t_1, массу m_2 при температуре t_2, m_3 при температуре t_3 и т. д., то температура смеси окажется равной

$$t=\frac{m_1t_1+m_2t_2+m_3t_3+\ldots+m_nt_n}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n}. \quad (1)$$

Немецкий физик Фаренгейт по предложению нидерландского врача и химика Бургаве провел опыты с двумя равными массами воды и ртути и показал, что температура смеси (ртуть и вода не смешиваются, но встряхиванием их все же можно привести к одной температуре), не равна температуре t, подсчитанной по формуле (1), то есть, что формула (1) для смеси *разных* жидкостей не верна. Оказалось, что если температура воды выше температуры ртути, то температура смеси выше подсчитанной, если же температура ртути выше температуры воды, то температура смеси ниже подсчитанной. Это выглядело странным, потому что если термометр действительно показывает концентрацию теплорода в теле, то при равных массах любое тело получает одно и то же количество теплоты (теплорода) при нагревании на одно и то же число градусов.

Ясность в этот вопрос внес в середине XVIII века английский химик Блэк. Опыт Фаренгейта—Бургаве, объясняет Блэк, показывает, что для нагревания некоторой массы ртути требуется меньше теплоты, чем для нагревания такой же массы воды на то же число градусов. Словами самого Блэка: «Ртуть поэтому имеет меньшую емкость для теплоты (если мне позволено применять это выражение), чем вода, меньшее количество теплоты необходимо для повышения температуры ртути на то же количество градусов».

Так впервые появилось понятие «емкость для теплоты» (теплоемкость). Так было ясно показано, что теплота и температура не одно и то же. Но верным осталось то, что было известно и раньше: количество теплоты, полученное одним телом, равно количеству теплоты, потерянному другим. В математической форме идея Блэка выражается равенством, теперь известным каждому школьнику:

$$c_1m_1(t-t_1)=c_2m_2(t_2-t). \quad (2)$$

Его называют уравнением теплового баланса, которое и выражает идею о сохранении теплоты.

Из уравнения (2) нельзя найти удельные теплоемкости c_1 и c_2 но отдельности, а можно определить только их отношение:

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{m_2(t_2-t)}{m_1(t-t_1)}.$$

В частности, из опытов получалось, что теплоемкость воды в 20 раз больше теплоемкости ртути (по современным данным — более чем в 30 раз). Вообще удельная теплоемкость воды — наибольшая среди жидких и твердых веществ.

Несколько позже было предложено принять удельную теплоемкость воды за единицу (на этой основе была введена и единица количества теплоты — калория, теперь вышедшая из употребления), и тогда стало возможным измерять теплоемкости любых веществ.

Примерно в то же время Блэк сделал еще одно важное открытие, особенно ясно показавшее, что существует разница между количеством теплоты и температурой. Дело в том, что если термометр измеряет концентрацию теплоты (теплорода), то подвод тепла к телу обязательно должен вызывать повышение температуры тела, а отвод теплоты — ее понижение. Между тем, Блэк обнаружил, что при плавлении твердого тела (льда) температура остается неизменной, несмотря на подвод к нему теплоты. Не изменяется температура и воды, когда она отвердевает, хотя от воды при этом отводится теплота. Блэк назвал эту теплоту, которую «не замечает» термометр, скрытой теплотой плавления или отвердевания (теперь ее называют просто теплотой плавления). Им же было установлено существование и скрытой теплоты парообразования.

Открытия Блэка были, несомненно, самыми важными в XVIII веке в области физики тепловых явлений. Интересна и необычна их судьба. Избегая популярности, Блэк не публиковал статей о своих работах, а сообщал о них только в лекциях и докладах. Лишь после его смерти, в 1803 году, были опубликованы его «Лекции об элементах химии», в которых содержалось физическое вступление, озаглавленное «Общие тепловые эффекты». В нем и излагались результаты его замечательных исследований.

Чем же закончился спор о природе теплоты? Какая из двух гипотез победила? Работы, связанные с теплоемкостью, да и другие тепловые исследования XVIII века спора решить не могли. Понадобились эксперименты, которые показали, что температура тела может повышаться и без подвода теплоты, за счет механической работы. Понадобилось получить и более подробные сведения об атомах и молекулах («нечувствительных частицах»), которых «подозревали» в причастности к теплоте. Все это было сделано в XIX веке. В результате выяснилось, что теория теплорода не имеет никакого отношения к действительности и что теплота действительно связана с движением частиц внутри тел, но не так, как это себе представляли раньше. То, что «содержится» внутри тел, — это не теплота, а внутренняя энергия (то есть кинетическая энергия поступательного беспорядочного движения частиц, которая и определяет температуру тела, кинетическая энергия вращательного и колебательного движения частиц, а также потенциальная энергия их взаимодействия). Теплота же — это энергия беспорядочного движения частиц тела, *передаваемая* (например, при контакте) другому телу или телам. Уравнение (2), в частности, не выражает, как думали прежде, закон сохранения количества теплоты (такого закона нет!). Это просто частный случай закона сохранения энергии для тепловых процессов (то есть первого закона термодинамики) $Q=\Delta U+A$. Оно справедливо, когда сама система или внешние силы над системой не совершают механической работы ($A=0$), а изменение внутренней энергии системы ΔU непосредственно связано с процессом теплопередачи.

Электрические колебания. Колебательный контур

В 1853 году знаменитый английский физик Уильям Томсон, впоследствии лорд Кельвин, опубликовал статью под названием «О неустановившихся электрических токах». В ней он показал, что в контуре, составленном из конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L (рис. 1), должны происходить электромагнитные колебания с периодом $T=2\pi\sqrt{LC}$.

При слове «колебания» нам сразу представляется образ колеблющегося математического маятника (рис. 2) или груза, прикрепленного к пружине (рис. 3). Но колебания означают не только механическое движение какого-нибудь тела «туда — сюда». Под колебаниями нужно понимать всякое периодическое изменение какой-либо величины, то есть такое изменение, при котором значение этой величины через определенный промежуток времени, называемый периодом колебаний, повторяется.

При механических колебаниях материальной точки периодически изменяющаяся величина — это координата x точки. В нашем контуре — это заряд q, который был сообщен обкладкам конденсатора. В течение периода колебаний заряд на обкладке постепенно исчезает, изменяет свой знак и снова восстанавливается. Совершает колебания и напряжение $U=q/C$ между обкладками конденсатора, и сила тока I в цепи, так как в любой момент времени справедливо соотношение

$$U = L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Колеблются также напряженность E электрического поля в конденсаторе (потому что $E=U/d$, где d — расстояние между обкладками) и индукция B магнитного поля катушки (потому что она пропорциональна току).

Это аналогично тому, как при механических колебаниях периодически изменяется не только координата точки, но и ее скорость, ускорение, кинетическая энергия и т. д. Все эти величины совершают колебания.

В школьном учебнике «Физика 10» рассказывается об аналогии между механическими и электрическими колебаниями. Эту аналогию можно сделать более строгой, если заметить, что уравнение (1) по форме совпадает с уравнением, выражающим второй закон Ньютона для тела, колеблющегося под действием пружины:

$$F=m\frac{\Delta v}{\Delta t}, \qquad (2)$$

где F — сила упругости, действующая на тело, m — масса, $\Delta v/\Delta t=a$ — ускорение тела. Поэтому уравнение (1) можно исследовать по принципу «одинаковые уравнения имеют одинаковые решения».

Сравнение уравнений (1) и (2) показывает, что напряжение U соответствует силе упругости F, ток I в катушке — скорости v движения тела, а индуктивность катушки L — массе тела m. Наконец, из соотношений

$$U=\frac{q}{C} \quad \text{и} \quad F=kx$$

следует, что величина, обратная емкости конденсатора ($1/C$), соответствует жесткости пружины k. Сводная таблица, подытоживающая эту аналогию, приведена в «Физике 10».

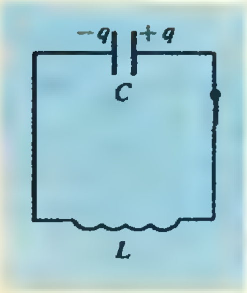


Рис. 1.

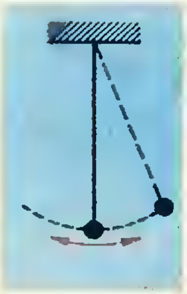


Рис. 2.

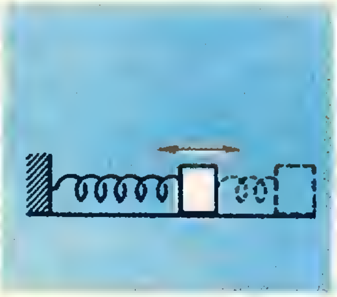


Рис. 3.

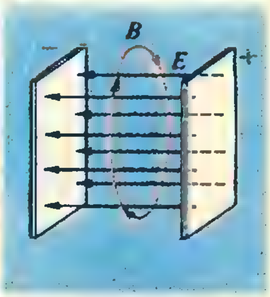


Рис. 4.

В заключение рассмотрим интересный вопрос о токе в колебательном контуре. Несмотря на то, что контур разомкнут (между обкладками конденсатора нет проводников), по такой «разомкнутой цепи» течет ток. Более того, если бы сопротивление катушки и подводящих проводов было равно нулю (сверхпроводимость), электрический ток, вызванный разрядом конденсатора, никогда бы не прекратился.

Как это ни странно, но ток в колебательном контуре можно считать замкнутым. Чтобы это понять, нужно вернуться к явлению электромагнитной индукции. Как впервые указал Максвелл, сущность этого явления заключается не в том, что изменение магнитного потока порождает индукционный ток, а в том, что изменение магнитного поля порождает электрическое поле с замкнутыми силовыми линиями (вихревое поле). Индукционный ток — это движение заряженных частиц в этом поле. В связи с такой формулировкой явления электромагнитной индукции Максвеллу пришла в голову гениальная мысль, что должно существовать и обратное явление: изменяющееся электрическое поле создает магнитное поле.

В нашем колебательном контуре, когда в нем происходят колебания, есть место, где ничего, кроме изменяющегося электрического поля, нет. Это конденсатор. Значит, вокруг конденсатора существует магнитное поле (рис. 4). С другой стороны, известно, что магнитное поле окружает всякий электрический ток. Выходит, что своим свойством быть окруженным магнитным полем изменяющееся (переменное) электрическое поле ничем не отличается от электрического тока. Со времен Максвелла скорость изменения переменного электрического поля и называют поэтому током, точнее, *током смещения.*

Таким образом, можно считать, что «обычный» электрический ток (так называемый *ток проводимости*) в проводящей части цепи колебательного контура как бы продолжается в конденсаторе током без зарядов — током смещения.

Наш календарь

400
лет назад

Об изохронности колебаний маятника

На склоне лет Галилео Галилей (1564—1642) рассказал своему юному ученику Винченцо Вивиани, как начиналась его научная жизнь. Однажды, это было в 1583 году, девятнадцатилетний Галилей, находясь в Пизанском соборе, наблюдал за качаниями большой люстры. Ему показалось, что период ее колебаний с течением времени не изменяется. Несмотря на затухание, то есть уменьшение размахов колебаний, продолжительность каждого колебания оставалась одинаковой. Вернувшись домой, он проделал эксперименты с шарами, подвешенными на нитях, и пришел к выводу, что период колебаний маятника в самом деле не зависит от максимального угла отклонения. Как стали потом говорить,— колебания маятника изохронны, то есть постоянны по времени. (Позднее Галилей обнаружил, что периоды колебаний относятся как корни квадратные из длин маятников.) С этого открытия юного Галилея началась цепь его великих механических открытий.

В соборе, как пишет Вивиани, Галилей контролировал период колебаний люстры по биению собственного пульса, проводя эксперименты, он пользовался водяными часами.

Механические часы того времени оставляли желать много лучшего. Мы не знаем, когда Галилей решил использовать для создания часов изохронность колебания маятника: на заре ли его научной деятельности, в период создания новой механики, или в конце его жизни, когда он после суда инквизиции вновь вернулся к занятиям механикой. Несомненно, однако, что вплотную конструированием маятниковых часов Галилей занялся, когда был стар и практически слеп, и потому не смог довести свой великий замысел до реально работающего механизма.

Первые маятниковые часы были созданы Христианом Гюйгенсом (1629—1695). Всю свою жизнь Гюйгенс работал над их усовершенствованием и получил в процессе этой деятельности много замечательных результатов. В частности, он уточнил, что утверждение Галилея об изохронности колебаний маятника справедливо лишь для малых углов отклонения маятника от равновесия.

С. Г.

Квант для младших школьников

Задачи

1. Журнал «Квант» состоит из 16 вложенных друг в друга двойных листов. На каком двойном листе сумма чисел, обозначающих номера страниц, будет наибольшей?

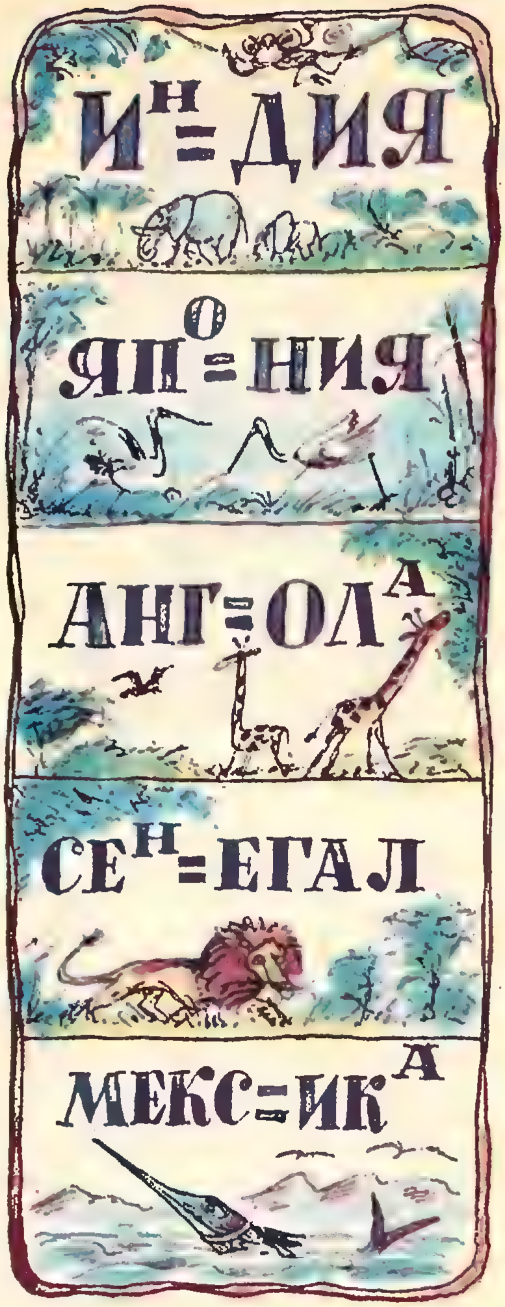
2. Найдите двузначное число, вдвое большее произведения его цифр.

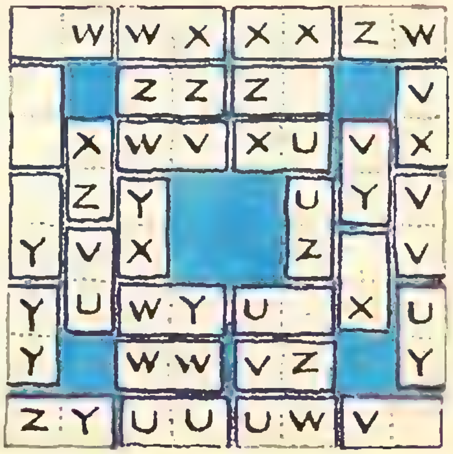
3. Решите пять «географических» ребусов (см. рисунок). В каждом ребусе одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные.

4. Кости домино выложены в виде кружевной салфетки, причем сумма очков в каждом вертикальном и в каждом горизонтальном ряду одна и та же (см. рисунок). Значения очков на костях, кроме «пустышек», зашифрованы буквами. Расшифруйте их.

5. Отец и сын наблюдали солнечное затмение, и темой их разговоров были Солнце и Луна. «Папа,— спросил мальчик,— а во сколько раз Солнце дальше от нас, чем Луна? «Насколько я помню,— отвечал отец,— в 387 раз». «Тогда я могу подсчитать, во сколько раз объем Солнца больше объема Луны». «Пожалуй, ты прав»,— ответил, подумав, отец. Во сколько же раз объем Солнца больше объема Луны?

Эти задачи нам предложили *М. В. Варга, А. М. Козлов, М. А. Мнацаканян, Э. Сулейманов* (ученик 10 класса с. ш. № 10 г. Шеки), *А. Холин* (ученик 7 класса с. ш. № 1 г. Кокчетава).





	W	W	X	X	X	Z	W
		Z	Z	Z			V
	X	W	V	X	U	V	X
	Z	Y			U	Y	V
Y	V	X			Z		V
Y	U	W	Y	U		X	U
Y		W	W	V	Z		Y
Z	Y	U	U	U	W	V	

У ВАС ТАХИКАРДИЯ

Электронный глаз

Кандидат педагогических наук
В. С. ДАНЮШЕНКОВ

Наверное, многие из вас в кабинете физики обратили внимание на прибор, похожий на телевизор с маленьким круглым экраном. Когда он работает, по его экрану «бегают» различные светящиеся линии. Этот прибор называют осциллографом. Он служит для записи на экране быстро протекающих и невидимых для человеческого глаза физических процессов. Тем самым прибор расширяет возможности нашего восприятия при познании явлений природы. За эту особенность осциллограф часто называют «электронным глазом».

Главное — это трубка

Основной элемент осциллографа — электроннолучевая (или просто «электронная») трубка. Она представляет собой стеклянный баллон специальной формы, из которого выкачан почти весь воздух. Внутри баллона располагаются «электронная пушка» для получения электронного луча и механизм для управления этим лучом (рисунок 1). О том, как работает трубка, мы расскажем позже. А сначала — немного истории.

Прототипом современной электронной трубки была газоразрядная трубка, с помощью которой англичанин У. Крукс изучал процессы прохождения электрического тока через разреженные газы. Трубка представляла собой стеклянный баллон с впаянными в него электродами; баллон подсоединялся к насосу, откачивающему из него воздух. Крукс обнаружил, что когда электроды были подсоединены к источнику напряжения, внутри трубки появлялись неизвестные лучи.

Спустя 25 лет французский физик Ж. Перрен доказал, что эти лучи представляют собой поток отрицательно заряженных частиц, источником которых является раскаленная поверхность отрицательного электрода — катода. Перрен поместил перед

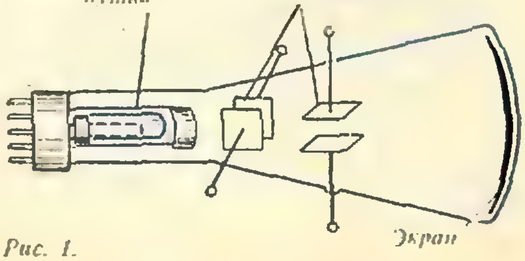
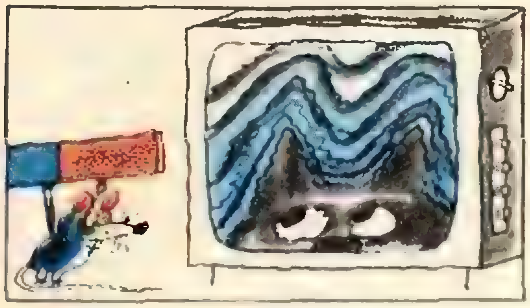


Рис. 1.

катодом полый металлический цилиндр, который соединялся с электроскопом (рисунок 2). Когда на электроды было подано напряжение, лепестки электроскопа зарядились и разошлись. При поднесении к электроскопу положительно заряженной стеклянной палочки лепестки возвращались в исходное положение. Следовательно, на цилиндре при работе трубки скапливался отрицательный заряд. Перрен поднес к трубке магнит так, что он находился против свободного пространства между катодом и полым цилиндром. При этом электроскоп не заряжался. Значит, отрицательно заряженные частицы, которые в отсутствие магнита попадали на цилиндр, вылетали с катода. Магнитное поле отклоняло эти частицы на стенку трубки. В этом опыте впервые было осуществлено магнитное управление потоком заряженных частиц.



Вы можете увидеть действие магнитного поля на поток электронов, поднеся магнит к телевизору сбоку. Изображение на экране будет смещаться вверх или вниз в зависимости от того, каким полюсом вы подносите магнит.

В 1897 году немецкий физик К. Браун создал лучевую трубку с магнитным управлением, по форме похожую на современную электронную трубку.

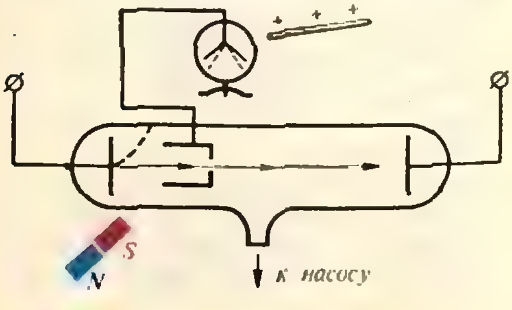
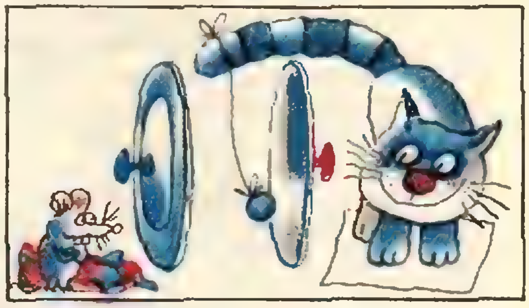


Рис. 2.

В том же году английский физик Дж. Дж. Томсон с помощью этой трубки показал, что лучи, вылетающие с катода, представляют собой поток электронов. В своем эксперименте Томсон впервые применил электрический способ управления потоком электронов. Поместив перед катодом две параллельные пластины, подсоединенные к полюсам электрической батареи, он увидел, что лучи, попадающие в электрическое поле между пластинами, отклоняются от своего первоначального пути.



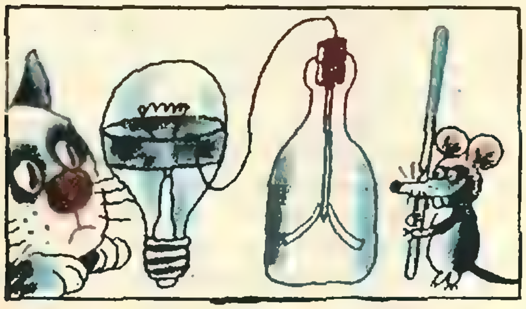
Увидеть, как действует электрическое поле на заряженные частицы, вы можете, проделав такой опыт. Берете две алюминиевые пластины или крышки от кастрюль с изолированными ручками и укрепляете их параллельно друг другу. Из фольги делаете круглый шарик (или гильзу) и прикрепляете к нему нитку. Затем берете эбонитовую палочку и натираете ее кусочком шелка; при этом палочка электризуется отрицательно. Сначала легким прикосновением палочки заряжаете шарик, а потом одну из пластин. Затем натираете палочку листком бумаги. В этом случае она электризуется положительно. Заряжаете палочкой вторую пластину. Теперь все готово к опыту. Шарик на нитке опустите между пластинами. Вы увидите, что шарик отклоняется в сторону положительно заряженной пластины.

Аналогичным образом действует электрическое поле на электроны в электроннолучевой трубке. При движении между управляющими пластинами весь поток электронов отклоняется от первоначального пути в сторону пластины, подсоединенной к положительному полюсу батареи.

Пушка, стреляющая электронами

Мы уже сказали, что источником электронов в трубке является отрицательно заряженный электрод — катод. В любом проводнике имеется огромное количество электронов, которые находятся в постоянном движении. Большинство электронов движется с почти одинаковыми по абсолютной величине скоростями. Но есть электроны, скорость которых значительно больше средней скорости. Такие электроны, оказавшись вблизи поверхности проводника, могут «прорваться» сквозь поверхность, «испариться» (эта ситуация аналогична процессу испарения жидкости). При комнатных температурах доля этих электронов ничтожна мала, и обнаружить их испарение невозможно. Но с повышением температуры количество «энергичных» электронов возрастает. Испарение электронов с поверхности накаленного проводника идет очень интенсивно.

Катод электронной трубки (тоненький проводник) разогревают докрасна, пропуская через него электрический ток, и с поверхности катода испаряются электроны.



Убедиться в том, что с нагретого проводника испаряются электроны, можно с помощью несложного опыта. Для опыта нужна лампа накаливания, листок фольги и электроскоп. Электроскоп вы можете сделать сами. Для этого возьмите бутылку и подберите к ней пробку (лучше всего резиновую; можно сделать пробку из ластика). Через пробку пропустите достаточно длинный гвоздь; к острому концу гвоздя прикрепите лепестки из папиросной бумаги. Закройте бутылку пробкой так, чтобы лепестки были внутри бутылки. Электроскоп готов.

Из фольги вырежьте полоску и оберните ее плотно вокруг колбы лампы накаливания. Тонким проводком соедините фольгу с электроскопом.

Теперь зарядите электроскоп положительно (например, с помощью стеклянной палочки, потертой о шелк) и включите лампу в сеть. Вы увидите, что лепестки электроскопа опадают.

Фольга, соединенная с электроскопом, имеет положительный заряд. Электроны, испаряющиеся из нити накала лампы, притягиваются этим зарядом, оседают на колбе лампы и заряжают ее внутреннюю поверхность отрицательно. Этот отрицательный заряд и нейтрализует положительный заряд фольги и, следовательно, электроскопа.

Как собрать все «испаряющиеся» с катода электроны в тонкий луч?

Напротив катода помещен второй электрод — анод. Как правило, он имеет форму диска. Между катодом и анодом создают большое напряжение (от нескольких сотен до нескольких тысяч вольт). Электрическое поле между электродами направляет электроны, вылетевшие с поверхности катода, на анод и разгоняет их до очень большой скорости. А чтобы собрать эти электроны в тонкий луч, делают следующее.

На катод одевают металлическую «рубашку» — цилиндрический стакан с маленьким отверстием в дне. Ей сообщают отрицательный заряд. Этот заряд сжимает вылетающие с поверхности металла электроны к оси «рубашки»-стакана, так что бо́льшая часть электронов вылетает из «рубашки» через маленькое отверстие. Меняя заряд на «рубашке», можно регулировать число вылетающих из нее электронов. Благодаря этому свойству металлическую «рубашку» назвали управляющим электродом. Узкий пучок электронов, вылетевших из управляющего электрода, направляется на анод и проходит через узкое отверстие в нем.

Все вместе — катод, управляющий электрод и анод — называют электронной пушкой.

Узкий пучок электронов, выстреленных электронной пушкой, попадает на экран, покрытый специальным веществом — люминофором. Под действием бомбардирующих его электронов люминофор начинает светиться, так что в том месте, где на экран падает электронный луч, появляется светящееся пятно.

Но на экране работающего осциллографа обычно видны светящиеся линии, которые, к тому же, могут «бегать» по экрану. Как же получается изображение на экране осциллографа?

Стрельба с наводкой

Воспользуемся способом Дж. Дж. Томсона для прицельной стрельбы по экрану из «электронной пушки». Для этого на пути полета электронов поставим две взаимно перпендикулярные пары пластин, подсоединенных к источникам напряжения. Пластины, лежащие в горизонтальных плоскостях, отклоняют луч вверх или вниз. Их называют вертикально отклоняющими пластинами. Пластины, лежащие в вертикальных плоскостях, отклоняют луч влево или вправо по горизонтали. Это — горизонтально отклоняющие пластины. Понятно, что, меняя напряжение на пластинах, мы будем «перемещать» на экране светящееся пятно (рисунок 3 схематично поясняет, как это происходит). Значит, по смещению пятна в ту или иную сторону можно судить о величине напряжения, приложенного к соответствующим отклоняющим пластинам. Пластины как бы выполняют роль наводчиков при электронной пушке.

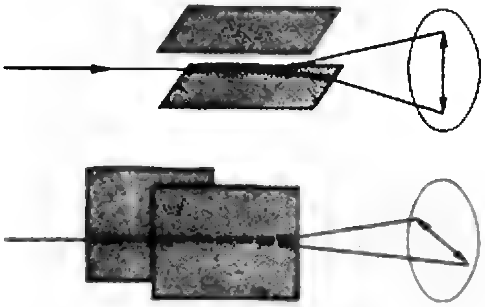


Рис. 3.

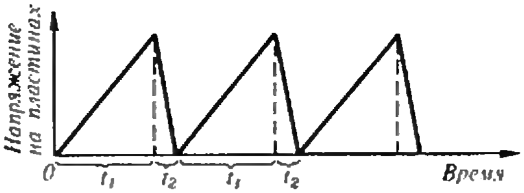


Рис. 4.

Электронный луч очень быстро реагирует на изменение напряжения на пластинах. Поэтому электронная трубка позволяет следить за процессами, в которых происходит быстрое изменение напряжений, токов. Трубка, соединенная со специальными приборами для изучения таких процессов, и образует осциллограф.

Обычно изучаемый сигнал (как правило, электрический) подают на вертикально отклоняющие пластины. А на горизонтально отклоняющих пластинах напряжение периодически меняют. График изменения этого напряжения во времени приведен на рисунке 4. В течение времени t_1, когда напряжение возрастает, луч, колеблющийся в вертикальном направлении (в «такт» с изучаемым сигналом), «растягивается» по горизонтали, и линия, получающаяся на экране осциллографа, показывает, как меняется со временем напряжение на вертикально отклоняющих пластинах. Затем напряжение быстро, за малое время t_2, падает до нуля — луч на экране возвращается на «начальную» вертикаль.

* * *

Теперь вы представляете себе, как работает осциллограф. Этот прибор используется в самых разных областях научных исследований, находит широкое применение в практической работе заводских лабораторий.

Поправка

Редакция обращает внимание читателей на то, что на четвертой странице обложки «Кванта» № 9 в «правом кубике» «Змеи» левый столбец напечатан желтым цветом вместо оранжевого. Кроме того, в части тиража красный и оранжевый цвета практически не различимы, однако наблюдательный читатель, пользуясь соображениями симметрии, сможет восстановить цвета.

задачник Кванта

Задачи

M831—M835; Ф843—Ф847

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 января 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M831, M832» или «Ф843». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M831. Пусть P и Q — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, M и N — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что если прямые MN и PQ перпендикулярны, то $|BC|=|AD|$.

В. В. Прасолов

M832. а) Докажите, что для любого натурального $n>6$ квадрат можно разрезать на n квадратов (среди которых могут быть и квадраты одинакового размера).

б) Докажите, что для любого натурального $n>100$ куб можно разрезать на n кубов.

В. А. Ли

M833*. Последовательность x_n задается условиями:

$$x_1=2;\ x_{n+1}=\frac{2+x_n}{1-2x_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Докажите, что а) $x_n\neq 0$ (при всех n);

б) эта последовательность непериодическая.

В. Э. Матизен

M834. Оросительная установка, расположенная в точке O, обслуживает круг радиуса 100 м с центром O. Такими установками нужно полностью орошать квадратное поле 1 км×1 км.

а) Бригадир предложил расположить 64 установки в вершинах квадратной сетки со сторонами, параллельными краям поля (рис. 1). В каких пределах может меняться сторона a квадратной сетки?

б) Восьмиклассник Витя утверждает, что можно оросить поле с помощью лишь 46 таких установок. Прав ли Витя?

Н. Б. Васильев

M835*. На однокруговый шахматный турнир приехало n шахматистов из страны A и n шахматистов из страны B. Оказалось, что как бы ни разбить шахматистов на пары (чтобы друг с другом играли шахматисты разных стран), найдется хотя бы одна пара шахматистов, которые уже встречались ранее друг с другом. Докажите, что можно выбрать a шахматистов из страны A и b шахматистов из страны B так, что каждый из выбранных a

шахматистов встречался с каждым из выбранных b шахматистов, а $a+b>n$.

Л. Д. Менихес

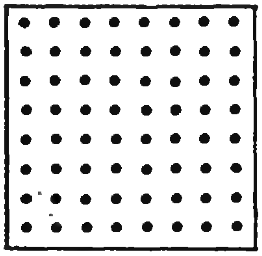


Рис. 1.

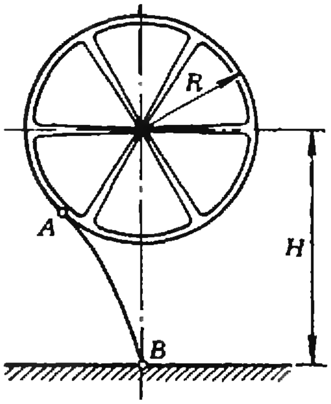


Рис. 2

Ф843. Колесо радиуса R, расположенное на высоте H над землей, вращается с угловой скоростью ω. С колеса срывается капля и падает на землю в точке B под центром колеса (рис. 2.). Найти время падения капли и точку A колеса, в которой капля отрывается.

А. Н. Григоренко

Ф844. В сосуд, наполненный смесью жидкостей, плотность которой изменяется с глубиной по закону $\varrho=\varrho_0+\alpha h$, опускают тело массы m и объема V. Тело целиком погружается в жидкость. На какой глубине оно окажется, если имеет форму куба? шара?

Л. Г. Маркович

Ф845. Внутрь камеры автомобильного колеса радиуса R попал небольшой камешек. При какой минимальной скорости автомобиля камешек будет вращаться вместе с колесом, если коэффициент трения камешка о камеру равен μ?

А. В. Левин

Ф846. Почему мощные двигатели постоянного тока следует включать через пусковой реостат?

А. В. Кубышкин

Ф847*. В объемный пучок положительных ионов, имеющий круглое сечение, в точке A влетает электрон, скорость которого параллельна оси симметрии пучка (рис. 3). Объемная плотность зарядов в пучке равна ϱ, длина пучка l (длина пучка много больше его радиуса). При каких значениях скорости электрона он вылетит из пучка в точке B? Столкновения электрона с ионами не учитывать.

О. В. Фатьянов

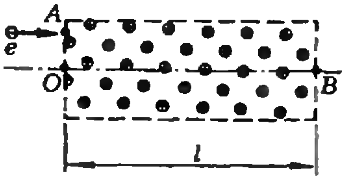


Рис. 3

Problems

M831—M835; P843—P847

M831. Suppose P and Q are the midpoints of sides AB and CD of the quadrilateral $ABCD$, M and N — those of the diagonals AC and BD. Prove that if the lines MN and PQ are perpendicular, then $|BC|=|AD|$.

V. V. Prasolov

M832. a) Prove that for any natural $n>5$ a square can be cut up into n smaller squares (among which some may be congruent).

b) Prove that for any natural $n>100$ the cube may be cut up into n smaller cubes.

V. A. Li

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*).

After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 31st, 1984 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К—6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M833*. The suquence x_n is given by the relations $x_1=2$, $x_{n+1}=\frac{2+x_n}{1-2x_n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ Prove that a) $x_n \neq 0$ for all n; b) this sequence is non-periodic.

V. E. Matizen

M834. A watering mechanism centered at the point O sprinkles all points within a cercle of radius 100m with centre O. Such mechanisms are used to water the entire surface of a square field 1 km × 1 km.

a) The farmer working on the field proposes to place 64 mechanisms at the nodes of a square lattice with sides parallel to those of the field (see figure Рис. 1). Within what limits can the side a of the lattice vary?

b) Victor, an eighth-grade school boy, says the field can be entirely sprinkled with only 46 such mechanisms. Is he right?

N. B. Vasiliev

M835*. n chess players from the country A and n from B arrive to participate in a one-round chess match. It turns out that, no matter how the players are paired (each player being paired with a player from the other country), at least one pair will consist of players who have played each other before. Prove that a players from the country A and b players from B can be chosen so that each of the chosen a players has played with each of the b chosen ones and $a+b>n$.

L. D. Menikhes

P843. A wheel of radius R situated at the altitude H above the ground rotates with angular velocity ω. A drop comes off the wheel and falls to the ground at the point B under the wheel's centre (see figure Рис. 2). Find the time the drop takes to fall and the point A where it came off the wheel.

A. N. Grigorenko

P844. A body of mass m and volume V is lowered into a receptacle filled with a liquid mixture whose density varies with depth according to the rule $\rho=\rho_0+\alpha h$. The body is entirely immersed in the liquid. How deep will it be, if it has the shape of a cube? of a ball?

L. G. Markovich

P845. A little pebble has penetrated inside the tube of an automobile tire of radius R. For what minimum velocity of the automobile will the pebble rotate together with the wheel, if the friction coefficient of pebble against tube is μ?

A. B. Levin

P846. Why must powerful DC motors be switched on by means of a special reostat?

A. V. Kubyshkin

P847*. An electron flies into a three-dimensional beam of positive ions with round section, the electron's velocity at that moment being parallel to the beam's axis of symmetry (see figure Рис. 3). The volume density of charge in the beam is ρ, its length is l (and is much greater than its section's radius). For what values of the electron's velocity will it fly out of the beam at the point B? Collisions of the electron with ions are not to be taken into account.

O. V. Fatianov

Решения задач

M816, M817, M819, M820*); Ф828—Ф832

M816. *Натуральные числа a и b получаются друг из друга перестановкой цифр. Докажите, что*

а) суммы цифр чисел $2a$ и $2b$ равны;

б) суммы цифр чисел $a/2$ и $b/2$ равны (если a и b четные);

в) суммы цифр чисел $5a$ и $5b$ равны.

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Пусть $S(x)$ — сумма цифр натурального числа x, $N(x)$ — количество его цифр, больших 4. Тогда

$$S(2x)=2S(x)-9N(x). \qquad (*)$$

Представим, что мы складываем число x само с собой столбиком, начиная с младших разрядов. Перенос единицы в очередной, $(k+1)$-й разряд суммы происходит в том и только в том случае, когда в k-м разряде числа x стоит одна из цифр 5, 6, 7, 8 или 9 (в примере на полях это происходит во 2-м, 3-м и 5-м от конца разрядах), то есть количество переносов равно $N(x)$. При каждом переносе вместо десятки, которая входит в сумму $S(x)+S(x)$, возникает единица, которая входит в сумму $S(2x)$, то есть $S(2x)$ по сравнению с $2S(x)$ уменьшается на 9. Отсюда получаем (*).

Теперь легко доказать утверждения задачи.

а) Подставляя в (*) вместо x поочередно a и b и учитывая очевидные равенства $S(a)=S(b)$ и $N(a)=N(b)$, получим, что $S(2a)=S(2b)$.

б) Заметим, что цифра i-го разряда числа x больше 4 в том и только том случае, когда цифра $(i+1)$-го разряда числа $2x$ нечетна. Поэтому $N(x)$ равно количеству нечетных цифр в числе $2x$. Следовательно, для чисел a и b, составленных из одних и тех же цифр, $N(a/2)=N(b/2)$ и в силу (*)

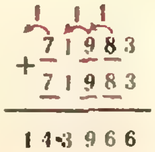
$$S\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(S(a)+9N\left(\frac{a}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(S(b)+9N\left(\frac{b}{2}\right)\right)=S\left(\frac{b}{2}\right).$$

в) Очевидно, числа $10a$ и $10b$ удовлетворяют условиям пункта б), поэтому

$$S(5a)=S\left(\frac{10a}{2}\right)=S\left(\frac{10b}{2}\right)=S(5b).$$

А. Д. Лисицкий



$2S(x)=14+2+18+16+6$

$S(2x)=1+4+2+1+8+1+6+6$

◆

M817. *Точка K лежит на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что соотношение $|AK|^2=|AB|\cdot|AC|-|KB|\cdot|KC|$ выполнено тогда и только тогда, когда $|AB|=|AC|$ или $\widehat{BAK}=\widehat{CAK}$.*

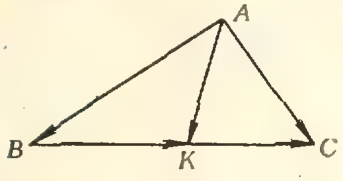


Рис. 1.

Первое решение (рис. 1). Пусть $p=|BK|:|BC|$, $q=1-p=|CK|:|BC|$, тогда

$$\vec{AK}=\vec{AB}+\vec{BK}=\vec{AB}+p\vec{BC}=\vec{AB}+p(\vec{AC}-\vec{AB})=q\vec{AB}+p\vec{AC}. \qquad (*)$$

По условию $|AK|^2=(q\vec{AB}+p\vec{AC})^2=|AB|\cdot|AC|-|BK|\cdot|KC|=|AB|\cdot|AC|-pq(\vec{AC}-\vec{AB})^2$.

Раскрывая скобки и учитывая, что $p+q=1$, получаем:

$$q|AB|^2+p|AC|^2-|AB|\cdot|AC|=0.$$

Следовательно, отношение длин сторон треугольника $\lambda=|AB|:|AC|$ удовлетворяет квадратному уравнению $q\lambda^2-\lambda+p=0$, то есть $\lambda=1$ или $\lambda=p/q$. В первом случае $|AB|=|AC|$, во втором — $|AB|:|AC|=p/q=|BK|:|KC|$, откуда по известной теореме**) вытекает, что AK — биссектриса или $\widehat{BAK}=\widehat{CAK}$.

С помощью равенства (*) легко вывести общую формулу для длины отрезка AK, известную как *формула Стюарта*. Она приводится на полях.

$$|AK|^2=q|AB|^2+p|AC|^2-|BK|\cdot|KC|,$$

где $p=|BK|:|BC|$, $q=|CK|:|BC|$.

---

*) Задача M818 будет решена в одном из следующих номеров «Кванта».

**) См., например, С. Р. Сефибеков «Четыре доказательства теоремы о биссектрисе» («Квант», 1983, № 8).

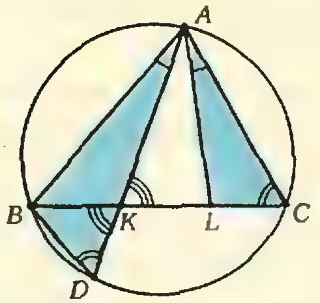


Рис. 2.

Второе решение. Возьмем на отрезке BC такую точку L, что $\widehat{CAL}=\widehat{KAB}$ (рис. 2). Покажем, что $|AL|=|AK|$. Отсюда будет вытекать, что либо точки L и K совпадают, то есть AK — биссектриса угла A, либо $\triangle ALK$ равнобедренный и тогда по теореме о внешнем угле треугольника

$$\widehat{ABC}=\widehat{AKC}-\widehat{BAK}=\widehat{ALB}-\widehat{LAC}=\widehat{ACB},$$

то есть треугольник ABC — равнобедренный.

Обозначим через D точку пересечения прямой AK и описанной около треугольника ABC окружности. Поскольку $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$, треугольник ACL подобен треугольнику ADB, следовательно, $|AL|\cdot|AD|=|AB|\cdot|AC|$. Треугольники ACK и BDK также подобны ($\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$, $\widehat{AKC}=\widehat{BKD}$), поэтому $|BK|\cdot|KC|=|AK|\cdot|KD|$. Таким образом, равенство, данное в условии, эквивалентно следующему

$$|AK|^2=|AL|\cdot|AD|-|AK|\cdot|KD|$$

или

$$|AK|(|AK|+|KD|)=|AL|\cdot|AD|.$$

Отсюда и вытекает, что $|AK|=|AL|$.

А. Л. Тоом, Н. Б. Васильев

М819. *В Швамбрании n городов, каждые два из которых соединены дорогой. (Дороги сходятся лишь в городах, все пересечения организованы в разных уровнях.) Злой волшебник намеревается установить на каждой дороге одностороннее движение так, что, выехав из любого города, в него уже нельзя будет вернуться. Докажите, что*

а) волшебник может это сделать;

б) при этом найдется город, из которого можно добраться до всех других, и найдется город, из которого нельзя выехать;

в) существует $n!=1\times\times2\cdot\ldots\cdot n$ способов осуществить намерение злого волшебника.

◆

а) Волшебник может занумеровать все города Швамбрании числами от 1 до n и установить на каждой дороге движение от города с меньшим номером к городу с большим номером. Этим он достигнет своей цели, потому что номера городов, которые встретятся при движении по любому маршруту с таким ограничением будут всегда возрастать.

б) Начав с любого города, поедем по дорогам Швамбрании, соблюдая правила злого волшебника. Будем двигаться, пока это возможно. Никакой город не встретится на нашем пути дважды, и поскольку общее число городов конечно, рано или поздно нам придется остановиться. Но это и значит, что мы попали в город Z, из которого нельзя выехать.

Теперь обратим направления движения на всех дорогах. Ясно, что двигаясь по новым правилам, мы опять не сможем посетить дважды один и тот же город. Поэтому, как и выше, найдется город A, из которого нельзя выехать по новым (!) правилам. Следовательно, первоначально на дороге, соединяющей A с любым другим городом B, было установлено движение от A к B, то есть из A можно попасть в любой город (пройдя всего одну дорогу).

Заметим, что из любого города кроме Z можно выехать (например, в Z), и в любой город кроме A можно въехать.

в) Проведем индукцию по числу городов n. При $n=1$ утверждение в) очевидно. Докажем его для n городов, считая, что оно справедливо для $n-1$ городов. Согласно пункту б), при любых правилах движения, удовлетворяющих условию злого волшебника, найдется один и только один город Z, из которого нельзя выехать. Им может быть любой из n городов.

На всех дорогах, соединяющих этот город с другими, устанавливается движение по направлению к городу Z. Поэтому никакой маршрут, соединяющий два других города, уже не может пройти через Z и надо только установить направления движения на дорогах между остальными $n-1$ городами так, чтобы ни в один из них нельзя было вернуться, двигаясь по этим направлениям. По предположению индукции это можно сделать $(n-1)!$ способами. Следовательно, общее число способов равно $n\cdot(n-1)!=n!$.

Другое решение основано на том, что существует единственный самый длинный (по числу дорог) маршрут по «заколдованной» злым волшебником Швамбрании. Он состоит из $n-1$ дорог, проходит через все n городов, начинается в городе A, из которого можно только выехать, и кончается в городе Z, в который можно только въехать. Если этот маршрут указан, то занумеровав города по ходу его следования числами от 1 до n, мы можем однозначно восстановить направление на любой дороге по правилу пункта а). Докажите перечисленные утверждения самостоятельно.

В. Н. Дубровский, Л. М. Коганов

М820*. *а) Правильный восьмиугольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы два прямоугольника.*

б) Правильный $4k$-угольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы k прямоугольников.

в) Найдите суммарную площадь прямоугольников из пункта б), если длина стороны $4k$-угольника равна 1.

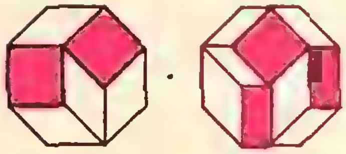


Рис. 1

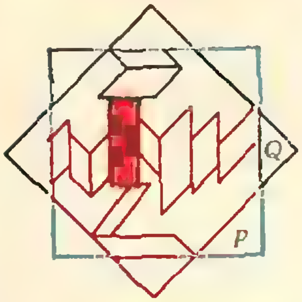


Рис. 2.

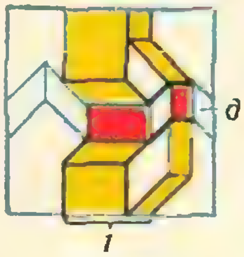


Рис. 3

◆

а) Примеры простейших разрезаний правильного восьмиугольника на параллелограммы показаны на рисунке 1. Для доказательства утверждения представим правильный восьмиугольник как пересечение двух квадратов P и Q. Пусть для определенности у квадрата P две стороны вертикальны, две горизонтальны (рис. 2). Будем строить из параллелограммов разбиения «дорожку», начинающуюся от левой стороны квадрата P, так, чтобы каждый следующий параллелограмм примыкал к предыдущему по вертикальной стороне или ее части. Ясно, что последний параллелограмм этой дорожки будет примыкать к правой стороне квадрата P. Такого же рода дорожка соединяет нижнюю сторону квадрата P с верхней. (Мы будем называть такие две дорожки *перпендикулярными*.) Общий параллелограмм этих двух дорожек является прямоугольником, *так как* его стороны *параллельны* сторонам квадрата P. Второй прямоугольник получим, повторив это построение для квадрата Q.

б) Правильный $4k$-угольник является пересечением k одинаковых квадратов, каждый из которых дает свою пару перпендикулярных дорожек, а каждая пара дорожек дает прямоугольник (см. пункт а)). Итого, мы учли k прямоугольников.

в) Ответ: сумма площадей всех прямоугольников разбиения равна k.

Сначала разрежем параллелограммы разбиения на более мелкие параллелограммы так, чтобы новое измельченное разбиение удовлетворяло следующему требованию: *любые два его параллелограмма либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону целиком.* При этом стороны каждого параллелограмма нового разбиения будут параллельны сторонам содержащего его параллелограмма старого разбиения. Поэтому объединение всех новых прямоугольников совпадает с объединением всех старых прямоугольников, и значит, достаточно решить задачу для нового разбиения.

Рассмотрим любую дорожку д (рис. 3). Каждые два ее соседних параллелограмма имеют целую общую сторону, длину которой назовем шириной дорожки. Таким образом, длина одной из сторон каждого прямоугольника, входящего в дорожку *д*, равна ее ширине, а сумма длин их вторых сторон равна суммарной ширине всех дорожек, перпендикулярных *д*, то есть единице — длине стороны *$4k$-угольника*. Следовательно, общая площадь всех прямоугольников дорожки численно равна ее ширине.

Возьмем теперь один из k квадратов, дающих в пересечении наш $4k$-угольник. Сумма площадей всех прямоугольников, принадлежащих дорожкам, соединяющим две противоположные стороны квадрата, равна сумме ширин этих дорожек, то есть 1. А поскольку каждый из прямо*угольников разбиения получается* как пересечение двух перпендикулярных дорожек (в соответствующем квадрате), сумма площадей всех прямоугольников равна числу квадратов k.

Докажите самостоятельно, что если правильный $4k$-угольник разрезан на минимальное возможное число параллелограммов (в этом случае все они будут ромбами), *то среди них найдутся ровно k одинаковых* квадратов.

В. В. Произволов

Ф828. *Из точек A, B и C, лежащих на одной прямой (точка B лежит между A и C), бросают три тела — a, b и c:*

1) бросают одновременно тела a и b и не бросают тело c; при этом тела a и b сталкиваются в полете;

2) бросают одновременно тела a и c и не бросают тело b; при этом тела a и c сталкиваются раньше, чем тела a и b в первом случае. При каждом бросании каждому телу сообщают одну и ту же начальную скорость. Столкнутся ли в полете тела b и c, если не бросать тело a?

Рассмотрим движение тел в системе отсчета, движущейся вместе с телом a (в этой системе тело a покоится). Траектория тела b в этой системе представляет собой прямую, проходящую через точку A (это следует из условия столкновения тел a и b). Аналогично, траектория тела c в этой системе также есть прямая, проходящая через точку A.

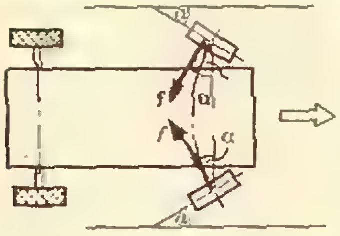
Следовательно, в выбранной нами системе брошенные одновременно тела b и c движутся вдоль одной прямой, проходящей через точку A. Из условия задачи следует, что при этом тело c догонит тело b (поскольку столкновение брошенных одновременно тел a и c происходит раньше, чем столкновение брошенных одновременно тел a и b).

Следовательно, тела b и c столкнутся в полете, если тело a не бросать.

С. С. Кротов

◆

Ф829. *Передняя ось телеги изогнута так, что плоскости колес образуют угол α с направлением движения. Найти силу сопротивления при установившемся равномерном движении телеги. Коэффициент трения скольжения колес о дорогу μ. Вес телеги P равномерно распределен на все колеса.*



При установившемся равномерном движении телеги передние колеса будут проскальзывать. При этом на каждое из этих колес будет действовать сила трения скольжения, направленная перпендикулярно плоскости колеса (при другом направлении силы трения возникал бы момент этой силы относительно оси колеса, и вращение колеса ускорялось бы или замедлялось; тогда телега двигалась бы не равномерно). Абсолютное значение силы трения, действующей на каждое переднее колесо, равно

$$f = \mu\frac{mg}{4} = \mu\frac{P}{4}.$$

Сила сопротивления равна векторной сумме сил сопротивления, действующих на передние колеса. Абсолютное значение силы сопротивления равно (см. рисунок)

$$F = \mu\frac{P}{2}\sin\alpha.$$

Угловая скорость вращения колес установится такой, чтобы обеспечить нужное направление силы трения; если задние колеса вращаются со скоростью ω, то скорость вращения передних колес будет ω cos α.

А. И. Ершов

◆

Ф830. *Известно, что давление насыщенного пара над водным раствором сахара меньше, чем над чистой водой, на величину $\Delta p = 0{,}05 \times \times p_{\text{нас}} \cdot c$, где $p_{\text{нас}}$ — давление насыщенного пара над чистой водой, c — весовая концентрация раствора. Цилиндрический сосуд, наполненный до высоты $h_0 = 10$ см раствором сахара с концентрацией $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, помещают под широкий колпак. На дне налит раствор сахара с концентрацией $c_2 = 10^{-3}$ (см. рисунок; высота уровня раствора много меньше h_0). Каким будет уровень раствора в сосуде после установления равновесия? Температура под колпаком поддерживается постоянной и равной 20°C.*

Концентрация налитого на дно раствора сахара практически не меняется.

Пусть h — высота уровня сахарного раствора в цилиндрическом сосуде после установления равновесия. Понятно, что концентрация раствора в сосуде будет равна

$$c = c_1\frac{h_0}{h}$$

(изменение концентрации происходит за счет испарения из раствора молекул воды — увеличение концентрации, либо за счет конденсации молекул пара в сосуд — уменьшение концентрации). Давление насыщенного пара над раствором в сосуде меньше, чем над раствором на дне, на

$$\Delta p = 0{,}05(c - c_2)p_{\text{нас}}.$$

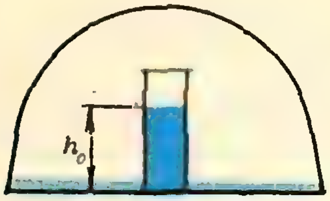
Эта разность давлений уравновешивается давлением столба пара высоты h:

$$\varrho_{\text{п}} g h = 0{,}05(c - c_2)p_{\text{нас}}.$$

Отсюда находим:

$$h = \frac{0{,}05(c - c_2)p_{\text{нас}}}{\varrho_{\text{п}} g}.$$

Пар над поверхностью раствора содержит только молекулы воды. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).



Плотность $\varrho_п$ пара при температуре $T = 293$ К найдем из уравнения газового состояния:

$$\varrho_п = p_{нас}\frac{\mu}{RT}.$$

Таким образом,

$$h = \frac{0{,}05c_2RT}{\mu g}\left(2\frac{h_0}{h} - 1\right).$$

Подставляя приведенные в условии числовые данные, находим

$$h \approx 16{,}4 \text{ см}.$$

Интересно отметить, что, как следует из рассмотренной задачи, если под колпаком будут находиться два одинаковых сосуда с растворами разных концентраций, то испарение будет происходить из раствора с меньшей концентрацией. И наоборот, водяной пар будет конденсироваться в раствор с большей концентрацией. Таким образом, концентрации будут стремиться выравняться. Именно с этим физическим явлением связано намокание сахара, соли и т. п. в атмосфере влажного воздуха.

А. И. Буздин

◆

Ф831. *Незаряженная проводящая тонкостенная сферическая оболочка помещена в однородное электрическое поле. При напряженности поля E_0 оболочка разрывается. При какой минимальной напряженности поля разорвется оболочка вдвое большего радиуса, имеющая ту же толщину стенок?*

На проводящей оболочке, помещенной в электрическое поле, будут индуцироваться заряды. Поверхностная плотность этих зарядов пропорциональна напряженности поля E. При изменении размера оболочки в n раз и напряженности поля в k раз силы, действующие на половинки сферы (на которых индуцированы заряды противоположных знаков), изменятся в k^2n^2 раз.

Поскольку толщина стенок остается постоянной, сила, приходящаяся на единицу длины оболочки, должна быть прежней. Если в первом случае разрыв происходит при некотором значении f_0 этой силы, то при увеличении размеров сферы в n раз и напряженности поля в k раз разрыв произойдет при $f = (k^2n^2/n)f_0$. Из условия $f = f_0$ следует:

$$\frac{k^2n^2}{n} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

При увеличении радиуса оболочки в два раза разрыв произойдет при напряженности поля

$$E = E_0/\sqrt{2}.$$

С. К. Строков

◆

Ф832*. *Квадратная недеформируемая сверхпроводящая рамка со стороной a расположена горизонтально и находится в неоднородном магнитном поле, индукция которого меняется в пространстве по закону*

$B_x = -kx$,
$B_y = 0$,
$B_z = kz + B_0$.

Масса рамки m, индуктивность L. В начальный момент центр рамки совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям X и Y. Рамку отпускают. Как она будет двигаться и где окажется через время t?

Магнитный поток, пронизывающий площадку, ограниченную сверхпроводящим контуром, постоянен. Действительно, $\Delta\Phi/\Delta t = \mathcal{E}_i$, но $\mathcal{E}_i - iR = 0$ (поскольку $R = 0$), следовательно, $\Phi = \text{const}$.

Магнитный поток через площадку, ограниченную контуром, складывается из потока внешнего магнитного поля и потока магнитного поля, создаваемого током i, текущим через контур. Таким образом, магнитный поток, пронизывающий рамку, равен в любой момент времени

$$\Phi = B_0a^2 + kza^2 + Li.$$

Так как в начальный момент ($z = 0$, $i = 0$) $\Phi = B_0a^2$, в любой другой момент времени значение тока i будет определяться соотношением

$$Li = -kza^2 \Rightarrow i = -\frac{kza^2}{L}.$$

Результирующая сила, действующая со стороны магнитного поля на рамку с током i, равна сумме сил, действующих на те стороны рамки, которые параллельны оси Y, то есть

$$F_{м} = 2a|kx|i = a^2ki,$$

и направлена вдоль оси Z.

Таким образом, уравнение движения рамки имеет вид

$$mz'' = -mg + a^2ki = -mg - \frac{a^4k^2}{L} z.$$

Это уравнение аналогично уравнению колебаний тела массы m, подвешенного на пружине жесткостью $K = a^4k^2/L$:

$$mz'' = -mg - Kz.$$

Из этой аналогии ясно, что рамка будет совершать гармонические колебания вдоль оси Z около положения равновесия, определяемого из условия

$$\frac{a^4k^2}{L} z_0 = -mg \qquad z_0 = -\frac{mgL}{a^4k^2}.$$

Частота колебаний будет равна

$$\omega = \frac{a^2k}{\sqrt{Lm}}$$

Координата z рамки через время t после начала движения равна

$$z = \frac{mgL}{a^4k^2} \left(-1 + \cos \frac{a^2k}{\sqrt{Lm}} t\right).$$

О. Ю. Никишина

Старинная восточная притча

Давным-давно на востоке жил-был старик, который, умирая, оставил своим трем сыновьям 19 верблюдов. Он завещал старшему сыну — половину, среднему — четвертую часть, а младшему — пятую. Не сумев найти решения самостоятельно (ведь задача в «целых верблюдах» решения не имеет), братья обратились к мудрецу.

— О мудрец!— сказал старший брат,— отец оставил нам 19 верблюдов и велел разделить между собой: старшему — половину, среднему четверть, младшему — пятую часть. Но 19 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 5. Можешь ли ты, о достопочтенный, помочь нашему горю, ибо мы хотим выполнить волю отца?

— Нет ничего проще,— ответил им мудрец.

Что задумал мудрец? Если вы не угадали, посмотрите окончание притчи в разделе «Ответы, указания, решения».

А. А. Бялко

Омскому НОУ — 15 лет

Подарок юбилею — отчет о сделанном. 35 тысяч учащихся средних школ и ПТУ участвовали в различных мероприятиях омского научного общества учащихся за прошедшие полтора десятка лет. Самым первым из «ноушат» — уже 30 лет. Немало среди них кандидатов наук и отличных инженеров-изобретателей, врачей, агрономов, учителей. Многие и сейчас не расстаются с обществом, но уже в новом качестве — руководителей кружков и секций. А вот многие активисты НОУ 1983 года и родились-то в один год с обществом.

Юбилейный год начался с того, что в августе 1982 года 60 учащихся городских и сельских школ по путевкам НОУ отдыхали и занимались в математических отрядах Летнего лагеря общества, расположенного в живописных окрестностях одного из районных центров. Секцию математики курируют ученые математического факультета ОмГУ и Института математики СО АН СССР, кружками руководят лучшие учителя школ, сотрудники городского дворца пионеров и школьников, ВЦ ОмГУ, студенты. Вместе с математиками отдыхали и пополняли знания юные астрономы и краеведы, химики и зоологи. Лагерь тоже справлял юбилей, он работал пятый раз. Много сил для его организации приложили Совет молодых ученых Обкома ВЛКСМ, Городской дворец пионеров и школьников, университет, помогали его созданию Облоно и Обком профсоюза работников просвещения, высшей школы и научных учреждений.

Прошло чуть больше месяца с начала занятий в школах, и многие старшеклассники стали зрителями и участниками нового для Омска состязания — цикла «матбоев» между лучшими школами города. В финале встретились сборные школ № 88 и № 37. Около 3 часов шли различные математические конкурсы: от шуточных (средствами художественной самодеятельности проиллюстрировать теорему сложения для синусов) до настоящей экспресс-олимпиады по решению довольно трудных задач. Победила школа № 88.

Эта же школа завоевала вместе со школой № 41 переходящий кубок ОК ВЛКСМ в командной олимпиаде школ города по математике. Такой же кубок для сборных сельских районов выиграли школьники Таврического района. Но это случилось позднее, в апреле, а еще раньше прошла такая же традиционная олимпиада ПТУ, в ней впервые победителем стала сборная городского профтехучилища № 49. Надо отметить, что после математиков подобные олимпиады по физике, химии, черчению, обществоведению, иностранным языкам, экономике труда в содружестве с методическим кабинетом областного управления профтехобразования стали проводить факультеты и кафедры Университета и Политехнического института.

Главное событие — юбилейная конференция омского НОУ — началось 23 апреля 1983 года открытием в городском дворце пионеров и школьников выставки технического творчества членов общества и семинаром руководителей кружков.

На другой день в 19 секциях собрались школьники — 450 докладчиков, а слушать их пришло столько школьников, что просторные аудитории университета были переполнены.

Математики работали в 5 секциях. В отличие от прошлых лет изменился подход к определению тематики докладов. НОУ все больше работает на профессиональную ориентацию школьников, поэтому цель каждого доклада — показать применение математики в выбранной старшеклассником профессии. Большинство докладов, сделанных на секции алгебры, геометрии и анализа, демонстрировали подготовленность школьников к творческой учебе на математических специальностях.

Разнообразными были доклады на секции «Математика в технике и экономике». 16 докладов на секции «математика в гуманитарных науках» сделали школьники, избравшие профессии юристов и филологов, медиков, педагогов. На секции вычислительной математики и программирования выступили 36 школьников, освоивших программирование в различных кружках НОУ.

Обычно на математических секциях конференций НОУ выступают старшеклассники. Однако юбилейная конференция заложила новую традицию: второкурсники университета, проходившие пионерскую практику в качестве руководителей школьных математических кружков, создали секцию занимательной математики для учащихся 4—7 классов. «Малыши» рассказывали о решении интересных задач из «Кванта», показывали свойства листа Мёбиуса; лучшим признан доклад Гены Побережского, шестиклассника из с. ш. № 62, показавшего несколько приемов мгновенного умножения.

Учащиеся старших классов, выступавшие с содержательными докладами, получили рекомендации омского НОУ для поступления в избранные ими вузы, а докладчики из последней секции — математические библиотечки. Учащиеся 8 и 9 классов приглашались в кружки, летний лагерь НОУ. За победы в командных олимпиадах школьники и учащиеся ПТУ получили кубки, грамоты, торты. Так прошла 15-я юбилейная конференция научного общества учащихся. Праздник на этом кончился, а вот работа с любителями математики продолжается!

В. Н. Сергеев

XVII Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО,
кандидат физико-математических наук
А. М. СЛИНЬКО

С 13 по 20 апреля в Кишиневе проводился заключительный этап XVII Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В нем приняли участие 146 школьников (42 восьмиклассника, 51 девятиклассник и 53 десятиклассника) — победители республиканских олимпиад, победители московской и ленинградской городских олимпиад и школьники, отмеченные на предыдущей Всесоюзной олимпиаде дипломами I и II степени. Столица Советской Молдавии во второй раз удостоилась этой чести. Быстро летит время. Кажется, еще совсем недавно Кишинев принимал заключительный этап VII Всесоюзной математической олимпиады, а сегодня два ее победителя — С. В. Конягин и Е. И. Хухро — приехали в Кишинев уже в качестве членов жюри.

13 апреля, в день заезда, участникам олимпиады были показаны документальные фильмы, рассказывающие об истории, культуре и экономике Молдавии. При регистрации каждому участнику вручалась памятная папка с программой заключительного этапа олимпиады, пригласительным билетом на торжественное открытие, программой праздничного концерта, памятными значками и молдавскими сувенирами.

14 апреля участники олимпиады возложили цветы к памятнику В. И. Ленину и Мемориалу Славы. А затем во Дворце культуры профсоюзов состоялось торжественное открытие. С теплыми словами приветствия к участникам олимпиады обратился министр просвещения Молдавской ССР Д. Г. Зиду. Успешного выступления, интересной, творческой работы, честной борьбы пожелали ребятам секретарь ЦК ЛКСМ Молдавии Е. М. Бейко, председатель жюри акад. АН УССР Б. В. Гнеденко и зам. председателя жюри чл.-корр. АПН СССР В. Д. Белоусов. Присутствующие единодушно приняли решение отправить Почетному Председателю жюри олимпиады акад. А. Н. Колмогорову, которому в эти дни исполнилось 80 лет, приветственную телеграмму.

Задания заключительного этапа олимпиады участники писали 15 и 16 апреля. Задание каждого из двух дней состояло из четырех задач, на решение которых отводилось по пять часов.

Ниже приводятся условия всех задач. Некоторые из этих задач включены в Задачник «Кванта» («Квант» №№ 9, 10; номер, под которым там помещена задача, указан после условия задачи), их решения читатели смогут найти в последующих номерах журнала.

Задачи

Первый день

8 класс

1. В сетке, изображенной на рисунке 1, каждая ячейка имеет размер 1×1. Можно ли эту сетку представить в виде объединения следующих множеств: а) восьми ломаных, каждая из которых имеет длину 5; б) пяти ломаных, каждая из которых имеет длину 8? (М824).

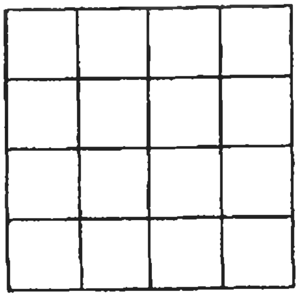


Рис. 1

2. На доске написали три целых числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух других оставшихся чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате полу-

чили числа 17, 1967, 1983. Могли ли на доске первоначально быть записаны числа: а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3? (М826).

3. Три круга попарно касались друг друга внешним образом в точках X, Y, Z. Затем радиусы этих кругов увеличили более, чем в $\frac{2}{\sqrt{3}}$ раз, сохранив центры. Докажите, что каждая точка треугольника XYZ оказалась накрытой хотя бы одним из увеличенных кругов.

4. Даны несколько различных натуральных чисел, заключенных между квадратами двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что все их попарные произведения также различны.

9 класс

1. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^2=x^3-3x^2+2x \\ x^2=y^3-3y^2+2y. \end{cases}$$

2. Натуральное число K в десятичной записи имеет n знаков. Это число округлили с точностью до десятков, заменив последнюю цифру нулем и увеличив на единицу число десятков, если эта последняя цифра была больше четырех. Полученное число аналогичным образом округлили с точностью до сотен и так далее. В результате последнего, $(n-1)$-го округления получилось число $\tilde{K}$. Докажите, что $\tilde{K}<\frac{18}{13}K$.

3. В треугольнике ABC точка D является серединой стороны AB, точки E и F лежат на отрезках AC и BC соответственно. Докажите, что площадь треугольника DEF не превосходит суммы площадей треугольников ADE и BDF.

4. Будут ли периодическими последовательности (α_n) и (β_n), состоящие, соответственно, из последних цифр целых чисел $[(\sqrt{10})^n]$ и $[(\sqrt{2})^n]$? (Здесь $[x]$ — целая часть числа x.)

10 класс

1. Величины α и β двух острых углов удовлетворяют равенству $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$. Докажите, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

2. Задача № 2 для 9 класса.

3. Вершины тетраэдра $ABCD$ ортогонально спроектированы на две плоскости. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 — проекции соответствующих вершин. Докажите, что одну из плоскостей можно переместить в пространстве так, чтобы прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 стали параллельными.

4. Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Решив очередное квадратное уравнение и убедившись в том, что у него имеется два корня, он составляет следующее уравнение по правилу: свободный член равен большему корню, коэффициент при переменной x равен меньшему корню, коэффициент при x^2 равен единице. Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго. Каково наибольшее число уравнений, которое ему, возможно, придется решить? (М830)

Ребята довольно успешно справились с задачами, предложенными в первый день. Наибольшие трудности, как и ожидалось, вызвали задачи 8.3, 8.4, 9.4, 10.3 и 10.4. Особенно трудной оказалась задача 8.4; полностью ее сумел решить лишь один участник и еще трое участников решили ее с небольшими недочетами. Неожиданно трудной оказалась задача 9.1. Однако ни в одном из классов не было задачи, которую бы никто не сумел решить.

15 апреля, после завершения работы над конкурсными заданиями, ребята совершили увлекательную экскурсию по пушкинским местам Молдавии.

Второй день

8 класс

5. Натуральные числа m, n, k таковы, что число m^n делится на n^m, а число n^k делится на k^n. Докажите, что число m^k делится на k^m.

6. В языке племени Абба две буквы. Известно, что никакое слово этого языка не является началом другого слова. Может ли словарь языка этого племени содежать 3 четырехбуквенных, 10 пятибуквенных, 30 шестибуквенных и 5 семибуквенных слов?

7. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа бумаги расставить целые числа так, чтобы в каждом прямоугольнике размера 4×6 клеток, стороны которого идут по линиям бумаги, сумма чисел была а) 10; б) 1? (М828).

8. Все четыре треугольника, заштрихованные на рисунке 2, равновелики. Докажите, что три четырехугольника, не заштрихованные на нем, также равновелики. Чему равна площадь одного четырехугольника, если площадь одного треугольника равна 1 см^2? (М827)

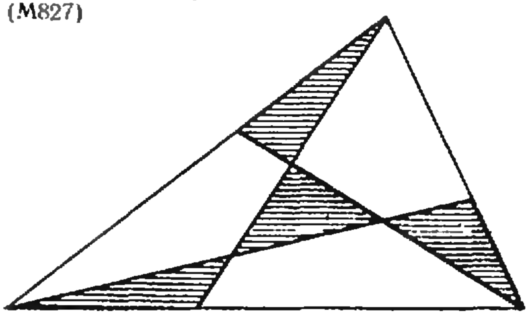


Рис. 2.

9 класс

5. Группа детского сада построилась парами друг за другом. При этом оказалось, что в каждой колонне стоит поровну мальчиков и девочек, а число пар, в которых стоят девочка и мальчик, равно числу остальных пар. Докажите, что число детей в группе делится на 8.

6. Длины двух параллельных сторон прямоугольника равны 1 см. Кроме того, известно, что двумя перпендикулярными прямыми он может быть разбит на четыре прямоугольника, три из которых имеют площадь, не меньшую 1 см^2, а четвертый — не меньшую 2 см^2. При какой минимальной длине двух других сторон прямоугольника это возможно?

7. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка O. Докажите, что справедливо равенство

$$S_A\cdot\overrightarrow{OA}+S_B\,\overrightarrow{OB}+S_C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0},$$

где S_A, S_B, S_C — площади треугольников BCO, CAO, ABO соответственно.

8. Докажите, что среди любых $2m+1$ различных целых чисел, не превосходящих по модулю $2m-1$, можно найти три числа, сумма которых равна 0. (М829)

10 класс

5. Задача № 5 для 8 класса.

6. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC (но не в вершинах) выбраны точки D, E, F соответственно. Обозначим через d_0, d_1, d_2, d_3 длины наибольших сторон треугольников DEF, ADF, BDE, CEF. Докажите, что $d_0 > \frac{\sqrt{3}}{2}\min(d_1, d_2, d_3)$. В каких случаях имеет место равенство?

7. Множество M состоит из k попарно не пересекающихся отрезков, лежащих на одной прямой. Известно, что любой отрезок длины, не большей 1, можно расположить на прямой так, чтобы концы его принадлежали множеству M. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, не меньше $\frac{1}{k}$. (М825).

8. В бесконечном десятичном разложении действительного числа a встречаются все цифры. Пусть v_n — количество различных цифровых отрезков длины n, встречающихся в этом разложении. Докажите, что если для некоторого n выполнено условие $v_n < n+8$, то число a рационально.

С заданиями второго дня ребята также справились, в целом, хорошо. В восьмом и десятом классах задачи второго дня были примерно равны по сложности задачам первого дня. У десятиклассников наибольшие трудности вызвали задачи 10.7 и 10.8. В восьмом классе наиболее сложной оказалась задача 8.7; оба ее пункта решил лишь один участник, еще трое участников решили по одному пункту. В девятом классе задачи второго дня были более сложными, чем задачи первого дня. Значительные трудности у девятиклассников вызвали задача 9.8 (что жюри предвидело заранее) и задача 9.6 (что явилось полной неожиданностью для жюри). Для некоторых задач ребята предложили свои, оригинальные решения, которые не были известны жюри. Особенно радует то, что в этом году учащиеся девятых и десятых классов успешно справились с задачами по геометрии, причем девятиклассники при решении задачи 9.3 свободно оперировали свойствами геометрических преобразований.

19 апреля в Республиканском молодежном центре им. Ю. А. Гагарина состоялось закрытие Олимпиады, участникам были вручены дипломы (см. с. 56), грамоты и призы. Успешно выступили в Кишиневе победители предыдущей олимпиады. Особенно хотелось бы отметить девятиклассников Евгения Абакумова и Константина Игнатьева, второй год подряд удостоенных дипломов I степени. Девятиклассница Сниедзе Седола, успешно выступившая за десятый класс, была награждена призом журнала «Квант» — подшивкой журнала за 1982 г. с автографом Главного редактора журнала академика И. К. Кикоина. Оргкомитет Олимпиады-XVII передал эстафету представителю Туркменской ССР — республики, которой поручено проведение XVIII Всесоюзной математической олимпиады.

Вечером был проведен математический бой между командой жюри, возглавляемой ее бессменным капитаном С. В. Конягиным, и командой участников олимпиады. В упорной борьбе команде жюри удалось одержать победу.

Ход заключительного этапа олимпиады широко освещался в республиканской прессе и в выпусках последних известий по радио, работал пресс-центр, которым руководили члены НОУ «Виторул»*). Каждый день выпускались математическая газета «Сигма» и различные «Молнии».

16 апреля в помещении конференц-зала Академии наук МССР состоялась встреча участников олимпиады с учеными Молдавии, посвященная Дню науки. Очень интересно прошли защита творческих работ участников олимпиады и заседание клуба «Эврика», организованные НОУ «Виторул». Как всегда, интересной получилась традиционная встреча участников олимпиады с редакцией журнала «Квант».

Незаметно пролетели восемь дней, которые провели на молдавской земле участники олимпиады, но память от этих днях, о Празднике математики ребята сохранят надолго.

---

*) См. «Квант», 1977, № 4.

XVII Всесоюзная олимпиада по физике

Кандидат физико-математических наук Ю. А. САМАРСКИЙ

Заключительный этап XVII Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходил с 13 по 20 апреля в столице Советской Литвы — Вильнюсе.

В этих ответственных соревнованиях приняли участие 150 школьников всех союзных республик: 37 восьмиклассников, 53 девятиклассника и 60 десятиклассников. Все они — победители республиканских олимпиад этого года, а также призеры предыдущей Всесоюзной олимпиады.

Торжественное открытие XVII Всесоюзной олимпиады состоялось 14 апреля в помещении Детской музыкальной школы им. Б. Дварионаса. С теплыми приветственными словами к участникам олимпиады обратились министр просвещения Литовской ССР, герой Социалистического Труда В. П. Спурга; председатель жюри Всесоюзной олимпиады, заслуженный преподаватель Литовской ССР доцент И. Т. Мартишюс; заместитель председателя жюри профессор С. М. Козел; председатель общества физиков Литвы академик АН Литовской ССР П. Бразджюнас и другие товарищи. Они пожелали участникам интересной, увлекательной борьбы, отметив, что в подобных олимпиадах не бывает побежденных. После торжественной части был концерт художественной самодеятельности.

Утром 15 апреля состоялся теоретический тур заключительного этапа олимпиады. Восьмиклассникам по традиции были предложены 4 задачи (на работу отводилось 4 часа), а девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач (на их решение давалось 5 часов). Приведем условия этих задач (большинство из них включено в Задачник «Кванта» в 9 и 10 номерах журнала за этот год).

Теоретический тур

8 класс

1. На ленту транспортера, ползущую со скоростью $v_0=1$ м/с, сбоку сталкивают коробку. Скорость коробки сразу после попадания на ленту равна по модулю $u_0=2$ м/с и перпендикулярна скорости ленты. Какую минимальную скорость относительно Земли будет иметь коробка во время движения? Сила трения достаточно велика, так что коробка с ленты не соскальзывает.

2. На парту с углом наклона $\alpha=40°$ к горизонту кладут шестигранный карандаш так, чтобы он не скатывался вниз и не скользил (рис. 1). 1) При каком коэффициенте трения это возможно? 2) Под каким углом φ к горизонтальному направлению нужно положить карандаш? Примечание. Значения тригонометрических функций можно взять из таблиц.

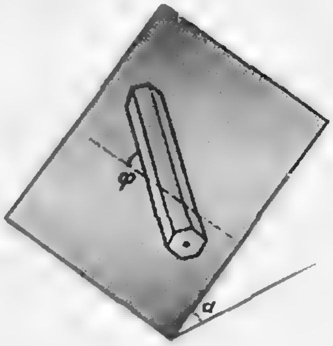


Рис. 1.

3. В закрытой коробке с двумя выводами находятся батарейка и резистор. К выводам коробки подключили последовательно резистор с сопротивлением $R=1$ Ом и батарейку с напряжением $U=1$ В. При этом в резисторе выделяется мощность $P_1=1$ Вт. После того как полюса батарейки переключили, эта мощность возросла до $P_2=4$ Вт. Определите напряжение батарейки и сопротивление резистора, находящихся в коробке.

4. В стакан с водой опустили нагреватель и сняли зависимость температуры воды от времени (см. таблицу). 1) На сколько градусов остынет вода за 1 мин, если нагреватель отключить от сети при температуре $t_1=50$°C? 2) Закипит ли вода, если нагреватель не выключать достаточно долго? Мощность нагревателя считать неизменной.

Время, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура, °C	20	26.2	31.8	36.8	41.4	4[illegible]	[illegible].3	52.[illegible]	55.8	58.5	[illegible]

[illegible] класс

1. На очень длинной невесомой нити подвешен к потолку шарик массы $m_1=0,1$ кг. К нему прикреплен на нити длины $l=0,2$ м шарик массы $m_2=0{,}05$ кг. Нижнему шарику толчком сообщают скорость v_0 в горизонтальном направлении. При какой величине v_0 шарики могут оказаться на одной высоте?

2. В плоской горизонтально расположенной коробке размером 10×10 см в беспорядке лежат $N=1000$ маленьких стальных шариков. Масса каждого шарика $m=0{,}5$ мг. Коробку начинают двигать в горизонтальном направлении с постоянной скоростью $v_0=10$ м/с. Через некоторое время движение шариков в коробке становится хаотичным, подобно движению молекул газа. 1) Найдите среднюю скорость шариков. 2) Оцените силы, действующие на стенки коробки. Соударение шариков со стенками и друг с другом считать абсолютно упругими.

3. Спускаемый аппарат космического корабля приближается к поверхности планеты по вертикали с постоянной скоростью, передавая на борт корабля данные о наружном давлении. График зависимости давления (в условных единицах) от времени приведен на рисунке 2. Опустившись на поверхность планеты, аппарат измерял и передал на борт данные о температуре: $T=700$ К и ускорении свободного падения: $g=10$ м/с^2. Определите скорость спуска аппарата, если известно, что атмосфера планеты состоит из углекислого газа (CO_2).

4. Пластина *А* плоского конденсатора неподвижна, пластина *Б* прикреплена к стенке пружиной и может двигаться, оставаясь параллельной пластине *А* (рис. 3). После замыкания ключа *К* пластина *Б* начала двигаться и остановилась в новом положении равновесия. При этом расстояние между пластинами уменьшилось на $\alpha_1=10\%$. На сколько изменилось бы равновесное расстояние между пластинами если бы ключ *К* замкнули на короткое время? Предполагается, что за это время пластина *Б* не успевает заметно сдвинуться.

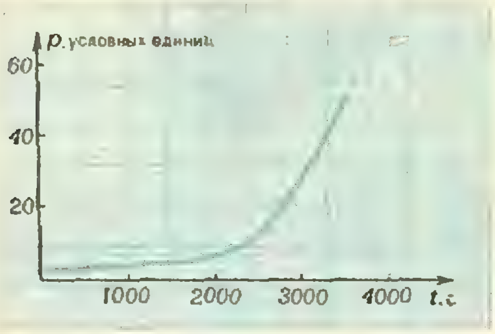


Рис. 2.

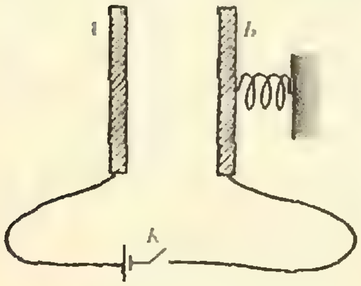


Рис. 3.

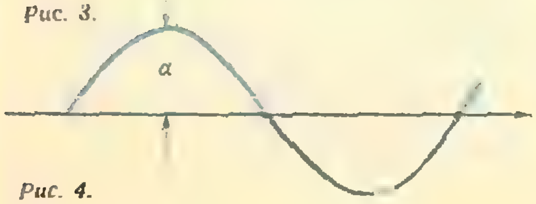


Рис. 4.

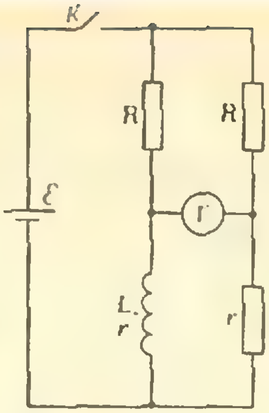


Рис. 5.

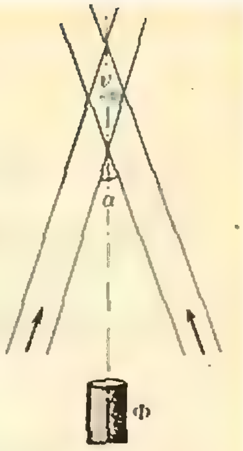


Рис. 6.

5. Лампочка мощностью $P=60$ Вт, рассчитанная на напряжение $U=200$ В, имеет нить накала массы $m=0{,}3$ г. Ее подключают к источнику постоянного напряжения через прерыватель, который периодически замыкает цепь на время $\tau_1=8\cdot10^{-3}$ с и размыкает на $\tau_2=12\cdot10^{-3}$ с. Напряжение источника подобрано так, что лампа горит нормальным накалом. 1) Найдите напряжение источника. 2) Оцените изменение температуры нити в течение периода. Удельная теплоемкость материала нити $c=140$ Дж/(кг · К).

10 класс

1. В 1844 году выдающийся математик и астроном Бессель обнаружил, что собственное (не связанное с движением земного наблюдателя) движение Сириуса происходит примерно по синусоиде (рис. 4) с максимальным угловым отклонением от прямолинейного пути $\alpha=2{,}3''$ и периодом $T=50$ лет. Бессель предположил (через 18 лет это было подтверждено прямыми наблюдениями), что искривление пути Сириуса вызывается наличием спутника — более слабой звезды. Найдите отношение массы m спутника (Сириуса В) к массе Солнца M_C, если масса основной звезды (Сириуса А) $M=2{,}3\ M_C$. Известно, что радиус земной орбиты R_0 виден с Сириуса под углом $\beta=0{,}376''$. Считать, что орбиты компонент Сириуса круговые, а плоскость орбит перпендикулярна направлению от Солнечной системы к Сириусу.

2. Спускаемый аппарат космического корабля приближается к поверхности планеты по вертикали с постоянной скоростью, передавая на борт корабля данные о наружном давлении. График зависимости давления (в условных единицах) от времени приведен на рисунке 2. Опустившись на поверхность планеты, аппарат измерил и передал на борт данные о температуре: $T=700$ К и ускорении свободного падения: $g=10$ м/с^2. 1) Определите скорость спуска аппарата, если известно, что атмосфера планеты состоит из углекислого газа (CO_2).

Призеры олимпиады по физике, получившие дипломы I степени. Слева направо: А. Абанов, Г. Баранаускас, В. Каральник, Г. Григорьев, А. Дешковский, М. Дьячков, С. Орлов, А. Алексеев.

2) Определите температуру на высоте $h = 15$ км над поверхностью планеты.

3. В схеме, изображенной на рисунке 5, замыкают ключ K. 1) Найдите установившееся значение тока через катушку с индуктивностью L и сопротивлением r. 2) Какой заряд протечет после замыкания ключа через гальванометр Г? Параметры элементов, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением гальванометра Г пренебречь.

4. Человек держит в вытянутой руке объектив фотоаппарата и рассматривает через него удаленные предметы. Может ли пролетающая мимо объектива муха закрыть все поле зрения? Оцените минимальный размер непрозрачного предмета, который может перекрыть все поле зрения, и укажите, где его нужно расположить. Необходимые числовые данные задайте сами.

5. Для измерения скоростей частиц используется лазерный анемометр, в котором движущиеся частицы освещаются двумя пересекающимися лазерными когерентными пучками света (рис. 6). Отраженный частицами свет улавливается фотоэлементом Ф и преобразуется в электрический сигнал. Частицы движутся по перпендикуляру к биссектрисе угла между пучками $\alpha = 60°$. С какой скоростью двигалась частица, если при длине волны лазерного излучения $\lambda = 0{,}63$ мкм был зарегистрирован периодический сигнал с частотой $\nu = 320$ кГц?

16 апреля участники олимпиады трудились на Всесоюзном коммунистическом субботнике в лесничестве Веркяй, а вечером состоялись встречи интернациональной дружбы.

Экспериментальный тур проводился 17 апреля. Каждому участнику предлагались две задачи. Подробный разбор задач экспериментального тура дан в статье В. А. Орлова, помещенной в этом же номере журнала. После окончания эксперимента участники олимпиады побывали на экскурсии в Музее революции Литовской ССР и Историко-этнографическом музее.

19 апреля состоялось торжественное закрытие XVII Всесоюзной олимпиады школьников по физике. На нем были объявлены результаты олимпиады и вручены награды победителям. Имена призеров, получивших дипломы I, II и III степени, приведены на странице 57.

Самый юный среди призеров олимпиады — *Дмитрий Каледин* (ученик 7 класса из Москвы) — был награжден специальным призом, учрежденным редколлегией и редакцией журнала «Квант».

Олимпиада закончилась, но олимпийское движение продолжается. Желаем всем больших успехов.

Экспериментальный тур олимпиады по физике

Кандидат педагогических наук
В. А. ОРЛОВ

Выполнение экспериментальных заданий заключительного тура XVII Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходило в трех вузах Вильнюса: восьмиклассники работали в Педагогическом институте, девятиклассники — в Вильнюсском университете им. В. Капсукаса, десятиклассники — в Инженерно-строительном институте. В подготовке задач приняли участие преподаватели кафедр физики этих институтов. Особо следует отметить авторов предлагавшихся заданий: А. Кивериса, А. Медейшиса, А. Брилингаса и Я. А. Семенова.

Приведем условия всех экспериментальных заданий и варианты их решений, предложенные участниками олимпиады.

8 класс

Задание 1

1) Исследуйте зависимость скорости движения тела в трубке с водой от угла наклона трубки и постройте график этой зависимости.

2) Оцените коэффициент трения между телом и стенкой трубки с водой.

3) Считая, что сила сопротивления при движении тела в жидкости пропорциональна скорости: $F_c=\alpha v$, определите коэффициент пропорциональности α.

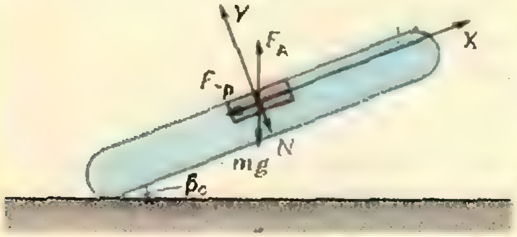


Рис. 1.

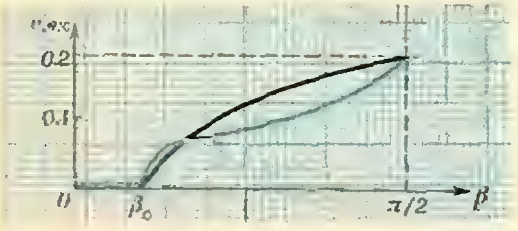


Рис. 2.

Оборудование: стеклянная трубка с водой и телом (объем и плотность тела заданы), линейка, штатив, секундомер, миллиметровая бумага, математические таблицы.

Опыты показывают, что тело начинает двигаться лишь после достижения трубкой некоторого минимального наклона β_0. Применим к этому предельному случаю второй закон Ньютона, записанный в проекциях на координатные оси (рис. 1):

$$F_A \sin\beta_0 - F_{тр} - mg\sin\beta_0 = 0,$$
$$F_A \cos\beta_0 - mg\cos\beta_0 - N = 0.$$

Учтя, что $F_{тр}=\mu N$, получим

$$(F_A - mg)\sin\beta_0 = \mu(F_A - mg)\cos\beta_0,$$

откуда найдем коэффициент трения между телом и стенкой трубки с водой:

$$\mu = \operatorname{tg}\beta_0.$$

При угле наклона трубки β большем, чем β_0, тело начинает двигаться равноускоренно. Но так как появляется сила сопротивления, пропорциональная скорости, тело быстро, как следует из опыта, достигает постоянной скорости. Ее легко определить по формуле $v=l/t$, где l — длина пути, пройденного телом с установившейся скоростью, t — время движения. Измеряя таким образом скорости тела при различных углах наклона β, можно построить экспериментальный график зависимости $v=v(\beta)$. На рисунке 2 этот график изображен синей линией.

Дополнительные баллы получили ученики, которые сравнили экспериментальную кривую с теоретической. Запишем второй закон Ньютона для случаев движения тела под произвольным углом β и под углом $\beta=\pi/2$:

$$(F_A - mg)\sin\beta - \mu(F_A - mg)\cos\beta - \alpha v = 0,$$
$$F_A - mg - \alpha v_{\pi/2} = 0.$$

Отсюда

$$v = v_{\pi/2}(\sin\beta - \mu\cos\beta) = v_{\pi/2}\frac{\sin(\beta-\beta_0)}{\cos\beta_0}.$$

Графически эта зависимость показана на рисунке 2 черной линией.

Коэффициент α легко определить для случая подъема тела в вертикальном направлении:

$$\alpha = \frac{V(\varrho_0-\varrho)g}{v_{\pi/2}},$$

где V — объем тела, ϱ_0 и ϱ — плотности воды и тела соответственно.

Вследствие несимметричности тела, а значит, и разных условий его обтекания, при переворачивании трубки коэффициент α может получиться иным. Те, кто учли это и нашли два значения α, получили дополнительные баллы. Правда, как показал опыт, разность значений лежала в пределах погрешностей измерений.

Задание 2

1) Определите жесткость пружины и коэффициент трения стали по стеклу.

2) Используя устройство вертикального «мягкого амортизатора», определите потерю энергии шарика при первом столкновении шарика и пружины.

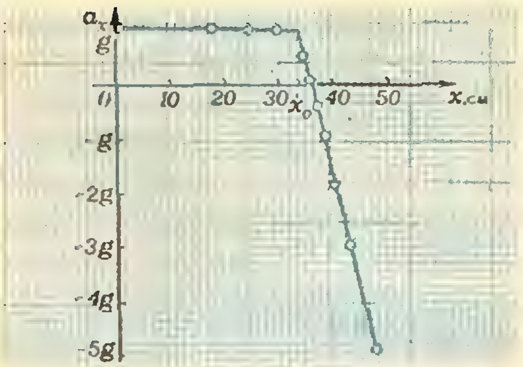


Рис. 3.

3) Для случая падения шарика с верхней точки трубки на пружину начертите график зависимости проекции ускорения шарика на вертикальную ось от расстояния от верхней точки.

Оборудование: стальная пружина, стеклянная трубка, стальной шарик с известной массой, линейка, миллиметровая бумага.

Определение жесткости пружины затруднений не вызвало: $k=mg/\Delta l$, где Δl — деформация пружины, когда шарик положен на нее (для устойчивости пружину помещают в вертикально поставленную стеклянную трубку). Чтобы определить коэффициент трения скольжения стального шарика по стеклу по формуле $\mu=\operatorname{tg}\beta_0$ (где β_0 — минимальный угол наклона, при котором начинается скольжение), необходимо было заставить шарик скользить по стеклу. С этой целью можно было, например, зажать шарик между витками пружины. Некоторые учащиеся воспользовались тем, что пружина стальная, и определяли (таким же способом) коэффициент трения скольжения пружины по стеклу.

Потерю энергии шарика бо́льшая часть учеников определила из выражения $\Delta E=mg(h_2-h_1)$, где h_2 и h_1 — конечная и начальная высоты шарика над столом (то есть после и до первого столкновения шарика с пружиной). Некоторые определяли потери энергии по максимальному сжатию пружины.

При построении графика зависимости проекции a_x ускорения шарика на вертикальную ось от расстояния x шарика до верхней точки трубки (рис. 3) основным недочетом было чисто теоретическое решение задачи:

$$a_x=g-\frac{k}{m}(x-x_0)=g-\frac{k}{m}\Delta x=g\left(1-\frac{\Delta x}{\Delta l}\right).$$

На самом деле все точки на графике следовало нанести после измерения соответствующих величин с учетом выбранного масштаба.

К сожалению, большая часть учеников ограничились одним циклом падения шарика на пружину, в то время как шарик после взаимодействия с пружиной отскакивал от нее и поднимался на новую высоту, снова падал, сжимая пружину, вновь поднимался и так до полной остановки. Необходимо было все эти точки также показать на графике.

Оценивая в целом задания для 8 класса, следует отметить, что они достаточно интересны, но объем работы был велик. Полностью все задания не выполнил никто. Лучший результат (2,1 балла из 3) показали *Д. Калавинскайте* и *Г. Мечекюс* (Вильнюс). Типичными недочетами были: выполнение лишь одного измерения, небрежное оформление отчета, отсутствие таблиц с экспериментальными данными и неправильное определение (а иногда и просто отсутствие) погрешностей измерений.

9 класс

Задание 1

Определите удельную теплоемкость неизвестной жидкости.

Оборудование: теплоизолированный сосуд (термостат), капилляр с пузырьком на конце, резистор, сосуды с водой и неизвестной жидкостью, измерительный цилиндр, пластинка с клеммами, миллиметровая бумага, батарея гальванических элементов, конденсатор, провода, пластилин.

При выполнении этого задания ученики столкнулись с рядом проблем:

а) Как измерить температуру, не имея термометра?

б) Как рассчитать энергию электрического тока, не имея секундомера?

в) Как исключить неизвестную теплоемкость термостата?

г) Как оценить теплоотдачу сосуда с жидкостью в окружающее пространство?

Только правильно ответив на эти вопросы, можно было выбрать оптимальную методику выполнения работы.

а) Для измерения температуры нужно изготовить газовый термометр. С этой целью капилляр с пузырьком на конце нагревается рукой, и конец капилляра опускается в воду, чтобы капелька воды вошла в него. Объем воздуха в пузырьке под столбиком воды прямо пропорционален абсолютной температуре среды, в которой находится капилляр:

$$\frac{V}{V_0}=\frac{T}{T_0}\Rightarrow\Delta T=\frac{\Delta V}{V_0}T_0.$$

Температура окружающей среды T_0 и начальный объем воздуха V_0 были заданы, изменение объема воздуха при нагревании воды $\Delta V_в$ или неизвестной жидкости ΔV_x рассчитывается по формуле: $\Delta V=\pi d^2\Delta h/4$, где Δh — высота подъема столбика воды в капилляре (измеряется с помощью полоски миллиметровой бумаги, прикрепляемой к капилляру с помощью пластилина). Таким образом,

$$\Delta T=\frac{\pi d^2\Delta h}{4V_0}T_0.$$

б) Для расчета энергии электрического тока формулу $W=U^2t/R$ использовать нельзя, так как не известно значение сопротивления

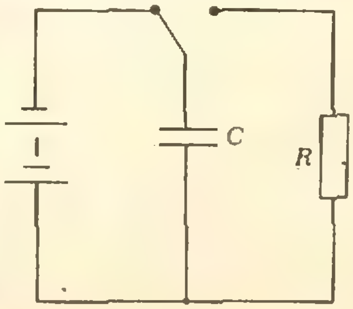


Рис. 4.

резистора R и нет секундомера. С этой целью нужно зарядить конденсатор известной емкости C до известного напряжения U и разрядить его на резистор (рис. 4), опущенный в термостат с жидкостью, причем этот процесс следовало повторить n раз. Тогда энергия электрического тока

$$W = n\frac{CU^2}{2}.$$

в) Опуская резистор в термостат с водой, а затем с жидкостью с неизвестной удельной теплоемкостью, разряжаем конденсатор определенное число раз и записываем для каждого случая закон сохранения энергии:

$$n_1CU^2/2 = C_т\Delta T_1 + c_в\varrho_в V_в\Delta T_1,$$
$$n_2CU^2/2 = C_т\Delta T_2 + c_x\varrho_x V_x\Delta T_2,$$

где $c_в$, $\varrho_в$, $V_в$ — удельная теплоемкость, плотность и объем воды в термостате, c_x, ϱ_x, V_x — соответствующие параметры неизвестной жидкости, C_T — теплоемкость термостата.

Для упрощения можно подобрать такие значения n_1 и n_2, чтобы изменения температуры ΔT_1 и ΔT_2 были одинаковыми в обоих опытах ($\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$). Можно также наливать в термостат одинаковые объемы жидкости ($V_в = V_x = V_ж$). Тогда, исключая теплоемкость термостата, для неизвестной удельной теплоемкости жидкости получаем

$$c_x = c_в\frac{\varrho_в}{\varrho_x} - \frac{CU^2/2(n_1 - n_2)}{V_ж\Delta T\varrho_x}.$$

Однако (в связи с тем, что добиться одинакового повышения температуры не так просто) целесообразнее задать одинаковую энергию электрического тока, то есть одинаковое число переключений n. В этом случае

$$c_x = c_в\frac{\varrho_в}{\varrho_x} + \frac{nCU^2/2}{\varrho_x V_ж\Delta T_2} - \frac{nCU^2/2}{\varrho_в V_ж\Delta T_1}.$$

Оба способа считались верными, если давали правильную оценку удельной теплоемкости неизвестной жидкости (спирта).

г) Для оценки оптимального числа переключений ($n = 1$ — явно мало, $n > 100$ — явно много) полезно было оценить время заметного остывания жидкости в термостате, то есть теплоотдачу в окружающее пространство. Кроме того, важно было оценить время разрядки конденсатора (зная его емкость и сопротивление резистора), чтобы определить необходимую частоту переключения конденсатора.

При выполнении этого задания лучшие результаты показали *Г. Баранаускас* (Шяуляй), *А. Король* (Новокузнецк) и *С. Орлов* (Москва).

Характерные недочеты: пренебрежение теплоемкостью термостата, однократная разрядка конденсатора, а также недостаточное перемешивание жидкости в сосуде.

Задание 2

Определите ЭДС источника тока.

Оборудование: источник тока с неизвестной ЭДС, источник тока с известной ЭДС, спираль из нихромовой проволоки, неградуированный чувствительный прибор для измерения тока, соединительные провода.

Трудность данной работы заключалась в невозможности производить абсолютные отсчеты силы тока, а также в том, что гальванометр без шунта нельзя было подключать к источнику тока. Для шунтирования гальванометра использовалась небольшая часть спирали (другая часть использовалась как добавочное сопротивление).

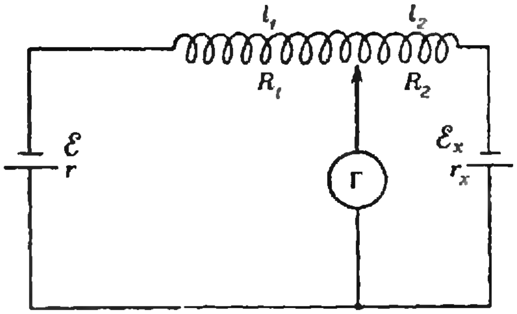


Рис. 5.

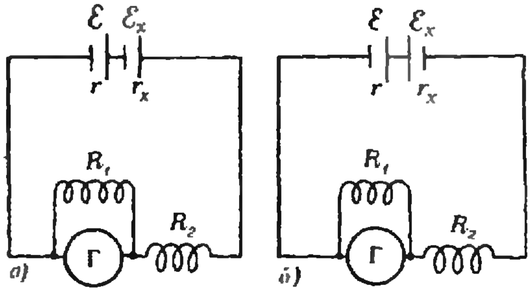


Рис. 6.

Простейший способ выполнения задания заключался в составлении двух схем: с последовательным и встречным соединением источников тока (рис. 5). Из закона Ома, записанного для этих цепей:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_x = I_1\left(r + r_x + \frac{R_1R_г}{R_1 + R_г} + R_2\right),$$
$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_x = I_2\left(r + r_x + \frac{R_1R_г}{R_1 + R_г} + R_2\right),$$

получаем

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_x}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_x}.$$

Абсолютные значения силы тока нам не известны, но в формулу входит отношение сил токов $I_1/I_2 = k$, которое можно определить по показаниям гальванометра. Тогда

$$\mathcal{E}_x = \frac{k-1}{k+1}\mathcal{E} = \mathcal{E}\left(1 - \frac{2}{k+1}\right).$$

Для повышения точности измерений надо было подобрать шунт таким образом, чтобы при последовательном соединении источников тока стрелка гальванометра отклонялась на всю шкалу.

Ученики, которые не смогли найти этот путь решения задачи, подключали прибор последовательно к первому источнику тока, затем ко второму, получали уравнения со многими неизвестными и были вынуждены делать различные пренебрежения, как обоснованные: $R_1 \ll R_2$, так и необоснованные: $r = r_x$ или $r \ll R$ и $r_x \ll R$.

Интересный способ измерения ЭДС источника (рис. 6) предложил *А. Абанов* (Красноярск). Перемещением скользящего контакта он добивался того, чтобы сила тока через гальванометр была равна нулю (то есть использовал гальванометр как «нуль-прибор»). Отсюда

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}-I(R_1+r)=0,\\&\mathcal{E}_x-I(R_2+r_x)=0,\end{aligned}\Rightarrow \mathcal{E}_x=$$

$$=\mathcal{E}\frac{R_2+r_x}{R_1+r}=\mathcal{E}\frac{R_2/R_1+r_x/R_1}{1+r/R_1}.$$

Считая $r \ll R_1$ и $r_x \ll R_1$, получаем выражение для расчета $\mathcal{E}_x$:

$$\mathcal{E}_x=\mathcal{E}\frac{R_2}{R_1}=\mathcal{E}\frac{l_2}{l_1}=\mathcal{E}\frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 — число витков спирали на участках длиной l_1 и l_2. Однако в данном случае этот метод давал неправильные результаты, так как внутренние сопротивления источников тока были сравнимы с внешним сопротивлением R_1.

•

10 класс

Задание 1

Определите ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

Оборудование: исследуемый источник тока, источник тока с известной ЭДС и известным внутренним сопротивлением, спираль из нихромовой проволоки, чувствительный неградуированный прибор для измерения силы тока, соединительные провода.

Первая часть этого задания ничем не отличается от второго задания для 9 класса.

Для измерения неизвестного внутреннего сопротивления источника тока r_x гальванометр с шунтом (R_1) и добавочным сопротивлением (R_2) следовало подключить сначала к исследуемому источнику, затем к известному:

$$I_3=\frac{\mathcal{E}_1}{r_x+\dfrac{R_г R_1}{R_г+R_1}+R_2},$$

$$I_4=\frac{\mathcal{E}}{r+\dfrac{R_г R_1}{R_г+R_1}+R_2}.$$

Отсюда, разумно пренебрегая сопротивлением $R_г R_1/(R_г+R_1)$ (так как оно много меньше R_2), находится искомая величина r_x.

Прямой способ одновременного определения r_x и $\mathcal{E}_x$ предложил *А. Гниловской* (Ленинград). Подключая к известному источнику гальванометр с шунтом сначала без добавочного сопротивления, а затем с добавочным сопротивлением R, таким, чтобы показания гальванометра во втором случае были в 2 раза меньше, чем в первом: $I_2=I_1/2$, получаем, что $R=r$ (так как $R_г \ll R$). Теперь, зная значение сопротивления R, подключаем гальванометр с шунтом и с добавочным сопротивлением R, а также без него к неизвестному источнику:

$$I_2'=\frac{\mathcal{E}_x}{r_x+R},\quad I_1'=\frac{\mathcal{E}_x}{r_x},$$

откуда

$$r_x=\frac{I_2}{I_1-I_2}R,\quad \mathcal{E}_x=I_1 r_x.$$

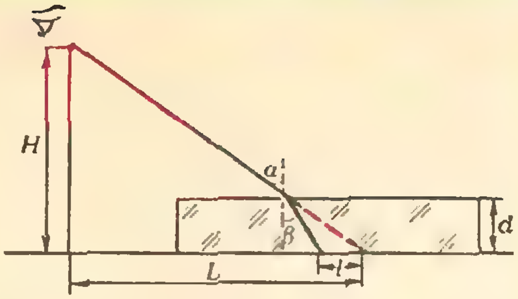


Рис. 7.

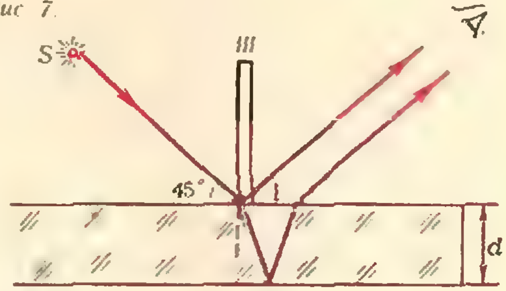


Рис. 8.

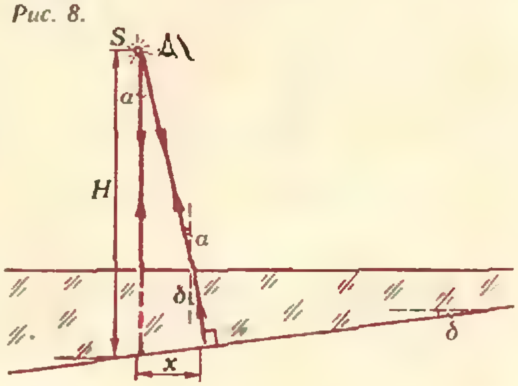


Рис. 9.

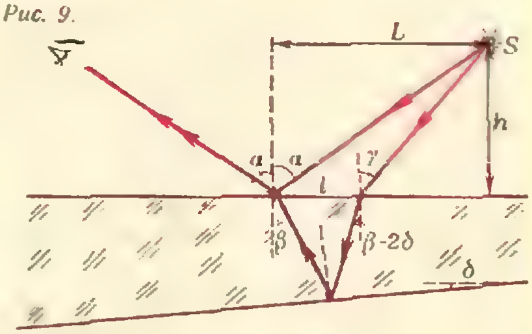


Рис. 10.

Для определения $\mathcal{E}_1$ необходимо знать абсолютное значение силы тока I_1. С этой целью нужно проградуировать гальванометр, зная, что при полном отклонении прибора без добавочного сопротивления, подключенного к известному источнику, сила тока равна $I=\mathcal{E}/r$.

Задание 2

1) Определите различными способами показатель преломления пластинки.

2) Оцените угол между плоскостями пластинки (ее клиновидность) и укажите направление ребра клина.

Оборудование: исследуемая пластинка, лампочка с батарейкой, миллиметровая бума-

га, измерительная линейка, кусочек пластилина.

Самым точным способом определения показателя преломления исследуемой пластинки оказался «школьный» способ. Пластинка ставилась на миллиметровую бумагу и совмещением параллельных линий сетки, отстоящих друг от друга на 5 мм, находился ход лучей. Заменяя угловые измерения линейными, можно было достигнуть погрешности измерений, не превышающей 5%.

Другой способ, приводящий к погрешностям до 10%, заключался в следующем: две параллельные линии, расстояние между которыми было $l=2$ см, рассматривались через пластинку так, чтобы одна линия совместилась с другой (рис. 7). Измеряя расстояния H, L, l и d, несложно рассчитать искомый показатель преломления $n=\sin\alpha/\sin\beta$.

Третий способ, предложенный учениками, заключался в наблюдении светлой полоски за ширмой *Ш*, получаемой вследствие отражения света от двух поверхностей пластинки (рис. 8). Измеряя расстояние l, можно рассчитать показатель преломления вещества пластинки. Этот способ годится и для случая, когда нижняя поверхность пластинки зачернена и поэтому первые два способа не применимы.

Предлагались и другие способы, но по точности измерений они уступали описанным выше.

Наибольшие трудности вызвала вторая часть задания. Опишем два способа ее выполнения.

Первый, наиболее рациональный способ, предложенный *А. Алексеевым* (Ленинград), *А. Буриченко* (Новосибирск) и *М. Савровым* (Азов), заключается в следующем. Лампочка располагается около глаза на высоте H от пластинки. Если смотреть на пластинку в вертикальном направлении, видно два изображения нити лампочки. Положив под пластинку полоску миллиметровой бумаги и отметив на ней две точки на расстоянии x друг от друга, можно подобрать такую высоту H, с которой два изображения лампочки будут находиться на заданном расстоянии. Зная показатель преломления вещества пластинки n, можно оценить угол δ между плоскостями пластинки и указать направление ребра клина (рис. 9):

$$\alpha\approx\frac{x}{H},\ \alpha=n\delta\Rightarrow\delta\approx\frac{x}{nH}.$$

Второй способ, предложенный *В. Банковым* (Алексин) и *М. Дьячковым* (п. Черноголовка Московской обл.), основан на наблюдении изображений светящейся нити лампочки после отражения от верхней и нижней граней. При повороте пластинки расстояние между изображениями лампочки изменяется от нуля до максимального значения. Положение пластинки при максимальном или минимальном отклонениях между изображениями сразу же позволяет сделать вывод о положении ребра клина и о том, в каком месте толщина пластинки максимальна, а в каком минимальна. Расчет же угла δ удобнее проводить при совмещении обоих изображений (рис. 10). Измеряя расстояния h, l и L, можно рассчитать искомый угол δ

Призеры XVII Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Леонтьева О. (Ленинград, с. ш. № 298),
Пентус М. (Таллин, с. ш. № 1),
Скуиньш А. (Рига, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Абакумов Е. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Богомольная А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Игнатьев К. (Москва, с. ш. № 2),
Лев М. (Свердловск, с. ш. № 130),
Назаров Ф. (Ленинград, с. ш. № 239),
Этингоф П. (Киев, с. ш. № 145);

по 10 классам —

Бриталс Я. (Рига, с. ш. № 1),
Жуков И. (Ленинград, с. ш. № 239),
Парновский Л. (Львов, с. ш. № 52),
Семенов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Черанс К. (Рига, с. ш. № 1).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Алексеев Р. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Басов О. (п. Владимир-30 Владимирской обл.),
Батюта С. (п. Немешаево Киевской обл.),
Биргер А. (Иваново, с. ш. № 6),
Иванов Л. (Саратов, с. ш. № 13),
Леонов А. (Алма-Ата, РФМШ),
Малеванец А. (Киев, ФМШ при КГУ),
Раджюнас М. (Вильнюс, с. ш. № 23);

по 9 классам —

Астрелин А. (Новосибирск, с. ш. № 121),
Бураго А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Гочев Г. (Дубна, с. ш. № 9),
Грундмане Д. (Рига, с. ш. № 1),
Дуйсекулов М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Кабанов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Оридорога Л. (Донецк, с. ш. № 64),
Ртищев А. (Фрунзе, с. ш. № 61),
Струков С. (Воронеж, с. ш. № 85),
Хрычиков В. (Севастополь, с. ш. № 24);

по 10 классам —

Буриченко В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),

Виннер Г. (Свердловск, с. ш. № 9),
Ворожейкин В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Кохась К. (Ленинград, с. ш. № 239),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Родионов А. (Москва, с. ш. № 444),
Садэтов С. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 14),
Седола С. (Рига, с. ш. № 1),
Харитонов Р. (Николаев, с. ш. № 38).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Атаманчук Ю. (п. Усть-Юган Тюменской обл.),
Бадрин Е. (Рязань, с. ш. № 8),
Дворцовой Д. (Минск, с. ш. № 19),
Есипова Т. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Маринец Ю. (Львов, с. ш. № 11),
Святодух И. (Красноармейск Донецкой обл., с. ш. № 3),
Троицкий В. (Южно-Сахалинск, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Ведерников А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Виксна Ю. (Алуксне, с. ш. № 1),
Гараев М. (Физули, с. ш. № 2),
Глуховский Л. (Москва, с. ш. № 842),
Кангро Р. (Таллин, с. ш. № 1),
Ковалевский А. (Коммунарск, с. ш. № 7),
Маргвелашвили Г. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Мисник С. (Воронеж, с. ш. № 62),
Набиев С. (Алма-Ата, РФМШ),
Плакунова Е. (Горький, с. ш. № 40),
Рейсонс Э. (Рига, с. ш. № 1),
Сергиенко А. (Североморск, с. ш. № 12),
Харлап С. (Гомель, с. ш. № 12),
Царин Ю. (Харьков, с. ш. № 116),
Чернышев С. (Александров, с. ш. № 5);

по 10 классам —
Айнсаар Т. (Тарту, с. ш. № 10),
Арабидзе В. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Байбородин О. (Сыктывкар, с. ш. № 1),
Булавас В. (Паневежис, с. ш. им. Бальчикониса),
Васильченко Е. (Алексин, с. ш. № 3),
Гаврилов С. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Зорько О. (Витебск, с. ш. № 31),
Итенберг И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Кноп К. (Одесса, с. ш. № 100),
Кузнецов Д. (Горький, с. ш. № 36),
Марголин Г. (Калинковичи, с. ш. № 1),
Мисник В. (Кишинев, с. ш. № 37),
Сапегин И. (Пенза, с. ш. № 29),
Стаховский В. (п. Капустин Яр Астраханской обл., с. ш. № 231),
Судаков А. (Ленинград, с. ш. № 8),
Тупайло С. (Киев, ФМШ при КГУ).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Григорьев Г. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ);

по 9 классам —
Абаков А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Баранаускас Г. (Шяуляй, с. ш. № 5),
Дешковский А. (Барановичи, с. ш. № 15),
Каральник В. (Алма-Ата, РФМШ);

по 10 классам —
Алексеев А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Дьячков М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Иваненко Т. (Киев, с. ш. № 145),
Каледин Д. (Москва, с. ш. № 728),
Меньков В. (Мончегорск, с. ш. № 3),
Тепляев А. (Ленинград, с. ш. № 524);

по 9 классам —
Брезгунов А. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Закревский Л. (Минск, с. ш. № 50),
Король А. (Новокузнецк, с. ш. № 7),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Паршин Н. (Пенза, с. ш. № 6),
Потеряйко И. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Приходько В. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 14),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1);

по 10 классам —
Амшинский С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Бирзвалкс В. (Рига, с. ш. № 1),
Буриченко А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Гниловской А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Кулябин К. (Челябинск, с. ш. № 127),
Савров М. (Азов, с. ш. № 6),
Фатьянов О. (Курск, с. ш. № 6).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Зеленюк А. (Здолбунов, с. ш. № 6),
Линдунен И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);
Лобода А. (Прокопьевск, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Воротнев П. (Ленинград, с. ш. № 239),
Галочкин Д. (Днепропетровск, с. ш. № 15),
Кузницын К. (Киров, с. ш. № 16),
Макаров Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Мусаелян К. (Ереван, с. ш. № 55),
Писарев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —
Аристов Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Бруенков Е. (Коммунарск, с. ш. № 22),
Виниченко В. (Ворошиловград, с. ш. № 24),
Долгополов С. (Пермь, с. ш. № 8),
Коба И. (Запорожье, с. ш. № 28),
Кондратьев С. (Кострома, с. ш. № 32),
Пивинский А. (Минск, с. ш. № 50),
Подоба В. (Харьков, с. ш. № 9),
Стефанов М. (Москва, с. ш. № 1).

XVII Всесоюзная олимпиада по математике

8 класс

3. Пусть O — точка внутри треугольника XYZ.
1-е доказательство. Один из углов XOA, AOZ, ZOC, COY, YOB, BOX не меньше 60° (рис. 1). Пусть, например, $\widehat{XOA} \geqslant 60°$. Применяя лемму *«Если точка O лежит вне* Окр (A, R), $X \in$ Окр (A, R) *и* $\widehat{XOA} \geqslant 60°$, *то* $|AO| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} R$» (докажите ее!), получаем $|AO| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}|AX|$, то есть $O \in$ Кр $\left(A, \frac{2}{\sqrt{3}}|AX|\right)$.

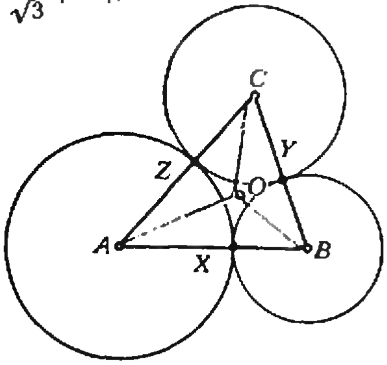


Рис 1.

2-е доказательство. Один из углов AOB, BOC, COA не меньше 120°. Пусть, например, $\widehat{AOB} \geqslant 120°$. Используя теорему косинусов, получаем

$$|AB|^2 = |AO|^2 + |OB|^2 - 2|AO| \cdot |OB| \times$$
$$\times \cos \widehat{AOB} \geqslant |AO|^2 + |OB|^2 + |AO| \cdot |OB| =$$
$$= (|AO| + |OB|)^2 - |AO| \cdot |OB| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{3}{4}\ (|AO| + |OB|)^2.$$

Отсюда $|AO| + |OB| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}|AB| = \frac{2}{\sqrt{3}} \times |AX| + \frac{2}{\sqrt{3}}|XB|$. Следовательно, $|AO| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}|AX|$ или $|OB| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}|XB|$, то есть $O \in$ Кр $\left(A, \frac{2}{\sqrt{3}}|AX|\right)$ или $O \in$ Кр $\left(B, \frac{2}{\sqrt{3}}|BX|\right)$.

4. Предположим, что различные натуральные числа a, b, c, d заключены между n^2 и $(n+1)^2$ и $ab = cd$. Пусть a — наименьшее из чисел a, b, c, d.
1-е доказательство. Обозначим через u наибольший общий делитель чисел a и c. Положим $v = \frac{a}{u}$, $p = \frac{c}{u}$. Поскольку $cd = pud$ делится на a и p и a взаимно просты, ud делится на a. Положим $q = \frac{ud}{a}$. Тогда $a = uv$, $b = pq$, $c = up$, $d = vq$. Из $a<c$ и $a<d$ следует $v<p$ и $u<q$. Тогда $p \geqslant v+1$ и $q \geqslant u+1$. Из $uv = a \geqslant n^2$ следует $u + v \geqslant 2\sqrt{uv} \geqslant 2n$. Если $p > v+1$ или $q > u+1$, то $b = pq > (v+1)(u+1) = uv + (u+v) + 1 \geqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$; значит, $p = v+1$ и $q = u+1$. Если $uv > n^2$ или $u + v > 2n$, то опять $b = pq \geqslant (v+1)(u+1) = uv + (u+v) + 1 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$; значит, $uv = n^2$ и $u + v = 2n$, откуда $u = v = n$. И мы получили $c = d$ — противоречие.

2-е доказательство. $\frac{b}{d} = \frac{c}{a} > 1$. Пусть $\frac{b}{d} = \frac{c}{a} = \frac{r}{s}$, где $\frac{r}{s}$ — несократимая дробь. Значит, d и a делятся на s; поэтому $d - a$ делится на s; из $a<d$ следует $d - a \geqslant 1$; поэтому $d - a \geqslant s$, $d \geqslant a + s$. Из $a \geqslant n^2$ следует $d \geqslant n^2 + s$. С другой стороны, $\frac{r}{s} > 1$; поэтому $r > s$, $r \geqslant s+1$, $\frac{r}{s} \geqslant 1 + \frac{1}{s}$. Значит,

$$1 + \frac{1}{s} \leqslant \frac{r}{s} = \frac{b}{d} < \frac{(n+1)^2}{n^2+s} \qquad (1)$$

Умножив обе части неравенства (1) на $s(n^2+s)$, получаем $n^2 - 2ns + s^2 \leqslant 0$, $s = n$. Тогда из (1) $\frac{b}{d} = \frac{c}{a} = \frac{n+1}{n}$. Если $a > n^2$, то $a = n^2 + n$; тогда $d = n^2 + 2n$, откуда $b = \frac{n+1}{n}(n^2+2n) = (n+1)(n+2) > (n+1)^2$; значит, $a = n^2$. Если $d = n^2 + 2n$, то опять $b > (n+1)^2$; значит, $d = n^2 + n$. Поэтому $c = \frac{n+1}{n} \cdot n^2 = n^2 + n = d$ — противоречие.

5. Указание. Если a^n делится на b^n $(a, b \in \mathbf{N})$, то a делится на b. Возведите m^k и n^k в степень n.

6. Нет. Доказательство. Рассмотрим все $2^7 = 128$ семибуквенных комбинаций из букв языка племени Абба. Из них $3 \cdot 2^3 = 24$ начинаются с четырехбуквенных, $10 \cdot 2^2 = 40$ — с пятибуквенных и $30 \cdot 2^1 = 60$ — с шестибуквенных слов словаря этого языка. По условию все эти комбинации различны и не являются словами. Значит семибуквенных слов не больше, чем $128 - (24 + 40 + 60) = 4$.

9 класс

1. $\{(0;\ 0),\ (2+\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2}),\ (2-\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2})\}$.
Указание. Вычтите из одного уравнения системы другое и исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$.

2. Пусть a — первая цифра числа K. Тогда $\widetilde{K} \leqslant (a+1)10^{n-1}$. Положим $L = a\underbrace{44\ldots4}_{n-2}5$. Если $K < L$, то $\widetilde{K} = a \cdot 10^{n-1}$; в этом случае

$\widetilde{K}<K<\frac{18}{13}K$. Если $K>L$, то $\widetilde{K}=(a+1)10^{n-1}$; в этом случае

$$\frac{\widetilde{K}}{K}<\frac{(a+1)10^{n-1}}{L}=$$

$$=\frac{(a+1)10^{n-1}}{a\cdot 10^{n-1}+\frac{4}{9}(10^{n-1}-1)+1}<$$

$$<\frac{(a+1)10^{n-1}}{\left(a+\frac{4}{9}\right)10^{n-1}}=1+\frac{5}{9a+4}<$$

$$<1+\frac{5}{13}=\frac{18}{13}.$$

3. Указание. $S_{ABF}=2S_{BDF}$, $S_{ABE}=2S_{ADE}$, $S_{AEF}<S_{ABE}$.

4. а) и б) Нет. *Доказательство.* а) Если бы последовательность (α_n) была периодической, то есть для некоторого p и для всех $n>n_0$ было верно $\alpha_{n+p}=\alpha_n$, то была бы периодической и последовательность (α_{2k+1}), так как для всех $k>\frac{n_0}{2}$ было бы верно $\alpha_{2k+1+2p}=\alpha_{2k+1}$ (было бы верно, конечно, и $\alpha_{2k+1+p}=\alpha_{2k+1}$, но это равенство не всегда доказывает периодичность последовательности (α_{2k+1}) — почему?). Но $[(\sqrt{10})^{2k+1}]=[10^k\cdot\sqrt{10}]$, то есть (α_{2k+1}) есть последовательность цифр десятичного разложения иррационального числа $\sqrt{10}$ — противоречие! б) Если бы последовательность (β_n) была периодической, то периодическими были бы и последовательности (β_{2k+1}) и (γ_k), где

$$\gamma_k=\begin{cases}1, & \text{если } \beta_{2k+1} \text{ нечетно,}\\ 0, & \text{если } \beta_{2k+1} \text{ четно.}\end{cases}$$

Поскольку β_{2k+1} — это последняя цифра числа $[(\sqrt{2})^{2k+1}]=[2^k\cdot\sqrt{2}]$,

$$[2^k\cdot\sqrt{2}]-2[2^{k-1}\cdot\sqrt{2}]=\gamma_k.$$

Отсюда

$$\frac{\gamma_k}{2^k}=\frac{[2^k\cdot\sqrt{2}]}{2^k}-\frac{[2^{k-1}\cdot\sqrt{2}]}{2^{k-1}}.$$

Суммируя эти равенства для $k=1, 2, \ldots, n$ и учитывая, что $[\sqrt{2}]=1$, $\beta_1=1$, $\gamma_0=1$, получаем

$$\gamma_0+\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2^2}+\ldots+\frac{\gamma_n}{2^n}=\frac{[2^n\cdot\sqrt{2}]}{2^n}.$$

Из $0<2^n\cdot\sqrt{2}-[2^n\cdot\sqrt{2}]<1$ следует

$$0<\sqrt{2}-\frac{[2^n\cdot\sqrt{2}]}{2^n}<\frac{1}{2^n}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{[2^n\cdot\sqrt{2}]}{2^n}=\sqrt{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\gamma_0+\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2^2}+\ldots+\frac{\gamma_n}{2^n}\right)=\sqrt{2}. \quad (2)$$

Если последовательность (γ_n) периодична, то левая часть равенства (2) рациональна (докажите!); следовательно, рационально и $\sqrt{2}$ — противоречие.

5. Пусть a — количество пар, (m, m) и (m, g) — количества мальчиков в левой колонне, стоящих в паре, соответственно, с мальчиками и девочками, (g, m) и (g, g) — количества девочек в левой колонне, стоящих в паре, соответственно, с мальчиками и девочками. Из условий задачи

$$\begin{cases}(m, m)+(m, g)=(g, m)+(g, g)=\frac{a}{2},\\ (m, m)+(g, m)=(m, g)+(g, g)=\frac{a}{2},\\ (m, g)+(g, m)=(m, m)+(g, g)=\frac{a}{2}.\end{cases}$$

Отсюда $(m, g)=(g, m)=(m, m)=(g, g)=\frac{a}{4}$.

Значит, $a=4(m, m)$. Поскольку число детей в группе равно $2a$, оно делится на 8.

6. $(3+2\sqrt{2})$ см. *Решение.* Допустим, что прямоугольник, изображенный на рисунке 2, удовлетворяет условию задачи: $S_1\geqslant 1$, $S_2\geqslant 1$, $S_3\geqslant 2$, $S_4\geqslant 1$. Легко проверить, что $S_1\cdot S_4=S_2\cdot S_3$. Отсюда $S_1+S_4\geqslant 2\sqrt{S_1\cdot S_4}=2\sqrt{S_2\cdot S_3}=2\sqrt{2}$. Следовательно, $S_1+S_2+S_3+S_4\geqslant 1+2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$. Значит, длины незаданных сторон прямоугольника не меньше, чем $3+2\sqrt{2}$. С другой стороны, прямоугольник со сторонами 1 см и $(3+2\sqrt{2})$ см удовлетворяет условиям задачи ($a=2-\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}+1$).

7. Введем обозначения: $a=|\overrightarrow{OA}|$, $b=|\overrightarrow{OB}|$, $c=|\overrightarrow{OC}|$, $\alpha=\widehat{BOC}$, $\beta=\widehat{COA}$, $\gamma=\widehat{AOB}$. Пусть также $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — единичные векторы, сонаправленные, соответственно, с векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ (рис. 3). Тогда $S_A=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$, $S_B=\frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta$, $S_C=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$ и после сокращения на $\frac{1}{2}abc$ равенство, которое надо доказать, принимает вид

$$\sin\alpha\cdot\vec{e}_1+\sin\beta\cdot\vec{e}_2+\sin\gamma\cdot\vec{e}_3=\vec{0}$$

Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OD}=\sin\beta\cdot\vec{e}_2$ (значит, $|OD|=\sin\beta$) и проведем через точ-

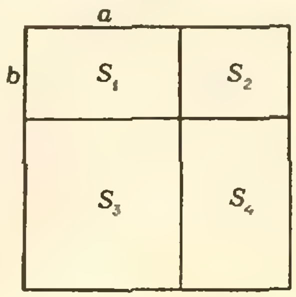


Рис. 2.

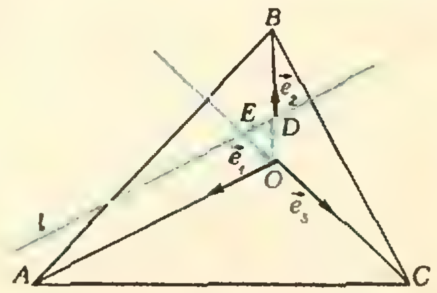


Рис. 3.

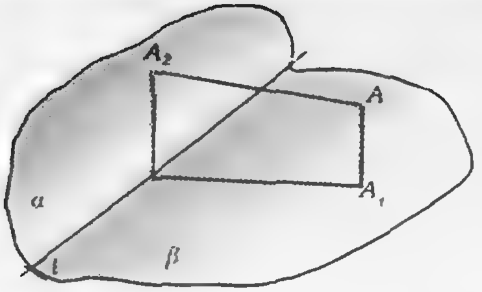


Рис. 4.

ку D прямую l, параллельную (AO). Пусть $(OC) \cap l = E$. Тогда $\widehat{OED} = \widehat{AOE} = \pi - \beta$ и $\widehat{EOD} = \pi - \alpha$. По теореме синусов для треугольника ODE

$$|ED| = \sin(\pi - \alpha) \cdot \frac{|OD|}{\sin(\pi - \beta)} = \sin \alpha,$$

таким образом, $\overrightarrow{DE} = \sin \alpha \cdot \vec{e}_1$. Аналогично (из $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ следует $\widehat{EDO} = \pi - \gamma$), $\overrightarrow{EO} = \sin \gamma \cdot \vec{e}_3$. Требуемое равенство принимает теперь вид $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EO} = \vec{0}$.

10 класс

1. Из условия $\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \beta) = \sin \beta \times \times (\cos \alpha - \sin \beta)$. Если $\sin \alpha > \cos \beta$ и $\cos \alpha > \sin \beta$, то $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha > \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$ — противоречие. Аналогично получаем противоречие при $\sin \alpha < \cos \beta$ и $\cos \alpha < \sin \beta$. Значит, $\sin \alpha = \cos \beta$ (и $\cos \alpha = \sin \beta$), откуда $\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$, что, ввиду $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$, влечет $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

3. Через α и β обозначим плоскости, на которые проектируется тетраэдр. Если они параллельны, утверждение очевидно. Если нет, то пусть l — линия пересечения этих плоскостей. Плоскость AA_1A_2 перпендикулярна прямой l (рис. 4): значит, $l \perp A_1A_2$. Аналогичные утверждения справедливы и для точек B, C, D. Значит, если повернуть плоскость α вокруг прямой l так, чтобы она совпала с плоскостью β, то прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 будут лежать в одной плоскости и будут перпендикулярны одной прямой l, лежащей в той же плоскости. Следовательно, эти прямые станут параллельными.

6. Допустим, что $d_0 < \frac{\sqrt{3}}{2} \min(d_1, d_2, d_3)$. Тогда $d_0 < \frac{\sqrt{3}}{2} d_1 < d_1$; следовательно, $[DF]$ не является наибольшей стороной $\triangle ADF$; значит, $\angle BAC$ — острый. Пусть, для определенности, $d_1 = |AD|$. Проведем в $\triangle ADF$ высоту DH; тогда $|DH| = d_1 \cdot \sin \widehat{BAC}$; так как $|DH| \leqslant |DF| \leqslant d_0 < \frac{\sqrt{3}}{2} d_1$, $\widehat{BAC} < 60^\circ$. Аналогично получаем $\widehat{ABC} < 60^\circ$ и $\widehat{BCA} < 60^\circ$ — противоречие. В случае равенства $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \min(d_1, d_2, d_3)$, рассуждая как и выше, получим $\widehat{BAC} \leqslant 60^\circ$, $\widehat{ABC} \leqslant 60^\circ$, $\widehat{BCA} \leqslant 60^\circ$, откуда $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$, то есть треугольник ABC — равносторонний. Теперь нетрудно установить, что $|DF| = |DE| = |EF| = d_0$ и $[DF] \perp [AC]$, $[EF] \perp [BC]$, $[DE] \perp [AB]$, то есть треугольник DEF — также равносторонний и его стороны перпендикулярны сторонам исходного треугольника.

8. Если для некоторого n верно $v_n = v_{n+1}$, то любой отрезок разложения числа a длины n имеет однозначное продолжение до отрезка длины $n+1$; тогда последовательность цифр в разложении числа a является периодической (почему?), то есть a является рациональным. Рассуждая от противного, допустим, что a — не рациональное. Тогда $v_n \neq v_{n+1}$ для любого n. Из того, что $v_n \leqslant v_{n+1}$ для всех n, следует $v_1 < v_2 < \ldots < v_{n-1} < v_n$; тогда $v_n > v_{n-1} + 1 > > v_{n-2} + 2 > \ldots > v_1 + (n-1) = 10 + (n-1) = = n - 9$ — противоречие.

Старинная восточная притча
(см. с. 44)

— Возьмите моего верблюда, — предложил мудрец.

Братья дома легко разделили двадцать верблюдов пополам, на четыре и на пять. Старший брат получил 10, средний получил 5, а младший — 4 верблюда. При этом один верблюд $(10 + 4 + 5 = 19)$ остался. Раздосадованные братья вернулись к мудрецу и пожаловались:

— О мудрец, опять мы не выполнили волю отца! Вот этот верблюд — лишний.

— Это не лишний, — сказал мудрец, — это мой верблюд. Верните его мне и идите домой.

Неинерциальные системы отсчета
(см. «Квант» № 10)

1. Используя систему отсчета, движущуюся с ускорением (рис. 5), замечаем, что момент силы инерции относительно оси O возможного поворота не должен превышать момента силы тяжести: $mah/2 \leqslant mgl/2$, откуда

$$h \leqslant gl/a \approx 1{,}6 \text{ м}.$$

2. В системе, связанной с ракетой, при ее подъеме к силе тяжести добавляется сила инерции, равная $2mg$. Это соответствует эффективному изменению величины ускорения свободного падения до значения $g_{эф} = 3g$ (рис. 6, *а*). Колебания маятника при подъеме ракеты будут происходить с периодом $T_1 = 2\pi\sqrt{l/(3g)}$. При ускоренном падении ракеты сила инерции направлена вверх. Эффективное ускорение свободного падения в этом случае также направлено вверх (!) и равно g (рис. 6, *б*). Маятник будет колебаться «вверх ногами» с периодом $T_2 = 2\pi\sqrt{l/g}$, — таким же, как на Земле.

3. Складывая векторно горизонтальную силу инерции — $m\vec{a}$ и вертикальную силу тяжести $m\vec{g}$, получаем, что эффективное ускорение свободного падения $\vec{g}_{эф}$ направлено под углом к вертикали и по модулю больше g как при ускорении, так и при торможении поезда (рис. 7). Поэтому период колебаний маятника в электричке на отдельных участках уменьшается, и часы в электричке будут «спешить» по сравнению с вокзальными часами.

4. Во вращающейся системе отсчета на каждый элемент стержня длиной Δr действует центробежная сила инерции $\Delta F_{цб} = \Delta m \omega^2 r$, где $\Delta m = m\Delta r/(2l)$ — масса этого элемента,

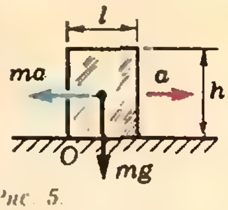


Рис. 5.

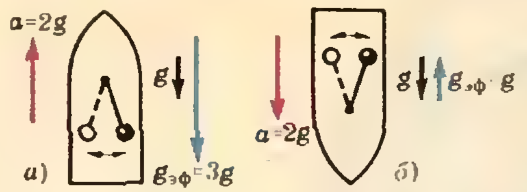


Рис. 6.

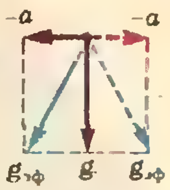


Рис. 7.

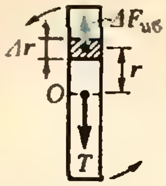


Рис. 8.

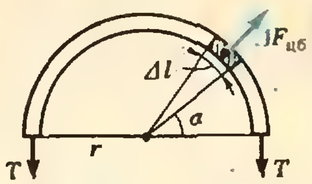


Рис. 9.

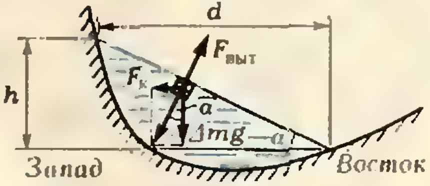


Рис. 10.

а r — расстояние до оси (рис. 8). Центробежная сила инерции, действующая на одну из половин стержня, равна

$$F_{цб}=\int_0^l \frac{m}{2l}\omega^2 r\,dr=\frac{m\omega^2 l}{4}.$$

Эта сила должна быть равна силе натяжения в середине стержня, то есть силе, с которой на эту половину действует другая половина стержня. Таким образом,

$$T_0=m\omega^2 l/4.$$

Аналогично для натяжения стержня в сечении, отстоящем от оси вращения на расстоянии r, получаем

$$T=T_0-\frac{m\omega^2}{2l}\,\frac{r^2}{2}=\frac{m\omega^2}{4l}(l^2-r^2),$$

то есть натяжение в середине максимально, а по мере удаления от оси вращения оно убывает по квадратичному закону.

5. Во вращающейся системе отсчета (рис. 9) на каждый элемент цепочки длины $\Delta l=r\Delta\alpha$ ($r=l/2\pi$ — радиус цепочки, $\Delta\alpha$ угловой размер элемента длины) действует центробежная сила инерции $\Delta F_{цб}=\Delta m\omega^2 r$, направленная по радиусу от центра ($\Delta m=m\Delta l/l$). Найдем суммарную силу инерции, действующую на половину цепочки. Для этого надо сложить проекции сил на направление, перпендикулярное диаметру, соединяющему концы половины цепочки. В результате получаем

$$F_{цб}=\int_0^\pi \frac{m\omega^2 r}{l}\,r\sin\alpha\cdot d\alpha=2mln^2.$$

Эта сила уравновешивается суммой двух сил натяжения, действующих на концы половины цепочки. Следовательно, натяжение цепочки

$$T=mln^2.$$

6. Под действием центробежной силы инерции лезвие начнет двигаться вдоль канавки от оси вращения, а под действием кориолисовой силы оно будет падать в сторону, противоположную направлению вращения.

7. На частицу воды массой Δm действует направленная по горизонтали на запад кориолисова сила

$$F_к=2\Delta m\omega v\sin\varphi,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли. Для частицы, находящейся у поверхности воды (рис. 10), равнодействующая силы тяжести и кориолисовой силы должна быть направлена перпендикулярно поверхности воды. Поэтому поверхность воды наклоняется к горизонту под углом α таким, что

$$\operatorname{tg}\alpha=F_к/(\Delta mg)=\frac{2\omega v}{g}\sin\varphi.$$

Соответственно, разность уровней

$$h=d\operatorname{tg}\alpha=2\omega vd\sin\varphi/g\approx10\ \text{см}.$$

Когда река течет вдоль параллели, сила Кориолиса направлена под углом к горизонту. Однако если параллель не совпадает с экватором, то у кориолисовой силы всегда есть горизонтальная составляющая, и эффект сохраняется. У реки, текущей вдоль экватора, сила Кориолиса направлена вертикально, и берега подмыты одинаково. А вот если река пересекает экватор, то рельеф русла меняется — после пересечения экватора крутым становится противоположный берег. Географы действительно наблюдали это явление.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. Нет. Замечание. Перевернув одну из звездочек, получим центрально-симметричную фигуру (рис. 11).

2. Во-первых, заметим, что каждый шарик на левой чашке тяжелее, чем шарик того же цвета на правой чашке (если бы было не так, то нашлась бы пара шариков таких, что шарик на левой чашке не тяжелее шарика того же цвета на правой чашке; поменяв их местами, мы не нарушили бы положения весов). Если количество шариков на каждой чашке не меньше трех, то, поменяв местами ту пару шариков, у которой разность масс наименьшая, мы не изменим положения весов. Следовательно, шариков на чашках не более, чем по два. Может, очевидно, лежать и по одному шарику. Если же лежит по два шарика, нужно, чтобы разность масс у каждой пары одноцветных шариков была одинакова.

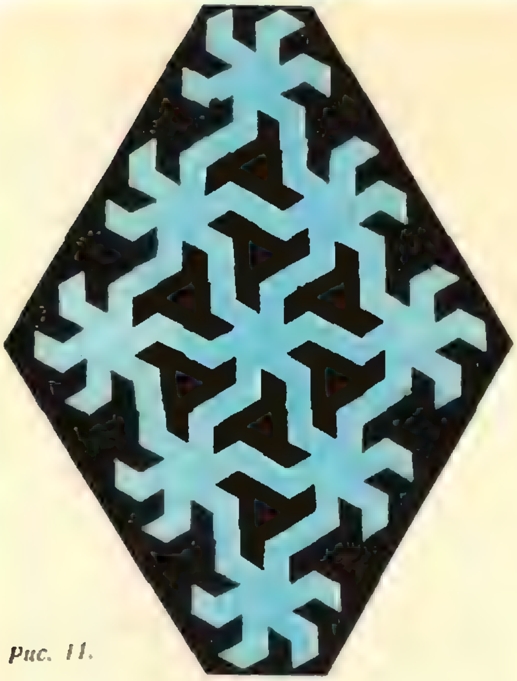


Рис. 11.

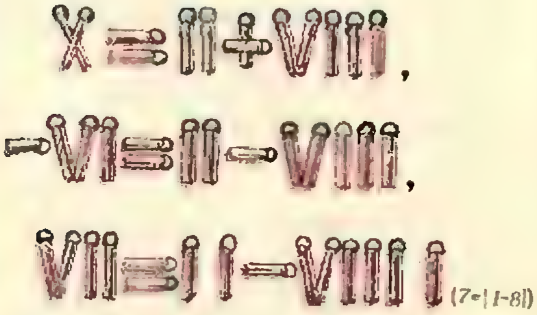


Рис. 12.

3. См. рисунок 12.

4. Заметим, что в вершинах квадрата находятся вершины только одного из прямоугольников, а в других точках квадрата могут находиться вершины только двух прямоугольников. Пусть n — количество прямоугольников, на которые разрезали квадрат, m — количество точек квадрата, являющихся вершинами ровно двух прямоугольников. Подсчитаем количество вершин у прямоугольников. С одной стороны оно равно $4n$, с другой — $4+2m$. Отсюда $m=2(n-1)$. Значит, число точек, являющихся вершинами, $(m+4)$, четно.

5. При нагревании ртуть расширится сильнее, чем сталь, поэтому выталкивающая сила уменьшится и шарик опустится.

Перед школьной олимпиадой

(см. «Квант» № 10)

1. За 365 дней. Решение. Обозначим через A количество воды в озере без учета ключей, через B — количество воды, поступающее в день от ключей, через C — дневной рацион слона и через x — искомое число. Тогда $A+B=183C$, $A+5B=5\cdot 37C$, $A+xB=xC$, откуда $B=\frac{1}{2}C$, $A=182\frac{1}{2}C$ и $x=365$.

2. $a^2+b^2+c^2+d^2=(a+b)^2+(a+c)^2+(a+d)^2$.

3. Указание. Докажите, что $(a-b)^2\times q(1-q)=0$.

4. $a=b=c=d=0$, $a=b=c=d=\sqrt{3}$, $a=b=c=d=-\sqrt{3}$.

5. $x=y=z=1$. Указание. Вычтите из суммы первого и третьего уравнений удвоенное второе.

6. 3. Решение. Поскольку $x^2+3x+10>0$ при всех x, данное неравенство можно переписать в виде $|x^2+kx+10|\leqslant x^2+3x+10$. Таким образом, для всех x $(k-3)x\leqslant 0$. Отсюда $k=3$.

7. α — иррациональное. Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos x=1,\\ \sin^2\alpha x=0,\end{cases}$$

имеющей единственное решение, если α — иррациональное.

8. $\{\sqrt[3]{5}\}$. Указание. Заметив, что $0<x<2$, разберите случаи $[x]=0$ и $[x]=1$.

9. 2. Указание. Данное произведение равно $\frac{2(n+1)}{n+2}$.

10. Указание. Докажите, что диагонали делятся точкой пересечения пополам.

11. Указание. Поверните меньшую окружность вокруг точки касания на угол в 60°. Полученная точка пересечения окружностей будет второй вершиной искомого треугольника. Поворот в противоположную сторону даст второе решение.

12. *Две дуги окружностей, стягиваемые хордой AB.* Указание. Угол y (рис. 13) равен $180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=90°+\frac{1}{2}x$, то есть при постоянном x постоянен.

13. Указание. Пусть $\vec{m}_A$, $\vec{m}_B$, $\vec{m}_C$, $\vec{m}_D$ — векторы с началами A, B, C, D и концами в точках пересечения медиан противоположных граней. Выразите эти векторы через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и докажите, что $\frac{3}{4}\vec{m}_A=$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\vec{m}_B=\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\vec{m}_C=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\vec{m}_D.$$

14. Указание. Покажите, что хотя бы одно из них четно.

15. Решение. $2^9+2^{99}=2^9(1+2^{90})=2^9(1+1024^9)=2^9(1+1024^3)(1-1024^3+1024^6)=2^9\cdot 1025\cdot(1-1024+1024^2)(1-1024^3+1024^6)$.

16. Доказательство. Число 10^n-1 делится на 9, а 10^n+1 — не делится.

17. Решение. Как известно, сумма цифр любого целого числа имеет при делении на 9 такой же остаток, как и само число (докажите это). Следовательно, если x — искомое число, то $2x$ и x имеют при делении на 9 одинаковые остатки, то есть $2x-x=x$ делится на 9. В то же время непосредственно проверяется, что все двузначные числа, делящиеся на 9, удовлетворяют условию задачи.

19. 1089. Указание. Искомое число x не больше 1111 (поскольку $9x$ — четырехзначное число), оканчивается на 9 (поскольку $9x$ оканчивается на 1) и делится на 9 (поскольку сумма цифр у x и $9x$ одна и та же).

20. $x=y=1$, $z=2$ и $x=y=2$, $z=1$. Указание. $z=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\leqslant 2$.

21. 6, 7. Указание. Обозначим число цифр числа x^2 через n. Тогда $x^2=k\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}+(x-k)^2$, откуда $x=\underbrace{55\ldots5}_{n-1}+\frac{k+1}{2}$. Поскольку $1\leqslant k\leqslant 8$, $\frac{k+1}{2}\leqslant 4$, и, значит, число цифр в числе x равно $n-1$, то есть на одну меньше, чем в x. Отсюда $x<31$. Непосредственной проверкой находим ответ.

22. Доказательство. Если использовалось не менее десяти красок, то можно выбрать десять разноцветных кубиков; если же использовалось не более девяти красок, то, поскольку кубиков 82, всегда найдется 10 кубиков одного цвета.

23. Указание. Рассмотрите вершины произвольного равностороннего треугольника со стороной 1 м.

24. б) Доказательство. Разность двух чисел делится на k, если оба числа при делении на k имеют одинаковый остаток. Поскольку чисел $k+1$, такие два числа всегда найдутся.

25. Решение. Пусть n — число дипломатов. Повернем стол на 0°, на $\frac{360°}{n}$, ..., на $\frac{360°}{n}(n-1)$ — всего n положений стола. Каждый дипломат окажется сидящим против своей таблички ровно при одном положении стола. Так как число положений равно числу дипломатов и так как при исходном положении («повороте на 0°») ни один дипломат не сидит против своей таблички, найдется некоторое положение стола, при котором два дипломата окажутся сидящими против своих табличек.

26. Доказательство. Спроектируем окружности на одну из сторон квадрата. Проекцией каждой окружности является отрезок, длина которого равна ее диаметру, и сумма длин всех отрезков равна $10/\pi>3$. Значит, некоторая точка стороны квадрата будет покрыта по крайней мере четырьмя проекциями; перпендикуляр, восстановленный к стороне в этой точке, пересечет по крайней мере 4 окружности.

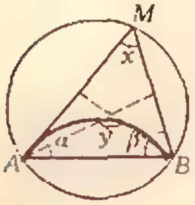


Рис. 13.

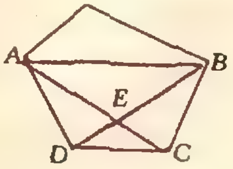


Рис. 14.

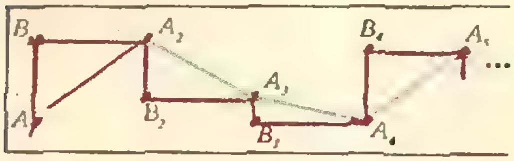
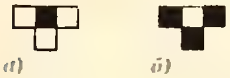


Рис. 15.



а) б)

Рис. 16.

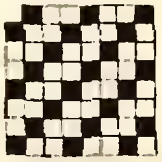


Рис. 17.

27. Доказательство. Для каждой хорды диаметр, проведенный через любую точку меньшей из стягиваемых ею дуг или через любую точку дуги, ей центрально-симметричной, пересекает эту хорду. Длина дуги, стягиваемой хордой, больше длины этой хорды. Таким образом, длина всех таких дуг больше $2\cdot 7\pi=14\pi$ и, значит, некоторая точка окружности окажется покрытой по крайней мере восемью дугами.

28. Доказательство. Построим для каждой из наших 650 точек кольцо с центром в этой точке, ограничиваемое окружностями радиусов 2 и 3. Все эти кольца содержатся в круге радиуса $16+3=19$, и сумма их площадей равна $650(9\pi-4\pi)=3250\pi$, что более, чем в 9 раз больше площади 361π круга радиуса 19. Следовательно, хотя бы одна точка A этого круга покрывается хотя бы десятью кольцами, то есть по крайней мере десять из наших 650 точек лежат на расстоянии между 2 и 3. Значит, такое же кольцо с центром в точке A содержит эти десять точек.

29. Указание. Рассмотрите вершину, в которой записано наибольшее число.

30. Доказательство. Пусть AB — самая длинная диагональ. Тогда из диагоналей AB, AC и BD (рис. 14) можно составить треугольник, так как $|AB|<|AE|+|EB|<<|AC|+|BD|$.

31. $x_1=x_2=\ldots=x_5=0$ и $x_1=x_2=\ldots=x_5=2$. Указание. Предположите, что x_1 — наибольшее из искомых чисел. Тогда из двух последних уравнений $0\geqslant x_4-x_5=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)x_3^2\geqslant 0$, откуда $x_1=x_4$.

32. $x=y=\sqrt{2}/2$. Указание. Если $x>y$, то, поскольку $0\leqslant y<x\leqslant 1$, получим $x^y>x^x>y^x$.

33. Нельзя. Указание. $0+1+2+\ldots+9>44$.

34. Доказательство. Разделим одну сторону квадрата на 22 одинаковые части, а другую — на 2 одинаковые части. Квадрат разделится на 44 прямоугольника. Так как $500:44>11$, хотя бы в одном из них найдется 12 точек. Обозначим их через A_1, A_2, ..., A_{12} слева направо. Ломаная $A_1A_2\ldots A_{12}$ короче ломаной $A_1B_1A_2B_2\ldots B_{11}A_{12}$ (рис. 15), последняя же состоит из 11 вертикальных отрезков, каждый из которых не длиннее 1/22, и 12 горизонтальных отрезков суммарной длины не больше 1/2.

35. Банан. Указание. После любого действия садовника число бананов остается нечетным.

36. а) и б). Нельзя. Указание. В случае а) неизменной остается сумма чисел, а в случае б) — сумма квадратов чисел.

37. Не могут. Доказательство. Введем на плоскости систему координат так, чтобы вершины квадрата, в которых сидят кузнечики, имели координаты (0; 0), (0; 1), (1; 0). При указанных прыжках каждая из координат наших кузнечиков увеличивается или уменьшается на четное число. Таким образом, четность координат оказывается инвариантом. Поэтому попасть в вершину (1; 1) (обе координаты нечетны) кузнечики не могут.

38. Нельзя. Указание. Каждая косточка домино покрывает одну черную и одну белую клетки доски. Вырезаны же две клетки одинакового цвета.

39. Нельзя. Указание. Раскрасьте клетки квадрата в шахматном порядке. Получится одинаковое число черных и белых клеток, и поэтому фигурок, изображенных на рисунке 16, *а*, должно быть столько же, сколько фигурок, изображенных на рисунке 16, *б*. Но тогда общее число клеток в квадрате должно делиться на 8.

40. Нельзя. Указание. Раскрасьте оставшуюся часть доски так, как показано на рисунке 17. В каждый трехклеточный прямоугольник должна входить ровно одна черная клетка. Черных клеток 22, но всего клеток — 63; таким образом, одна черная клетка — лишняя.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 8)

Задание 15 (Н. Плаксин, 1981 г.). Чтобы понять, что творится на доске, надо разобраться, как ходили фигуры прежде. Из всех действующих лиц только два — конь и ферзь d7 одновременно атакуют поля, занимаемые королями. Значит, эти фигуры одинакового цвета и обязательно белого, иначе такой двойной шах невозможен, король f7 —черный, и последний ход сделала белая пешка — **e7:d8К++**. Кроме ферзя d7, еще семь ферзей: c8, b7, a6, a4, c2, g2 и h6, удары которых сфокусированы на поле c6, тоже белые, иначе оба короля одновременно находились бы под шахом. Так как одна белая пешка превратилась в коня, более семи белых ферзей быть не может. Поэтому еще не раскрашенные девять ферзей — черные, разумеется, восемь из них — превращенные.

Задание 16 (Г. Веник, 1922 г.). **1. Cb1!!** Один из самых знаменитых ходов на шахматной доске. Слон, стоящий под ударом, становится под другой удар! Другие ходы слоном не годятся. **1...Кр:b1** (1...Крc3 2. Крb5 Крd4 3. Крc6 Крe5 4. Крd7 Крf4 5. g6 и т. д.) **2. Крb3** и у белых выигранный пешечный эндшпиль: **2...Крc1 3. Крc3 Крd1 4. Крd3 Крe1 5. Крe3 Крf1 6. Крf3 Крg1 7. Крg3 Крh1 8. g6 Крg1 9. Крf4.**

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» с глубоким прискорбием извещают читателей о том, что 29 сентября 1983 года на 96 году жизни скончался член редакционной коллегии, выдающийся советский астроном, бывший директор Главной астрономической обсерватории АН СССР Герой Социалистического Труда академик Александр Александрович Михайлов.

Номер оформили
В. С. Коваль, Н. С. Кузьмина, С. Ф. Лухин,
А. К. Малкин, П. В. Назаров, Н. Е. Смирнова,
Е. К. Тенчурина
Фото Л. П. Вацаускаса, И. Н. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор А. Л. Ипатова

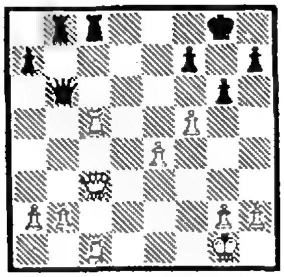
103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 16.09.83. Подписано к печати 17.10.83
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,29. Т-19263
Цена 40 коп. Заказ 2502. Тираж 166149
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

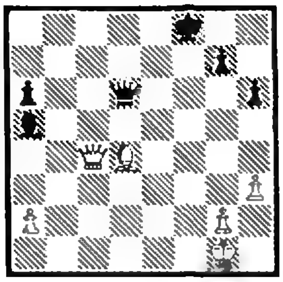
СВЯЗКА

Известно немало комбинационных приемов и мотивов, которые применяют шахматисты во время игры. Некоторые из них носят геометрический характер, о чем свидетельствуют даже их названия: связка, отвлечение, завлечение, перекрытие, освобождение пространства, блокировка, сквозное действие фигур (рентген) и т. д. На наших шахматных страничках мы постепенно знакомимся с каждым из перечисленных приемов. Сегодня мы рассказываем о связке.



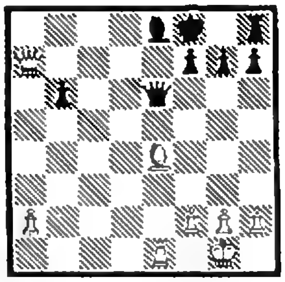
Доннер — Хюбнер
(Бюзум, 1968 г.)

Белая ладья связана — она находится на одной линии (в данном случае диагонали) с королем и не может сдвинуться с места. Но сама по себе связка может оказаться не опасной, ведь от нее легко избавиться. Комбинационный мотив возникает в том случае, если на связанную фигуру удается напасть еще по одной линии, и этого действия по двум направлениям связанная сторона уже не выдерживает. **1...Л:с5 2.Ф:с5.** Как будто опасность миновала, но... **2...Лс8!** Итак, на роковом поле погибает не ладья, а ферзь (3.Ф:b6 Л:с1+ 4.Крf2 ab). Белые сдались.



Брундтрап — Будрич
(Берлин, 1954 г.)

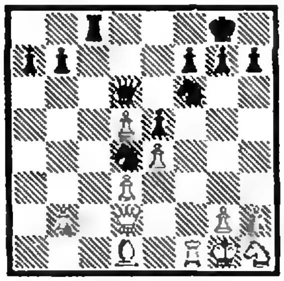
1.Сс5! Сb6! Ферзь связан, но и связывающий его слон тоже связан. После размена на b6 дело кончится ничьей, однако белые все же используют связку. **2.Фf4+!** Черные сдались.



Бисгайер — Эванс
(США, 1959 г.)

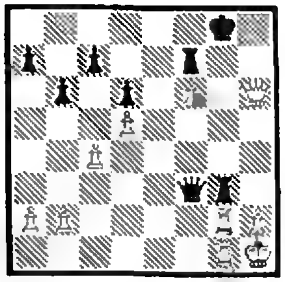
1.Фа3+Фе7. (1...Крg8 2.С:h7+ с выигрышем ферзя). Итак, черный ферзь попал под связку, осталось воспользоваться этим обстоятельством. **2.Сс6!!**, и черные немедленно сдались — 2...Ф:а3 3.Л:е8×.

Ведущему страничку тоже однажды удалось закончить борьбу, используя связку.



Байрамов — Гик
(Москва, 1966 г.)

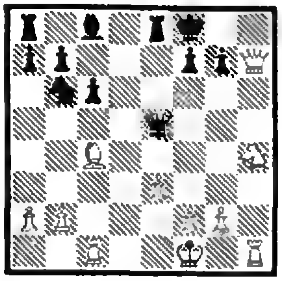
Белый конь отступил с f2 на h1, намереваясь переместиться на более удобную стоянку g3. Однако он так и не успевает добраться до желанного поля, и застревает в углу. **1...Фb6 2.Фf2 Лс2!** Белые сдались. После 3. С:с2 они получают спертый мат — 3...Ке2×, а после 3.Фе3 Ке2+ 4.Крf2 Кg4+ ферзь просто теряется.



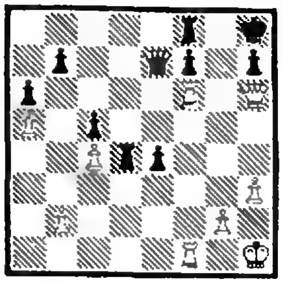
Бонгассер — Вайнер
(Турнир по переписке, 1976 г)

Похоже, белые не могут реализовать материальный перевес, ведь их ладьи намертво связаны. После 1.hg Лh7 ничья неизбежна, красиво заканчивается встреча и после 1.Фh4 Л:g2 2.Л:g2 Лg7!! 3.fg Фf1+ с вечным шахом. Игравший черными несколько дней был совершенно спокоен за свою позицию и, наверное, ожидал мирного предложения со стороны соперника. Но, раскрыв конверт, он был потрясен... Белые прислали удивительный ход — **1.Фh3!!**, то есть сами использовали связку. После **1...Лg7 2.Фс8+! Крh7 3.fg Л:g7 4.Фh3+!** пришлось сдаться (4...Ф:h3 5.Л:g7+ Крh8 6.Лg8+ Крh7 7.Л1g7+ Крh6 8.Лh8+).

Конкурсные задания

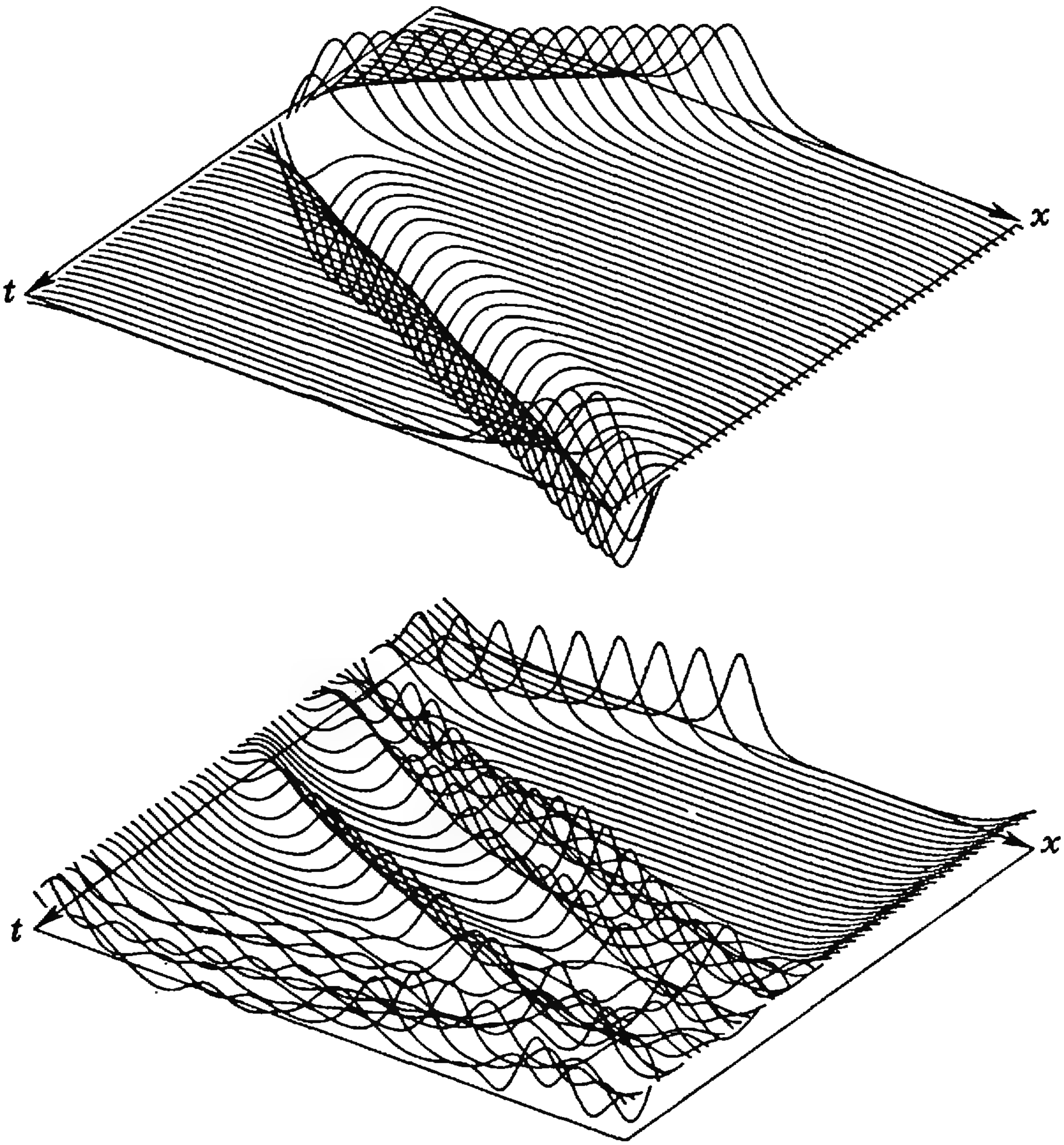


21. Ход белых. Выигрыш.



22. Ход белых. Выигрыш.

Срок отправки решений — 25 января 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22»).

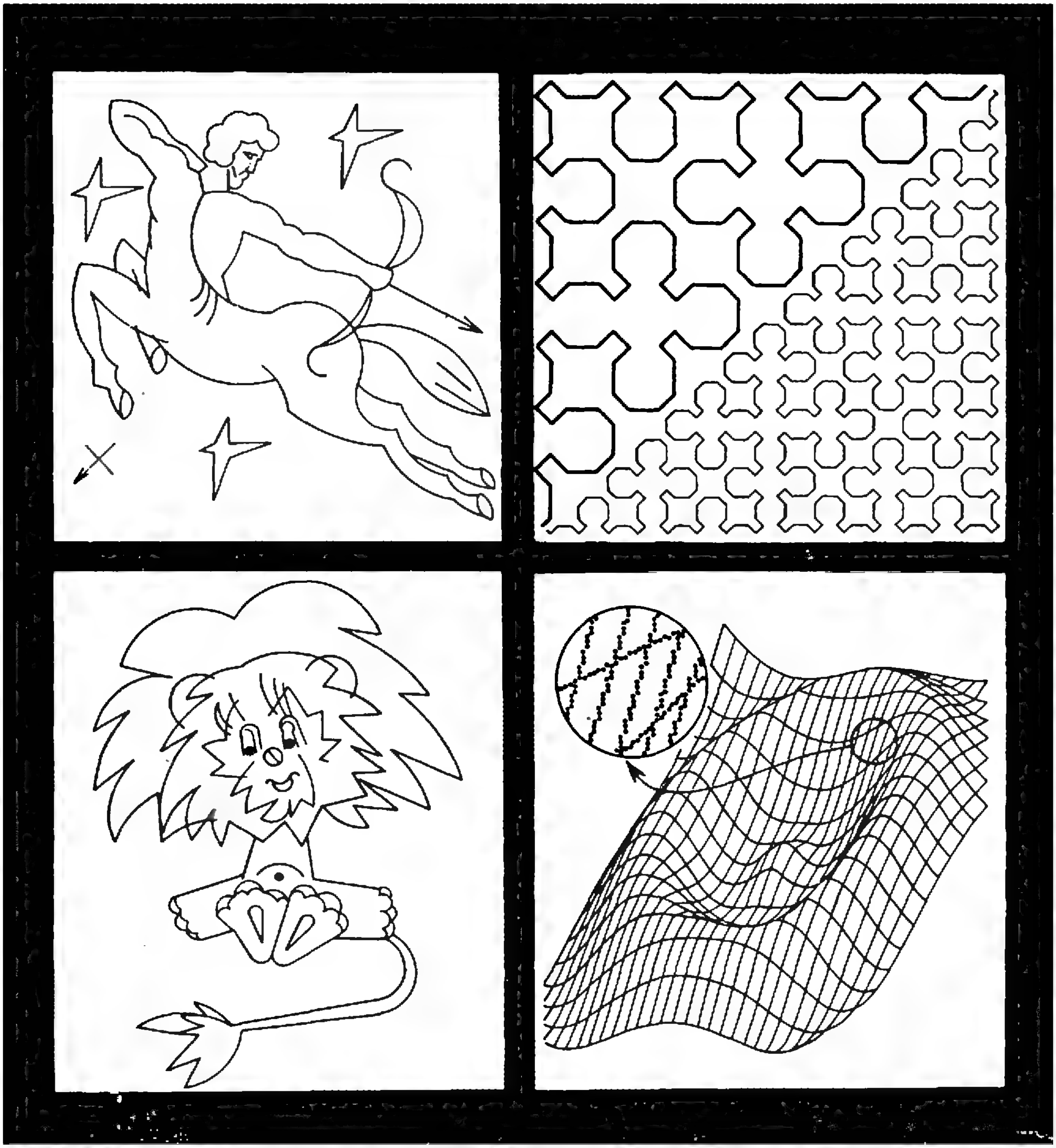


На этих рисунках изображено распространение отдельной волны: волна «бежит» вдоль оси x, и каждая волнистая линия — как бы ее мгновенная фотография; сделаны эти фотографии через равные промежутки времени. Обратите внимание: волна распространяется с постоянной скоростью, и форма ее остается неизменной. Такие уединенные волны — их называют солитонами — могут возникать при определенных условиях в самых разных средах — в воде, в плазме, в полупроводниках и сверхпроводниках, в цепочке последовательно соединенных атомов и т. д. Хотя физическая природа волн, возникающих в столь разных системах, может быть различна, уравнения, описывающие их распространение, оказываются сходными или даже идентичными по виду. В этом номере журнала мы помещаем статью «Солитоны», в которой рассказывается об истории открытия солитонов, об исследовании их свойств, о практическом использовании этих свойств.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Здесь воспроизведены четыре рисунка, выполненные ЭВМ по программам, написанным победителями конкурса машинной графики журнала «Квант» (см. № 9 за 1981 год). Рисунок в правом нижнем углу получен Рихардом Гавликом (ЧССР) по стандартным программам. В кружке с большим увеличением показано, как графопостроитель «рисует» линии: он просто густо ставит точки по вычисленной линии. Остальные рисунки выполнены по программам на языке Паскаль с использованием графической системы Шпага-5, созданной новосибирскими школьниками. «Кентавра» придумала Света Безбородова из Рубцовска (Алтайский край), «Линии Серпинского» — Сережа Баталов из Арзамаса, «Львенок» нарисован ЭВМ по программе Димы Корнилина из Горького. Кроме школьников, названных выше, призерами конкурса стали старшеклассники Р. Дементьев (Горький), О. Машуков и М. Горбатенко (ст. Инская Новосибирской обл.), А. Крипивин (Киев), Е. Двуреченский (Липецк), Е. Кузенков (п. Нижегородский Горьковской обл.), А. Меркулова, С. Терехов и Т. Фарина (Новосибирск), Л. Хуснутдинова (Свердловск) и младшие школьники М. Хлебалов (Москва), А. Евстигнеев и Д. Пархомчук (Новосибирск).



НОМЕР
12

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант 12 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	*В. С. Владимиров, А. С. Мищенко.* Роль математической физики в современной науке	*V. S. Vladimirov, A. S. Mischenko.* The role of mathematical physics in modern science
7	Н. Н. Лузин (к столетию со дня рождения)	N. N. Lusin (100th anniversary)
13	*В. П. Смилга.* Мифы XX века	*V. P. Smilga.* XXth century myths
20	*А. В. Бялко.* Торные тропы Торо	*A. V. Byalko.* Toro's beaten paths
	Новости науки	**Science news**
12	Самый быстрый пульсар	The fastest pulsar
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
22	*В. В. Майский.* Где тонко, там и рвется	*V. V. Mayski.* Where it's thin, there it rips
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
25	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school-children**
31	Задачи	Problems
32	*Т. С. Петрова.* Решаем задачи по физике	*T. S. Petrova.* Solving physics problems
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
35	Задачи М836 — М840; Ф848 — Ф852	Problems M836—M840; P848—P852
38	Решения задач М821, М822, М824, М825; Ф800, Ф833 — Ф836	Solutions M821, M822, M824, M825; P800, P833 — P836
43	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Олимпиады	**Olympiads**
46	*А. М. Абрамов, Т. А. Сарычева, Ю. П. Соловьев.* XXIV Международная математическая олимпиада	*A. M. Abramov, T. A. Sarycheva, Yu. P. Soloviev.* XXIV International mathematics olympiad
48	*С. М. Козел.* XIV Международная физическая олимпиада	*S. M. Kozel.* XIV International physics olympiad
	Информация	**Information**
53	ФМШ при университетах — 20 лет	University boarding schools — 20th anniversary
53	Заочная физико-техническая школа при МФТИ	Moscow physico-technical institute's school
56	Напечатано в 1983 году	Printed in 1983
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
64	Анкета	Our opinion poll
	Игры и головоломки *(52)*	**Games and puzzles** *(52)*
	Смесь *(45)*	**Miscellaneous** *(45)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Гроссмейстер по композиции *(3-я с. обложки)*	Grandmaster of composition *(3rd cover page)*

На 1-й и 4-й страницах обложки изображена траектория астероида Торо в разных системах отсчета. Об этом удивительном астероиде рассказано в статье А. В. Бялко «Торные тропы Торо».

На 2-й странице обложки помещен фрагмент рисунка доктора физико-математических наук А. Т. Фоменко, иллюстрирующий в образной форме процесс образования минимальной поверхности.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1983

Rot v
I
0
0,2
0,4
0,6
y

Роль математической физики в современной науке

Академик
В. С. ВЛАДИМИРОВ,
доктор физико-математических наук
А. С. МИЩЕНКО

> *Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений.*
> В. И. Ленин. «Материализм и эмпириокритицизм»

Уже само название «математическая физика» говорит о том, что эта дисциплина занимает как бы промежуточную область между математикой и физикой, находясь под непосредственным и сильным влиянием как той, так и другой. Чем же конкретно занимается эта «промежуточная область» науки? Говоря коротко и, может быть, не совсем понятно, на этот вопрос можно ответить так: «Математическая физика — это теория математических моделей физических явлений». Чтобы понять это краткое определение, обратимся к некоторым (хорошо известным школьникам) примерам таких математических моделей.

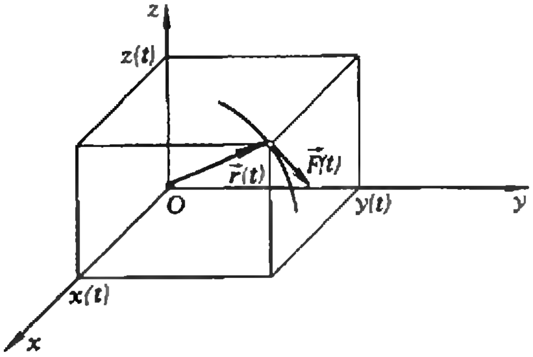
Описывая закономерности движения твердых тел, физики формулируют *второй закон Ньютона:* ускорение материального тела прямо пропорционально сумме всех сил, действующих на данное тело.

Как использовать на практике второй закон Ньютона? Пусть твердое тело настолько мало, что его положение в трехмерном пространстве задается одной точкой. Если в пространстве фиксирована некоторая декартова система координат, то точка, а значит, положение твердого тела определяется тремя числами — координатами точки x, y, z, или, что то же самое, положение твердого тела определяется вектором $\vec{r}$ в трехмерном пространстве. Этот вектор $\vec{r}$ в различные моменты времени t принимает, вообще говоря, различные значения. Таким образом, вся совокупность положений тела в результате его движения полностью описывается векторно-значной функцией $\vec{r}=\vec{r}(t)$, зависящей от одной действительной переменной t. Предполагаем, что функция $\vec{r}=\vec{r}(t)$ достаточно хороша, точнее, что она по крайней мере дважды дифференцируема*) в каждый момент времени t. Тогда вторая производная $d^2\vec{r}(t)/dt^2$ есть не что иное, как ускорение тела в момент времени t. Пусть $\vec{F}$ — сумма всех сил, действующих на данное тело. Значение вектора $\vec{F}$ тоже, вообще говоря, зависит от времени t, то есть $\vec{F}=\vec{F}(t)$ — некоторая функция от одной переменной t.

Тогда второй закон Ньютона записывается в виде математического уравнения, связывающего две векторно-значных функции $\vec{r}=\vec{r}(t)$ и $\vec{F}=\vec{F}(t)$:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)=\vec{F}(t). \qquad (1)$$

Уравнение (1) и есть математическая модель, описывающая на математическом языке второй закон Ньютона.



Используя уравнение (1) и различные математические теоремы, ученые делают различные заключения о качественном или количественном характере движения твердого тела. Например, если сумма всех сил, действующих на данное тело, постоянна, то есть длина и направление вектора $\vec{F}$ не зависят от значения времени t, то движение тела происходит по прямой линии. Доказательство сводится к описанию всех решений уравнения (1) в том случае, когда правая часть $\vec{F}(t)$ есть постоянный вектор.

* * *

Конечно, приведенный пример математической модели очень прост с современной точки зрения. Каждая математическая модель возникала по мере необходимости. Таким образом, не случайно, что автором второго закона механики и начал дифференциального исчисления для функций одной переменной был один и тот же человек — знаменитый английский ученый Исаак Ньютон (1643—1727), работы которого и положили начало математической физике как самостоятельной науке.

Математическая физика развивалась параллельно с развитием и физики, и математики. Вслед за созданием И. Ньютоном основ классической механики и теории всемирного тяготения, методы математической физики начали формироваться при построении и изучении математических моделей широкого круга различных физических явлений.

В XVIII веке методы математической физики применялись к изучению колебаний струн и стержней и в простейших задачах движения жидкости. Развитие этих методов связано с именами таких выдающихся ученых, как Д'Аламбер (1717—1783), Эйлер (1707—1783), Д. Бернулли (1700—1782) и Лагранж (1736—1818). Область применения методов математической физики уже в те времена была обширной. Достаточно указать, какие задачи решались в трудах величай-

---

*) Векторно-значная функция $\vec{r}(t)=(x(t);\ y(t);\ z(t))$ называется *дважды дифференцируемой, если ее координатные функции* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дважды дифференцируемые, то есть существуют вторые производные $x''(t)$, $y''(t)$, $z''(t)$. В этом случае *вторая производная* функции $\vec{r}(t)$ определяется так:

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=(x''(t);\ y''(t);\ z''(t)).$$

(Прим. ред.)

шего математика XVIII века, академика Российской академии наук Л. Эйлера. Это задачи о колебаниях струн и распространении звука, гидравлика и гидродинамика, сопротивление материалов, оптика, электричество, магнетизм и многие другие.

Характерной особенностью этих методов является построение математических моделей в виде дифференциальных уравнений в частных производных — уравнений, в которые входят неизвестная функция, зависящая не от одной, а от нескольких переменных, и ее частные производные (то есть производные по отдельным переменным). Поэтому такие уравнения иногда называют уравнениями математической физики, хотя в настоящее время арсенал математических средств, используемых в математической физике, ими не исчерпывается.

* * *

В XIX веке большой вклад в развитие и идей и методов математической физики внесли русские ученые М. В. Остроградский (1801—1862), П. Л. Чебышёв (1821—1892), А. М. Ляпунов (1857—1918), Н. Е. Жуковский (1847—1921), В. А. Стеклов (1864—1926) и С. А. Чаплыгин (1869—1942).

Замечательный русский и советский математик, создатель Петербургской школы математической физики В. А. Стеклов так писал о классической математической физике в 1922 году:

«Решение задач математической физики приводится к определению одной или нескольких величин, характеризующих тот или иной физический процесс, совершающийся в данной среде (в данном теле) в зависимости от положения каждой точки этой среды и времени при помощи одного или нескольких дифференциальных уравнений.

Эти уравнения выводятся при помощи небольшого числа возможно простых гипотез, которые полагаются в основу теории каждого физического явления и представляются как результат обобщения длинного ряда опытов и наблюдений над физическими процессами, которые действительно происходят в окружающей нас природе или создаются искусственно.

В результате такого отвлечения (обобщения) создается небольшое число основных положений (гипотез), которые должны быть независимы между собою и не противоречить ни одному из известных в данное время фактов действительности.

Эти гипотезы полагаются в основу теории того или иного физического явления, и вся теория развивается затем дедуктивно при помощи аксиом математики и основных законов общей механики по методам дифференциального и интегрального исчислений.

Таким путем, по физическим данным каждой задачи, составляются дифференциальные уравнения, характеризующие сущность рассматриваемого процесса для каждой точки среды и для каждого момента времени.

Задача сводится к определению в функции времени, координат каждой точки среды, в которой происходит изучаемое явление, и величин, определяющих физические свойства среды, тех неизвестных, которые фигурируют в полученных дифференциальных уравнениях, то есть к интегрированию этих уравнений.

При этом получаемое таким путем решение должно удовлетворять всем данным, которые получаются как результат непосредственного наблюдения над изучаемым процессом».

* * *

Еще большее развитие получила математическая физика в XIX веке и в нашем, двадцатом. Расширяется число физических явлений, изучаемых методами математической физики: теплопроводность, диффузия, оптика, электродинамика, нелинейные волновые процессы, квантовая физика и теория относительности. Расширяется и область математики, применяемая при построении математических моделей. Кроме дифференциальных уравнений для исследования задач математической физики служат интегральные уравнения, вариационное исчисление, теория функций, функциональный анализ, теория вероятностей, приближенные и численные методы.

Математическая физика сегодняшнего дня благодаря своим глубоким связям почти со всеми разделами математики занимает центральную, цементирующую роль в обширном здании современной математики.

Своими тесными связями с физикой и другими естественными науками математическая физика всегда привлекала внимание многих крупных ученых. Этим она стимулировала развитие математики. Хорошо известно, что в течение последнего десятилетия многие крупные представители «чистой» математики стали заниматься математической физикой. Однако обратное влияние математики на физику часто недооценивается. Бытует заблуждение, «что «настоящая» математика не имеет ничего общего с решением проблем, интересных для практики», что математика нужна физике только как средство для вычислений, что физикам нужна только «упрощенная» математика, что можно даже обойтись одним лишь компьютером. На самом деле роль математики гораздо глубже. Хорошо известны многие примеры из истории науки, когда в рамках удачно выбранной математической модели, с помощью только рассуждений и вычислений, как говорят, «на кончике пера», удавалось предсказать новые физические явления или существование новых физических объектов. И эти предсказания впоследствии блестяще подтвердились на опыте.

* * *

Одним из наиболее замечательных примеров теоретического предсказания является открытие планеты Нептун Солнечной системы. В 1781 году английский астроном Вильям Гершель обнаружил с помощью построенного им самим телескопа новое небесное тело. Вначале он предполагал, что обнаруженное им тело является кометой. Но тщательное изучение движения этого объекта, которое в течение двух лет проводил русский астроном Андрей Иванович Лексель, показало, что обнаруженное В. Гершелем тело является новой планетой. Эту планету назвали Ураном. А. И. Лексель продолжил вычисления орбиты Урана и обнаружил, что ее движение не согласуется с теоретическими расчетами. Он высказал предположение, что неправильности в движении Урана вызываются притяжением еще одной неизвестной ранее планеты, обращающейся на более далеком расстоянии от Солнца. Начались поиски этой неизвестной планеты. Спустя более полувека Дж. Адамс, английский астроном, в сентябре 1845 года закончил вычисления орбиты этой новой планеты и сообщил результаты своих вычислений директору Гринвичской обсерватории Дж. Эри. Однако последний не организовал своевременно поисков новой планеты. Одновременно с Дж. Адамсом аналогичные вычисления производил во Франции Урбен Леверье. 18 сентября 1846 года У. Леверье отправил в Берлинскую астрономическую обсерваторию письмо, в котором сообщил местоположение гипотетической планеты. Письмо было получено немецким астрономом Иоганном Галле 23 сентября 1846 года. В тот же вечер И. Галле обнаружил планету. Она находилась от вычисленного места всего в 52 угловых минутах.

Теоретическое предсказание существования новой планеты Нептун явилось триумфом научной мысли XIX века.

* * *

Примеров таких предсказаний впоследствии появилось очень много. Пожалуй, наиболее поучительной является история возникновения и развития теории электромагнитного поля. В истории физики считается, что основополагающей работой, посвященной созданию динамической теории электромагнитного поля, является фундаментальная работа выдающегося английского физика Дж. Максвелла «Динамическая теория электромагнитного поля» (1864 г.) В ней Максвелл написал систему дифференциальных уравнений, которые количественно связывают воедино известные до этого величины электрического и магнитного полей. Стройная система уравнений Максвелла дала многочисленные предсказания, которые блестяще подтвердились впоследствии. Самый важный вывод из теории Максвелла заключается в установлении электромагнитной природы света. То, что световые лучи являются ничем иным, как электромагнитными волнами высокой частоты, было впоследствии доказано непосредственной экспериментальной проверкой немецким физиком Герцем.

* * *

Приведем еще пример, относящийся к самому последнему времени. В январе 1983 года в Женеве, в Европейской организации ядерных исследований, было объявлено об открытии новой частицы — W-бозона*). Открытие этой частицы давно уже ожидалось — ее существование было предсказано несколько лет назад. Бозоны — «главные действующие лица» теории электрослабого взаимодействия, единой теории электромагнитных и слабых процессов (ее авторы С. Вайнберг, Ш. Глэшоу и А. Салам получили Нобелевскую премию 1979 г.). Теория предсказала не только сам факт существования W-бозонов, но и их массу. Подготовка к опытам длилась два года, наконец приборами были зарегистрированы первые бозоны. Явление это чрезвычайно редкое — и за два месяца работы установки было зарегистрировано лишь шесть случаев рождения W-бозонов. Самое замечательное, что опытные оценки массы частицы оказались очень близкими к теоретическим — практически находились в пределах точности эксперимента. Таким образом, теория электромагнитного и слабого взаимодействия получила экспериментальное обоснование.

* * *

В современной математической физике стало привычным устанавливать те или иные физические эффекты с помощью теории, а потом подтверждать эти эффекты в экспериментах. Об этом огромном влиянии математики на физику неоднократно высказывались выдающиеся ученые математики и физики. Так, на Всемирном конгрессе математиков в 1900 году великий немецкий математик Д. Гильберт, выдвигая свои знаменитые математические проблемы (впоследствии получившие названия «проблем Гильберта»), назвал 6-ю проблему об «аксиоматизации тех физических наук, в которых важную роль играет математика». Постановка этой проблемы, наряду с другими узловыми проблемами «чистой» математики, свидетельствует о той важной роли, которую Гильберт придавал математике для прогресса физики, для ее теоретической формулировки. Ту же мысль выразил В. А. Стеклов в 1921 году, обосновывая настоятельную необходимость организации при Академии наук физико-математического института: «Ни одна из естественных наук, если дело идет не о собирании сырого материала, а о действительном творчестве, не обойдется без математики, матери всех наук. Что же касается физики, поставленной впереди всех других наук, ..., то в настоящее время математика и физика до такой степени слились в одно целое, что иногда трудно отделить — где кончается математика и начинается физика».

Еще более определенно сказал выдающийся физик-теоретик и математик П. Дирак в известной статье 1930 года, в которой он теоретически предсказал существование античастиц: «Прогресс физики требует для ее теоретической формулировки все более «высокой» математики... Кажется вероятным, что этот процесс непрерывного абстрагирования будет продолжаться и в будущем и что успех физики должен в большой степени опираться на непрерывные модификации и обобщения аксиом на математической основе...»

---

*) Об этом см. статью «Открытие новой частицы» («Квант», 1983, № 5)

(Окончание см. на с. 11)

Н. Н. Лузин

(к столетию со дня рождения)

Отмечая столетие выдающегося ученого, создателя советской школы теории множеств и функций академика Н. Н. Лузина, мы публикуем воспоминания двух его учеников, академика П. С. Александрова и члена-корреспондента АН СССР Л. А. Люстерника. Кратко напомним основные этапы жизненного пути Н. Н. Лузина.

Николай Николаевич Лузин родился в 1883 г. в Томске, учился в Томской и Иркутской гимназиях. В 1901 г. поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. В 1905 г., будучи студентом, выехал в Париж, где слушал в Сорбонне лекции Э. Бореля, А. Пуанкаре, Ж. Адамара и Ж. Дарбу. Вернувшись в Москву, успешно сдал государственные экзамены и был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. Осенью 1910 г. факультет командировал его в Гёттинген и Париж, где Лузин написал свои первые самостоятельные исследовательские работы. В 1915 г., после возвращения в Москву, Н. Н. Лузин закончил работу «Интеграл и тригонометрический ряд», за которую получил степень доктора чистой математики (1916 г.). С 1918 г. работал в Политехническом институте г. Иваново, с 1922 г.— в Московском университете. После избрания академиком (1929 г.) руководил отделом теории функций Математического института АН СССР им. В. А. Стеклова. Н. Н. Лузин умер в Москве в 1950 г.

Из воспоминаний П. С. Александрова*)

Я впервые встретился с Н. Н. Лузиным в 1914 году, будучи студентом второго курса Московского университета. Впечатление от этой встречи было, можно прямо сказать, потрясающим и навсегда запомнилось мне. Обратившись к Лузину после окончания его лекций за советом, как мне заниматься математикой дальше, я был прежде всего поражен внимательностью и (не могу найти другого слова) уважением к собеседнику, как ни странно звучит это слово, когда речь идет о беседе уже знаменитого, хотя еще и молодого ученого с 18-летним студентом, еще только начинающим интересоваться математикой. Выслушав меня, Лузин посредством умело поставленных вопросов очень скоро разобрался в характере моих математических склонностей и сразу же в доступной мне форме обрисовал основные направления, которые он мог мне предложить для дальнейших занятий; очень осторожно он сам меня склонил к выбору одного из этих направлений, причем все это сделано было тонко, без всякого нажима и, как я теперь могу сказать, правильно. Я стал тогда же учеником Лузина.

* * *

Два самых выдающихся профессора-математика, преподававшие в Московском университете в первой трети текущего столетия: Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин как лекторы и вообще профессора университета принадлежали к двум противоположным типам. Д. Ф. Егоров принадлежал, я бы сказал, к классическому типу, а Н. Н. Лузин — к романтическому. В лекциях Д. Ф. Егорова, всегда безукоризненно тщательно приготовленных, все доказательства были до конца продуманы и изложены в абсолютно строгой форме. В них не было места никаким элементам импровизации, и они соответствовали подготовке и уровню понимания тех слушателей, для которых были предназначены.

---

*) Предлагаемая подборка воспоминаний о Лузине — отрывки из трех статей академика П. С. Александрова (1896—1983): «Успехи математических наук», т. 34, вып. 6, с. 219—249; т. 35, вып. 3, с. 241—278 и «Квант», 1977, № 10, с. 13.

В противоположность этому Н. Н. Лузин был ярким представителем «романтического» типа профессора университета. Все его преподавание было чрезвычайно эмоционально. Форма этого преподавания далеко не всегда бывала безукоризненной. Н. Н. Лузину случалось приходить на лекцию и плохо подготовленным и тут же, стоя у доски перед студентами, импровизировать еще не готовое доказательство. При этом он часто ошибался, путался в выкладках и откладывал до следующей лекции материал, предназначавшийся для данной лекции, но оказавшийся не подготовленным. Словом, образцовым его преподавание назвать было нельзя. При этом он иногда и несколько кокетничал этой своей «необразцовостью». Но лекции Лузина, в эпоху расцвета его педагогической деятельности в Московском университете, были полны новыми и интересными идеями, способными побудить слушателя к дальнейшим самостоятельным занятиям. Даром увлекать умы и воспламенять сердца Н. Н. Лузин обладал в высшей степени. Естественно, что результаты этого увлечения и воспламенения были различны в зависимости от того горючего материала, на который падали брошенные в него искры вдохновения. Способные молодые начинающие математики, а их было немало среди студентов, слушавших Н. Н. Лузина, побуждались к серьезным и глубоким собственным исследованиям, осуществлявшим дальнейшие продвижения в математической науке.

Не менее важным, чем характер лекций Лузина, побуждавший и, я бы сказал, вдохновлявший слушателей к самостоятельным исследованиям в области математики, был и введенный Лузиным в практику нашего факультета совершенно новый стиль взаимоотношений между профессором и студентами. В нем поражали большая свобода и непринужденность, отсутствие всякой официальности и замена внешних проявлений почтительности со стороны студентов действительно глубоким уважением, часто переходившим в восторженное преклонение. Это уважение и делало невозможным вырождение свободы и непосредственности в отношениях между Н. Н. Лузиным и его студентами в какое-либо панибратство.

* * *

Мое знакомство с Лузиным пришлось довольно точно на середину того десятилетия, в котором он получил самые значительные свои результаты. Он жил тогда совершенно один в меблированных комнатах (Кокоревское подворье на Балчуге), жил только наукой. Мне запомнилась одна его фраза, сказанная в одну из многочисленных наших встреч: «Я дни и ночи думаю над аксиомой Цермело (аксиома произвольного выбора в теории множеств). Если бы кто-нибудь знал, что это за вещь!».

Видя Лузина в эти годы, я действительно видел то, что может называться вдохновенным отношением к науке, и я не только учился у него математике, но и получил урок того, каким должен быть профессор университета.

Тогда же я понял, что наука и приобщение к ней новых молодых людей — две стороны одной и той же деятельности — деятельности ученого. Все это осталось мне на всю жизнь.

* * *

Сформировавшаяся еще в 1914—1916 гг. группа старших учеников Н. Н. Лузина состояла из

Д. Е. Меньшова, А. Я. Хинчина, М. Я. Суслина и меня. К 1919—1920 гг. она пополнилась рядом молодых математиков: П. С. Урысон, Л. А. Люстерник, М. А. Лаврентьев, Н. К. Бари, несколько других учеников и учениц Н. Н. Лузина. Так возник очень дружный коллектив, к которому вскоре присоединились два таких выдающихся математика, как А. Н. Колмогоров и Л. Г. Шнирельман. В этот коллектив сразу же включился из математиков старшего поколения В. В. Степанов. Несколько позже в этот коллектив вошли П. С. Новиков и Л. В. Келдыш. Так возникла знаменитая Лузитания — сообщество молодых математиков, спаянных не только тесными дружескими отношениями между его сочленами, но и горячей любовью, и живым бескорыстным интересом к математичкой науке.

Лузитания сразу осознала себя как нечто целое и провозгласила себя «орденом» с «командором» Н. Н. Лузиным и «гроссмейстером» Д. Ф. Егоровым. Лузитания была коллективом большого трудового, творческого и эмоционального подъема, отражавшего в «микрокосме» тогдашнего математического факультета Московского университета грандиозный и всеобъемлющий подъем, переживавшийся всей страной в те годы, в первые годы революции, годы становления новой жизни.

Существенным элементом общения Н. Н. Лузина с его учениками были встречи и беседы, которые Н. Н. Лузин имел с совсем небольшими их группами (примерно в 1—3 человека, занимавшимися какой-нибудь темой). Кроме того, был еженедельный общий приемный день для всех учеников Николая Николаевича. Одно время это были четверги, потом среды.

Эти собрания у Н. Н. Лузина состояли из двух частей. Сначала была математическая часть в кабинете Николая Николаевича, очень уютной комнате, в которой, как, впрочем, и во всей тогдашней квартире Н. Н. Лузина (Арбат, 25, третий этаж), было (по желанию хозяина) керосиновое освещение. Никогда не забуду тех насыщенных самой живой математикой разговоров, которые тогда происходили. Эти разговоры иногда затягивались за полночь, но, когда бы они ни кончались, за ними следовал чай с неизменным очень вкусным ореховым тортом. За этим чаем — уже не в кабинете, а в столовой квартиры Лузиных — разговоры принимали другой, нематематический характер и касались самых различных вопросов культурной и общественной жизни. Иногда что-нибудь читалось вслух. Так, например, Н. Н. Лузин с большим мастерством и артистичностью читал предназначенные собственно для детей произведения Корнея Чуковского. Я, помню, однажды прочитал рассказ Анатоля Франса «Чудо святого Николая».

Собрания у Н. Н. Лузина кончались глубокой ночью. После их окончания участники большой гурьбой выходили на Арбат и его переулки и постепенно, в различных последовательных комбинациях провожая друг друга, наконец расходились — обычно уже к утру — по своим домам.

Лузитания жила не только дружно, она жила весело, и еще как весело! Это веселье даже захлестывало «старших», и не только Н. Н. Лузина, но и Д. Ф. Егорова, принимавших, так сказать, полноправное участие в наших оживленных веселых собраниях. Собрания эти были многочисленны и происходили по различным поводам. Встреча Нового года и Татьянин день, именины Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина, дни рождения отдельных лузитанцев — все давало повод для наших встреч.

Лузинская школа, Лузитания, была единственным в своем роде, неповторимым коллективом молодых, в большинстве своем одаренных и жизнерадостных математиков.

* * *

Однако, по моему убеждению, годами высшего расцвета Н. Н. Лузина как математика да и как человеческой личности были не годы Лузитании, а непосредственно предшествовавшие годы: 1914—1915.

Узнав Лузина в эти самые ранние творческие его годы, я узнал действительно вдохновенного ученого, жившего только наукой и только для нее. Я узнал человека, жившего в сфере высших человеческих духовных ценностей, куда не проникает никакой тлетворный дух.

Из воспоминаний Л. А. Люстерника*)

Весной двадцать первого года Московский университет и Московское математическое общество получили приглашение из Петрограда от Академии наук принять участие в научной сессии, которой предполагалось отметить столетие со дня рождения П. Л. Чебышёва. Тогда еще был жив один из «больших» учеников П. Л. Чебышёва А. А. Марков, и по его инициативе Академия решила отметить столетний юбилей знаменитого математика. В тогдашних условиях это приглашение носило характер вполне платонический **). Но в Лузитании было принято спонтанное решение обязательно ехать и притом всем. Горячее обсуждение происходило на улице, когда Николай Николаевич прогуливался, окруженный кольцом учеников. Пришли к заключению, что нужно исхлопотать отдельный вагон для поездки. Хлопоты, связанные с этим, были возложены на энергичного Владимира Николаевича (Володю) Вениаминова, который работал в Институте транспорта и поэтому имел связи с Наркомом пути.

Вагон был предоставлен. Поехали представители среднего и младшего поколения Лузитании.

В. Н. Вениаминов, на правах «хозяина» вагона, рассадил едущих по купе (его прозвали «Володька-комендант»). Когда поезд тронулся, стали придумывать название купе. Холостяцкое купе, в котором ехал Д. Е. Меньшов и три студента — Д. И. Перепелкин, Н. Д. Нюберг и я, было названо по имени популярного в Москве кафе поэтов — «Стойло пегаса» или просто «Стойло». Купе, в котором поместились жены, сопровождавшие некоторых профессоров, прозвали «Загон для профессорских жен», и Славочка Степанов сочинил песенку:

«Бим, бом, бом!
Идет вагон,
А в нем загон
Для профессорских жен!»

* * *

В ходу в то время были шуточные стихотворения, пародии, которые сочиняли многие из тогдашних математиков. Во всем этом шутливом творчестве был, если хотите, элемент «интеллектуального озорства».

Советская наука рождалась весело и шумно.

В самой Лузитании был сильный элемент игры, с участием такого талантливого артиста, каким был ее мэтр; эксцентричность Лузитании и восторженное поклонение мэтру давали повод к ироническим насмешкам. Но игра лишь помогала тогда серьезной работе, поклонение было искренним и бескорыстным, всех связывали общие научные интересы.

* * *

В двадцатых годах было принято противопоставлять две математические школы: «классическую» ленинградскую, наследницу петербургской, и московскую. Но геометрия и алгебра развивались в Москве на «классической почве». В Ленинграде вскоре началась работа в области теории функций действительного переменного, а позже — топологии. Обе школы имели большие традиции в области прикладной работы. Иногда высказывалось мнение, что различие между петербургской-ленинградской школой и московской в узком смысле (школой теории функций и теми, которые от нее отпочковались) заключалось в том, что в первой из них ценилось решение трудных конкретных задач, тогда как в московской — интерес лежал к широким общим концепциям. На самом же деле и в московской школе ценилось решение конкретных трудных задач, и общие концепции в ней, как обычно в математике, возникали в связи с решением конкретных задач. Замечу, что одной из причин успеха Н. Н. Лузина как создателя научной школы было как раз то, что он в печатных работах, на семинарах и в беседах выдвигал интересные задачи.

---

*) Эта подборка воспоминаний — отрывки из двух статей члена-корреспондента АН СССР Л. А. Люстерника (1899—1980), опубликованных в «Успехах математических наук» за 1965 и 1967 гг.

**) Из-за трудностей с транспортом (*Прим. ред.*).

* * *

Вечером в день приезда в Петроград мы были в Академии. А. А. Марков сделал доклад, в котором поделился своими воспоминаниями о П. Л. Чебышёве. В. А. Стеклов прочел доклад «Теория и практика в трудах П. Л. Чебышёва», вышедший через два года в свет. После этого на протяжении пары дней в здании университета состоялись научные доклады как петербуржцев — Успенского, Б. А. Венкова, Г. М. Фихтенгольца и др., так и гостей — Н. Н. Лузина, А. И. Некрасова, П. С. Урысона.

В докладе Н. Н. Лузина был приведен пример аналитической функции, обращающейся в бесконечность на границе круга сходимости. Лузитанцы «болели» за своего мэтра. Н. Н. Лузин строил вспомогательные конструкции на серии окружностей, стремящихся к границе. Когда он окончил, П. С. Урысон восторженно воскликнул: «Николай Николаевич, Вы их забили своими кругами!».

Так состоялась первая в советское время научная конференция, первая встреча двух больших математических школ: ленинградской (петербургской-петроградской) и московской, столь непохожих (хотя имевших, как мы видели, и точки соприкосновения).

Роль математической физики в современной науке

(Начало см. на с. 2)

Последующее развитие теоретической и математической физики, особенно квантовой физики, полностью подтвердило эти мысли. Это дало возможность крупнейшему ученому современности Н. Н. Боголюбову сказать следующее (1963 г.): «Основные понятия и методы квантовой теории поля становятся все более математическими».

* * *

Развитие науки последних десятилетий показало, что методы математической физики, первоначально открытые для задач физики, механики и астрономии, то есть для тех наук, в которых изучаются наиболее простые формы движения материи, проникают почти во все разделы современного естествознания и техники и в ряд разделов гуманитарных наук. Математическое моделирование широко используется в геофизике, химии, геологии, биологии, экономике, социологии, экологии, медицине, психологии, лингвистике. Хотя математические модели явлений, изучаемых в этих науках, и отличаются от моделей математической физики, однако многие методы исследований этих моделей (точные или приближенные, с использованием электронно-вычислительных машин) сохраняются и после надлежащей адаптации получают дальнейшее развитие.

Таким образом, подтверждается известная точка зрения, что «наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой». Современная математика с развитыми методами и аппаратом является мощным средством научно-технического прогресса.

Самый быстрый пульсар

Астрономы с 1967 года знают, что во Вселенной имеются замечательные космические часы — пульсары. Это небесные объекты, излучение которых регистрируется на Земле в виде периодически повторяющихся импульсов, причем периодичность пульсаций выдерживается с поразительной точностью. Сейчас известно около ста пульсаров. Излучение одних регистрируется только в радиодиапазоне, других — как в радиодиапазоне, так и в оптическом, рентгеновском и гамма-диапазонах. Большинство пульсаров имеют период от нескольких сотых долей до сотен секунд.

Сегодня считается, что пульсары — это остатки гигантских взрывов звезд, которые наблюдаются на Земле как кратковременные сверхновые. На месте взрыва остается нейтронная звезда, окруженная огромным магнитным полем и вращающаяся вокруг своей оси. Такой вращающийся магнит работает как направленная антенна. Когда Земля попадает в область интенсивного излучения, приборы это отмечают. Можно сказать, что пульсар похож на маяк, освещающий пространство бегающим прожекторным лучом.

Самый известный среди пульсаров, обнаруженных в нашей Галактике, находится на месте взрыва сверхновой, который произошел в 1054 году. Это пульсар в Крабовидной туманности. Его период составляет 33 миллисекунды.

Теряя энергию на излучение, пульсар замедляет свое движение. Поэтому естественно было считать, что пульсары не могут вращаться слишком быстро сколь-нибудь продолжительное время после своего рождения. Однако это убеждение оказалось опровергнутым, когда в ноябре прошлого года был открыт пульсар с самой большой частотой вращения — 642 оборота в секунду, что соответствует периоду около 1,6 миллисекунд. Пульсар этот находится от нас на расстоянии приблизительно 15 000 световых лет в направлении созвездия Лисички. Его диаметр 10 км, точки на экваторе движутся со скоростью около 1/5 скорости света. Сила всемирного тяготения между его молекулами настолько велика (в 10^{12} раз больше, чем на Земле), что пульсар не разрывается.

Астрономы ищут объяснение тому, почему этот пульсар, а по разным признакам можно сказать, что он существует не меньше миллиарда лет, до сих пор не замедлился. Какова бы ни была истинная причина, сейчас важно то, что пульсар необычайно стабилен. За несколько месяцев наблюдений не было замечено изменения в его периоде, хотя период измерен очень точно (известно 13 значащих цифр):

$$T=0{,}001557806449023\text{ с.}$$

Три месяца — это около 8 миллионов секунд. Поэтому ошибка в космических часах оценивается в 10^{-23} секунд — на столько эти часы могут отставать за одну секунду (а на 1 с пульсар отстал бы за 10^{23} с, то есть за $3 \cdot 10^{15}$ лет — больше, чем возраст Земли). Заметим, что самые точные атомные часы, которыми сейчас пользуются как эталоном времени, дают ошибку порядка 10^{-14} с. Так удивительным образом природа снабжает нас несравненными по точности эталонами.

Пока эта заметка готовилась к публикации, появилось сообщение об открытии еще одного быстрого пульсара. Он виден с Земли в направлении созвездия Лебедя, его период составляет приблизительно 6,13 миллисекунд. Этот пульсар входит в состав тесной двойной звезды. Изменение его периода, так же как и периода первого миллисекундного пульсара, пока не обнаружено.

В заключение заметим, что коллекция удивительных небесных объектов неуклонно пополняется.

Я. С.

Мифы XX века

Доктор физико-математических наук
В. П. СМИЛГА

Человечество мало чему учится на уроках истории, потому что каждая новая глупость представляется ему в новом свете.
А. Эйнштейн

Тема этой статьи древняя. Написаны сотни книг, причем блестящих книг. Тысячи журнальных, газетных статей... Объясняли, высмеивали, разоблачали... и мыслители Древности, и арабские философы, и просветители Возрождения..., а суеверие по-прежнему живо и, более того, благополучно процветает и в наш фантастический, космический и атомный двадцатый век.

Но вернемся несколько назад.

...Девятнадцатый век вошел в историю как век просвещения. Атеизм отчасти даже стал модой у образованной части общества. Старая нерассуждающая вера представлялась архаичной, библейские легенды — наивными. В сознании определенной части общества образовалась пустота. А ее, как известно, «боится природа».

В ответ стали расцветать мистические и полумистические общества, течения и секты, хотя это, конечно, бывало и раньше.

Вначале был спиритизм. Он появился примерно в середине XIX века, хотя по-настоящему начало его относится к глубокой древности. Многократно «строго научно» было доказано: собравшись небольшой компанией и положив руки на блюдечко с буквами алфавита, можно без особого труда вызывать духи умерших и беседовать с ними. Духи передавали информацию, нужным образом поворачивая блюдечко.

Спиритизм был в моде почти до конца XIX века. Проверкой спиритических «эффектов» занимались люди весьма и весьма серьезные. Крупные ученые. Винить их за это не стоит. Если утверждалось, что имеются бесспорные факты, то задача ученого — проверить.

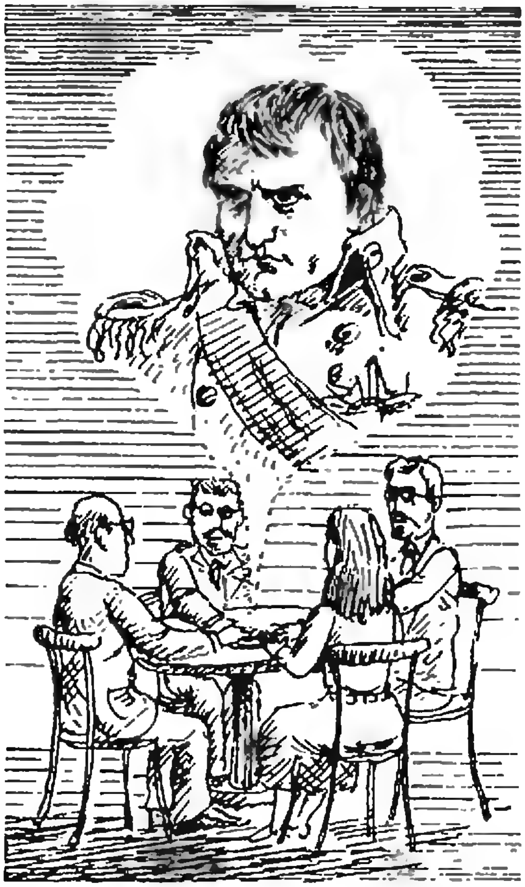
Хуже, пожалуй, другое. В бесконечных историях со спиритами проявился некоторый снобизм мужей науки, убежденность: стоит мне появиться, взглянуть — и все объяснится. А полезно помнить, что любой фокусник средней руки может без труда продемонстрировать серию «сверхъестественных» эффектов собранию нобелевских лауреатов, и вряд ли кто-нибудь из них сможет поймать его за руку.

Насколько мне известно, первый, кто сразу оказался на высоте,— это Майкл Фарадей. Он приготовил стопку кружков, соединенных мягкой и вязкой замазкой. Трение имелось — слабое, слегка тормозящее вращение кружков, но не ликвидирующее его полностью. После «явления духа» выяснилось, что верхний кружок повернулся максимально, следующий — поменьше, нижний — совсем не стронулся. (Из этого следовало, что источник вращающей силы находился наверху—там, где лежали руки спиритов. Сознательно или бессознательно, они сами вращали «волшебное блюдечко».)

Само собой разумеется, тут же появилась масса мыслимых и немыслимых объяснений этого эффекта. Но Фарадей спиритизмом больше не интересовался. А другие проверяли, теряли время. В 1871 году наш великий соотечественник Д. И. Менделеев возглавил комиссию Петербургского университета по изучению спиритизма. Заключение комиссии было однозначным: спиритизм — это суеверие. Так что упрекать ученых в бездоказательном отрицании чудес не приходится.

Итог: десятки и сотни ясных случаев обмана или бессознательного стремления получить нужный результат. И ни одного достоверного факта.

Тем не менее и поныне блюдечко вращают, вызывают Юлия Цезаря и Наполеона. В Корнуэлл, в Техас, в Уфу. Мало того, в Англии и в Голландии в определенных журналах существуют отделы спиритизма.



Потом появились медиумы. Эти оказались устойчивей. До сих пор они пользуются определенной популярностью, только теперь их порой именуют «экстрасенсами». С ними было посложней, некоторые оказались незаурядными, пожалуй, даже блестящими фокусниками.

История «медиумизма» интересна, забавна; поучительна, но итог — все тот же: ни одного достоверного факта.

Хотя «оккультные явления» все еще могут очень неплохо прокормить «толкового» человека, мода на них несколько угасла. Снова образовался некий вакуум.

В него хлынули уже «наши» мифы — мифы XX века: Бермудский треугольник, Лохнесское чудовище, снежный человек, телепаты, десантные отряды космических пришельцев...

Чем так притягательна идея проживания в некоторых озерах (в первую очередь, в шотландском озере Лох-Несс) сохранившихся до нашего времени плезиозавров, или как их там еще?

Почему рядового обитателя нашей планеты так волнует мысль, что где-то в горах — то ли в Гималаях, то ли в Кордильерах, то ли (чем мы хуже?) на Памире и Кавказе — бродит дикая большая обезьяна? Почему открытие τ-частицы или W-бозона либо, на худой конец, обнаружение пульсаров не вызывают десятой, сотой доли столь живого интереса?

Почему недоброй памяти машина Дина мгновенно оказывается мировой сенсацией, а проблема высокотемпературной сверхпроводимости едва вызывает вялое, снисходительное внимание?

История началась в Америке. Если не вдаваться в детали, суть была такова. Некий Дин сконструировал довольно грубое и простое механическое устройство, кажется, даже патент получил. Подчеркиваю, никаких тонкостей в его системе не было. Но для человека, плохо понимающего законы механики, поведение «машины» при работе могло показаться странным. Она, машина, то ли подпрыгивала, то ли делала нечто подобное.

Я нарочно не хочу вдаваться в детали, и чуть позже станет ясно, почему.

Так вот, вместо того чтобы обратиться за объяснением принципов ее работы к грамотному человеку, возможно, сам Дин, а может быть, и какой-то журналист берут и объявляют: «Машина показывает, что механика Ньютона грубо ошибочна. Уравнения механики необходимо существенно поправить».

Сенсация! Первого разряда. Вот тут-то и началось. Сейчас трудно, да и неинтересно устанавливать, сколько статей было посвящено «великой находке». И, конечно, намеки присутствовали: вот-де надменные физики-профессионалы даже не желают (а может быть, и не могут) разобраться в новой гениальной теории.

А зачем разбираться?

Любой физик заранее, совершенно не интересуясь деталями, знал: все это пустой вздор. И разбираться даже не следует, разве что рассмотреть в качестве забавной задачи для школьников.

«Вот тут-то и выявилась надменная сущность ограниченных профессионалов»,— могут закричать ниспровергатели механики Ньютона. «Кастовая ограниченность. Неверие в человеческий гений.»

Вовсе нет. Ничего такого не выявилось. А совсем напротив — проявился научный склад мышления или, если угодно, здравый смысл. Десятки, нет, сотни тысяч экспериментов показали нам — механика Ньютона безукоризненно работает в своей области. Тысячи знаменитых и безвестных рядовых физиков проверяли ее законы, проверяли для самых разных явлений с точностью до многих знаков. И теперь мы абсолютно уверенно можем утверждать: для макроскопических тел при скоростях, много меньших скорости света, механика Ньютона работает великолепно. В этой области любая более общая теория может лишь чуть-чуть «поправить» Ньютона, показать, что в восьмом или десятом знаке должны появиться отличия. Но зачеркнуть Ньютонову механику как безупречное практическое руководство к расчету миллионов и миллионов задач не сможет никакой эксперимент и никакая теория. Физики приняли теорию относительности и квантовую механику, но, само собой разумеется, первое и основное требование к новым теориям состояло в том, чтобы в известной, ранее проверенной области их предсказания совпадали с классической физикой и, конечно, с механикой Ньютона.

Это — общее требование к любой новой теории.

Можно допустить, что теория относительности будет сменена новой, но результаты теории относительности непременно будут включены в новую схему и в пределах ее области применения останутся неизменными (с точностью до возможных малых поправок).

Поэтому никогда ни один профессионал не станет серьезно относиться к разговорам, что в каких-то опытах, скажем, с динамомашиной обнаружили кардинальное нарушение уравнений Максвелла или, скажем, в стандартном полупроводниковом приборе умельцы наблюдали принципиальное нарушение второго начала термодинамики.

Примеры эти, увы, не придуманы. Они в свое время обсуждались на страницах газет и журналов.

Легче всего упрекать журналистов. Пусть и за дело. Но жажда сенсаций, чуда живуча и среди работников науки. Примеров тому тьма. Всех не перечислишь. Вот один. С десяток лет тому назад весьма живо обсуждалась «проблема» магнитной воды. На некоторых заводах, как-будто, было четко установлено: стоило пропустить обычную воду через магнитное поле, причем и не очень сильное, как технологические процессы резко улучшались. Существенно уменьшалась накипь на стенках водонагревательных котлов, возрастал срок службы труб и вообще — наблюдалась масса выгод.

Не проверял достоверность фактов, но охотно готов допустить — все правда. Вода, обычная вода,— это не просто H_2O, но еще и множество растворенных в ней химических соединений, это и микрочастицы и минеральные, и биологические. Думаю, каждый встречался в обыденной жизни с мягкой и жесткой водой. Например, в городе *A* мыло смывает грязь великолепно, а в городе *B* помыть руки и даже само мыло смыть — проблема непростая. И, казалось бы, с магнитной водой все понятно. Мелкие (невидимые) ферромагнитные примеси (например, частицы железной руды) могут задерживаться в магнитном поле, оседать на стенках, и освобожденная от них вода дальше может давать меньше накипи. Вот и все.

Нет! Это уж слишком просто. И возникают немыслимые объяснения: магнитное поле меняет структуру воды, приводит к принципиально новой неизвестной науке химии и т. д., и т. п. Для физика все это звучит на той же ноте, что и гимн машине Дина.

Пожалуй, не стоит углубляться в детали, поверьте на слово: тот факт, что магнитное поле даже в десятки тесла практически ничего не изменит в химической структуре, установлен так же строго, как и законы Ньютона.

Подобных историй повторяется множество. В чем же дело, почему вместо естественных, нормальных объяснений столь часто привлекают самые невероятные?

Может быть, в человеческой природе заложено стремление к Чуду? (Вспомним старый фильм «Праздник святого Иоргена».)

Теперь после краткого «научного экскурса» снова вернемся к мифам.

Обратимся к телепатии, или, говоря «научно», экстрасенсорному восприятию. Ситуация прежняя. Много лет исследований в самых разных странах, десятки, сотни сенсаций и... ни одного достоверного факта.

Напомним, что важнейшее требование к любой научной работе — воспроизводимость эксперимента. Научный результат — лишь тогда результат, когда он многократно повторен (или может быть повторен) независимыми группами. Здесь же — ни одного проверенного факта.

Ни одного! (Кстати, окажись, что подобное явление существует,— не произошло бы никакой сенсации. Ну, существует — и хорошо.)

Например, установлено, что некоторые виды птиц способны чувствовать постоянное магнитное поле и (что еще важней) анализировать полученную информацию. Кстати, поклонники телепатии часто даже не могут четко сказать, что именно они имеют в виду. Обычно экстрасенсорными называют восприятия, реакции, не связанные с известными нам «чувствами» человека (осязанием, обонянием, вкусом, зрением и слухом). Но подобные реакции — факт общеизвестный. И говорить тут не о чем. Хорошо известно, что мы реагируем на резкие изменения атмосферного давления, колебания инфранизкой частоты. Влияет на нас и электромагнитное поле вблизи мощных радиостанций. Хорошо также известно, что живые организмы излучают, хотя и очень слабые, электромагнитные волны.

Можно, наконец, допустить, что отдельные люди в силу каких-либо случайных обстоятельств обладают способностью генерировать более мощное излучение. Или, например, передавать и воспринимать информацию в ультразвуковом диапазоне. Ведь слышат же собаки звуки высокой частоты, недоступные нам. Да и более того, частотный диапазон, восприинимаемый большинством читателей журнала «Квант», существенно шире, чем практически у любого человека старше пятидесяти лет. С возрастом высокие частоты все хуже и хуже воспринимаются нашим слухом. В конце концов можно допустить способность человека накапливать небольшие электрические заряды, например, на кончиках пальцев. Подобные гипотезы не противоречат законам природы, а скептикам можно ответить, что мы пока еще очень мало знаем о некоторых механизмах деятельности живых существ, в том числе и о механизмах работы нашей нервной системы и нашего мозга. Соответственно, мы не умеем точно оценивать потенциальные возможности человеческого организма (впрочем, это в равной мере относится ко всем живым существам). Загадочны не только механизмы мышления, инстинкта, передачи наследственности. По сути неясны и тысячи более простых вопросов.

Итак, можно допустить, что в определенных условиях у определенных людей проявляются некие необычные способности. Правда, повторюсь, нет пока ни одного строго установленного факта, если говорить, например, о телепатии. Но допустить некие неизвестные нам возможности человеческого организма, снова повторю, можно.

Но... Есть важнейшее но. Любая гипотеза не должна противоречить известным нам законам природы.

Мы знаем: как неживая, так и живая материя подчиняются законам физики. Более того, для известных живых систем ядерные взаимодействия не играют никакой роли. Поэтому все реакции и действия живых организмов связаны только с электромагнитными взаимодействиями и гравитационым полем. Никаких особых «полей», специфически присущих живому, нет. В этом нас убеждает весь научный опыт. Опыт биофизики, биохимии, химии, физики — вообще всех естественных наук.

Поэтому, когда начинаются разговоры о неведомых «биополях» или из журнала в журнал (было такое) перепечатывается статья о том, что невинные крошки усилием воли замедляли радиоактивный распад, или, на худой конец, публикуются сообщения о ясновидцетелепате с чудесной способностью не сходя с места раскрывать давно совершенные преступления (и такое писалось, бумага все терпит), можно смело утверждать: все это относится к жанру рассказов о полетах ведьм на помеле.

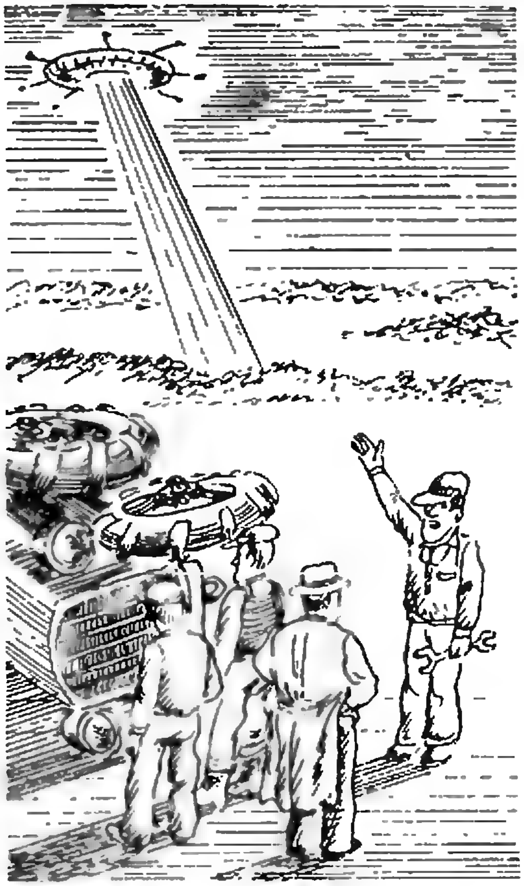
А самое интересное в этом то, что верят ведь всему подобному. В старую чертовщину не верят, а в новую — пожалуйста.

Наконец, «летающие тарелочки» и космические пришельцы. Предметом научного обсуждения в этом случае может быть лишь тот факт, что в атмосфере, по-видимому, иногда наблюдаются явления, которые мы не можем удовлетворительно объяснить.

К примеру, мы до сих пор не знаем, как устроена «обычная» шаровая молния. Гипотез несколько. В лабораториях воспроизвести молнию не могут. И вопрос открыт.

Точно так же можно предложить несколько гипотез, объясняющих появление «тарелочек», или — чтобы не раздражать адептов космических пришельцев — неопознанных летающих объектов (НЛО). Одну такую гипотезу недавно разработали в Институте океанологии АН СССР. Видимо, можно придумать и другие. Но суть в том, что поклонников НЛО в подавляющем большинстве меньше всего интересуют естественные объяснения. Ситуация тут удивительно напоминает «магнитную воду». Принцип тот же: естественные, нормальные объяснения к конкурсу не допускаются.

В начале нашего века великий французский математик Анри Пуанкаре сформулировал правило: в пер-



вую очередь в научной работе рассматриваются простые гипотезы.

В мифотворчестве все наоборот. Ждут и требуют чуда. Космических пришельцев... Пусть даже маленьких и зелененьких.

Автору как-то пришлось читать лекции, где он пытался призвать к разумному подходу в вопросе о пришельцах. И убедился, сколь трудна борьба с суевериями. Мифы XX века по своей природе, внутренней структуре и происхождению ничем не отличаются от нерассуждающей веры наших предков. Любые доводы разума действовали на поклонников космических пришельцев столь же эффективно и благотворно, как, скажем, сомнение в реальности путешествия Магомета на небо, высказанное среди паломников в Мекке.

Люди хотели чуда.

С каким немыслимым успехом прошел по миру шарлатанский фильм «Воспоминание о будущем». Трудно вообразить что-либо нелепее доводов в пользу посещения в прошлом нашей Земли гостями из космоса, чем ссылки на гигантские монолитные плиты Баальбекской веранды или храмов Инков, либо на километровые рисунки (опознавательные знаки?) в перуанской пустыне Наска.

Посудите сами. Сейчас, после полетов космических аппаратов, мы твердо убеждены: на других планетах нашей Солнечной системы нет и никогда не было разумной жизни. Поэтому если какая-то цивилизация посетила Землю, то ее место в иной звездной системе. Технический уровень подобной цивилизации относится к нашему примерно так же, как наши атомные станции к кремневым наконечникам питекантропов. Действительно, квазиученые рассуждения о фотонных ракетах, довольно модные лет двадцать назад, любопытны лишь в том смысле, что прекрасно показали, сколь невероятны для нас межзвездные полеты. Невероятны не на уровне сегодняшней нашей техники. Это было бы полбеды. Они невероятны и непредставляемы даже и в том случае, если мы как угодно вольно будем экстраполировать наши возможности, то есть почти безудержно фантазировать. Слова «почти безудержно» означают фантазию, как-то ограниченную нашим знанием законов природы. Можно, например, мысленно использовать идеальное ядерное горючее, сверхпрочные материалы, привлекать любые «чудеса» известной нам науки...

Самый элементарный анализ сразу показывает, что при всем этом полеты людей в другие звездные системы остаются абсолютно нереальной мечтой. Если они и возможны, то только с помощью еще неведомого. Только если нам откроется нечто принципиально новое. Кстати, лучшие из писателей-фантастов это очень хорошо чувствуют и для сохранения «достоверности» вымысла давно и с успехом используют для космических полетов субпространства, нуль-транспортировку, гиперпространства и т. д. Фантасты имеют на то законное право. Такая фантазия не противоречит нашему знанию законов природы. Она апеллирует к неведомому. Но, увы, в реалиях о всем подобном мы осведомлены не более, чем все те же питекантропы — о лазерах или генной инженерии.

К счастью, на самих лекциях об НЛО я не бывал, поэтому, что там говорилось точно, рассказать не могу, да и не о лекциях речь. Но конспекты читал. Они существуют сами по себе. И при мне люди, которые, так же как я, на лекциях не были, оказывались под «обаянием» этих убогих текстов. Поверьте, в характеристике этой нет ни малейшего преувеличения. Как «доказательства» привлекались несвязные ссылки на древние тексты либо прямые утверждения, что однажды висела «тарелка» над подмосковным переездом и у всех машин заглохли моторы, а другуютарелку видели где-то в Бразилии и в ней были маленькие зелененькие человечки, а из третьей вылез совсем большой инопланетянин и одним движением перевернул трактор. Вот непридуманный, реальный уровень этих самых записей.

Поразительное убожество фантазии — характернейшая черта всех разговоров о космических пришельцах; безразлично — о прошлых их появлениях идет речь или о нынешних. Мне доводилось видеть конспекты лекций о явлениях пришельцев в солидных, вроде бы, учреждениях. В сравнении с подобными конспектами легенды любого полинезийского племени по логичности, правдивости, убедительности — немыслимый шедевр интеллекта, пиршество фантазии.

Но люди с высшим образованием и с научными степенями порой штудировали всю эту фантасмагорию вполне серьезно и с увлечением. Они хотели чуда.

Думать они не могли.

Самое забавное, что поклонники «тарелочек» или Бермудского треугольника очень любят призывать: «попробуйте-ка опровергнуть все это с помощью науки».

Надо ясно понимать, что там, где нет никаких фактов, науке, строго говоря, делать абсолютно нечего.

Апеллировать надо не к науке, а к обычному здравому смыслу. Вспоминаю, как много лет назад

я оказался свидетелем того, как академик Лев Давидович Ландау «истреблял» снежного человека — йети. Слушатели были молоды, почему-то склонны верить в йети, полагали, что отлично умеют думать самостоятельно, и авторитет Ландау их не убеждал.

— Ведь есть десятки и сотни свидетельств в Гималаях, на Памире, на Кавказе... и записи в старинных рукописях... Не может же все это быть придумано?

— Относительно леших, русалок и прочей чертовщины существует в сотни раз больше совершенно достоверных свидетельств, и написаны тома книг,— был ответ.

— Ну, хорошо, а почему бы ему не быть? Почему вы считаете, что все это вздор?

— А подумайте, зачем большой, сильной и умной обезьяне жить в жутких условиях среди льдов, когда стоит спуститься на одну-две тысячи метров вниз, и ей обеспечены и добыча, и идеальный климат среднегорья?.

Признаюсь, тогда я не очень понял простую мудрость этого довода.

Скепсис Ландау подтвердился некоторое время спустя. В 1960 году в Непал, где йети признан, можно сказать, на государственном уровне, прибыла специальная экспедиция под руководством Хиллари — первого покорителя Эвереста. Несколько месяцев велись тщательные всесторонние исследования. Итоги оказались крайне неутешительны для йети. Как показал биологический анализ, священные скальпы йети, хранившиеся в монастырях, были тривиальной подделкой. Таинственные следы на снегу получили самое простое объяснение: под горным солнцем снег быстро подтаивает, и через считанные минуты след горного козла может обернуться следом неведомого чудовища. Все рассказы «очевидцев» либо объяснялись встречей с редкой разновидностью гималайского медведя, либо были явно выдуманы. Но само собой, местные жители обещали добыть бесспорные доказательства на следующий год. Прошло 23. Почти каждый год Хиллари приезжает в Непал на долгий срок, но... йети так и не объявился.

Вы думаете, эта история произвела какое-либо впечатление на болельщиков снежного человека? Конечно, нет. Любые доводы бессильны, когда место разума занимает нерассуждающая вера.

В США уже с десяток лет работает частный институт, организованный искренними энтузиастами НЛО. Устроен он в самом что ни на есть тарелочнообильном месте. Итог: ни одного факта, ни одной сенсационной публикации. Но на поклонников НЛО это не производит ни малейшего впечатления. Они веруют в пришельцев. Веруют да и всё. Впрочем, мода все же несколько спала.

Сейчас лидерство снова захватили экстрасенсы.

Интересно, что на очереди?

Торные тропы Торо

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

Астероид Торо был открыт в 1948 году американским астрономом К. Виртаненом. Торо — небольшой астероид: диаметр его около 3 км, масса — порядка 10^{17} кг. В своем движении вокруг Солнца по эллиптической орбите Торо в перигелии оказывается вблизи орбиты Венеры, а в афелии удаляется за орбиту Марса.

На рисунке 1 показаны орбиты Торо, Венеры, Земли и Марса. Вы видите: орбита Торо пересекает орбиты Земли и Марса. 1 февраля 1984 года Торо пролетит около нашей планеты на расстоянии $\sim 0{,}15$ а. е.*), то есть подойдет к Земле на $2{,}25 \cdot 10^7$ км. Такие сближения происходят в среднем раз в 4 года. А не может ли случиться, что Торо столкнется с Землей? Это было бы катастрофой, которую нельзя даже сравнивать с природными явлениями на нашей планете. Энергия, которая выделилась бы при таком столкновении, близка к энергии 10^{10} атомных бомб трагедии Хиросимы.

Оказывается, подобные опасения напрасны. Вероятность столкновения Торо с Землей ничтожно мала. Причину этой малости обнаружили американские ученые Л. Даниэльсон и У. Ип. Они показали, что отношение периодов обращения Земли и Торо равно 5:8. Иными словами, за 8 земных лет Торо совершает 5 оборотов вокруг Солнца, и, следовательно, через каждые 8 лет относительное расположение Солнца, Земли и Торо повторяется.

---

*) 1 а. е., или 1 астрономическая единица длины, единица расстояния в астрономии, равная среднему расстоянию Земли от Солнца: 1 а. е. $= 149{,}6 \cdot 10^6$ км.

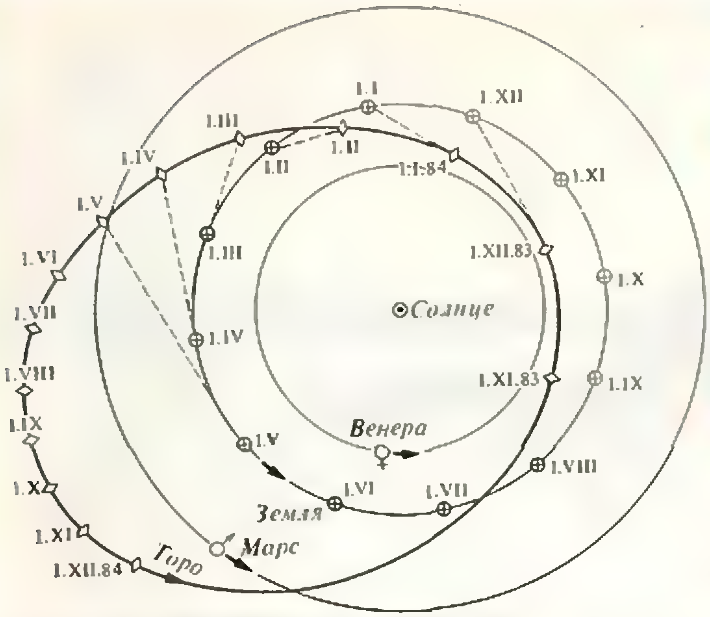


Рис. 1. Траектории Торо, Венеры, Земли и Марса. Обозначены положения Земли и Торо в 1983—84 годах.

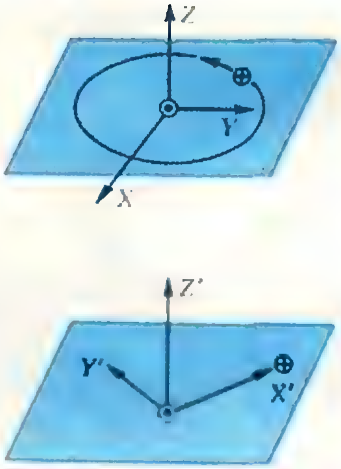


Рис. 2. Система координат XYZ — инерциальная система с центром в Солнце, в которой звездное небо неподвижно. В системе X'Y'Z' ось X' направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего Землю с Солнцем: звездное небо в этой системе вращается с периодом 1 год.

Земля движется вокруг Солнца по почти круговой орбите с почти постоянной скоростью. Поэтому движение Торо относительно Земли удобно изучать в системе координат, которая вращается вместе с Землей вокруг оси, проходящей через Солнце (рисунок 2). Траектория Торо в такой вращающейся системе отсчета становится более сложной, чем эллипс, но при этом она остается замкнутой. Эта замкнутость — следствие кратности периодов обращения Торо и Земли. Розетка на первой странице обложки и есть орбита Торо в системе координат, в которой Земля и Солнце неподвижны.

Торо сближается с Землей по високосным годам. В январе — феврале лет, номера которых делятся на 8, Торо безуспешно «пытается догнать» Землю; в августе лет, делящихся на 4, но не делящихся на 8, Земля находится позади Торо, летящего к своему перигелию. Строго говоря, расстояние между Торо и Землей при максимальном сближении не всегда одно и то же. Однако орбита Торо устойчива. Точка максимального приближения Торо к Земле периодически то немного удаляется от Земли, то приближается к ней, колеблясь около некоторого среднего положения. Период таких колебаний (астрономы называют их либрациями) примерно равен 150 годам.

Устойчивость орбиты Торо — гарантия того, что столкновения с Землей не произойдет.

Посмотрите теперь на последнюю страницу обложки. Розетка, которую вы видите,— тоже траектория Торо. Этот удивительный астероид умудрился согласовать свое движение не только с Землей, но и с Венерой! Период обращения Венеры равен 0,61521 земного года. Так что 13 оборотов Венера совершает за 7,9977 лет, что тоже очень близко к пятикратному периоду Торо. На рисунке изображена траектория Торо в системе координат, которая вращается вокруг Солнца так, что теперь почти неподвижным остается направление на Венеру. Замкнутая розетка возникает из-за кратности периодов обращения Торо и Венеры (13:5). Относительное расположение Торо и Венеры в периоды их максимального сближения также несколько меняется. Когда расстояние Торо — Венера оказывается минимальным, Венера возмущает движение Торо. Очередное такое тесное

(Окончание см. на с. 30)

Где тонко, там и рвется

В. В. МАЙСКИЙ

Данную статью можно рассматривать как образец постановки любого физического эксперимента. Прежде всего четко формулируется задача и выдвигается идея ее решения. Затем проводится собственно эксперимент: выбирается установка и делаются соответствующие измерения. После чего полученные результаты обрабатываются и объясняются теоретически.
Когда Всеволод Майский написал свою статью, он учился в десятом классе 179-й московской школы. Сейчас он студент Московского института химического машиностроения.

«Прочный», «непрочный» — этими терминами мы часто пользуемся и в быту, и в технике, характеризуя различные предметы и материалы. А что такое «прочность» и как ее можно измерить?

Рыболовам, например, хорошо известен простой способ определения прочности лески: привязанный за один конец отрезок лески нагружается различными гирями; максимальная нагрузка, выдерживаемая леской, и есть ее прочность на растяжение. Этим методом можно исследовать на прочность и другие материалы.

От чего зависит прочность, например прочность на растяжение? Во-первых, от площади поперечного сечения. Так, для разрыва лески диаметром 0,1 мм необходима сила порядка 50 Н, а леска диаметром 0,5 мм может выдержать вес взрослого человека. Для того чтобы исключить зависимость от толщины образца, вводится специальное понятие — предел прочности. Это максимальное напряжение, выдерживаемое образцом без разрушения.

Во-вторых, прочность материала зависит от его температуры. У металлов, скажем, при повышении температуры предел прочности уменьшается (соответствующие графики зависимости предела прочности от температуры для различных металлов приведены, например, в «Справочнике по элементарной физике» Н. И. Кошкина и М. Г. Ширкевича).

А может ли прочность зависеть от ... длины? На первый взгляд кажется, что нет, и для большинства случаев это действительно так. Но есть материал, прочность которого зависит от длины образца. Этот материал — шерсть.

На необычных свойствах шерсти была основана одна из задач заочного тура IV Турнира юных физиков. Вот ее условие:

Шерстяная нить сплетена из множества отдельных ворсинок. Исследуйте прочность такой нити на разрыв в зависимости от ее длины. Объясните результаты эксперимента.

Первое, что потребовалось, это подобрать подходящий объект для исследования. После нескольких первых опытов выбор пал на тонкую, но довольно прочную шерстяную нитку (для ее разрыва требовалось усилие от 2 до 4 Н). Во время этих опытов было установлено:

а) Для образцов одной и той же длины разброс значений силы, разрывающей нить, очень велик; поэтому для получения достоверного результата необходимо большое число опытов.

б) При длительном воздействии на нить она сильно вытягивается и может порваться при силе, существенно меньшей допустимой; следовательно, установка должна быть по возможности простой, чтобы проведение самого опыта не занимало много времени.

В ходе поисков были придуманы и опробованы различные устройства. Это и подвешивание груза к нити, закрепленной за один конец, и использование рычага с изменяемым отношением плеч, и применение соленоида с сердечником (так называемые электромагнитные весы).

После многих проб выбор пал на одну из наиболее простых установок, сделанную на основе обычного школьного динамометра (максимальное показание 4 Н, цена деления 0,1 Н). К основанию динамометра была прикреплена линейка для измерения длины нитей. На проволочный стержень, которым заканчивается пружина динамометра, был насажен движок, могущий двигаться по шкале с небольшим трением. С его помощью фиксировались показания динамометра. К крючку динамометра привязывался пучок нитей (10—15 штук). Из пучка выбиралась одна нить, по линейке измерялась ее длина, а затем нить резко тянулась за свободный конец. Стрелка, двигаясь по шкале динамометра, толкала движок. После разрыва нити стрелка возвращалась в исходное положение, а движок указывал значение силы, при которой произошел разрыв нити, то есть прочность образца.

Для опытов использовались нити длиной 2, 3, от 5 до 30 с интервалом 5 и, наконец, 40 см. Для каждой длины проводилось 10—15 опытов и находилось среднее значение прочности нити. По полученным данным был построен график зависимости прочности шерстяной нити от ее длины (рис. 1). Из графика видно, что по мере увеличения длины образца прочность нити уменьшается. Как это можно объяснить?

Оказывается, все дело во внутреннем устройстве шерстяных нитей. Каждая нить состоит из большого числа отдельных ворсинок толщиной 30—50 мкм, скрученных между собой. Длина разных ворсинок разная: от 4 до 40 см. Во время опыта была измерена длина около ста ворсинок, при этом средняя длина оказалась равной 8,1 см, в интервал от 4 до 13 см попало 89% общего числа ворсинок, а очень коротких и очень длинных ворсинок было совсем мало.

Рассмотрим предельно упрощенную модель — нить, состоящую из большого числа абсолютно одинаковых ворсинок (одинаковой длины, площади поперечного сечения и прочности). Ворсинки свиты между собой так, что в каждом сечении нити количество ворсинок одно и то же. Исключение составляют лишь некоторые участки (будем называть их дефектами), где в силу тех или иных причин толщина нити уменьшена.

Допустим, что нить имеет длину, бо́льшую длины одной ворсинки. Как известно из практики, рвется всегда там, где тонко. Это справедливо и по отношению к нашей нити: для разрыва утоньшенного участка нити требуется сила, меньшая той, которая необходима для разрыва остальной части нити. Обозначим первую силу через F_1, а вторую — через F_1'. Поскольку ворсинок много, можно считать, что дефекты распределены по нити равномерно и что

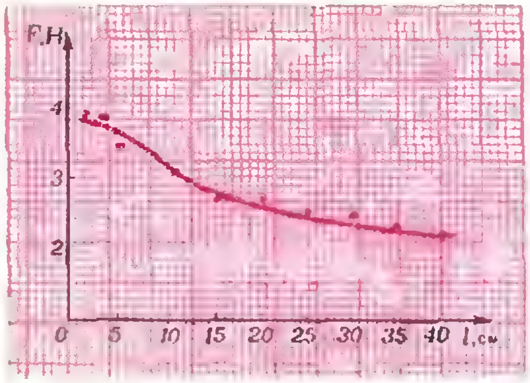


Рис. 1

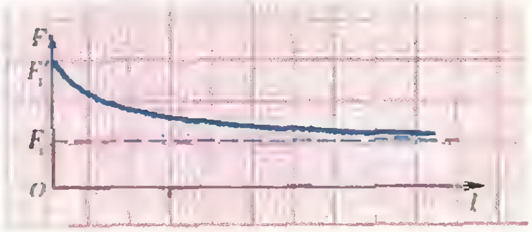


Рис. 2.

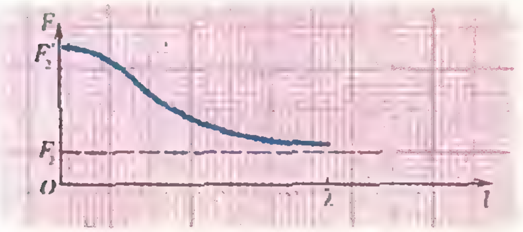


Рис. 3.

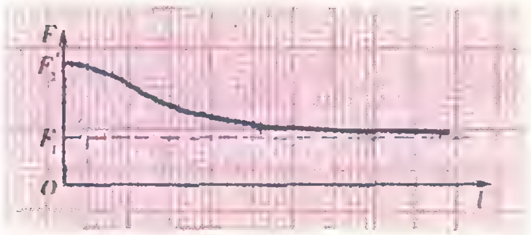


Рис. 4.

вероятность обнаружения на выбранном образце хотя бы одного дефекта зависит только от длины образца. Если для участка единичной длины вероятность наличия дефекта равна α, то вероятность отсутствия дефекта на этом участке будет $(1-\alpha)$, а на длине l — $(1-\alpha)^l$. Это означает, что в n опытах нить будет $n(1-\alpha)^l$ раз разрываться при силе F_1' и $n(1-(1-\alpha)^l)$ раз — при силе F_1. Тогда средняя сила, разрывающая нить, будет равна

$$F = \frac{n(1-\alpha)^l F_1' + n(1-(1-\alpha)^l)F_1}{n} = F_1 + (1-\alpha)^l (F_1' - F_1).$$

График зависимости $F = F(l)$ изображен на рисунке 2. Из графика видно, что при бесконечно большом увеличении длины нити средняя сила убывает до значения F_1, а при уменьшении длины до нуля она возрастает, приближаясь к значению F_1'. В эксперименте тоже наблюдалось уменьшение прочности нити при возрастании ее длины (см. рис. 1).

Предположим теперь, что длина нити порядка длины ворсинки и меньше. Тогда вероятность наличия дефекта в нити невелика, и основную роль в изменении прочности нити играет другой фактор: при разрыве нити ворсинки не рвутся, а лишь проскальзывают друг относительно друга. Очевидно, что сила, вызывающая проскальзывание (обозначим ее через F_2), значительно меньше силы, необходимой для разрыва ворсинки (обозначим ее через F_2'). Для определенности будем считать, что ворсинка может проскальзывать, если хотя бы один ее конец свободен. Из всего количества ворсинок, составляющих нить, часть ворсинок окажутся захваченными только за один конец, и они смогут проскальзывать; остальные ворсинки окажутся захваченными за оба конца, проскальзывание будет невозможным, и придется их разрывать. При длине нити, практически равной длине ворсинок λ, почти все ворсинки смогут скользить; следовательно, для разрыва нити понадобится сила F_2. При уменьшении длины нити до нуля, наоборот, все ворсинки окажутся захваченными за оба конца, так что придется приложить силу F_2'. Примерный график зависимости средней силы, необходимой для разрыва нити с длиной порядка длины ворсинки, изображен на рисунке 3.

Совместив графики, приведенные на рисунках 2 и 3, получим результирующую теоретическую кривую зависимости прочности нити от ее длины (рис. 4). Хотя предложенную упрощенную модель и нельзя считать идеальной, она дает хорошее согласование с экспериментом.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Сила и деформация» предназначена восьмиклассникам, заметка «О силах поверхностного натяжения» — девятиклассникам и «Энергия и громкость звука» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Сила и деформация

Слово «сила» — одно из наиболее употребляемых слов. В обыденном языке оно может иметь самые разные значения. Но в механике смысл этого слова вполне ясен. Все, что можно сказать о механической силе вообще, содержится в законах Ньютона.

В законе, числящемся под номером три, говорится, что сила, а точнее, силы возникают при взаимодействии тел. Из второго закона Ньютона следует, что *сила — это причина ускорения* тел, то есть изменения их скорости. Наконец, первый закон Ньютона утверждает, что при отсутствии сил или при равенстве нулю геометрической суммы приложенных к телу сил оно, тело, движется без ускорения. Все три закона сформулированы для случая, когда движение рассматривается относительно инерциальной системы отсчета.

Казалось бы, роль силы в механике ясна: сила сообщает телу, к которому она приложена, ускорение. Согласно законам механики, это ее единственная «специальность».

Между тем иногда встречаются (даже в учебниках физики) утверждения о том, что сила не только сообщает телу ускорение, но и деформирует его. В первом случае говорят о динамическом, а во втором — о статическом проявлении силы. Так, в одном из учебных пособий, рекомендованных старшеклассникам, читаем: «Результатом взаимодействия тел является либо деформация (изменение размеров или формы тела), либо ускорение (изменение величины или направления скорости). Конечно, не исключено, что одновременно могут возникать и деформации, и ускорения». Еще пример. В учебнике для высшей школы, пользующемся всемирной известностью, сила определяется следующими словами: «Понятие „сила“ происходит от нашего мускульного ощущения. Качественно сила определяется двумя признаками: она может деформировать неподвижное твердое тело и ускорять подвижное тело». В других книгах читаем: «Силой называется то, что вызывает или прекращает движение, изменяет направление движения или изменяет форму тела» или «сила — векторная величина, характеризующая взаимодействие тел, в результате которого тела деформируются или приобретают ускорения... Статическое действие силы проявляется в наличии деформаций, динамическое — в наличии ускорений». Число таких примеров можно увеличить, хотя в большинстве современных книг по физике силу с деформацией непосредственно не связывают.

Как же, в самом деле, связаны между собой силы, ускорения и деформации?

Сила — причина ускорения. Повторим еще раз, что в трех законах Ньютона, с помощью которых может быть решена любая механическая задача, нет и намека на такое явление, как деформация тел. Да и не может быть, потому что законы Ньютона относятся к движению *материальных точек* (это постоянно подчеркивается в учебнике «Физика 8»). А точки, разумеется, деформироваться не могут! Уже отсюда следует, что силу, в соответствии с законами Ньютона, следует рассматривать как причину ускорения и только ускорения.

Однако связь между силой и деформацией действительно существует. Прежде всего она состоит в том, что одна из трех рассматриваемых в учебнике механических сил — сила упругости — возникает именно при деформации тел. Но ведь это означает, что сила (по крайней мере сила упругости) есть *следствие* деформации. Как же тогда понимать приведенные выше утверждения о том, что сила — это *причина* деформации? Быть может, они просто не имеют смысла? Чтобы ответить на эти вопросы, вспомним

Как возникают деформации? Деформации — это изменения формы или размеров тела. Они невозможны без изменения взаимного расположения частиц тела. При деформации растяжения, например, расстояния между частицами тела увеличиваются, частицы удаляются друг от друга. При сжатии тела его частицы, наоборот, *сближаются*. Таким образом, непосредственная причина деформации — это *движения* одних частиц тела относительно других. Движения, а не силы!

Но и силы играют существенную роль, потому что именно от *них* зависят те движения, которые приводят к деформации тела. Однако роль сил не прямая, а косвенная. Сила непосредственно не вызывает деформации.

И деформация, и ускорение. Рассмотрим более подробно, каким образом сила, приложенная к телу, сообщает ему ускорение и какую роль при этом играет деформация.

Допустим, что к телу массой m, имеющему, например, форму стержня, приложена постоянная сила $\vec{F}$ так, как это показано на рисунке 1. Оговорим только, что $\vec{F}$ — не сила всемирного тяготения. Поскольку сила приложена к правому торцу стержня, *она непосредственно сообщит ускорение лишь точкам* (частицам) на этом торце. Только они, эти точки, и получат ускорение в начальный момент времени. Остальные точки стержня останутся в покое, так как к ним сила не приложена. Благодаря этому стержень деформируется, возникает сила упругости, и она (а не сила $\vec{F}$!) сообщает ускорение следующему слою точек и т. д. *Постепенно*, хотя и очень быстро (со скоростью звука), деформация распространится по всему стержню, в результате чего весь стержень станет двигаться с ускорением $\vec{a}$, равным $\vec{F}/m$.

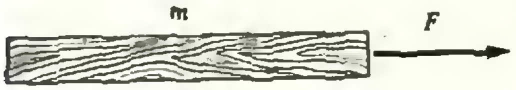


Рис. 1

Таким образом, в рассмотренном случае тело под действием приложенной к нему силы движется с ускорением и *при этом оказывается* деформированным. В том, что тело деформировано, «виновата», конечно, и сила $\vec{F}$, но ее роль не прямая. Тело оказалось деформированным, поскольку разные его точки двигались относительно друг друга. *То, что роль силы при деформации* лишь косвенная, видно уже из того, что величина и характер деформации не определяются однозначно приложенной силой, а зависят и от материала стержня, *и от однородности* его по сечению и составу. Ускорение же стержня однозначно определяется действующей на него силой.

Ускорение без деформации. Важно отметить также, что сила, приложенная к телу, может *и не вызвать* деформацию. Если эта сила — сила тяжести (вообще, сила всемирного тяготения), то картина движения будет совсем иной. Силы тяжести, как известно, действуют сразу на все точки тела и сообщают им одно и то же ускорение $\vec{g}$. Поэтому все точки будут двигаться одинаково, так что движения одних точек относительно других не будет. Не будет, следовательно, и деформации.

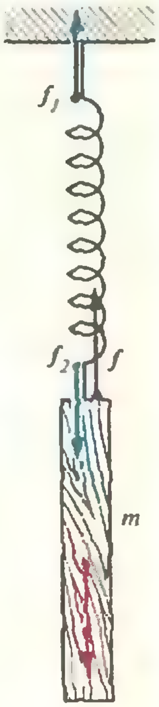


Рис. 2

Деформация без ускорения. Рассмотрим теперь такой случай. К невесомой пружине, верхний конец которой прикреплен к неподвижной подставке, подвешивается тело массой m (рис. 2). Под действием силы тяжести тело, конечно, начинает падать. Вместе с ним приходит в движение и нижний конец пружины. Поэтому пружина деформируется, и возникает сила упругости, действующая на верхний конец тела. Так как сила тяжести действует на все части тела, а сила упругости только на его верхний конец, различные части тела будут двигаться по-разному и тело окажется деформированным. Сила упругости, возникшая вследствие этого, будет действовать на нижний конец пружины и т. д.

Легко понять, что в конце концов и пружина, и тело остановятся. Это значит, что сумма сил, действующих и на пружину, и на тело, будет равна нулю. На пружину действует сила упругости со стороны деформированной подставки и сила упругости деформированного тела (силы $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ на рисунке 2). На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости деформированной пружины $\vec{f}$. Все тела нашей системы деформированы, но ни одно из них не обладает ускорением.

Очевидно, именно эту ситуацию имеют в виду, когда говорят о статическом действии силы, то есть о действии силы, приводящем к деформации, но не ускорению (действительно, в нашем примере речь может идти об этом). Однако надо понимать, что в случаях, подобных рассмотренному, ускорения нет потому, что и на тело, и на пружину действуют две силы и их сумма равна нулю. Разумеется, ни при каких условиях одна сила (или несколько сил, если их сумма не равна нулю) не может деформировать тело, не сообщив ему и ускорения тоже. У силы (одной!) не может быть статического действия. Сила — величина *динамическая*.

О силах поверхностного натяжения

Особые свойства поверхности жидкости связаны с тем, что молекулы на поверхности имеют много соседей с одной стороны, в глубине жидкости, и мало с другой — над ее поверхностью. Благодаря этому на молекулы, находящиеся на поверхности, действуют силы, направленные в глубь жидкости, перпендикулярно к ее поверхности. Эти силы складываются и оказывают давление на жидкость, которое уравновешивается давлением, вызванным силами упругости самой жидкости.

Между тем многочисленные опыты, например описанные в учебнике «Физика 9», говорят о том, что на поверхности жидкости действуют силы, направленные не перпендикулярно, а по касательной к поверхности (делая ее похожей на упругую пленку). Это отражено и в названии — силы поверхностного натяжения. Выходит, что реальные силы, действующие на молекулы поверхности, направлены перпендикулярно к ней, а сил собственно поверхностного натяжения в действительности нет?

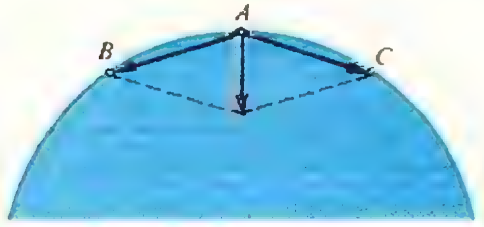
Оказывается, силы, направленные по касательной к поверхности, действительно существуют, но возникают они только тогда, когда поверхность жидкости разрывается какими-нибудь посторонними телами, твердыми или жидкими. Если же никакие другие тела с жидкостью не соприкасаются (кроме ее собственного пара), сил поверхностного натяжения нет. Это нетрудно понять. В самом деле, любая молекула внутри объема жидкости окружена со всех сторон другими молекулами, действующими на нее с силами, равномерно распределенными по всем направлениям, поэтому эти силы уравновешиваются. Это относится ко всем молекулам жидкости, кроме лежащих на ее поверхности. На них, как было указано, действуют силы, направленные внутрь жидкости, нормально к ее поверхности. Жидкость как бы стремится втянуть в себя молекулы поверхности, или, что то же самое, по возможности уменьшить свою поверхность.

Как известно из математики, наименьшей поверхностью при данном объеме обладает шар. Вот почему жидкость, предоставленная самой себе и не подверженная действию никаких внешних сил, кроме силы тяжести, принимает форму шара. Сила тяжести не влияет на форму жидкости потому, что она сообщает всем ее частицам одинаковое ускорение и не меняет взаимного расположения частиц.

Итак, жидкость, находящаяся только под действием силы тяжести, движется с ускорением $\vec{g}$ (пребывает в состоянии невесомости) и сохраняет форму шара. Но на любую молекулу *A* сферической поверхности жидкости действуют еще силы притяжения со стороны ее ближайших соседей *B* и *C*, лежащих на той же поверхности (см. рисунок). Равнодействующая этих сил, очевидно, тоже направлена перпендикулярно к поверхности, и никаких сил, касательных к поверхности, нет.

То же относится и к случаю, когда поверхность жидкости плоская (такова бо́льшая часть поверхности жидкости, находящейся в широком сосуде). Действительно, любая молекула на плоской поверхности также со всех сторон окружена другими молекулами, расположенными на той же поверхности. Они действуют на неё с силами, равномерно распределенными по всем направлениям на плоскости и потому взаимно уравновешивающимися. Следовательно, и на плоской поверхности нет сил поверхностного натяжения.

Но когда поверхность жидкости разрывается, например, твердым телом, то на молекулы, находящиеся вблизи поверхности этого тела, действуют дополнительные силы со стороны его молекул. Эти силы могут и не уравновешиваться силами притяжения к молекулам самой жидкости. Вот тогда и появляются силы поверхностного натяжения. Они могут оказывать различные действия, в частности — изменять форму поверхности жидкости. Этим объясняется, например, образование мениска вблизи стенок сосуда с жидкостью.



Особенно резко выражены силы поверхностного натяжения в тонких пленках, опыты с которыми подробно описаны в «Физике 9». Такие пленки не могут существовать без ограничивающего их поверхность твердого тела. Но когда тонкая пленка создается в виде мыльного пузыря, то она принимает форму шара и никаких сил поверхностного натяжения не возникает.

Таким образом, силы поверхностного натяжения появляются только в случае, когда силы взаимодействия между молекулами жидкости перестают уравновешиваться.

Энергия и громкость звука

Различные звуки, воспринимаемые органом слуха человека, отличаются друг от друга, прежде всего, частотой колебаний. Камертон, например, издает звук одной единственной частоты, которая определяет его тон. Тот же тон, издаваемый скрипкой, пианино или гитарой, звучит для нас иначе, хотя ухо и улавливает, что это звуки одного тона. Это отличие связано с тем, что в сложном музыкальном звуке частоте, определяющей основной тон звука, сопутствуют и другие частоты — обертоны. Они-то и придают звуку особое качество — тембр. Есть звуки, которым нельзя приписать определенную частоту или даже набор частот. Это шумы. В шуме содержатся самые разнообразные частоты, часто и беспорядочно сменяющие друг друга. Шум — это скрип несмазанных дверей (вроде дверей в доме гоголевских старосветских помещиков), дребезжание оконных стекол, беспорядочные крики толпы и т. д.

Но любые звуки различаются еще и громкостью. Звук одного и того же источника, одного и того же тона и тембра может быть более и менее громким. Обсудим это подробнее.

Звуковая волна несет с собой энергию — энергию колебаний частиц среды, в которой она распространяется. С этой энергией и связана громкость звука. Но связь эта не такая простая, как может показаться.

Каждая единица объема среды, в которой распространяется звуковая волна, обладает, как можно показать, энергией $w=\varrho v_m^2/2$, где ϱ — плотность среды и v_m— амплитуда колебаний скорости колеблющейся частицы. Амплитуда же скорости равна ωx_m, где ω — циклическая частота колебаний и x_m — амплитуда колебаний частиц (см. «Физику 10»), так что энергия единицы объема, то есть плотность энергии, равна

$$w=\frac{\varrho\omega^2 x_m^2}{2}.$$

Но волна распространяется с некоторой скоростью v (эта скорость обычно велика по сравнению со скоростью v_m), так что энергия как бы течет в направлении распространения волны. Если мысленно представить себе площадку площадью S, перпендикулярную направлению распространения волны, то за время t через нее «протечет» энергия, заключенная в объеме Svt и равная $\varrho\omega^2 x_m^2 Svt/2$. Отсюда следует, что за единицу времени через площадку единичной площади пройдет энергия, равная

$$I=wv=\frac{\varrho\omega^2 x_m^2}{2}v.$$

Величина I называется интенсивностью звука. Она измеряется в Дж/ (м^2 • с), или в Вт/м^2.

Ухо человека особенно чувствительно к частотам порядка 1000 герц. При такой частоте интенсивность самого слабого звука, который еще можно услышать, равна всего 10^{-12} Вт/м^2. При обычном разговоре интенсивность не превышает 10^{-5} Вт/м^2 Самые мощные звуки органных труб проносят через каждый квадратный метр мощность порядка 10^{-3} Вт/м^2. Звук интенсивностью 1 — 10 Вт/м^2 вызывает боль в ушах и ощущается кожей. Таким образом, орган слуха человека воспринимает звуки, интенсивности которых простираются от 10^{-12} до 10 Вт/м^2. Самый мощный звук по интенсивности превосходит самый слабый в 10^{13} раз!

Однако у нас никогда не бывает такого ощущения, что один звук в миллионы или даже в миллиарды раз громче другого. Оказывается, надо различать интенсивность звука и его громкость. Если интенсивность одного звука в десять, сто или миллион раз больше интенсивности другого звука, то это вовсе не значит, что он во столько же раз и громче. Громкость звука оценивается физиологически, с участием нервной системы и мозга человека. А физиология слуха такова, что удвоение интенсивности звука не воспринимается как удвоение его громкости. Связь громкости с интенсивностью звука вот какая.

По логарифмическому закону. Обратимся сначала к звукам частоты 1000 Гц. Самый слабый звук, который еще может воспринять ухо на этой частоте, называемый порогом слышимости, имеет интенсивность 10^{-12} Вт/м^2. Будем считать, что громкость этого звука равна нулю. Громкость звука той же частоты, но с интенсивностью в 10 раз большей равна одной единице, называемой «бел», или десяти единицам, называемым «децибел» (краткое обозначение — дБ). Громкость звука, интенсивность которого еще в 10 раз больше, увеличивается еще на 10 децибел и т. д. Другими словами, когда интенсивность звука умножается, громкость прибавляется.*)

---

*) Этот закон был открыт немецким анатомом и физиологом Э. Вебером (1795—1878), а немецкий физик и психолог Г. Фехнер (1801—1887) придал ему математическую форму, поэтому закон называется законом Вебера—Фехнера. Он гласит: сила ощущения пропорциональна логарифму силы раздражения. Это справедливо не только для восприятия звука, но и для других ощущений человека.

Математически этот закон выглядит так. Обозначим интенсивность некоторого звука частоты 1000 Гц через I, а интенсивность у порога слышимости на той же частоте через I_0. Тогда громкость звука L интенсивности I, выраженная в белах, равна

$$L_б = \lg \frac{I}{I_0},$$

а в *децибелах* —

$$L_{дб} = 10 \lg \frac{I}{I_0}.$$

Звук частоты 1000 Гц может входить в состав звуков, издаваемых человеком, ведущим тихий разговор, и человеком, кричащим во весь голос. В первом случае интенсивность звука равна примерно 10^{-8} Вт/м², во втором — 10^{-4} Вт/м², громкость же первого звука равна 40 дБ, второго 80 дБ. Это, однако, не значит, что громкость крика вдвое больше громкости тихого разговора. Об этих двух звуках говорят, что один из них на 40 дБ громче другого. Заметим, кстати, что разность громкостей в 1 дБ — это наименьшая разность в громкости, которую может уловить человеческое ухо.

Универсальная единица громкости — фон. Приведенный выше логарифмический закон верен, разумеется, не только для звуков частоты 1000 Гц. Но для других частот интенсивности у порога слышимости другие. Так, например, при частоте около 100 Гц она равна 10^{-8} Вт/м², то есть в 10^4 раз больше, чем для частоты 1000 Гц. Согласно формуле для громкости, это означает, что если громкость какого-то звука на частоте 1000 Гц оценивается в 80 дБ, то на частоте 100 Гц равногромкий звук должен оцениваться лишь в 40 дБ.

Желательно, однако, ощущение громкости характеризовать однозначно, чтобы равногромкие (на слух) звуки оценивались одним и тем же числом, независимо от тона или тембра звука. Поэтому вводится специальная единица громкости — фон. Фон — это разность громкостей звуков, для которых разность интенсивностей равногромких с ними звуков частоты 1000 Гц равна 1 дБ. Таким образом, для звуков частоты 1000 Гц шкалы децибелов и фонов, естественно, совпадают. Для других частот это не так. Если какой-либо звук вызывает на слух такое же ощущение, как звук частоты 1000 Гц и интенсивности I, то громкость этого звука в фонах выражается формулой

$$L_ф = 10 \lg \frac{I}{I_0},$$

где I_0 — интенсивность звука у порога слышимости при частоте 1000 Гц.

В заключение приведем несколько значений громкости часто встречающихся звуков:

Порог слышимости	0	фонов
Шепот	20	»
Тихий разговор	40	»
Нормальный разговор	50	»
Громкий разговор	60	»
Уличный шум	70	»
Крик	80	»
Шум мотоцикла (без глушителя)	100	»
Шум мотора самолета	120	»
Предел болевого ощущения	130	фонов.

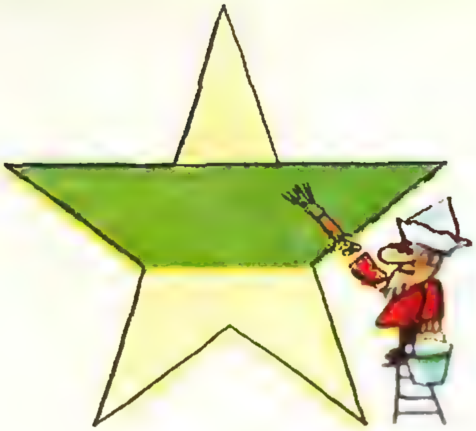
Торные тропы Торо

(Начало см. на с. 20)

сближение произойдет около 2200 года. Разумеется, это скажется и на взаимном расположении Торо и Земли (2200 год — это и год сближения Торо с Землей). В результате произойдет следующее: Земля окажется внутри замкнутого витка траектории Торо (внутри лепестка розетки, нарисованной на первой странице обложки).

Точные расчеты движения Торо с учетом возмущений, вносимых Землей, Венерой и Марсом, сделаны на несколько тысяч лет. Они показывают, что Торо никогда не приближается к Земле на расстояние, меньшее 0,1 а. е. По-видимому, исключена и вероятность столкновения Торо с Марсом. Если бы это было не так, то за миллиарды лет существования Солнечной системы Торо не удалось бы уцелеть.

Квант для младших школьников



Задачи

1. Возьмем два двузначных числа и перемножим их. Пусть A — их произведение. Теперь в каждом сомножителе переставим цифры и полученные числа также перемножим; получим число B. Докажите, что число $A-B$ делится на 99.

2. Покажите, что на рисунке закрашена ровно половина площади правильной пятиконечной звезды.

3. Два гроссмейстера возвращались в гостиницу после очередного тура ежегодного шахматного турнира.

— Три восьмых турнира позади,— сказал один.

— Да,— ответил другой.— А участников с каждым годом делается все больше. Подумай только, уже сыграно столько партий, сколько в прошлом году было сыграно за весь турнир!

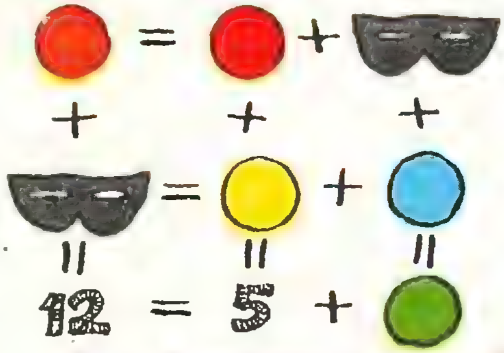
— Если дело так пойдет дальше,— усмехнулся первый,— то через несколько лет в турнире будет уже играть человек 30...

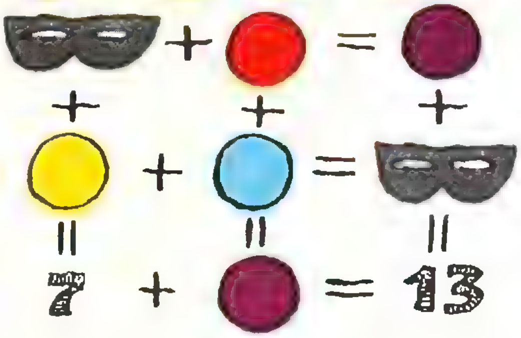
Сколько шахматистов играло в турнире?

4. Существует ли фигура на плоскости, не имеющая ни осей симметрии, ни центра симметрии, но переходящая в себя после поворота вокруг некоторой точки на угол, меньший 360°?

5. В ребусах на рисунке каждому цвету соответствует число. Однако некоторые цветные кружки закрыты черными масками. Найдите числа, соответствующие каждому из цветов, и цвета кружков под масками. (В этом ребусе, кроме правил сложения чисел, выполняются еще правила сложения цветов.)

Эти задачи нам предложили Н. И. Авилов, В. Н. Ветров, Н. Н. Михайленко, С. Н. Олехник, Д. Б. Фукс.





Решаем задачи по физике

Т. С. ПЕТРОВА

В февральском номере «Кванта» за этот год была опубликована статья «Дано... Требуется определить...». В этой статье приводились условия восьми задач. В условиях было сказано, что «дано», а что «требуется определить» — читателю предлагалось придумать самому и определить.

В редакцию пришло много писем, в которых читатели приводят свои законченные формулировки задач и их решения. Нам понравилось, как справились с заданием семиклассник Исмаил Эркенов из поселка Корф Камчатской области, шестиклассница Наташа Петрина из города Коканда Узбекской ССР, девятиклассник Ихтиёр Умрзаков из Новосибирска, шестиклассник Володя Любомиров из Вильнюса, пятиклассница Светлана Горохова из Ангарска, семиклассник Павел Лушников из Москвы, ребята из шестого класса школы № 68 со станции Углеуральская в Пермской области, Михаил Гаевский из города Воткинска Удмуртской АССР, восьмиклассник Каха Бабукашвили из Кутанси...

Давайте разберем присланные ребятами решения задач и по ходу дела обсудим те ошибки, которые встречались во многих письмах.

Задача 1. Две дороги пересекаются под прямым углом. Участки дорог, образующие перекресток, покрыли асфальтом. Длина каждого участка 25 м, ширина 4 м. На покрытие израсходовали 5520 кг асфальта. *Сколько асфальта расходуется на покрытие 1 $м^2$ дороги?*

Ответ: 30 кг.

Во многих решениях встречалась одна и та же ошибка — не учитывалось, что в месте пересечения дорог (рисунок 1) асфальтом покрывают только одну из них. Некоторые читатели придумали к этой задаче другой вопрос: чему равна толщина покрытия? Что же, формально этот вопрос правомочен. Но жизненный опыт под-

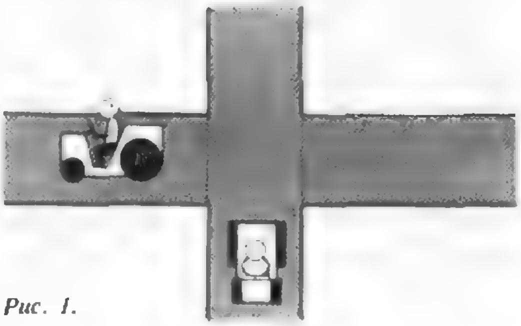
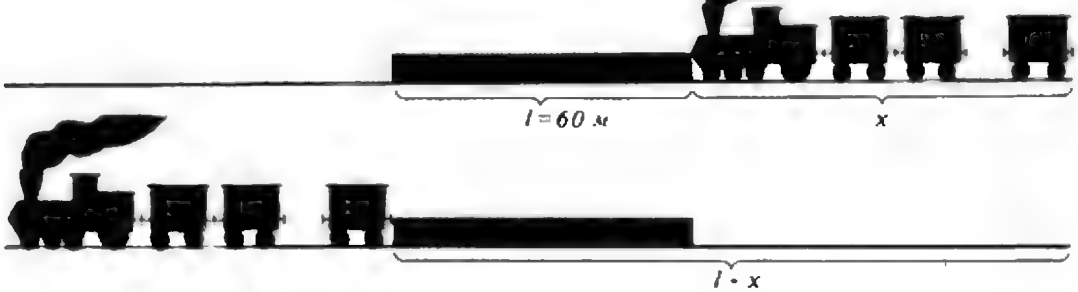


Рис. 1.



сказывает, что покрытие всегда очень неравномерно; так что имеет смысл говорить только о некоторой средней толщине. А ответы получались самые разнообразные — от 1 мм до 1,5 м.

Задача 2. Стальной шар, масса которого равна 1,2 кг, имеет объем 200 см^3. *Чему равен объем полости внутри шара?*

Решение. Плотность стали равна 7,8 г/см^3 (это значение берем из таблиц). Стальное тело массы $m=1{,}2$ кг $=1200$ г должно иметь объем

$$V_{\text{ст}}=\frac{m_{\text{ст}}}{\varrho_{\text{ст}}}=\frac{1200\text{ г}}{7{,}8\text{ г/см}^3}\approx 150\text{ см}^3.$$

Следовательно, в стальном шаре объема 200 см^3 имеется полость, объем которой равен

$$V_{\text{п}}=V-V_{\text{ст}}\approx 200\text{ см}^3-150\text{ см}^3=50\text{ см}^3.$$

Ответ: 50 см^3.

Во многих письмах к этой задаче ставили вопрос: чему равна плотность стали? Решение такой задачи очевидно: $\varrho=m/V=6$ г/см^3. И на этом успокаивались. Но ведь этот ответ можно проверить по табличным данным. Несовпадение полученного ответа с табличным значением $\varrho_{\text{ст}}=7{,}8$ г/см^3 наталкивает на мысль, что что-то в условии не так. Что? Нам кажется, что при таком ходе рассуждений неминуемо придешь к выводу, что в шаре есть полость. И тогда вопрос об объеме этой полости напрашивается сам собой.

Задача 3. Длина платформы железнодорожной станции равна 60 м. Товарный состав, движущийся со скоростью 45 км/ч, идет мимо платформы 16 с. *Определить длину состава.*

Решение ясно из рисунка 2:

$$l+x=vt\Rightarrow x=vt-l.$$

Подставляя $v=45$ км/ч $=\frac{45\,000}{3600}$ м/с $=12$ м/с, $t=16$ с и $l=60$ м, получаем $x=140$ м.

Ответ: 140 м.

В нескольких письмах повторялась одна и та же ошибка: вычисляя x, скорость v подставляли численно равной 45, то есть в единицах км/ч, а время — равное 16, то есть измеренное в секундах. Это очень грубая ошибка!

Задача 4. Атмосферное давление у поверхности Венеры — 10,3 МПа, сила тяжести — в 1,2 раза меньше, чем на Земле. *Какова будет на Венере высота столба ртути в барометрической трубке?*

Решение. Высота h столба ртути определяется из условия $p_{\text{В}}=\varrho_{\text{рт}}g_{\text{В}}h$, где $g_{\text{В}}$ — ускорение свободного падения на Венере. Сила тяжести, действующая на тело массы m, на Венере равна $F_{\text{В}}=g_{\text{В}}m$, а на Земле $F_{\text{З}}=g_{\text{З}}m$. Масса тела и на Земле, и на Венере одна и та же, а $F_{\text{З}}/F_{\text{В}}=1{,}2$. Следовательно, $g_{\text{В}}=g_{\text{З}}/1{,}2=8{,}2$ м/с^2. Таким образом,

$$h=\frac{p_{\text{В}}}{\varrho_{\text{рт}}g_{\text{В}}}=\frac{10{,}3\cdot 10^6\text{ Па}}{13{,}6\cdot 10^3\text{ кг/м}^3\cdot 8{,}2\text{ м/с}^2}\approx 91\text{ м}.$$

Задача 5. Металлический шар массы 900 г, нагретый до 155°С, опустили в калориметр, в котором было 3 л воды при температуре 10°С. В результате в калориметре установилась температура 15°С. Теплоемкость калориметра пренебрежимо мала по сравнению с темплоемкостью шара и воды. *Определить, из какого металла сделан шар.*

Ответ: шар сделан из стали. (Из закона сохранения энергии определяем удельную теплоемкость металла: $c=500$ Дж/(кг·°С). По таблицам находим, что такую теплоемкость имеет сталь.)

Задача 6. В цилиндрическом сосуде с площадью дна 125 см^2 находится вода. Когда в сосуд положили кубик льда, уровень воды повысился на 9 мм. *Чему равна длина ребра ледяного кубика?*

Решение. Представим себе, что кубик льда, помещенный в сосуд,

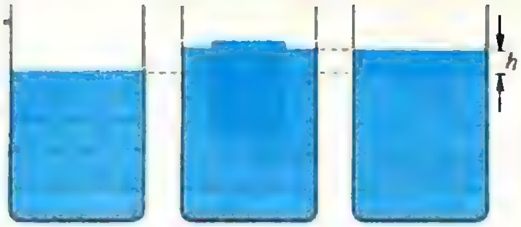


Рис. 3.

растаял в воде (рисунок 3). Масса воды в сосуде будет равна массе первоначальной воды (в сосуде без льда) плюс масса воды, образовавшейся из льда, то есть плюс масса кубика. Объем, занимаемый этой «дополнительной» водой (он выделен на рисунке 3), равен $V_в = Sh$; масса этой воды — $m = \varrho_в V = \varrho_в Sh$ — равна массе ледяного кубика; но масса кубика равна $m = \varrho_л V_л = \varrho_л a^3$ (a — длина ребра кубика). Следовательно, $\varrho_в Sh = \varrho_л a^3$, откуда

$$a = \sqrt[3]{\frac{\varrho_в Sh}{\varrho_л}} = \sqrt{\frac{1\ г/см^3 \cdot 125\ см^2 \cdot 0{,}9\ см}{0{,}9\ г/см^3}} = 5\ см.$$

Ответ: 5 см.

Большинство читателей формулировали вопрос к этой задаче так: найти объем кубика. По существу, решение такой задачи совершенно аналогично тому, которое мы только что привели. Однако в такой постановке вопроса не используется тот факт, что кусок льда имеет форму куба.

Задача 7. Сопротивление железной проволоки, масса которой 390 г, равно 5 Ом. *Определить длину и площадь поперечного сечения проволоки.*

Решение. Сопротивление проволоки равно $R = rl/S$, где $r = \frac{9.8}{10^8}$ Ом·м — удельное сопротивление железа (мы обозначили его буквой r, чтобы не путать с плотностью ϱ). Масса проволоки — $m = \varrho l S$, где $\varrho = 7880$ кг/м^3 — плотность железа. Из последнего равенства выразим l через S: $l = m/(\varrho S)$; подставляем это значение в выражение для R: $R = rm/(\varrho S^2)$. Отсюда найдем S:

$$S = \sqrt{\frac{rm}{R\varrho}} = \sqrt{\frac{(9{,}8/10^8)\ (Ом \cdot м) \cdot 0{,}39\ кг}{5\ Ом \cdot 7880\ кг/м^3}} \approx \frac{1}{10^6}\ м^2 = 1\ мм^2.$$

Теперь находим l:

$$l = \frac{m}{\varrho S} = \frac{0{,}39\ кг}{7880\ кг/м^3 \cdot (1/10^6)\ м^2} \approx 50\ м.$$

Ответ: 50 м, 1 мм^2.

У разных читателей длина проволоки получалась от 5 см до 500 м. В связи с этим поговорим об одной ошибке. Вернее, это не сама ошибка, а следствие допущенной в решении ошибки. Вы получили ответ, а сверить его не можете — в задачнике не приведены ответы. Посмотрите, не получился ли ваш результат несуразным. Помните стихотворение С. Я. Маршака про нерадивого ученика, который решал задачу и получил в ответе «два землекопа и две трети»? Такая нелепица говорит сама за себя. А в других случаях оценить разумность полученных значений вам помогут наблюдательность, сообразительность, интуиция. Вернемся к нашей задаче. Житейские соображения подсказывают, что железная проволока длиной 5 см не может иметь массу 390 г, а моток железной проволоки длиной полкилометра не так-то просто поднять.

Задача 8. Два ползунковых реостата, рассчитанных на сопротивление 20 Ом каждый, намотаны один из никелиновой проволоки, а другой — из нихромовой. Длины проволок, использованных для обмоток, одинаковы. *У какой из проволок площадь поперечного сечения больше? Во сколько раз?*

Решение этой задачи запишем конспективно:

$$R = \varrho_{ник} \frac{l}{S_{ник}} = \varrho_{нихр} \frac{l}{S_{нихр}};$$

$$\frac{S_{нихр}}{S_{ник}} = \frac{\varrho_{нихр}}{\varrho_{ник}} = \frac{1{,}1\ Ом \cdot мм^2/м}{0{,}4\ Ом \cdot мм^2/м} = 2{,}75.$$

Ответ: площадь сечения нихромовой проволоки в 2,75 раза больше.

* * *

Итак, с задачами мы разобрались. Те, кто решил их неправильно, смогут теперь сами понять, в чем ошибка.

задачник кванта

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 29 февраля 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М836, М837» или «Ф848». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М836—М840 предлагались на XXIV Международной математической олимпиаде (с. 46).

М836—М840; Ф848—Ф852

М836. Пусть A — одна из точек пересечения двух окружностей с центрами O_1 и O_2, P_1P_2 и Q_1Q_2 — общие касательные, M_1 и M_2 — середины хорд P_1Q_1 и P_2Q_2 этих окружностей (рис. 1). Докажите равенство углов O_1AO_2 и M_1AM_2.

И. Ф. Шарыгин

М837*. Пусть a, b, c — целые положительные числа, каждые два из которых взаимно просты. Докажите, что наибольшее из целых чисел, не представимых в виде

$$xbc+yca+zab$$

(где x, y, z — неотрицательные целые числа), равно

$$2abc-ab-bc-ca.$$

М838. Все точки, лежащие на сторонах правильного треугольника ABC, разбиты на два множества E_1 и E_2. Верно ли, что для любого такого разбиения в одном из множеств E_1 и E_2 найдется тройка вершин прямоугольного треугольника?

М839*. Можно ли выбрать 1983 натуральных числа, не превосходящих 10^5, так, чтобы среди выбранных чисел не было ни одной тройки чисел, составляющих арифметическую прогрессию (т. е. ни одной тройки a, b, c, в которой $a+c=2b$)?

М840*. а) Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполнено неравенство

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0.$$

Выясните, в каких случаях оно превращается в равенство.

б) Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab.$$

Ф848. По гладкому горизонтальному круговому желобу длины l катается шарик. Скорость v шарика известна с точностью $\varepsilon=\pm5\%$. При каких значениях v можно точно утверждать, что через время τ после того, как шарик находился в точке A (рис. 2), его нет в точке B?

Е. И. Рабкин

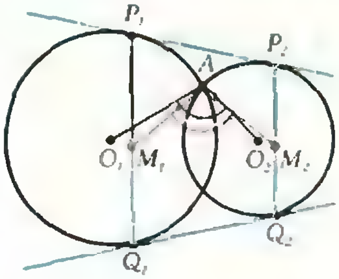


Рис. 1.

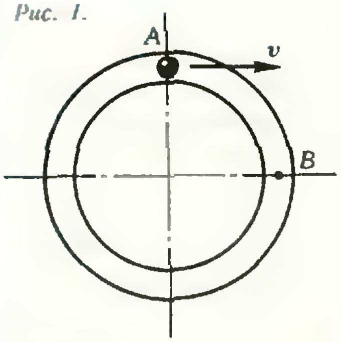


Рис. 2.

Ф849. Сухой термометр находящегося в комнате психрометра показывает температуру $t_1 = 18{,}0°\text{C}$, а влажный — $t_2 = t_1 - \Delta t = 15{,}0°\text{C}$. Не пользуясь таблицей, определите относительную влажность воздуха в комнате. Давление насыщенного водяного пара при указанных температурах равно, соответственно, $p_1 = 15{,}5$ мм рт. ст. и $p_2 = 12{,}8$ мм рт. ст. Молярная теплота испарения воды — $l = 4{,}07 \times 10^4$ Дж/моль; теплоемкость воздуха — $c = 20{,}8$ Дж/(моль · град) (при постоянном объеме).

И. С. Солодовников

Ф850. На рисунке 3 показана экспериментально полученная зависимость силы упругости пружины от ее длины. Найти период малых колебаний груза массы $m = 60$ г, подвешенного вертикально на этой пружине в поле тяжести.

В. И. Комов

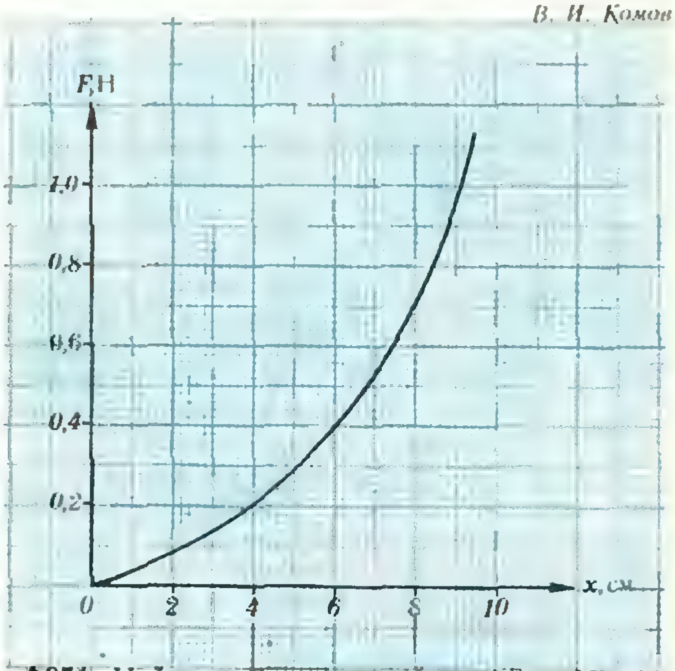


Рис. 3.

Ф851. Найти силу взаимодействия двух непроводящих половинок шара радиуса R, каждая из которых равномерно заряжена по объему с плотностью ϱ_1 и ϱ_2 соответственно. Диэлектрическую проницаемость материала шара считать равной единице.

И. В. Гребнев

Ф852. По горизонтальной непроводящей плоскости без проскальзывания катится равномерно заряженное кольцо массы m. После включения горизонтального магнитного поля с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости кольца (рис. 4), сила давления кольца на плоскость уменьшилась вдвое. С какой скоростью катилось кольцо, если его заряд равен q?

Л. Г. Маркович

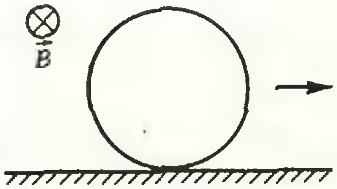


Рис. 4.

Problems

M836—M840; P848—P852

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 29 th, 1984, to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Problems M836 — M840 were proposed at the XXIVth International Mathematical Olympiad in Paris this summer.

M836. Suppose A is one of the intersection points of two circles with centres O_1 and O_2, P_1P_2 and Q_1Q_2 their common tangents, M_1 and M_2 the midpoints of their chords P_1Q_1 and P_2Q_2 (see figure Рис. 1). Prove that the angles O_1AO_2 and M_1AM_2 are equal.

I. F. Sharygin

M837*. Suppose a, b, c are positive integers. Prove that the largest integer which cannot be represented in the form

$$xbc+yca+zab$$

(where x, y, z are non-negative integers) equals

$$2abc-ab-bc-ca.$$

M838. All the points of the sides of an equilateral triangle ABC are partitioned into two sets E_1 and E_2. Is it true that for any such partition one of the sets E_1 or E_2 contains the three vertices of a right triangle?

M839*. Is it possible to choose 1983 natural numbers not exceeding 10^5 so that no three chosen numbers form an arithmetic progression (i. e. we never have $a+c=2b$ for any triple a, b, c of chosen numbers)?

M840*. a) Prove that the inequality

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$$

holds whenever a, b, c are the lengths of the sides of a triangle. Find all the cases when the equality sign holds.

b) Prove that for all positive numbers a, b, c

$$a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab.$$

P848. A small ball-bearing rolls along a horizontal circular trough of length l. The speed v of the ball-bearing is known with precision $\varepsilon=\pm 5\%$.
For what values of v can we claim without possible error that τ seconds after it was at the point A (figure Рис. 2) the ball-bearing will not be at the point B?

E. I. Rabkin

P849. A dry thermometer located in a psychrometer room shows a temperature $t_1=18.0°C$, a humid one — $t_2=t_1-\Delta t=15.0°C$. Without using a table, determine the relative humidity in the room. The pressure of saturated vapor at the temperatures indicated above is respectively $p_1=15.5$ mm Hg and $p_2=12.8$ mm Hg. The molar heat of water vaporization is $l=4.07\cdot 10^4$ J/mole; the heat capacity of air is $c=20.8$J/(mole · deg) (for constant volume).

I. S. Solodovnikov

P850. The figure Рис. 3 shows the experimental plot of the dependence of a spring's elastic force on its length. Find the period of small oscillations of a weight of mass $m=60$ g hanging vertically from the spring in the earth's gravitational field.

V. I. Komov

P851. Find the interaction force of two non-conducting halves of a ball of radius R, each of which is uniformely charged in volume with density ϱ_1 and ϱ_2 respectively. The dielectric conductivity of the material may be assumed equal to one.

I. V. Grebnev

P852. A uniformely charged hoop of mass m rolls without slipping on a non-conducting horizontal plane. After a horizontal magnetic field of induction $\vec{B}$ perpendicular to the hoop's plane is switched on, the pressure of the hoop on the plane becomes twice smaller (figure Рис. 4). With what velocity did the hoop roll, if its charge is q?

L. G. Marcovich

Решения задач

M821, M822, M824, M825*); Ф800, Ф833—Ф836

M821. *Решите уравнение* $x^3+x^2+x=-\frac{1}{3}$.

Перепишем уравнение в виде $3x^3+3x^2+3x+1=0$; получилась сумма кубов: $(x+1)^3+2x^3=0$. Запишем ее в виде $(x+1)^3=-2x^3$ и извлечем кубический корень из обеих частей: $x+1=-x\sqrt[3]{2}$; отсюда $x=-\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

Ю. И. Ионин

◆

M822. *Карточки четырех цветов — n зеленых, n красных, n синих и n жёлтых — сложены стопкой так, что через четыре карточки цвет повторяется (например, 1-я, 5-я, 9-я, ..., (4n—3)-я карточки — красные, 2-я, 6-я, ..., (4n—2)-я — жёлтые и т. д.). Несколько карточек сверху сняли, не перекладывая перевернули и произвольным образом вставили между оставшимися. После этого стопку разделили на n маленьких стопок по четыре карточки. Докажите, что в каждой из этих четверок встретятся карточки всех четырех цветов.*

Занумеруем цвета карточек числами 1, 2, 3, 4 таким образом, чтобы первоначальному расположению карт в колоде соответствовала последовательность

1234 1234...1234

(левый конец этой последовательности соответствует низу колоды, правый — ее верху).

Мы делим колоду на две части так, как показано на рисунке 1, после чего карточки части II переворачиваем и произвольно вставляем между карточками части I. В новой колоде в первой (снизу) четверке будет k карточек из начала части I (1, ..., k) и $4-k$ карточек из конца части II ($k+1$, ..., 4) — см. рисунок 2; очевидно, что при этом каждый цвет будет представлен по разу. Остатки частей I и II (без первой четверки карточек) примут вид, показанный на рисунке 3. Прежде чем двигаться дальше, перенумеруем цвета: $(k+1)$-й цвет получит номер 1, $(k+2)$-й цвет — номер 2, ..., 4-й номер — номер $(4-k)$, 1-й цвет — номер $(4-k)+1$, ..., k-й цвет — номер 4.

I *1234 ... 1234 1 ... s*

II *s+1 ... 4 1234 ... 1234*

Рис. 1.

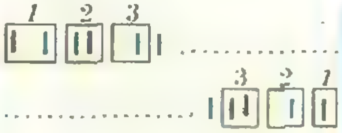


Рис. 2.

I *k+1 ... 4 1234 ... 1 ... s*

II *s+1 ... 4 1234 ... 1 ... k*

Рис. 3.

После этого части, изображенные на рисунке 3, будут выглядеть, как в самом начале, только номер s заменится каким-то номером t (рис. 4). Во второй четверке новой колоды (см. снова рисунок 2) будет l карточек из части I (новые номера 1, ..., l) и $4-l$ карточек из части II (новые номера $l+1$, ..., 4) — и снова каждый цвет будет представлен по разу. И так далее. Когда в новой колоде останется всего четыре карточки (каждую рассмотренную четверку карточек мы всякий раз убираем в новую стопку), часть I (точнее, её «остаток») будет иметь вид 1, ..., u, часть II — вид $u+1$, ..., 4, где u — номер, который после всех перенумераций получит цвет, имевший вначале номер s. И в этой последней четверке снова будут представлены все цвета.

I *1234 1234 ... 1 ... t*

II *t+1 ... 4 1234 ... 1234*

Рис. 4.

С. Б. Шлосман

◆

M824. *В сетке, изображенной на рисунке 1, каждая ячейка имеет размер 1×1. Можно ли эту сетку представить в виде объединения а) 8 ломаных длины 5; б) 5 ломаных длины 8?*

а) Можно. Обозначим некоторые узлы сетки, как показано на рисунке 2. Тогда наша сетка распадается в объединение восьми ломаных длины 5: AR_1S_1, $R_1R_2S_2$, $R_2R_3S_3$, R_3BC, AP_1Q_1, $P_1P_2Q_2$, $P_2P_3Q_3$, P_3DC. Есть и другие способы.

---

*) Задача M823 будет решена на «Геометрической страничке» в одном из следующих номеров «Кванта».

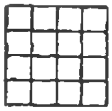


Рис. 1.

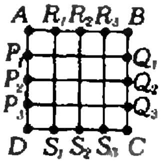


Рис. 2.

б) Нельзя. Заметим, что суммарная длина наших ломаных равна суммарной длине всех линий сетки, так что ломаные не могут давать в объединении всю сетку и в то же время пересекаться по отрезку прямой. Поэтому в каждой из точек R_1, R_2, R_3, Q_1, Q_2, Q_3, S_1, S_2, S_3, P_1, P_2, P_3 обязательно должен располагаться конец хотя бы одной ломаной. Так как концов всего 12, ломаных должно быть не меньше шести.

Н. И. Авилов

◆

М825. *Множество M состоит из k попарно непересекающихся отрезков, лежащих на одной прямой. Известно, что любой отрезок длины, не большей 1, можно расположить на прямой так, чтобы концы его принадлежали множеству M. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, не меньше $1/k$.*

Будем считать, что множество M расположено на числовой прямой и составлено из отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_k, b_k]$, $a_1<b_1<a_2<b_2<\ldots<b_k$. Длины этих отрезков обозначим, соответственно, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$. Для каждой пары номеров i и j $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant k)$ через M_{ij} обозначим множество длин отрезков с концами, лежащими на отрезках $[a_i, b_i]$, $[a_j, b_j]$. Эти множества, очевидно, на числовой прямой образуют отрезки, длины которых равны δ_i, если $i=j$, и $\delta_i+\delta_j$, если $i<j$. По условию задачи сумма длин этих отрезков не меньше 1. Следовательно,

$$\delta_1+(\delta_1+\delta_2)+\ldots+(\delta_1+\delta_k)+\delta_2+(\delta_2+\delta_3)+(\delta_2+\delta_4)+\ldots$$
$$\ldots+\delta_k\geqslant 1.$$

В сумме, написанной в левой части неравенства, каждое δ_j $(j=1, \ldots, k)$ встречается k раз. Таким образом, $k(\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k)\geqslant 1$, откуда $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k\geqslant\frac{1}{k}$, что и требовалось.

Е. И. Хухро

◆

Ф800. *Схема состоит из конденсатора емкости C, диодов D_1 и D_2 и катушек с индуктивностями L_1 и L_2, собранных, как показано на рисунке 1. Найти период колебаний напряжения на конденсаторе в этой схеме.*

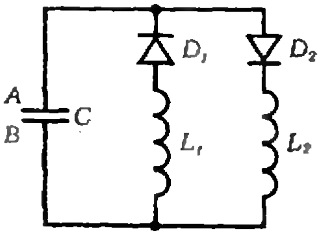


Рис. 1.

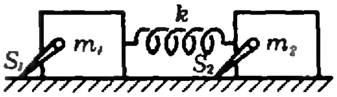


Рис. 2.

Эта задача довольно сложная, и разобраться в ней нам поможет аналогия с механическими колебаниями.

Нужная нам механическая система изображена на рисунке 2. Это два бруска с массами m_1 и m_2, лежащие на гладкой горизонтальной плоскости и соединенные пружиной с жесткостью k. Каждый из брусков снабжен стопором, позволяющим ему свободно двигаться вправо, но не допускающим движения влево. Координаты брусков в начальный момент обозначим x_1 и x_2', где $x_2'=l+x_2$, l — длина нерастянутой пружины.

Установим соответствие электрических и механических величин в наших колебательных системах.

Пусть положительному заряду Q на пластине A конденсатора соответствует растяжение пружины на длину x. Изменение x возможно за счет смещения каждого из брусков: $x=x_2-x_1$; скорость удлинения пружины определяется разностью скоростей брусков: $\Delta x/\Delta t=v_2-v_1$. Аналогичным образом скорость изменения заряда Q определяется разностью токов, протекающих по катушкам: $\Delta Q/\Delta t=I_2-I_1$. Стопоры S_1 и S_2 допускают скорости лишь одного знака: $v_1>0$, $v_2>0$; аналогично диоды D_1 и D_2 пропускают токи лишь в одном направлении. Энергия конденсатора $Q^2/2C$ соответствует потенциальная энергия пружины $kx^2/2$ (а величине $1/C$, обратной емкости, — жесткость пружины k). Кинетические энергии брусков $m_1v_1^2/2$ и $m_2v_2^2/2$ соответствуют энергиям магнитных полей в катушках $L_1I_1^2/2$ и $L_2I_2^2/2$.

Как будет двигаться механическая система, если толкнуть вправо или сместить один или оба бруска? Если бы не стопоры, то движение свелось бы к наложению (суперпозиции) поступательного движения с постоянной скоростью V и колебаний:

$$v_1=V+v_{10}\cos(\omega t+\varphi),\quad v_2=V-v_{20}\cos(\omega t+\varphi). \qquad (*)$$

В некоторый момент какая-либо из скоростей, v_1 или v_2, обращается в нуль; затем, как следует из (*), эта скорость должна была бы стать отрицательной. В этот момент в игру вступает соответствующий стопор, и один из брусков останавливается. Движение продолжает лишь другой брусок. При этом система в целом получает дополнительный импульс, направленный вправо, и скорость V возрастает. Уже через несколько включений стопоров скорость V возрастает (а скорости v_{10} и v_{20} убывают) настолько, что становится $V>v_{10}$, $V>v_{20}$. После этого скорости v_1 и v_2 все время остаются больше нуля, и движение происходит так, будто стопоров вообще нет.

Чтобы найти частоту ω, рассмотрим движение в системе отсчета, движущейся со скоростью V. В этой системе суммарный импульс брусков равен нулю, то есть $m_1v_{10}=m_2v_{20}$, и смещения брусков за любой промежуток времени обратно пропорциональны их массам. Отсюда следует, что та точка пружины, которая делит ее длину в отношении m_2/m_1, остается неподвижной, то есть брусок m_1 колеблется фактически на пружине с жесткостью

$$k_1=k\frac{m_1+m_2}{m_2}.$$

Частота колебаний этого бруска —

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=\sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}.$$

Для электрической цепи все обстоит аналогично: после одной-двух задержек диодами «обратного» тока по контуру, состоящему из катушек, пойдет постоянный ток, на фоне которого будут происходить колебания с частотой

$$\omega=\sqrt{\frac{L_1+L_2}{CL_1L_2}}.$$

Зная, что в результате появления тока в контуре L_1-L_2 диоды «закорачиваются», можем рассчитать частоту колебаний и несколько иначе. Две катушки включены в цепь параллельно друг другу, и их индуктивности можно сложить так же, как складываются при параллельном соединении сопротивления:

$$\frac{1}{L}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\Rightarrow L=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}.$$

Это приводит к значению частоты

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}=\sqrt{\frac{1}{C}\frac{L_1+L_2}{L_1L_2}}.$$

(Заметим, что в других случаях придумать механическую систему, аналогичную электрической цепи, может оказаться гораздо труднее.)

Г. Л. Коткин, Г. В. Меледин

◆

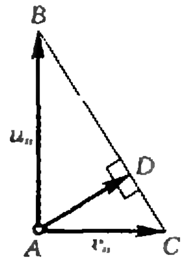
Ф833. *На ленту транспортера, ползущую со скоростью $v_0=1$ м/с, сбоку сталкивают коробку. Скорость коробки сразу после попадания на ленту равна $u_0=2$ м/с и перпендикулярна скорости ленты. Какую минимальную скорость относительно Земли будет иметь коробка во время движения? Сила трения достаточно велика, так что коробка не соскальзывает с ленты.*

Изменение скорости движения коробки (до тех пор, пока она не приобретет скорость ленты) определяется силой трения скольжения.

Рассмотрим движение коробки в системе отсчета, связанной с лентой транспортера. Поскольку лента движется с постоянной скоростью (то есть выбранная нами система инерциальная), силы, действующие в системе на коробку, такие же, как в неподвижной системе, связанной с Землей.

Нетрудно понять, что относительно транспортера коробка будет двигаться прямолинейно равнозамедленно. Сила трения, оставаясь постоянной по величине, будет направлена вдоль вектора скорости коробки относительно транспортера.

Для определения минимальной скорости коробки относительно Земли будем откладывать векторы скорости в различные моменты времени из точки A (см. рисунок). Вектор $\vec{AB}$ — скорость коробки в начальный момент времени, то есть $|\vec{AB}|=u_0$; вектор $\vec{AC}$ — скорость коробки



относительно Земли, когда коробка уже не движется относительно транспортера, то есть $|\vec{AC}|=v_0$. За время проскальзывания коробки по ленте транспортера вектор ее скорости относительно Земли опишет отрезок BC. Минимальным значение этой скорости будет тогда, когда она будет направлена вдоль перпендикуляра к отрезку BC. Следовательно (см. рисунок),

$$v_{\min}=|\vec{AD}|=\frac{u_0v_0}{\sqrt{u_0^2+v^2{}_0}}\approx 0{,}9\ \text{м/с}.$$

С. С. Кротов

◆

Ф834. *На очень длинной невесомой нити подвешен к потолку шарик массы $m_1=0{,}1$ кг, к нему прикреплен на нити длины $l=0{,}2$ м шарик массы $m_2=0{,}05$ кг. Нижнему шарику толчком сообщают скорость v_0 в горизонтальном направлении. При какой величине v_0 шарики могут оказаться на одной высоте?*

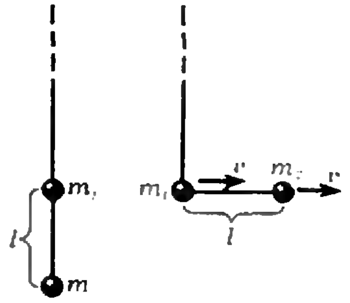
При очень длинной верхней нити можно считать, что верхний шарик движется по горизонтальной прямой. В тот момент, когда шарики окажутся на одной и той же высоте, то есть нижняя нить займет горизонтальное положение (см. рисунок), горизонтальная проекция скорости второго шарика будет равна скорости первого шарика. Это следует из нерастяжимости соединяющей их нити. Чтобы найти минимальное значение скорости v_0, при которой шарики окажутся на одной высоте, нужно считать, что в этот момент вертикальная проекция скорости второго шарика равна нулю (то есть скорости у обоих шариков равны и направлены горизонтально).

Все действующие на систему внешние силы (натяжение верхней нити и силы тяжести) направлены по вертикали. Поэтому горизонтальная проекция полного импульса системы сохраняется:

$$m_2v_{0\,\min}=(m_1+m_2)v.$$

Отсюда

$$v=v_{0\,\min}\frac{m_2}{(m_1+m_2)}.$$



Согласно закону сохранения механической энергии,

$$\frac{1}{2}m_2v^2_{0\,\min}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+m_2gl.$$

Подставляя в это уравнение найденное выражение для v, находим

$$v_{0\,\min}=\sqrt{2gl\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}.$$

Подставляя числовые данные, получаем

$$v_{0\,\min}=\sqrt{3gl}\approx 2{,}4\ \text{м/с}.$$

В предельном случае $m_2\ll m_1$ верхний шарик остается неподвижным, и, чтобы нижний шарик поднялся на высоту l, ему нужно сообщить скорость $v_0=\sqrt{2gl}$.

Е. И. Бутиков

◆

Ф835. *В стакан с водой опустили нагреватель и сняли зависимость температуры воды от времени (таблица 1). 1) На сколько градусов остынет вода за 1 мин, если нагреватель отключить от сети при температуре $t_1=50$°C? 2) Закипит ли вода, если нагреватель не выключать достаточно долго? Мощность нагревателя считать неизменной.*

Будем считать, что мощность, которую нагреватель отдает воде, не меняется, а температура воды увеличивается неравномерно за счет увеличения теплоотдачи с ростом температуры. Чтобы учесть влияние теплоотдачи, проследим, как меняется приращение Δt температуры за 1 минуту работы нагревателя в зависимости от температуры воды (температуру будем брать среднюю между значениями ее в начале и в конце каждой минуты). Соответствующие данные приведены в таблице 2. Построим по этим данным график зависимости $\Delta t(t)$. Как видно из графика (см. рисунок), все точки хорошо ложатся на прямую, пересекающую ось температур в точке $t_{\text{кр}}=85$°C. Ясно, что если даже закон теплоотдачи не изменится (а с ростом температуры испарение должно увеличиться, что увеличит теплоотдачу), вода

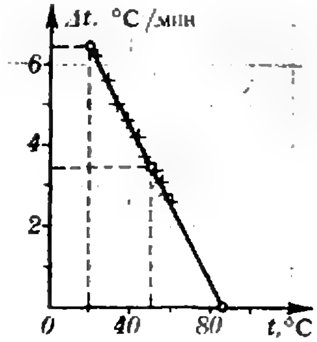


Таблица 1.

Время, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура, °C	20	26,2	31,8	36,8	41,4	45,6	49,3	52,7	55,8	58,5	61,1

Таблица 2.

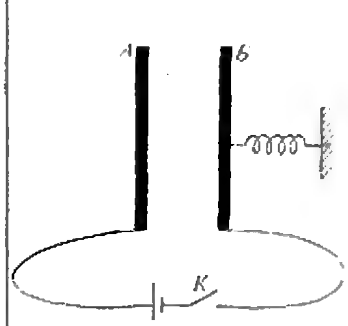
t, °C	23,1	29	34,3	39,1	43,5	47,45	51,1	54,25	57,15	58,8
Δt, град/мин	6,2	5,6	5,0	4,6	4,2	3,7	3,4	3,1	2,7	2,6

нагреется только до 85°C и, следовательно, при нормальных условиях не закипит.

Из этого же графика видно, что при температуре $t_1=50$°C вода за одну минуту нагрелась на 3,5 градуса, а без теплоотдачи она нагрелась бы на 6,5 градуса (температура окружающей среды 20°C). Значит, если при температуре 50°C отключить нагреватель, то за 1 мин вода остынет на [illegible] градуса.

А. Р. Зильберман

Ф836. *Пластина А плоского конденсатора неподвижна, пластина Б прикреплена к стене пружиной и может двигаться, оставаясь параллельной пластине А (см. рисунок). После замыкания ключа К пластина Б начала двигаться и остановилась в новом положении равновесия. При этом расстояние между пластинами уменьшилось на $\alpha_1=10\%$. На сколько изменилось бы равновесное расстояние между пластинами, если бы ключ К замкнули на короткое время? Предполагается, что за это время пластина Б не успевает заметно сдвинуться.*



Когда ключ K замкнут, напряжение на конденсаторе поддерживается постоянным и равным ЭДС $\mathcal{E}$ источника. Пусть начальное расстояние между пластинами конденсатора (когда пружина не растянута) равно d, а смещение пластины Б при достижении нового положения равновесия равно $x_1=\alpha_1 d=0,1d$. Заряд на конденсаторе при этом будет

$$Q_1=C_1\mathcal{E}=\frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{(d-x_1)},$$

где S — площадь пластин конденсатора. Напряженность поля в конденсаторе $E_1=\mathcal{E}/(d-x_1)$. Это поле создается двумя пластинами, так что поле, создаваемое одной пластиной, имеет напряженность $E_1/2$. В соответствии с этим для сил, действующих на пластину $Б$, можем записать

$$\frac{E_1Q_1}{2}=\frac{\varepsilon_0 S\,\mathcal{E}^2}{2(d-x_1)^2}=kx_1 \qquad (1)$$

(k — жесткость пружины).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда ключ K замыкают на короткое время. Конденсатор при этом получает заряд

$$Q_2=\varepsilon_0 S\,\mathcal{E}/d$$

(пластины не успели сдвинуться с места), который в дальнейшем остается постоянным. Пусть в новом положении равновесия смещение пластины Б равно x_2. Тогда напряженность поля в конденсаторе будет $E_2=Q_2/C_2(d-x_2)$, где $C_2=\varepsilon_0 S/(d-x_2)$. Условие равновесия пластины $Б$ запишется в виде

$$\frac{E_2Q_2}{2}=\frac{Q_2^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2}{2d^2}=kx_2. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим x_2:

$$x_2=x_1\left(\frac{d-x_1}{d}\right)^2=0,081d,$$

то есть расстояние между пластинами конденсатора уменьшится на $\alpha_2=8,1\%$.

[illegible] И. Буздин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М791—М805 и Ф803—Ф817, справились с задачами М791, М794, М796 и Ф803, Ф804, Ф809, Ф813, Ф816. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Р. Алексеев (Ленинград) **92**; *Я. Алиев* (с. Малибекли Аз. ССР) **99**; *В. Апальков* (Харьков) **92**; *И. Аргатов* (Павлодар) **92**; *А. Артюх* (Чернигов) **03**; *А. Архипов* (Москва) **92**; *А. Астрелин* (Новосибирск) **92, 93, 95, 97, 99—05**; *Я. Бабкин* (Петрозаводск) **92, 97, 01, 03**; *Л. Байрак* (Белгород) **95, 99, 01, 05**; *А. Барабаш* (Киев) **92, 97, 99, 01**; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **92, 01—04**; *Ю. Баркаган* (Пенза) **98**; *А. Барчунов* (Алма-Ата) **95**; *В. Белов* (Новосибирск) **95**; *И. Беркин* (Донецк) **01, 03, 04**; *А. Биргер* (Иваново) **92, 97, 99, 01—04**; *А. Блувштейн* (Ворошиловград) **03**; *А. Богатырев* (Ленинград) **92**; *А. Богачев* (Хабаровск) **03**; *А. Вайнштейн* (Москва) **92, 93, 95**; *А. Ванин* (Днепропетровск) **92**; *А. Ведерников* (Ленинград) **92, 93, 95**; *С. Велесько* (Минск) **92, 03**; *А. Верницкий* (Свердловск) **92, 95**; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) **99, 03**; *И. Вехтер* (Кишинев) **92**; *И. Волков* (Минск) **01**; *В. Волокитин* (Москва) **95**; *К. Гаджиев* (с. Зод Арм. ССР) **92**; *А. Гаджимагомедов* (с. Новый Фриг Даг. АССР) **92, 95**; *В. Гайдук* (Ленинград) **97**; *М. Гараев* (Физули) **92, 95, 97—99, 01—04**; *И. Гасанов* (Баку) **92, 95**; *Р. Гендлер* (Ташкент) **92, 01—03**; *Е. Глинская* (п. Солнцево Московской обл.) **97**; *О. Голинский* (Тамбов) **99, 03**; *Ю. Гончаренко* (Винница) **92**; *В. Горюшкин* (Петропавловск-Камчатский) **92**; *Г. Гочев* (Дубна) **92, 99, 01—03**; *А. Губарев* (Фатеж) **92, 97, 99**; *Д. Дарг* (Симферополь) **02**; *З. Джаббаров* (Ташкент) **02—04**; *З. Джафаров* (с. Тюркоба Аз. ССР) **92, 97, 99, 01—04**; *А. Дулуб* (Калинковичи) **92, 95, 99, 02, 03**; *Д. Ежиков* (Минск) **03**; *В. Ермолаев* (Полоцк) **92**; *П. Житный* (Ворошиловград) **03**; *В. Журавлев* (Гайворон) **92, 99, 02, 03**; *М. Зиманов* (Алма-Ата) **92**; *Л. Зосин* (Киев) **92, 01**; *А. Иванов* (Петрозаводск) **03**; *Ю. Илясов* (Сиазань) **99**; *М. Йотов* (София, НРБ) **92, 93, 01, 02, 04**; *С. Каракчеев* (Севастополь) **93, 95, 02**; *И. Карчевский* (Алма-Ата) **03**; *П. Касинский* (Алма-Ата) **92**; *А. Клишин* (Севастополь) **92, 95**; *Ю. Коваль* (Киев) **03**; *М. Козлов* (Москва) **02, 03**; *О. Козловский* (Москва) **92, 97, 01, 03**; *И. Кольтовер* (п. Черноголовка Московской обл.) **97, 03**; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **92, 97**; *А. Коротков* (Ленинград) **92**; *С. Коршунов* (Целиноград) **95, 97, 01, 02**; *А. Костюк* (Бердичев) **92, 01, 03**; *Л. Котыченко* (Рудный) **95**; *Ю. Кочетков* (Винница) **92**; *Л. Ксэ* (Клуж-Напока, СРР) **02, 03**; *А. Лазарев* (Москва) **92, 97, 01**; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) **01**; *Ю. Левчук* (Киев) **92, 95**; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) **03**; *А. Лукьянов* (Севастополь) **92**; *К. Макарчук* (Киев) **92, 95, 97**; *А. Малеванец* (Киев) **95, 97, 99, 01—04**; *Б. Малешевич* (Нови Сад, СФРЮ) **93**; *И. Мареньи* (Клуж-Напока, СРР) **02, 03**; *О. Матвеев* (Свердловск) **92, 93, 95, 01—04**; *А. Мильман* (Москва) **01—04**; *С. Мисник* (Воронеж) **92, 93, 95, 97**; *В. Михайлюк* (Киев) **92, 95**; *Я. Михов* (Толбухин, НРБ) **92, 93, 95**; *А. Молотков* (Ленинград) **97, 01, 03**; *С. Набиев* (Алма-Ата) **92**; *Ф. Назаров* (Ленинград) **92, 95, 97—99, 01—05**; *С. Найден* (Днепропетровск) **92**; *Л. Нестерова* (Свердловск) **92, 95**; *В. Николаев* (Хабаровск) **03**; *Т. Новикова* (Свердловск) **92, 95**; *А. Носков* (Москва) **01—03**; *О. Овецкая* (Донецк) **02**; *Я. Оссовски* (Старогард Гданьски, ПНР) **01—05**; *А. Паращевин* (Ворошиловград) **03**; *Н. Пахоренко* (Винница) **92, 02—04**; *В. Погребняк* (Винница) **92**; *Д. Подкопаев* (Винница) **92**; *В. Разживин* (Тюмень) **03**; *А. Расулов* (Баку) **92, 99; 01**; *Н. Рыбкина* (Свердловск) **92, 95**; *В. Сабиров* (Бердянск) **02**; *И. Савыков* (Первоуральск) **02**; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) **01—03**; *М. Самовол* (Гайворон) **99, 02, 03**; *И. Святодух* (Красноармейск Донецкой обл.) **03**; *А. Сергиенко* (Ленинград) **95**; *В. Сикоренко* (Москва) **92, 95**; *Т. Сокова* (Белорецк) **92**; *С. Соколова* (Ташкент) **92**; *С. Струков* (Воронеж) **92, 95, 97—99, 01—05**; *В. Тартиковский* (Киев) **92, 95**; *М. Тейтель* (Киев) **92, 95, 97, 99, 03**; *Д. Терешин* (Саратов) **92, 97, 03, 04**; *С. Токарь* (Яготин) **92, 02, 03**; *Тувшинжаргал* (Улан-Батор, МНР) **02**; *А. Урусов* (Мирный) **95**; *Н. Федин* (Омск) **93**; *Д. Федотов* (Новокузнецк) **92, 93, 97, 99, 01—04**; *Е. Филенко* (Родинское) **02, 04**; *М. Флямер* (п. Протвино Московской обл.) **02, 03**; *Ф. Фомин* (Ленинград) **92**; *Б. Фридман* (Москва) **92, 97, 01—03**; *М. Холмянский* (Москва) **02, 03**; *В. Хохлов* (Саратов) **03**; *Д. Христов* (Сливен, НРБ) **93**; *В. Хрычиков* (Севастополь) **92, 93, 95, 01—04**; *С. Цонев* (София, НРБ) **01—03, 05**; *С. Чернышев* (Александров) **92, 01—04**; *Т. Шилова* (Москва) **03**; *А. Шихкеримов* (Вольск) **92, 95, 01—03**; *А. Шнирман* (Донецк) **93, 01, 03, 04**; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) **92, 93, 95, 97—05**; *П. Этингоф* (Киев) **92, 93, 95, 98, 99, 01—04**; *Г. Юшин* (Воронеж) **92**; *А. Ярин* (Севастополь) **92, 01, 02.**

Физика

А. Абанов (Красноярск) **05—07, 15, 17**; *Н. Азизов* (Баку) **06, 07**; *В. Апальков* (Харьков) **06—08, 15, 17**; *А. Артюх* (Чернигов) **06, 08, 14**; *Э. Багдасарян* (Баку) **06, 07**; *Е. Базулько* (Николаев) **15**; *В. Байбиков* (Новосибирск) **07, 08, 14, 15**; *Л. Байрак* (Белгород) **05, 06, 17**; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **05—08, 10, 14, 15, 17**; *А. Барчунов* (Алма-Ата) **05**; *В. Башкиров* (Чебоксары) **08**; *И. Берхим* (Донецк) **05, 07, 14, 15, 17**; *Е. Беспалов* (Курган)

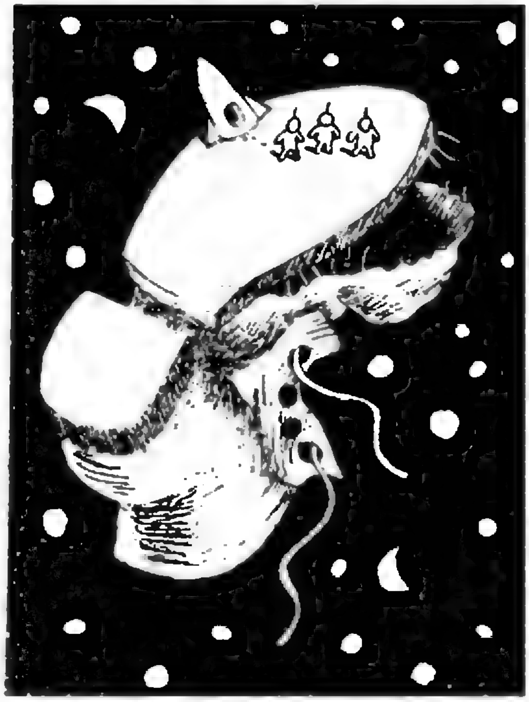
06—08, 14, 15, 17; *М. Бияк* (Краснодар) **06, 07, 17;** *С. Бойко* (Винница) **07, 08, 14;** *В. Бражников* (Запорожье) **05—07, 15;** *А. Бураев* (Орджоникидзе) **06;** *Н. Бурдейная* (Винница) **05—07;** *О. Важеевский* (Москва) **06, 07;** *Б. Вайсман* (Винница) **08, 14;** *В. Вангелов* (Бургас, НРБ) **08, 14, 15, 17;** *Д. Владимиров* (Новолукомль) **06—08, 17;** *А. Выродов* (Осинники) **06—08;** *О. Гаврилов* (Киев) **05—08, 17;** *Б. Галицкий* (Москва) **08;** *В. Глаголев* (Тула) **15;** *П. Глазырин* (Воткинск) **06, 07;** *О. Голинский* (Тамбов) **07, 08, 17;** *Ю. Гордиенко* (Винница) **05, 08, 15;** *Г. Гореликов* (Елец) **06, 07;** *С. Гребенщиков* (п. Черноголовка Московской обл.) **05—07, 17;** *М. Гринберг* (Красноярск) **05—08, 14, 15, 17;** *И. Гришина* (Елец) **06—08;** *Г. Данелия* (Тбилиси) **08;** *Л. Демидова* (Винница) **05—07;** *В. Дерендяев* (Березняки) **06, 07;** *Г. Долгопятов* (Донецк) **05—07, 11, 14, 15, 17;** *Е. Дубинин* (с. Вострецово Приморского кр.) **08;** *А. Ерицян* (Ереван) **06—08;** *Д. Ермошин* (Москва) **08;** *О. Ефремов* (Воронеж) **05—07, 14, 15, 17;** *М. Житомирский* (Харьков) **05—07;** *Н. Жоков* (Александров) **05—07;** *Г. Жуков* (Куйбышев) **07;** *Р. Жямайтис* (Вильнюс) **05—07;** *Э. Заводчиков* (Тамбов) **06—08;** *А. Зайцев* (Целиноград) **06;** *И. Зайцев* (Москва) **06, 07;** *Д. Иванов* (Оренбург) **05—07;** *Э. Иванов* (Орджоникидзе) **06, 07;** *Е. Ивлева* (Свердловск) **06, 07;** *М. Имас* (Донецк) **08, 14;** *Б. Иричанин* (Белград, СФРЮ) **06, 07;** *Л. Йосыпив* (Ивано-Франковская обл.) **06, 07;** *Т. Каталози* (Кутаиси) **05—07;** *Д. Каледин* (Москва) **06, 07;** *И. Калиновский* (Киев) **05—08, 15, 17;** *Е. Канцыпер* (Таллин) **06, 07;** *В. Карасен* (Алма-Ата) **08, 14;** *А. Карнаухов* (Ижевск) **05, 06;** *Е. Каჩковская* (Винница). **06, 07;** *Ю. Кившарь* (Харьков) **05—07;** *А. Кириченко* (Москва) **07;** *П. Кларк* (Тула) **08;** *А. Клишин* (Киев) **05—07;** *М. Кныш* (Краснодар) **07;** *Ю. Коваль* (Киев) **17;** *М. Козлов* (Москва) **08;** *К. Кондратец* (Киев) **05—07;** *А. Корбуш* (Свердловск) **08;** *Е. Корнилова* (Ефремов) **05—07;** *А. Коршак* (Киев) **08, 11, 15;** *И. Коршун* (Коммунарск) **05—07;** *А. Котляр* (Минск) **06;** *С. Кравчук* (Киев) **07, 08, 15;** *А. Краснов* (Ташкент) **06, 08;** *О. Краснояров* (Грозный) **06, 07, 15, 17;** *А. Кругов* (Киев) **07;** *И. Крылов* (Куйбышев) **06;** *С. Ксеневич* (Куйбышев) **06, 08;** *В. Кудашов* (п. Вуктыл Коми АССР) **05—07;** *Д. Кузнецов* (Куйбышев) **14;** *Д. Кузютин* (Алма-Ата) **06, 07;** *И. Куличик* (Брест) **07, 17;** *Д. Купцов* (Москва) **05—07, 10, 14, 15, 17;** *Н. Кухаркин* (Москва) **05—08, 15, 17;** *С. Лауринавичус* (Мажейкяй) **05—07, 10, 14, 15, 17;** *И. Левин* (Донецк) **05—07, 12;** *К. Липников* (Ярославль) **08;** *А. Лихачев* (Барнаул) **07;** *И. Лорман* (Киев) **06, 07, 15;** *Д. Лунц* (Саратов) **05—08, 14;** *А. Люлько* (Москва) **06, 07;** *Б. Мавлонов* (Хорезмская обл.) **06;** *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) **03—17;** *К. Макарчук* (Киев) **05—07, 15, 17;** *И. Мамедов* (Баку) **06, 08;** *А. Мамырева* (Москва) **05;** *А. Маркин* (Егорьевск) **17;** *Л. Маркович* (Минск) **06—08, 14, 15, 17;** *О. Маров* (Канев) **06, 07, 14, 15;** *А. Мартюшенко* (Днепропетровск) **06, 07, 15, 17;** *С. Меднов* (Калинин) **05—07;** *П. Милютин* (Хабаровск) **06—08, 15;** *А. Михеев* (Кимры) **06—08;** *К. Мишин* (Днепропетровск) **06, 07, 17;** *П. Молодчик* (Киев) **05;** *С. Молчанов* (Саратов) **05—08, 15;** *К. Мосейчев* (Зеленоград) **08;** *А. Нийфонов* (Апатиты) **06, 08;** *В. Никитин* (Одесса) **15;** *С. Никоненко* (Киев) **06, 07;** *А. Носков* (Москва) **14, 17;** *А. Носов* (Алма-Ата) **08, 15;** *К. Оспанов* (Чимкентская обл.) **08;** *А. Павельев* (Фрязино) **05—07;** *А. Панасенко* (Новосибирск) **08;** *О. Пайков* (Джанкой) **07;** *Е. Пархименко* (Чернигов) **08, 14;** *Д. Пастухов* (Витебск) **06, 08;** *К. Первушин* (Ташкент) **08;** *О. Петренко* (Кировское) **08, 14, 15;** *И. Пильников* (Тамбов) **05—07, 10, 15;** *М. Пирогов* (п. Менделеево Московской обл.) **05, 06, 15;** *А. Погорелов* (Алма-Ата) **07, 08, 15;** *В. Разживин* (Тюмень) **08;** *С. Рекук* (Винница) **05—07;** *И. Ремез* (Житомир) **08;** *М. Романенко* (Владимир) **05—07;** *С. Ростопчин* (Куйбышев) **15;** *Д. Русинов* (Ленинград) **05—07, 14, 17;** *О. Рыжков* (Баку) **06, 07;** *В. Рязанов* (Семипалатинск) **07;** *Ф. Сабуров* (Челябинск) **06, 08;** *И. Саввиев* (с. Касумкент Даг.АССР) **05—07;** *И. Савыков* (Первоуральск) **07, 08, 15;** *А. Сидыков* (п. Черский Як. АССР) **07, 08;** *Г. Самадашвили* (Тбилиси) **06—08, 14, 15;** *В. Самойленко* (Находка) **08, 15;** *А. Самойлович* (Донецк) **05—07, 13—15;** *М. Самсонов* (Ленинград) **06, 08;** *С. Сахарук* (Брест) **06, 07, 17;** *В. Свинарчин* (с. Садки Тернопольской обл.) **05—07;** *С. Сергеев* (Тула) **05—07;** *Ф. Серженко* (Запорожье) **05—07;** *К. Скляров* (Севастополь) **06, 07;** *М. Скорик* (Киев) **05—07, 15;** *Д. Скрипник* (п. Бетлицы Калужской обл.) **05—08;** *А. Слободян* (Коломна) **15;** *А. Соловьев* (Куйбышев) **06, 07, 14, 15;** *А. Сорокин* (Иваново) **15;** *В. Срюбас* (Алитус) **06, 07, 14, 15;** *И. Табачник* (Рига) **06, 07;** *А. Тенсин* (Реутово) **07;** *И. Тетко* (Колыма) **06;** *П. Тоннэ* (Запорожье) **05—07;** *Д. Третьяков* (Винница) **05—07, 14, 15, 17;** *Н. Трыков* (Липецк) **06;** *Н. Федин* (Омск) **05—08, 15, 17;** *Л. Фельдман* (Саратов) **05—07, 12—14, 17;** *М. Флямер* (п. Протвино Московской обл.) **15;** *В. Химич* (Рудный) **08;** *Д. Худяков* (Первоуральск) **15;** *В. Чеботарев* (Свердловск) **06, 07;** *А. Черепнин* (Винница) **07, 14;** *В. Черных* (Хабаровск) **06, 07;** *О. Чернышев* (Тольятти) **15, 17;** *О. Черп* (Минск) **08;** *И. Чечеткин* (Киев) **05—07, 15, 17;** *А. Чудновский* (Киев) **05—07, 15, 17;** *М. Шамонин* (Кемерово) **06, 07;** *И. Шендерович* (Северодвинск) **06, 08, 15;** *А. Шнирман* (Донецк) **05—08, 14, 15, 17;** *А. Шубин* (Москва) **08;** *В. Щурук* (Ровно) **06, 07;** *И. Эрхарт* (Биловец, ЧССР) **05—07;** *Д. Ян* (Ереван) **08;** *Г. Ящин* (п. Черноголовка Московской обл.) **06, 07, 17.**

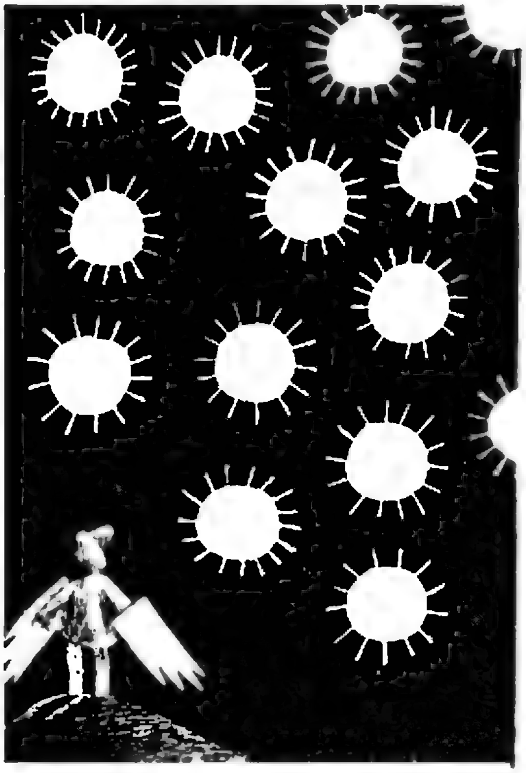
Дорогие читатели!

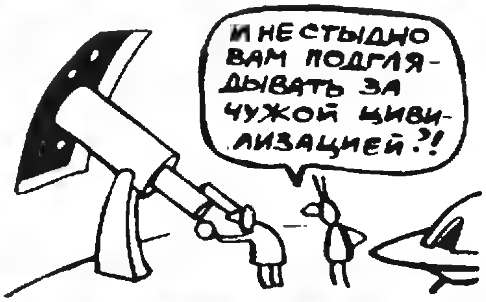
С 1 января 1984 года вся нестандартная и неиндексированная корреспонденция будет возвращаться отправителям. В связи с этим просим вас при отправке в редакцию писем четко указывать полный обратный адрес (с шестизначным почтовым индексом).

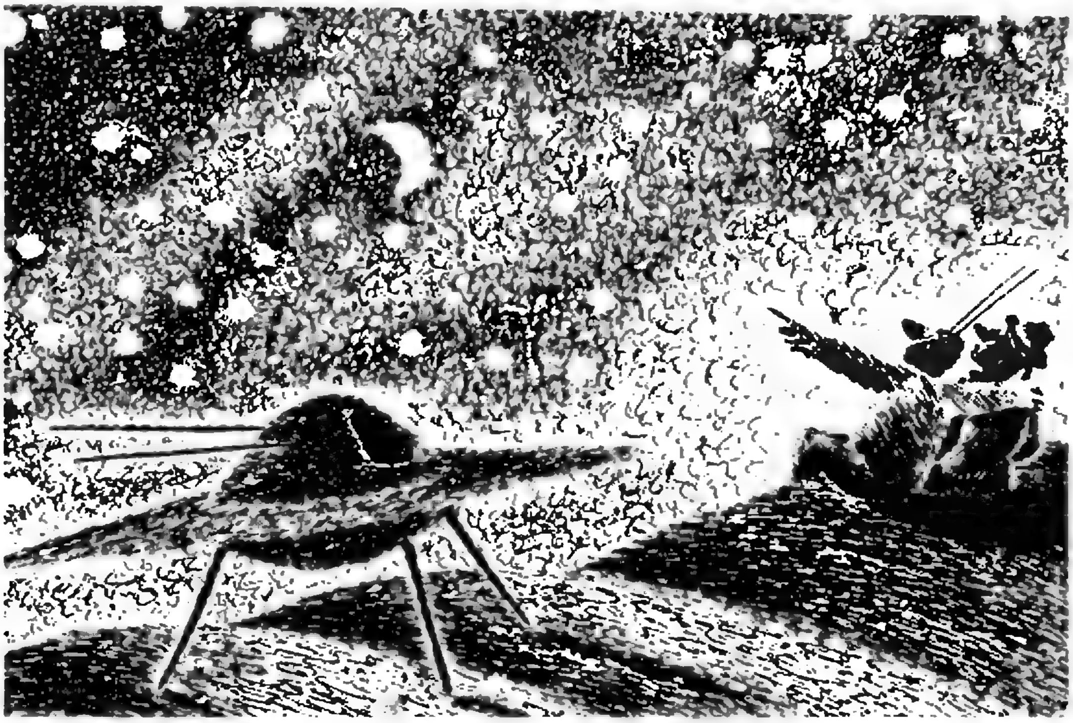
КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Рисунки И. В. Копельницкого






И НЕ СТЫДНО ВАМ ПОДГЛЯДЫВАТЬ ЗА ЧУЖОЙ ЦИВИЛИЗАЦИЕЙ?!



XXIV Международная математическая олимпиада

Кандидат педагогических наук
А. М. АБРАМОВ,
Т. А. САРЫЧЕВА,
кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

Очередная Международная математическая олимпиада проходила во Франции.

В олимпиаде участвовали ребята из 32 стран (на предыдущей олимпиаде — из 30 стран), по 6 человек от страны (на предыдущей олимпиаде — по 4). От Советского Союза в олимпиаде выступали призеры Всесоюзных олимпиад последних лет Я. Бриталс (Рига, с. ш. № 1), В. Буриченко (Новосибирск; ФМШ № 165 при НГУ), И. Жуков и К. Кохась (оба — Ленинград, с. ш. № 239), Л. Парновский (Львов, с. ш. № 52) и А. Семенов (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Париж встречал участников 4 июля. 5 июля ребята знакомились с городом — совершили увлекательную экскурсию по Сене, поднялись на Эйфелеву башню.

А затем — два дня соревнований, которые проходили в лицее Людовика Великого, имеющем славную историю — его питомцами были, например, Мольер, Вольтер, Дидро, Робеспьер, Галуа и Гюго. Лицей расположен в знаменитом студенческом районе Парижа — Латинском квартале, неподалеку от Сорбонны, Пантеона и Люксембургского сада.

За три дня до начала олимпиады жюри (председатель — проф. Р. Узель) собралось для отбора задач. На основе материалов, полученных из стран-участниц, специальная комиссия (председатель — Р. Дуано) подготовила для обсуждения 24 задачи. Жюри выбрало из них шесть задач. Основные требования, которыми оно при этом руководствовалось: задачи должны охватывать различные разделы математики и быть оригинальными, в каждый из двух дней соревнований предлагается по одной легкой, одной трудной задаче и одной задаче средней трудности.

Для первого дня жюри отобрало предложенную Великобританией задачу

Найти все такие функции f, определенные на множестве $\mathbf{R}_+$ положительных действительных чисел и принимающие значения в $\mathbf{R}_+$, для которых выполнены следующие условия:

1) $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x)$ при любых $x, y \in \mathbf{R}_+$;

2) $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$

(ее решение см. на с. 59) и предложенные, соответственно, Советским Союзом и ФРГ задачи М836, М837 (с. 35). Во второй день были предложены задачи М838 (Бельгия), М839 (Польша) и М840 (США).

Чтобы члены жюри могли точнее оценить трудность задач, впервые в истории олимпиад им было выделено время для самостоятельного решения. Любопытно отметить, что задачу М840 не смог решить ни один член жюри.

В каждый из двух дней соревнований на работу отводилось по 4,5 часа (в первые 30 минут участники имели право обращаться к жюри с вопросами по формулировкам). Полное решение каждой из предложенных задач оценивалось 7 баллами.

9 июля, после проверки работ и координации оценок, стали известны итоги олимпиады.

Из 186 участников (Испания прислала только четырех человек, из Люксембурга приехали двое) 9 человек, набравших от 38 до 42 баллов,

Советские участники (слева направо: Л. Парновский, К. Кохась, И. Жуков, А. Семенов, В. Буриченко и Я. Бриталс) на площади перед Собором парижской богоматери

были награждены первыми премиями и золотыми медалями, 27 человек, набравших от 26 до 37 баллов, получили вторые премии и серебряные медали, 57 участникам, набравшим от 15 до 25 баллов, были вручены третьи премии и бронзовые медали.

Из советских участников лучшего результата (42 из 42 возможных) добился Л. Парновский, завоевавший золотую медаль. (Абсолютными победителями олимпиады стали также школьники из ФРГ Ф. Вагнер, Б. Лееб и М. Штоль.) Серебряными медалями награждены И. Жуков (28 баллов), В. Буриченко (27) и Я. Бриталс (26). Бронзовые медали получили А. Семенов (25 баллов) и К. Кохась (21).

В неофициальном командном зачете наибольшего успеха добились школьники ФРГ (212 баллов). Затем идут школьники США (171 балл), Венгрии (170), СССР (169), Румынии (161) и Вьетнама (148).

Надо признать, что советская команда выступила ниже своих возможностей. Одна из наиболее существенных причин относительной неудачи — недостаточная геометрическая культура (отсюда большие потери по задачам М836 (17 баллов) и М840 (32 балла)). Кроме того, при принятой на олимпиаде системе оценок необходимо было возможно четче оформлять решения и избегать малейших неточностей. К сожалению, не всегда решения наших ребят удовлетворяли этим требованиям. Олимпиада показала, наконец, как важно отдохнуть перед соревнованиями, настроиться на работу.

Закрытие олимпиады происходило 11 июля в Большом амфитеатре Сорбонны.

Организаторы олимпиады (президент оргкомитета — К. Дешамп) подготовили интереснейшую культурную программу. В памяти участников надолго останутся Версальский дворец, Лувр и другие музеи Парижа, парижские улицы, бульвары и парки. Запомнятся дружеские встречи со сверстниками из других стран.

XXV, юбилейная олимпиада состоится в июле будущего года в Чехословакии.

XIV Международная физическая олимпиада

Доктор физико-математических наук
С. М. КОЗЕЛ

С 5 по 14 июля этого года в столице Социалистической Республики Румынии городе Бухаресте проходила XIV Международная физическая олимпиада школьников. В олимпиаде приняли участие 16 стран: Австрия, Болгария, Венгрия, Вьетнам, ГДР, Голландия, Куба, Польша, Румыния, СССР, Финляндия, Франция, ФРГ, Чехословакия, Швеция, Югославия.

Команда каждой страны состояла из пяти участников — учащихся и выпускников общеобразовательных и профессиональных школ — и двух руководителей. Возраст участников не превышал 20 лет.

Команду СССР представляли призеры Всесоюзной олимпиады:

Антон Алексеев — ученик 10 класса с. ш. № 239 г. Ленинграда,

Валдис Бирзвалкс — выпускник с. ш. № 1 г. Риги,

Андрей Гниловской — выпускник с. ш. № 239 г. Ленинграда,

Михаил Дьячков — выпускник с. ш. № 82 п. Черноголовка Московской обл.,

Владимир Молчанов — выпускник школы-интерната при Киевском государственном университете.

Руководителями команды были заведующий лабораторией Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР О. Ф. Кабардин и старший научный сотрудник того же института В. А. Орлов.

По традиции организацией и проведением олимпиады занимались хозяева — румынские физики. Из их числа была сформирована Рабочая группа олимпиады. В ее задачу входила подготовка заданий для теоретического и экспериментального туров олимпиады и предварительная проверка работ участников. Все результаты утверждались Международной комиссией под председательством декана физического факультета Бухарестского университета профессора Константина Плевицу. В состав комиссии входили представители всех стран-участниц.

Олимпиада была организована очень хорошо. Все участники жили в благоустроенном студенческом комплексе. Они имели возможность не только творчески трудиться, но и отдохнуть. В дни отдыха между теоретическим и экспериментальным турами была организована экскурсия в курортный город Снагов. После экспериментального тура участники три дня отдыхали в Международном молодежном лагере Костинешти на берегу Черного моря. Гости ознакомились также с работой ряда научных учреждений Национального физического центра и посетили лаборатории одного из физико-математических лицеев Бухареста.

На олимпиаде участникам были предложены следующие задачи:

Теоретический тур

Задача 1 (8 баллов)

Частица движется вдоль положительной полуоси OX под действием силы, проекция F_x которой на ось X представлена на рисунке 1 ($F_z=F_y=0$). Одновременно на частицу действует сила трения, модуль которой $F_{тр}=1{,}0$ Н. В начале координат установлена идеально отражающая стенка, перпендикулярная оси X. Частица стартует из точки с координатой $x_0=1{,}0$ м с кинетической энергией $E_k=10{,}0$ Дж.

1) Определите длину пути, пройденного частицей до ее полной остановки (3 балла).

2) Представьте графически зависимость

потенциальной энергии частицы в поле силы F_x от координаты x (2 балла).

3) Постройте качественный график зависимости проекции скорости v_x частицы от координаты x (3 балла).

Задача 2 (8 баллов)

Цепь переменного тока (рис. 2) состоит из двух идеальных катушек с индуктивностями $L_1=10$ мГн и $L_2=20$ мГн, двух конденсаторов с емкостями $C_1=10$ нФ и $C_2=5$ нФ и резистора с сопротивлением $R=100$ кОм. При замкнутой цепи (ключ K в положении I) амплитуда переменного тока остается постоянной при изменении частоты генератора синусоидального напряжения (генератор тока с постоянной амплитудой).

Определите:

1) отношение частоты $\nu_м$, при которой активная мощность, выделяемая в цепи, максимальна, к разности частот $\Delta\nu=\nu_+-\nu_-$, где ν_+ и ν_- — частоты, при которых активная мощность равна половине максимальной мощности $P_м$ (3 балла).

Цепь размыкается. Известно, что в некоторый момент времени t_0 после размыкания цепи сила тока в катушках имеет значения: $i_{01}=0{,}1$ А и $i_{02}=0{,}2$ А (на рисунке 2 показаны направления токов), а напряжение на конденсаторе C_1 равно $U_0=40$ В.

Определите:

2) частоту свободных электромагнитных колебаний в цепи $L_1C_1C_2L_2$ (2 балла);

3) силу тока на участке AB (1,5 балла);

4) амплитуду колебаний тока в катушке с индуктивностью L_1 (1,5 балла).

Примечание. Взаимной индукцией катушек пренебречь.

Задача 3 (7 баллов)

Две призмы с преломляющими углами $A_1=60°$ и $A_2=30°$ склеены так, как показано на рисунке 3 ($\widehat{DCB}=90°$). Показатели преломления призм выражаются соотношениями

$$n_1=a_1+\frac{b_1}{\lambda^2},\quad n_2=a_2+\frac{b_2}{\lambda_2},$$

где $a_1=1{,}1$; $b_1=10^5$ нм^2; $a_2=1{,}3$; $b_2=5\cdot10^4$ нм^2.

1) Определите длину волны λ_0 падающего на систему призм излучения, если волна распространяется без преломления на границе AC при любом угле падения ее на грань AD; определите также значения показателей преломления n_1 и n_2 для этой длины волны (1 балл).

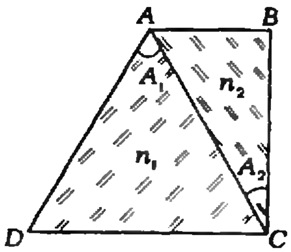


Рис. 3.

2) Нарисуйте ход лучей в системе призм для трех различных длин волн ($\lambda_{кр}>\lambda_0$, λ_0, $\lambda_ф<\lambda_0$), если угол падения на грань AD для всех трех волн одинаков (2 балла).

3) Определите угол наименьшего отклонения в системе призм для излучения с длиной волны λ_0 (2 балла).

4) Определите длину волны излучения, падающего на систему призм параллельно основанию DC и выходящего из нее также параллельно этому основанию (2 балла).

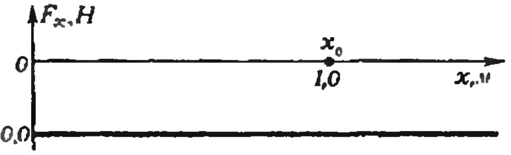


Рис. 1.

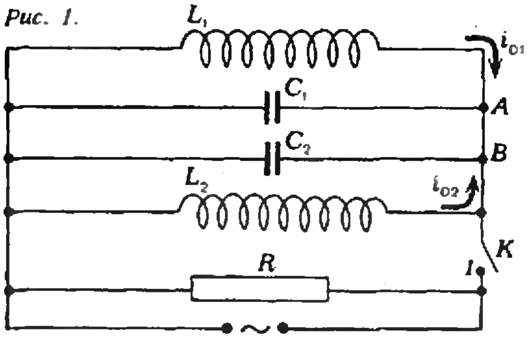


Рис. 2.

Задача 4 (7 баллов)

Фотон с длиной волны λ_1 рассеялся на движущемся свободном электроне. В результате электрон остановился, и фотон с длиной волны λ_0 отклонился от направления движения первоначального фотона на угол $\Theta=60°$. Рассеянный фотон испытал новое рассеяние на другом, неподвижном свободном электроне. В результате последнего рассеяния фотон с длиной волны $\lambda_f=1{,}25\cdot10^{-10}$ м отклонился от направления движения фотона с длиной волны λ_0 снова на угол $\Theta=60°$.

Определите длину волны де Бройля электрона, взаимодействовавшего с исходным фотоном. Считаются известными следующие величины: $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, $c=3{,}0\cdot10^8$ м/с — скорость света.

Задача 5

(Это дополнительная задача, решение которой не входит в официальный зачет, но может быть отмечено специальным призом.)

Посмотрите на олимпийскую эмблему. Объясните качественно, почему струя жидкости не отрывается от цилиндра по пунктирной линии, а обтекает цилиндр по непрерывной кривой. Этот факт связан с так называемым эффектом Коандэ, запатентованным в 1936 году во Франции румынским инженером Генри Коандэ.

Экспериментальное задание (20 баллов)

Даны: источник постоянного тока, два вольтметра и магазин сопротивлений.

1) Определите ЭДС источника тока с помощью только двух вольтметров (без магазина сопротивлений), используя минимальное число электрических схем (8 баллов).

2) Определите ЭДС источника тока, его внутреннее сопротивление и сопротивление вольтметра, используя только один вольтметр и магазин сопротивлений. С этой целью желательно построить по экспериментальным данным два графика, соответствующих теоретическим линейным уравнениям, и с их помощью определить искомые величины (10 баллов).

3) Укажите источники погрешностей измерений. Какие из них больше влияют на окончательные результаты (2 балла)?

Команды всех стран готовились к олимпиаде по программе международных олимпиад, которая, как видно из приведенных задач, в ряде случаев требует от участников знаний, выходящих за пределы школьной программы СССР (и некоторых других стран-участниц).

Как выяснилось, предложенные задачи оказались для участников довольно трудными. Первую задачу теоретического тура полностью решили лишь 8 участников (из них 2 из команды СССР). Максимальное количество баллов по второй задаче (7 из 8) получили только 4 участника (3 из СССР). Полностью с третьей задачей справился всего 1 участник (из СССР). Четвертую задачу решили 6 участников (1 из СССР). С дополнительной задачей теоретического тура справились 3 участника. Максимальный балл (19,5) за эксперимент получили 3 участника (1 из СССР).

Следует отметить, что в отличие от предыдущих международных олимпиад в Бухаресте участникам не разрешили использовать калькуляторы на теоретическом туре. Это, разумеется, сильно затруднило выполнение числовых расчетов. Международная комиссия на своем заключительном заседании приняла решение впредь допускать использование калькуляторов.

После окончания обоих туров руководители команд и участники получили ксерокопии всех работ, а также официальные решения и предлагаемые критерии оценок. Поэтому руководители вместе с ребятами сами могли проверить все работы и убедиться в правильности оценок жюри.

Максимальное число баллов — 43,75 — получил болгарский школьник Иван Иванов. Дипломы первой степени были присуждены 7 участникам, набравшим более 90% баллов от наилучшего результата. Были присуждены также 9 дипломов второй степени (не менее 78% баллов от наилучшего результата) и 15 дипломов третьей степени (не менее 65% баллов от наилучшего результата)

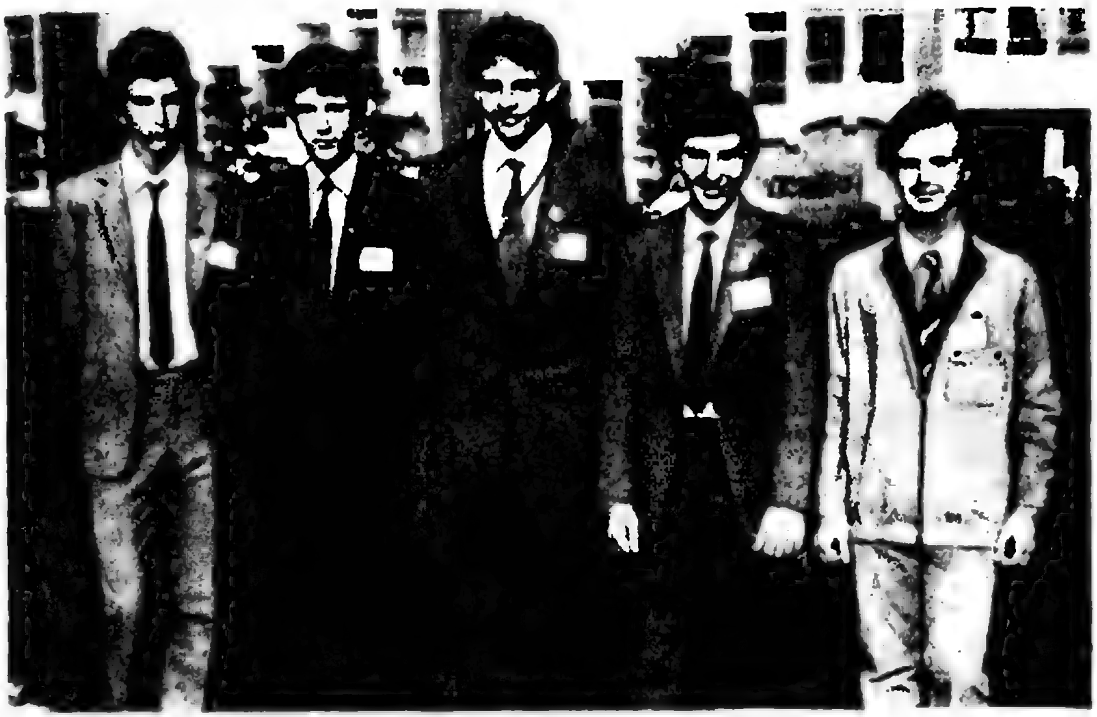
Команда Советского Союза выступила весьма успешно. Наши ребята получили 3 первых премии (А. Алексеев, А. Гниловской и В. Молчанов), 1 вторую премию (М. Дьячков) и 1 третью (В. Бирзвалкс). Таким образом, все участники нашей команды оказались в числе призеров олимпиады.

В неофициальном командном первенстве наша команда заняла первое место (191,75 балла). Высокий результат показала также команда Румынии (186,25 балла), занявшая второе место. Далее следуют команды ФРГ (153,00), Чехословакии (147,00), Венгрии (144,25), Польши (133,50), Болгарии (131,75), Вьетнама (114,25), Франции (111,75), ГДР (110,25), Югославии (101,75), Финляндии (90,75), Голландии (89,50), Швеции (88,50), Австрии (76,00) и Кубы (36,25).

16 участников олимпиады были награждены специальными призами за лучшее решение задач теоретического и экспериментального туров. Среди них А. Алексеев (задача 4), А. Гниловской (задача 1), М. Дьячков (задачи 1 и 3) и В. Молчанов (экспериментальное задание); 3 участника (2 из команды Румынии и 1 из команды Польши) получили специальные призы за решение дополнительной, необязательной задачи.

На закрытии XIV Международной физической олимпиады, которое состоялось в актовом зале физического факультета Бухарестского университета, выступил заместитель министра образования и воспитания Джордже Чуку. Он подчеркнул, что достижения каждой нации должны быть поставлены на службу всему человечеству, на службу мира. Он говорил о том, что международные олимпиады школьников содействуют укреплению и развитию международного сотрудничества молодежи, вносят существенный вклад в дело взаимопонимания народов. Олимпийское движение служит целям популяризации науки, повышения интереса школьников к физико-математическим наукам и технике, выявлению талантливой, одаренной молодежи.

На XIV Международной физической олимпиаде, как сказал в заклю-



Команда Советского Союза на XIV Международной физической олимпиаде. Слева направо: В. Бирзвалкс, М. Дьячков, А. Гниловской, В. Молчанов, А. Алексеев.

чение Джордже Чуку, есть победители, но нет побежденных. Важна нетолько победа в олимпиаде, но и само участие в ней. Каждый участник олимпиады прошел нелегкий путь и продемонстрировал свою преданность физике и способность творчески применять ее законы. Это большое достижение.

Затем председатель Международной комиссии профессор Константин Плевицу зачитал официальное решение комиссии об итогах олимпиады, и состоялась церемония награждения победителей дипломами и призами.

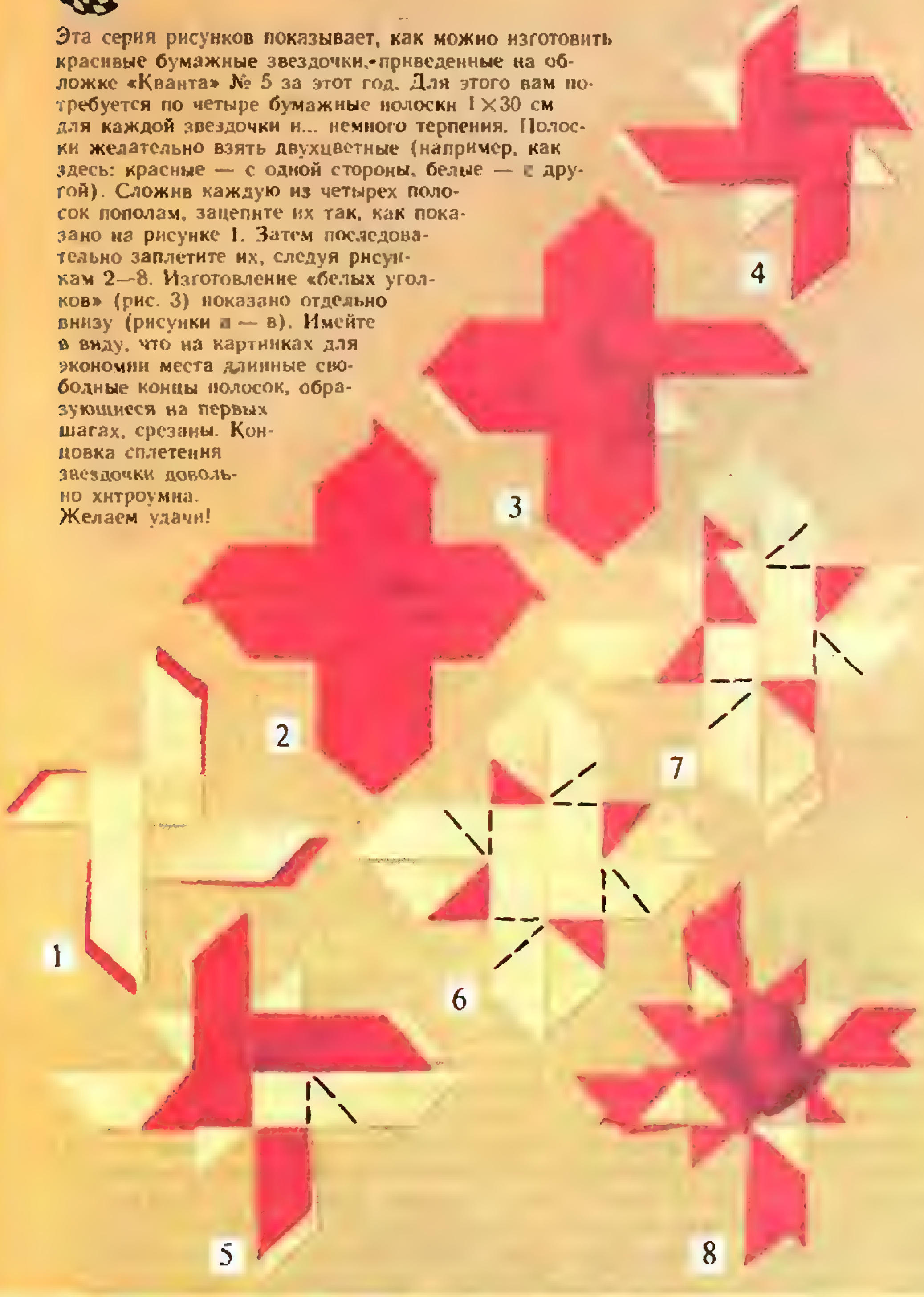
В заключение слово было предоставлено руководителю шведской делегации профессору Ларсу Сильвербергу, который передал официальное приглашение провести XV Международную физическую олимпиаду школьников в Швеции в конце июня 1984 года.

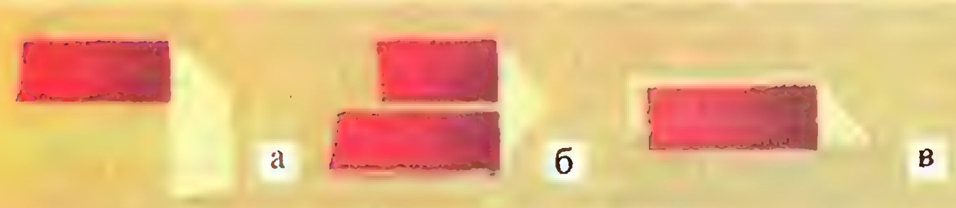
На олимпиаде в Бухаресте присутствовали представители трех молодежных физико-математических журналов: югославского журнала «Молодой физик», венгерского «Средне-школьного математического журнала» (в этом журнале есть и физический раздел) и «Кванта». В ходе олимпиады между ними неоднократно происходил обмен мнениями по различным вопросам: о работе с одаренной молодежью, о национальных физических олимпиадах, о роли молодежных журналов и т. п. В беседах принимали участие руководители делегаций ряда социалистических стран. Отрадно отметить, что участники бесед дали высокую оценку журналу «Квант», который хорошо известен за рубежом. Опыт «Кванта» широко используется молодежными физико-математическими журналами в других странах.

В заключение от имени всей советской делегации хочется поблагодарить румынский оргкомитет олимпиады за теплый, дружественный прием.

Хочется также пожелать успехов всем читателям «Кванта» в предстоящих олимпийских сражениях.

Эта серия рисунков показывает, как можно изготовить красивые бумажные звездочки, приведенные на обложке «Кванта» № 5 за этот год. Для этого вам потребуется по четыре бумажные полоски 1×30 см для каждой звездочки и... немного терпения. Полоски желательно взять двухцветные (например, как здесь: красные — с одной стороны, белые — с другой). Сложив каждую из четырех полосок пополам, зацепите их так, как показано на рисунке 1. Затем последовательно заплетите их, следуя рисункам 2—8. Изготовление «белых уголков» (рис. 3) показано отдельно внизу (рисунки а — в). Имейте в виду, что на картинках для экономии места длинные свободные концы полосок, образующиеся на первых шагах, срезаны. Концовка сплетения звездочки довольно хитроумна. Желаем удачи!





ФМШ при университетах — 20 лет

> *«при Университете необходимо должна быть гимназия, без которой Университет как пашня без семени»*
> М. В. Ломоносов

В 1963 году при Московском, Ленинградском, Киевском и Новосибирском университетах были созданы специализированные физико-математические школы-интернаты.

Инициаторами создания этих школ были выдающиеся ученые академики А. Д. Александров, П. С. Александров, С. Т. Беляев, В. М. Глушков, А. Н. Колмогоров, И. К. Кикоин, М. А. Лаврентьев, И. Г. Петровский, члены-корреспонденты АН СССР А. А. Ляпунов, Д. К. Фаддеев, Д. В. Ширков и другие.

Эксперимент оказался удачным. Вот уже двадцать лет эти школы дают хорошее пополнение научных кадров нашей страны.

Вслед за четырьмя первыми ФМШ были открыты аналогичные школы в Ереване, Тбилиси, Алма-Ате и других городах.

Среди выпускников ФМШ несколько десятков докторов наук, сотни кандидатов наук. Многие выпускники являются студентами и аспирантами крупнейших вузов страны и уже на студенческой скамье выполняют свои первые научные работы.

А. Н. Колмогоров писал: «Задача этих школ состоит в том, чтобы подросткам, живущим вдалеке от больших научных центров, предоставить те же возможности, что и ученикам лучших школ Москвы и других университетских городов, поэтому, например, в ФМШ при МГУ не принимаются школьники из Москвы и других университетских городов.»

Поступить в ФМШ нелегко. У каждой из них свои традиции проведения приема, однако общее одно — необходимо проявить настоящий живой интерес к науке, умение мыслить нестандартно.

Как правило, отбор кандидатов начинается на областных и республиканских математических и физических олимпиадах. Подробнее о порядке приема можно узнать в областных отделах народного образования.

Не следует думать, что для поступления в ФМШ нужно обладать каким-то исключительным талантом. Прежде всего требуется настоящая увлеченность и готовность трудиться несколько больше, чем при обучении в обычной школе.

Обучение математике и физике в ФМШ ведется по программам, разработанным коллективами их преподавателей. И хотя эти программы шире и глубже программ массовой школы, они не дублируют вузовских курсов. Цель обучения в ФМШ, говорил академик М. А. Лаврентьев, «научить думать, изобретать, ставить опыты, научить напрягать все силы для решения трудной задачи».

Интересы учеников не замыкаются на одну математику или физику. Школьники ходят в туристические походы, занимаются спортом. Так, ученики Московского интерната расшифровали аббревиатуру ФМШ как «футбольно-математическая школа». Футбольные, волейбольные и баскетбольные матчи между командами учеников и преподавателей — давнишняя традиция ФМШ.

В гостях у «фымышат» бывают крупнейшие ученые нашей страны, писатели, артисты, художники. Словом, коллективы школ делают все для того, чтобы жизнь школы была полноценной, чтобы школа стала настоящим домом для своего воспитанника.

Наш журнал поздравляет коллективы школ-юбиляров, всех выпускников, учеников и преподавателей этих школ и желает им всем счастья и больших творческих успехов. Доброго вам пути, «фымышата»!

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1984/85 учебный год.

Цель этой школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых поступают в ведущие вузы нашей страны.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание). Все материалы по организации кружка следует выслать в адрес ЗФТШ *до 25 мая*.

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся (по программе ЗФТШ) очные занятия по физике и математике два раза в неделю в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ). Набор в эти группы производится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно на русском языке. Работу надо аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании.

Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

1. Область (край или АССР)	*Чув. АССР*
2. Фамилия, имя, отчество	*Носова Лариса Ивановна*
3. Класс	*седьмой*
4. Номер и адрес школы	*Ново-Байдеряковская восьмилетняя школа*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*шофер*
мать	*колхозница*
6. Подробный домашний адрес	*Чув. АССР, Яльчикский район,* *п/о Лащ-Таяба, д. Ново-Байдеряково.*

Внизу начертите таблицу оценок за вступительное задание:

№								
Ф.								
М.								

Для ответа на вступительное задание подпишите конверт с указанием класса и вложите его в тетрадь.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1984 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1984 года.

Тетрадь с выполненным заданием (обязательно по физике и математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской и Читинской областей, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 4—9 — для восьмых классов, 5, 9—15 — для девятых классов. В задании по математике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов, 7—13 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Автомобиль прошел половину пути (по шоссе) со скоростью $v_1=90$ км/ч, вторую половину (по проселочной дороге) — со скоростью $v_2=30$ км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля.

2. В цилиндрическом стакане под слоем керосина находится 10-сантиметровый слой воды. Каково давление жидкостей на дно стакана, если объем керосина вдвое больше, а плотность на 20% меньше, чем у воды?

3. При небольших подъемах в гору атмосферное давление уменьшается на 1 мм рт. ст. на каждые 12 м подъема, а температура кипения воды изменяется на 0,1°C при изменении давления на 2,7 мм рт. ст. Какой будет температура кипения на вершине горы, если там барометр показывает 706 мм рт. ст.? Какова высота горы? Давление у подножия горы считать нормальным.

4. Дно лодки-плоскодонки оклеили снаружи пластиком толщины $d=3$ см и плотности $\varrho=1{,}6$ г/см^3. На сколько изменилась минимальная глубина водоема, по которому лодка может пройти, не задевая дна?

5. В герметически закрытом сосуде плавает кусок льда массы $M=100$ г, в который вмерз стальной шарик массы $m=2$ г. Какое количество теплоты надо затратить, чтобы льдинка начала тонуть? Плотность стали $\varrho_c=7{,}8$ г/см^3, плотность льда $\varrho_л=0{,}9$ г/см^3. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг. Температура воды в сосуде 0°C.

6. Тело начинает двигаться без начальной скорости с постоянным ускорением $a=2{,}4$ м/с^2. Определите путь s_1, пройденный телом за первые 5 с от начала движения, и путь s_2, пройденный за следующие 5 с. С какой средней скоростью двигалось тело эти 10 с?

7. В цирковом аттракционе велосипедист, двигаясь по внутренней поверхности прозрачного шара диаметра $D=5$ м, описывает «мертвую петлю» (окружность в вертикальной плоскости). В какой точке траектории его скорость минимальна, если он движется, не работая педалями? Определите эту скорость.

8. К двум параллельно соединенным резисторам с сопротивлениями $R_1=20$ Ом и $R_2=60$ Ом подключен последовательно третий резистор с сопротивлением $R_3=35$ Ом. Вся цепь включена в сеть с напряжением $U=120$ В. Определите токи в каждом резисторе.

9. Баскетболист выполняет бросок по кольцу. В момент броска мяч находится на высоте $h=2{,}05$ м, а через время $t=1$ с падает в кольцо, расположенное на высоте $H=3{,}05$ м. С какого расстояния от кольца (по горизонтали) произведен бросок, если мяч был брошен под углом $\alpha=60°$ к горизонту? Сопротивление воздуха не учитывать.

10. Тело скользит по гладкому горизонтальному столу и налетает на торец пружины, второй конец которой прикреплен к стене. Сжав пружину на 0,4 м, тело начинает двигаться обратно. Каково сжатие пружины в тот момент, когда ее потенциальная энергия равна кинетической энергии тела? Каким было бы максимальное сжатие пружины, длина которой вдвое больше при той же плотности витков?

11. Как изменяется длина километрового стального кабеля при колебаниях температуры от −25 до +35°C? Коэффициент линейного расширения стали $\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$.

12. Два спутника обращаются по круговым орбитам вокруг Земли. Каково отношение кинетических энергий спутников, если отношение их масс $M_1/M_2=2$, а отношение радиусов орбит $R_1/R_2={}^1/_3$?

13. Машинист пассажирского поезда, двигавшегося со скоростью $v_1=90$ км/ч, заметил на расстоянии $l_0=140$ м впереди движущийся в ту же сторону со скоростью $v_2=21{,}6$ км/ч товарный поезд. Машинист сразу включил тормоз, благодаря чему пассажирский поезд начал двигаться с ускорением $a=-1$ м/с^2. Удалось ли избежать столкновения поездов? Ответ обосновать расчетом.

14. Резиновая камера футбольного мяча, заполненная воздухом под давлением, практически равном атмосферному ($p_0=10^5$ Па), имеет радиус $r_1=10$ см. Когда эту камеру поместили в вакуум, ее радиус стал равным $r_2=20$ см. Считая, что давление, связанное с натяжением резины, линейно зависит от радиуса камеры, определите, при каком внешнем давлении камера имеет радиус $r_3=18$ см. Температура воздуха в камере постоянна.

15. Точечный заряд $+q$ расположен в центре полого металлического шара, несущего заряд $-Q$. Радиус полости R_1, внешний радиус шара R_2. Определите плотности зарядов на внутренней и внешней поверхностях шара и его потенциал. Как изменится потенциал шара, если на расстоянии $R_0>R_2$ от его центра расположить точечный заряд $+q_0$?

Математика

1. Говорят, что на вопрос о том, сколько у него учеников, древнегреческий математик Пифагор ответил так: «Половина моих учеников изучает математику, четверть изучает природу, седьмая часть проводит время в молчаливом размышлении, остальную часть составляют 3 девы». Сколько учеников было у Пифагора?

2. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой одного из углов трапеции. В каком отношении каждая из диагоналей делится точкой их пересечения?

3. В двух ящиках вместе лежит более 27 деталей. Если бы в первом ящике лежало на 24 детали больше, то число деталей в нем больше чем в 2 раза превышало бы число деталей во втором ящике, а если бы в первом ящике было на 10 деталей меньше, то число деталей во втором ящике превышало бы число деталей в первом более чем в 9 раз. Сколько деталей лежит в каждом ящике?

4. Докажите, что число $3^{60}-2^{60}$ делится на 11.

5. В турнире, где каждые две команды встречались между собой по два раза, участвовали четыре команды. За победу в каждой встрече давалось 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Команда, занявшая последнее место, набрала 5 очков. Сколько очков набрала команда, занявшая первое место?

6. Найдите корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, если его значения в точках

$x=-1$ и $x=5$ равны, а значение в точке $x=3$ отличается от первых двух значений только знаком.

7. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 1:3. В каком отношении делит гипотенузу высота?

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+x=y^2+y \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

9. Окружность касается трех сторон параллелограмма с углом α и отношением сторон 1:2. Найдите отношение расстояний от центра окружности до диагоналей параллелограмма.

10. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4.$$

11. Окружность с центром в начале координат O проходит через точки A (4, 3) и B (—3; 4). Найдите на окружности точку M такую, чтобы вектор $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}$ имел наибольшую длину.

12. Решите неравенство

$$x+\sqrt{x^3+2x^2-6x}>0.$$

13. Отношение квадрата полупериметра треугольника к его площади равно $3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$. Найдите углы треугольника, если известно, что они образуют арифметическую прогрессию.

Напечатано в 1983 году

К читателям	1	2
Кондаков М. И. С новым учебным годом!	9	2

* * *

Гнеденко Б. В. Математика и производство	1	3
Ершов А. П. Программирование — вторая грамотность	2	2
Кикоин И. К. Физика и научно-технический прогресс	3 5	2 2

* * *

Рудольф Мёссбауэр отвечает на вопросы редакции журнала «Квант»	3	6
Уникальная лаборатория (интервью с летчиком-космонавтом СССР А. А. Серебровым)	4	7
Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым	4	12

* * *

Гиндикин С. Г. Леонард Эйлер	10 11	17 17
Каганов М. И. Выдающийся физик-теоретик XX века (Л. Д. Ландау)	1	12
Кикоин И. К. Он прожил счастливую жизнь (И. В. Курчатов)	1	7
Кикоин И. К. Анатолий Петрович Александров	2	8
Лишевский В. П. Революционер в науке и жизни (Г. Монж)	7	17
Н. Н. Лузин (к столетию со дня рождения)	12	7

Статьи по математике

Анохин А. И., Ломакина З. Д. Математика мореплавателю	8	7
Болтянский В. Г. Метод итераций	3	16
Винокуров В. А., Митин Б. С. Математика и технология в космосе	4	2
Владимиров В. С., Мищенко А. С. Роль математической физики в современной науке	12	2
Галиулин Р. В. Как устроены кристаллы	11	10
Гиндикин С. Г. О пользе чисел «поистине софистических»	6	10
Зайдель А. Н. Обман или заблуждение? (Об одном способе вычисления π.)	5	24
Крейн М. Г., Нудельман А. А. Теорема Борсука — Улама	8	20
Матвеев С. В. Расправление контуров на плоскости	4	22
Мищенко А. С., Соловьев Ю. П. Кватернионы	9	10
Нестеренко Ю. В., Никишин Е. М. Очерк о цепных дробях	5 6	16 26
Понтрягин Л. С. Комплексные числа	2	16
Фельдман Н. И. Алгебраические и трансцендентные числа	7 10	2 57
Фоменко А. Т. Минимальные поверхности	6	18

Статьи по физике

Асламазов Л. Г. Меандры рек	1	17
Асламазов Л. Г. Неинерциальные системы отсчета	10	9
Бронштэн В. А. Тунгусский метеорит — в лаборатории физика	7	9
Бялко А. В. Что такое атмосфера	6	2
Бялко А. В. Торные тропы Торо	12	20
Губанков В. Н. Солитоны	11	2
Житковский Ю. Ю. Физики изучают гидрокосмос	8	2
Займовский В. А. У металлов есть память?!	9	3
Кудрявцева Е. Н., Хилькевич С. С. Почему вода выливается из ведра?	9	16
Митрофанов А. В. Задачи П. Л. Капицы	5	21
Пегоев А. Н. Что случилось с лампочкой?	8	26
Самарский Ю. А. Эффект Мёссбауэра (или резонансное ядерное поглощение γ-квантов в кристаллах)	3	7
Смилга В. П. Мифы XX века	12	13
Смородинский Я. А. Черные дыры	2	11
Фабрикант В. А. Рождение кванта	4	16
Фальковский Л. А. Физика поверхности	10	2
Чернин А. Д. Вспыхивающие рентгеновские звезды	8	13
Шур А. А. Эти разные радиоволны	5	9

Новости науки

Асламазов Л. Г. ЭВМ на сверхпроводниках	11	24

Боровой А. А. Первая в мире нейтринная лаборатория на атомной электростанции 4 11
Бронштэн В. А. Загадочный Плутон 3 15
Бялко А. В. Изменение фигуры Земли и ее вращения 10 25
Карпова И. В. Необычные кристаллы-генераторы 8 31
Кожушнер М. А. Холодный взрыв 2 20
Свириденков Э. А. Как увидели один ион 7 8
Франк-Каменецкий М. Д. Левая спираль ДНК 6 31
Самый далекий квазар 1 26
Открытие новой частицы 5 38
Химическая геометрия 9 21
Самый быстрый пульсар 12 12

Лаборатория «Кванта»

Аринштейн А. Э. Сравнительный вискозиметр Жуковского 9 22
Боровой А. А. Первоапрельский калейдоскоп 3 22
Боровой А. А. Неоновая лампочка 6 32
Варламов А. А. Из старых опытов 5 29
Гаврилов С. Л. Что такое стробоскоп 1 27
Жижилкин И. Д. Сирена Зеебека 4 29
Майский В. В. Где тонко, там и рвется 12 22
Пентегов В. И. Давайте нагреем воду сверху 2 21

Наш календарь

Правило Ленца 6 9
Законы электролиза 8 25
Эффект Мейснера 10 16
Об изохронности колебаний маятника 11 30

Математический кружок

Башмаков М. И. Равномерное движение 3 26
Беспамятных С. Н. Раскраска плоскости и теорема Ван-дер-Вардена о прогрессиях 6 35
Гейн А. Г. Перед школьной олимпиадой 10 28
Тихомиров В. М. Об одной олимпиадной задаче 1 22
Фомин С. В. Разложение на множители 7 23
Шарыгин И. Ф. Вокруг биссектрисы 8 32

Геометрическая страничка

Прямые на кривой поверхности 10 26

Искусство программирования

Стандартные приемы программирования

Урок 4 1 50
Урок 5 2 54
Урок 6 3 55

«Квант» для младших школьников

Задачи 1—12

* * *

Гутенмахер В. Л. Магистр Игры в гостях у «Кванта» 4 36
Данелия Р. Ш. На пальцах и в уме 5 40
8 45
Дубровский В. Н. Кубик в картинках 9 33
Никольская И. Л., Саблина Н. Г. А если..., что тогда? 10 39
Савин А. П. О больших числах 7 40
Смородинский Я. А. Пирамидки и куб 1 37
Табачников С. Л. У нас в гостях — математический радиокружок 3 39

* * *

Данюшенков В. С. Электронный глаз 11 32
Лещинский Л. А., Петрова Т. С. Дано... Требуется определить... 2 36
Петрова Т. С. Решаем задачи по физике 12 32
Семенов Е. Е. Степа Мошкин путешествует 8 42
Токарев А. В. Дом, который построил... 6 40

Игры и головоломки

Сапронов В. А. Рэндзю 8 57
10 52

Задачник «Кванта»

Задачи М781—М840; Ф793—Ф852 1—12
Решения задач М759—М761, М763—М799, М801—М817, М819—М822, М824, М825; Ф778—Ф836 1—12

* * *

Валландер С. С. Постоянная становится переменной 7 52
Дубровский В. Н. Что скрывается за превращениями тетраэдра 7 53

* * *

Список решивших 3, 6, 9, 12
Победители конкурса «Кванта» 3 42

Школа в «Кванте»

Болибрух А. А., Уроев В. М., Шабунин М. И. Задачи с устного экзамена МФТИ 2 28
Болибрух А. А., Уроев В. М., Шабунин М. И. Квадратный трехчлен 9 26
Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Арифметика и принципы подсчета 1 30
Жак Я. Э. Где ошибка? 10 32
Матизен В. Э. Равногранные и каркасные тетраэдры 7 34
Печерский Л. Б. $n^x = x^n$ 10 31
Печерский Л. Б. Когда $|a+b| = |a| + |b|$? 8 38
Самаров К. Л., Шабунин М. И. Обратные тригонометрические функции 4 30
Штернберг Л. Ф. Многофигурная стереометрическая задача 2 29
Еще одно определение равногранного тетраэдра? 7 51

* * *

Баканина Л. П. Интерференция волн 5 34
7 52
Белонучкин В. Е. Уравнение газового состояния 2 25
Меледин Г. В. Задачи-оценки 7 26
Юрский С. А. Проводящая сфера в задачах по электростатике 3 31
Физика 8, 9, 10 9—12

Практикум абитуриента

Задачи вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы в 1982 году 6 54

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена 2 59
Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина 3 58
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 5 53
Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского 5 56
Московский инженерно-физический институт 3 57
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 1 58
Московский институт стали и сплавов 5 57
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 4 54
Московский физико-технический институт 1 55
Московский институт электронного машиностроения 1 57
Московский энергетический институт 2 57
Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана 5 55
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 2 56

* * *

Тарасов Л. В., Тарасова А. Н. Характерные ошибки на экзаменах по физике 9 53

Рецензии, библиография

Уроев В. М. Нужная книга 4 50
Яглом И. М. Мартин Гарднер и "The Mathematical Gardner" 7 59

* * *

Болотовский Б. М. И. Е. Тамм — человек и ученый 7 61
Левитан Е. П. Какое оно — наше Солнце? 8 60
Зильберман А. Р. Олимпиадные задачи 5 23

* * *

Новые книги 5 28
Библиотечка «Квант» 9 57

Информация

Всесоюзный смотр «Юные техники, натуралисты и исследователи — Родине!» 8 61
Конкурс математических проектов 8 62
V Московский турнир юных физиков 10 59

* * *

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу 1 52
Новый прием на заочное отделение Малого мехмата 1 53
Заочная физико-техническая школа при МИСиСе 1 54
Заочная физико-техническая школа при МФТИ 12 53
Заочная физическая школа при МГУ 4 53
Вечерняя физическая школа при МГУ 8 62

* * *

Путь в науку начинается с задачи (15 лет — школе естественных наук при ИАЭ) 4 51
Омскому НОУ — 15 лет 11 45
ФМШ при университетах — 20 лет 12 53

Олимпиады

XXIV Международная математическая олимпиада 12 46
XIV Международная физическая олимпиада 12 48

XVII Всесоюзная олимпиада

Олимпиада по математике 11 46
Олимпиада по физике 11 49
Экспериментальный тур олимпиады по физике 11 52
Призеры олимпиады 11 56

* * *

IX Всероссийская олимпиада школьников 10 55
Задачи республиканских олимпиад 2 51
Свердловская областная олимпиада по математике 1982/83 года 9 60
Московская городская олимпиада по физике 1982/83 года 9 58

Наша обложка

Котов Ю. В. Топология автомобильной развязки 5 52
Хайкин Ф. А., Ходулев А. Б. Избушка на курьих ножках 7 32
Березенко А. И., Юшков В. И. Электрический разряд в лаборатории 3 25
Парящий магнит 10 8

«Квант» улыбается

Казанджан Э. П. Поэзия? Математика? 1 49
Казанджан Э. П. Ученье — мученье 9 52
Афоризмы академика П. Л. Капицы 5 51
Физика и суд 8 56

Смесь

Гельфанд М. С. О десятичной записи некоторых чисел 7 25
Гиндикин С. Г. Новое простое число 7 16
Маневич А. Г. О целочисленных точках кривых вида $x^n+y^n=c^n$ 7 58
Муцениекс В. Целая точка, ближайшая к вершине угла 7 33
Петраков И. С. «Задачи на премию» прошлого века 8 45
Сефибеков С. Р. Четыре доказательства теоремы о биссектрисе 8 37
Шевелев В. С. Разложение на различные множители 5 37
Шень А. Х. Что такое случайность? 7 57
О реках и озерах 1 21
Из научной переписки 4 21
Оптические иллюзии 4 52
Анкета 12 64
Шахматная страничка 1 12

XXIV Международная математическая олимпиада

Приводим решение задачи, сформулированной на с. 46.

Пусть сначала f — искомая функция. Положив в 1) $y=x$, получаем, что при любом $x \in \mathbf{R}_+$ число $b=x\cdot f(x)$ является неподвижной точкой функции f (то есть $f(b)=b$). Пусть a — произвольная неподвижная точка функции f. Докажем, что $a=1$. Если при $n\geqslant 2$ имеем $f(a^{n-1})=a^{n-1}$, то $f(a^n)=f(a\cdot a^{n-1})=$ $=f(a\cdot f(a^{n-1}))=a^{n-1}\cdot f(a)=a^{n-1}\cdot a=a^n$. Таким образом, все числа $a^n (n\in \mathbf{N})$ тоже являются неподвижными точками. Далее, $a=f(a)=f(1\cdot a)=f(1\cdot f(a))=a\cdot f(1)$; из $a\neq 0$ следует $f(1)=1$. Затем $a\cdot f\left(\frac{1}{a}\right)=$ $=f\left(\frac{1}{a}\cdot f(a)\right)=f\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)=f(1)=1$, откуда $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}$. Наконец, аналогично проверяется, что $f\left(\frac{1}{a^n}\right)=\frac{1}{a^n}$. Таким образом, все числа $a^n (n\in \mathbf{Z})$ — неподвижные точки. Из условия 2) заключаем, что $a=1$. Итак, при любом $x\in \mathbf{R}_+$ имеем $x\cdot f(x)=1$, откуда $f(x)=\frac{1}{x}$.

Обратно, легко проверить, что функция $\frac{1}{x}$ удовлетворяет условиям 1), 2).

XIV Международная физическая олимпиада

Теоретический тур

Задача 1

1) Очевидно, что частица остановится в начале координат. Поэтому из закона сохранения энергии получаем

$$E_к+F_x x_0=F_{тр}s,$$

откуда

$$s=\frac{1}{F_{тр}}(E_к+F_x x_0)=20{,}0 \text{ м}.$$

2) Потенциальная энергия частицы в поле силы F_x есть $E_п=F_x x+C$, где C — некоторая постоянная величина. Зависимость $E_п=E_п(x)$ (для случая $C=0$) представлена на рисунке 1.

3) Частица движется к стенке и от нее с постоянными ускорениями

$$a_{1x}=\frac{1}{m}(F_x+F_{тр}) \text{ и } a_{2x}=\frac{1}{m}(F_x-F_{тр})$$

соответственно. Из условия задачи следует, что $a_{1x}<0$, $a_{2x}<0$ и $a_1<a_2$. Качественные графики зависимости скорости v_x от координаты x для двух возможных значений начальной скорости частицы $v_{0x}>0$ и $v_{0x}<0$ представлены на рисунке 2, *а* и *б*. Заметим, что $v_x^2=2a(x_i-x)$, где a — модуль ускорения на данном участке движения, а x_i — координата точки остановки после очередного отскока от стенки. Поэтому график зависимости v_x^2 от координаты x (при $v_{0x}>0$ и $v_{0x}<0$) имел бы более простой вид (рис. 3, *а* и *б*).

Задача 2

1) Обозначим через U и I действующие значения напряжения и тока источника. Тогда

$$U=IZ=I\left(\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2\right)^{-1/2}.$$

Здесь

$$C=C_1+C_2,\quad L=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}.$$

Мощность, выделяемая в резисторе, есть

$$P=\frac{U^2}{R}=\frac{I^2}{R}\,\frac{1}{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

По условию задачи I есть постоянная величина, не зависящая от частоты генератора ω. Поэтому $P=P_м$ при условии $\omega_м C-\frac{1}{\omega_м L}=0$, или $\omega_м=\frac{1}{\sqrt{LC}}=10^5 \text{ с}^{-1}$.

Мощность уменьшится в два раза по сравнению с $P_м$ на частотах $\omega_\pm$, удовлетворяющих соотношению

$\omega_\pm C-\frac{1}{\omega_\pm L}=\pm\frac{1}{R}$, или $RL\omega_\pm^2 C\mp\omega_\pm L-R=$ $=0$, откуда

$$\omega_\pm=\frac{\pm L\pm\sqrt{L^2+4R^2LC}}{2RLC}.$$

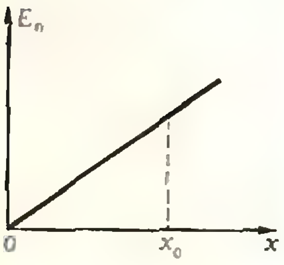


Рис. 1.

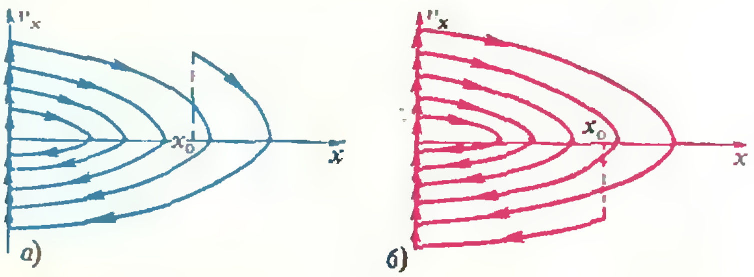


Рис. 2.

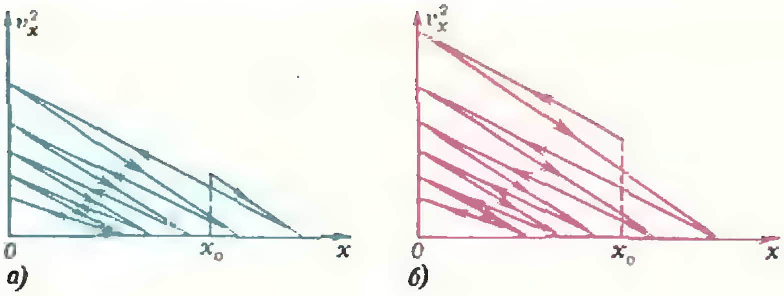


Рис. 3.

Знак «минус» перед корнем физического смысла не имеет, так что в итоге получаем

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{1}{RC}.$$

$$\frac{\nu_м}{\Delta\nu} = \frac{\omega_м}{\Delta\omega} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = R\omega_м C = \frac{R}{L\omega_м} = 150.$$

2) После размыкания ключа в контуре, состоящем из конденсаторов и катушек индуктивности (рис. 4), происходят свободные незатухающие колебания. Этот контур эквивалентен обычному колебательному контуру с параметрами $C = C_1 + C_2$ (параллельное соединение конденсаторов) и $L = L_1L_2/(L_1 + L_2)$ (параллельное соединение катушек). Поэтому частота свободных электромагнитных колебаний в цепи есть

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{\omega_м}{2\pi} \approx 15{,}9 \text{ кГц}.$$

3) При параллельном соединении идеальных катушек имеем

$$L_1\frac{di_1}{dt} = L_2\frac{di_2}{dt} = U.$$

Здесь U — напряжение на параллельно соединенных катушках и конденсаторах. Отсюда следует

$$L_1i_1 = L_2i_2 + L_2i_0,$$

где i_0 — постоянная величина. Из данных задачи для момента времени t_0 найдем

$$i_0 = \frac{1}{L_2}(L_1i_{01} - L_2i_{02}) = -0{,}15 \text{ А}.$$

Этот результат физически означает, что в катушках циркулирует постоянный ток. Причиной возникновения этого тока могло быть, например, изменение внешнего магнитного поля.

Применяя I закон Кирхгофа, получим

$$i_1 + i_2 + i_{C_1} + i_{C_2} = i_1 - \frac{L_1}{L_2}i_1 - i_0 +$$

$$+ (C_1 + C_2)\frac{dU}{dt} = i_1\left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right) - i_0 +$$

$$+ L_1(C_1 + C_2)\frac{d^2i_1}{dt^2} = 0.$$

или

$$\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{1}{CL}i_1 = \frac{1}{CL_1}i_0.$$

Решение этого дифференциального уравнения есть

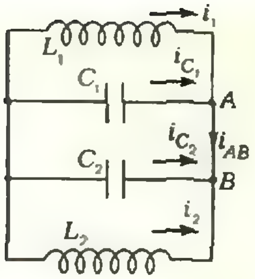


Рис. 4.

$$i_1 = I_1\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{L}{L_1}i_0,$$

где I_1 и φ — амплитуда и начальная фаза колебаний тока в катушке с индуктивностью L_1, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — круговая частота свободных колебаний, совпадающая с резонансной частотой $\omega_м$. Теперь найдем ток на участке AB:

$$i_{AB} = i_1 + i_{C1} = i_1 + C_1\frac{dU}{dt} = i_1 + L_1C_1\frac{d^2i_1}{dt^2} =$$

$$= I_1\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{L}{L_1}i_0 - \frac{L_1C_1}{LC}I_1\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Из данных задачи имеем $L_1C_1/(LC) = 1$, поэтому

$$i_{AB} = \frac{L}{L_1}i_0 = \frac{L_2}{L_1 + L_2}i_0 = -0{,}1 \text{ А}.$$

Мы получили, что на участке AB протекает только постоянный ток. Этот результат можно было бы предугадать, если заметить, что в нашей схеме $C_1L_1 = C_2L_2 = CL$. Это означает, что колебательные процессы в контурах C_1L_1 и C_2L_2 происходят с одной и той же частотой ω_0 независимо друг от друга.

4) Амплитуду колебаний тока I_1 в катушке с индуктивностью L_1 найдем из закона сохранения энергии. Рассматривая процесс незатухающих колебаний в контуре C_1L_1 и исключая постоянную составляющую тока в катушке, равную i_{AB}, запишем

$$\frac{L_1(i_{01} - i_{AB})^2}{2} + \frac{C_1U_0^2}{2} = \frac{L_1I_1^2}{2}.$$

Отсюда найдем

$$I_1 = \sqrt{(i_{01} - i_{AB})^2 + \frac{C_1}{L_1}U_0^2} \approx 0{,}204 \text{ А}.$$

Заметим, что решение этой задачи выходит за рамки нашей школьной программы и требует знаний хотя бы в объеме *факультативного курса физики*.

Задача 3

1) Волна не будет испытывать преломления на грани AC (см. рис. 3 в статье) при условии равенства показателей преломления:

$$a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2} = n_0.$$

Отсюда

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}} = 500 \text{ нм}; \; n_0 = 1.5.$$

Излучение с длиной волны $\lambda_0 = 500$ нм отно-

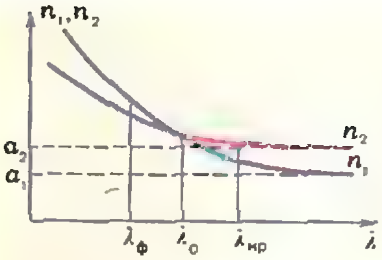


Рис. 5.

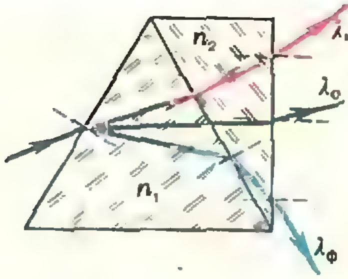


Рис. 6.

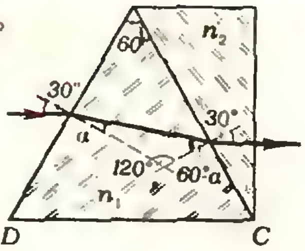


Рис. 7.

сится к зеленой области видимой части спектра.

2) Заметим, что показатели преломления обеих призм с увеличением длины волны излучения уменьшаются. Кроме того, поскольку по условию $b_1 > b_2$, для фиолетового излучения $(\lambda_ф < \lambda_0)$ имеем $n_1 > n_2$, а для красного $(\lambda_{кр} > \lambda_0)$ $n_1 < n_2$ (рис. 5). Качественный ход лучей в системе призм для трех различных длин волн ($\lambda_{кр} > \lambda_0$, λ_0 и $\lambda_ф < \lambda_0$) изображен на рисунке 6.

3) Угол наименьшего отклонения δ луча призмой с преломляющим углом A связан с показателем преломления n соотношением (вывод предоставляем читателям)

$$n = \frac{\sin(A+\delta)/2}{\sin A/2}.$$

В нашем случае система призм для излучения с длиной волны λ_0 работает как одиночная призма с показателем преломления $n_0 = 1{,}5$ и преломляющим углом $A = A_1 - A_2 = 30°$. Следовательно,

$$\delta = 2 \arcsin(n_0 \sin A/2) - A = 15{,}68°.$$

4) На рисунке 7 изображен ход луча, падающего на систему призм и выходящего из нее параллельно основанию DC. На основании закона преломления можно записать

$$\sin\alpha = \frac{1}{2n_1},$$

$$\sin(60° - \alpha) = \frac{n_2}{2n_1}.$$

Отсюда после преобразований получаем уравнение для длины волны λ:

$$\lambda^4(3a_1^2 - a_2^2 - a_2 - 1) + \lambda^2(6a_1b_1 - 2a_2b_2 - b_2) + {} + 3b_1^2 - b_2^2 = 0.$$

Подставляя числовые значения a_1, a_2, b_1 и b_2 и решая биквадратное уравнение, найдем

$$\lambda \approx 1200 \text{ нм}.$$

Задача 4

На рисунке 8 изображена так называемая диаграмма импульсов для рассматриваемых процессов. Здесь через $\vec{P}_i$, $\vec{P}_0$ и $\vec{P}_f$ обозначены импульсы фотонов, через $\vec{P}_{e1}$ и $\vec{P}_{e2}$ — импульсы электронов. Заметим, что рассматриваемый в условии задачи первый процесс рассеяния фотона на движущемся электроне является обращением во времени второго процесса — рассеяния на неподвижном электроне (эффекта Комптона). Отсюда сразу следует, что $\lambda_i = \lambda_f = 1{,}25 \cdot 10^{-10}$ м и $P_{e1} = P_{e2} = P_e$. Длину волны де Бройля электрона можно найти через его импульс P_e:

$$\lambda_e = \frac{h}{P_e}.$$

Для определения P_e достаточно применить законы сохранения энергии и импульса к любому из двух процессов рассеяния (например, ко второму):

$$h\nu_0 - h\nu_f = E_к,$$

$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu_f}{c}\cos\theta + P_e\cos\varphi,$$

$$0 = \frac{h\nu_f}{c}\sin\theta - P_e\sin\varphi.$$

Здесь $E_к$ и P_e — кинетическая энергия и импульс электрона, φ — угол, определяющий направление его движения после рассеяния. Задача может быть доведена до конца различными путями. Можно, например, просто использовать известную формулу для эффекта Комптона, которая вытекает из написанных выше соотношений:

$$\lambda_f - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta),$$

где $h/(mc) = 0{,}24 \cdot 10^{-11}$ м — так называемая комптоновская длина волны. В этом случае решение получается совсем простым. Действительно,

$$E_к = h\nu_0 - h\nu_f = h\frac{c}{\lambda_0} - h\frac{c}{\lambda_f} =$$

$$= hc\frac{\lambda_f - \lambda_0}{\lambda_0\lambda_f} \approx \frac{hc}{\lambda_f^2}\frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \approx$$

$$\approx 1{,}56 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} \approx 97{,}4 \text{ эВ}.$$

Так как $E_к \ll mc^2 \approx 0{,}5$ МэВ, сразу ясно, что электрон нерелятивистский. Поэтому можно использовать классическую формулу

$$E_к = \frac{P_e^2}{2m}.$$

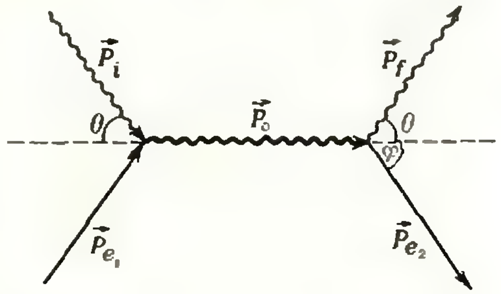


Рис. 8.

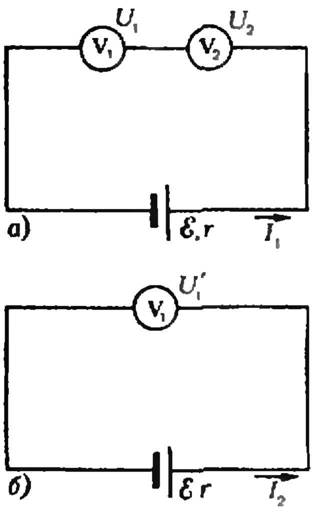


Рис. 9.

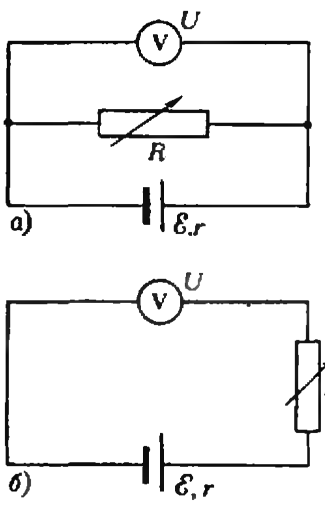


Рис. 10.

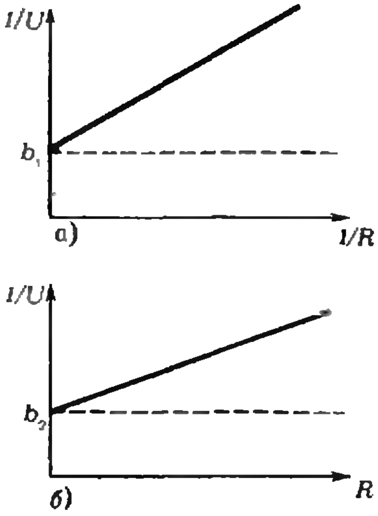


Рис. 11.

В итоге получим

$$\lambda_e = \frac{h}{P_e} = \frac{h}{\sqrt{2mE_к}} \approx 1{,}24 \cdot 10^{-10}\ м.$$

Если «готовая» формула Комптона решающему неизвестна, то придется искать импульс электрона из уравнений, выражающих законы сохранения энергии и импульса. Но тогда возникает вопрос, какими формулами описывать электрон — релятивистскими или классическими. В данном случае оба решения дают одинаковый результат, но при использовании с самого начала классических формул необходимо дать обоснованное заключение, что электрон нерелятивистский. Предоставляем читателям возможность самостоятельно довести решение задачи до конца. Для справок укажем, что кинетическая энергия $E_к$ и импульс P частицы с массой покоя m связаны в релятивистском случае соотношением

$$P^2c^2 = E_к(E_к + 2mc^2),$$

из которого при $E_к \ll mc^2$ получается классическое соотношение $E_к = P^2/(2m)$.

В заключение подчеркнем, что данная задача далеко выходит за рамки нашей школьной программы.

Задача 5

Решение этой задачи, которая не входила в официальный зачет олимпиады, мы здесь приводить не будем. Предлагаем ее читателям для самостоятельного разбора.

Экспериментальное задание

1) На рисунке 9 изображены две схемы. В первой из них оба вольтметра подключены к источнику последовательно, во второй используется только один вольтметр. Обозначим через U_1, U_2 и U_1' показания вольтметров и через I_1 и I_2 — токи в цепях. Тогда

$$U_1 + U_2 = \mathcal{E} - I_1 r,\quad U_1' = \mathcal{E} - I_2 r.$$

Заметим, что

$$\frac{U_1}{U_1'} = \frac{I_1}{I_2}.$$

Из этих соотношений получим

$$\mathcal{E} = \frac{U_2 U_1'}{U_1' - U_1}.$$

Таким образом, для определения ЭДС источника достаточно использовать две схемы.

2) Вольтметр и магазин сопротивлений можно подключать к источнику двумя способами (рис. 10). Предполагается, что в ходе эксперимента сопротивление R магазина изменяется, и при каждом значении R производится отсчет показаний вольтметра U. В случае *а*) связь между U и R выражается формулой

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{\mathcal{E}}\left(1 + r\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R}\right)\right),$$

где r и R_V — внутренние сопротивления источника и вольтметра соответственно. Отсюда видно, что зависимость величины $1/U$ от $1/R$ — линейная. По экспериментальным данным можно построить соответствующий график (рис. 11, *а*). По наклону графика и по точке пересечения с осью ординат можно определить величины

$$k_1 = \frac{r}{\mathcal{E}} \text{ и } b_1 = \frac{R_V + r}{\mathcal{E} R_V}.$$

В случае *б*) имеем соотношение

$$\frac{1}{U} = \frac{R_V + r}{\mathcal{E} R_V} + \frac{R}{\mathcal{E} R_V}.$$

Здесь линейной зависимостью связаны величины $1/U$ и R. По экспериментальным данным строится соответствующий график (рис. 11, *б*), и из него определяются

$$k_2 = \frac{1}{\mathcal{E} R_V} \text{ и } b_2 = \frac{R_V + r}{\mathcal{E} R_V}.$$

Следовательно, эксперимент позволяет найти следующие параметры:

$$k_1 = \frac{r}{\mathcal{E}},\ k_2 = \frac{1}{\mathcal{E} R_V} \text{ и } b = b_1 = b_2 = \frac{R_V + r}{\mathcal{E} R_V}.$$

Отсюда для $\mathcal{E}$, r и R_V получаются квадратные уравнения, имеющие по два положительных решения. Таким образом, предлагаемый метод без дополнительных данных не позволяет однозначно определить искомые величины

Окончательно расчетные формулы для $\mathscr{E}$, r и R_V могут быть записаны в виде

$$r_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4k_1k_2}}{2k_1};\quad \mathscr{E}_{1,2}=\frac{1}{k_2}r_{1,2};$$

$$R_{V_{1,2}}=r_{2,1}.$$

3) Погрешности измерений определяются, в основном, классом точности используемых вольтметров. Отметим здесь, что существенную роль играет также соотношение параметров вольтметров и источника. Например, при выполнении первой части задания максимальная точность достигается в случае, когда внутреннее сопротивление источника и сопротивления обоих вольтметров одного порядка. Если один из вольтметров высокоомный, а другой низкоомный, рассмотренный способ даст плохой результат. Если у одного из вольтметров $R_V \gg r$, то лучше всего измерять ЭДС источника с помощью одной схемы, приведенной на рисунке 9, *б* (в этом случае $\mathscr{E}\approx U_1'$). Заметим, что в ходе эксперимента могла заметно проявиться нестабильность источника, что нередко наблюдается, например, у батареек для карманного фонарика при протекании достаточно большого тока. В этом случае графики (см. рис. 11) перестают быть линейными, что может привести к большой ошибке.

«Квант» для младших школьников

(см. с. 31)

1. Пусть первое число $10a+b$, а второе — $10c+d$; тогда $A=100ac+10(ad+bc)+bd$, а число $B=(10b+a)(10d+c)=100bd+10(bc+ad)+ac$. Таким образом, $A-B=99(ac-bd)$.

2. Из рисунка 12 видно, что закрашенная и незакрашенная части звезды равносоставлены.

3. Если в турнире играет k шахматистов и каждый встречается с каждым по разу, то всего в турнире играется $\frac{k(k-1)}{2}$ партий. Предположим, что в этом году в турнире играет x шахматистов, а в прошлом году их было y. Тогда по условию

$$\frac{3}{8}\,\frac{x(x-1)}{2}=\frac{y(y-1)}{2}.$$

Таким образом, $\frac{3}{16}x(x-1)$ — целое число, то есть или x, или $x-1$ делится на 16. Так как $2\leqslant x<30$, то x может равняться 16 или 17. Если $x=16$, то $\frac{3}{8}\,\frac{x(x-1)}{2}=\frac{3}{8}\cdot 120=45$ и уравнение $\frac{y(y-1)}{2}=45$ имеет решения $y=10$, $y=-9$, из которых второе нам не годится. Если $x=17$, то $\frac{3}{8}\,\frac{x(x-1)}{2}=\frac{3}{8}\cdot 136=51$ и уравнение $\frac{y(y-1)}{2}=51$ не имеет целых решений. Итак, $x=16$ и $y=10$, то есть в этом году в турнире играет 16 шахматистов (а в прошлом году играло 10).

Кстати, если бы первый гроссмейстер не обмолвился, что в турнире участвует меньше 30 человек, задача имела бы не одно решение. Например, нашему уравнению удовлетворяют числа $x=65$, $y=40$.

4. Да, существует. Одна из таких фигур изображена на рисунке 13.

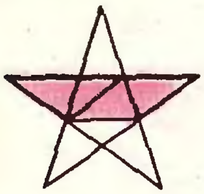


Рис. 12.

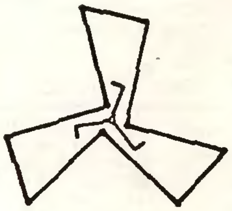


Рис. 13.

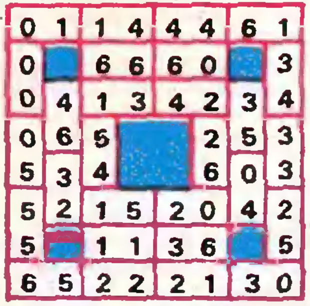
5. 2 — красный, 3 — желтый, 4 — синий, 5 — оранжевый, 6 — фиолетовый, 7 — зеленый.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. На всех двойных листах эта сумма одинакова.

2. Пусть это число $10x+y$; тогда $10x+y=2xy$, откуда $y=2k$, где $0<k<5$. Подставив $y=2k$ и сократив на 2, получим $5x+k=2xk$, или $5x=(2x-1)k$. Отсюда $2x-1$ делится на 5. Это может быть только при $x=3$ и $x=8$. В первом случае $k=3$ и число равно 36. Во втором случае получаем уравнение $40=15k$, которое противоречит тому, что k — натуральное число.



0	1	1	4	4	4	6	1
0	■	6	6	6	0	■	3
0	4	1	3	4	2	3	4
0	6	5	■	■	2	5	3
5	3	4	■	■	6	0	3
5	2	1	5	2	0	4	2
5	■	1	1	3	6	■	5
6	5	2	2	2	1	3	0

Рис. 14.

Можно показать, что 36 является единственным натуральным числом (а не только — единственным двузначным числом), вдвое большим произведения его цифр.

3. $2^7=128$, $19^2=361$, $289=17^2$, $87^2=7569$, $6084=78^2$.

4. Общее количество очков на всех костях комплекта домино равно 168, поэтому сумма очков в каждой строке и каждом столбце равна 21. Из первого столбца получаем $3y+z=21$, а из второй строки — $3z+v=21$. Из первого уравнения следует, что z делится на 3, а из второго, что v делится на 3. Значит, одно из этих чисел равно 3, а другое 6. Если $z=3$, а $v=6$, то $3z+v=15$, а не 21. Если же $z=6$, $v=3$, то второе уравнение удовлетворяется, а из первого уравнения получаем, что $y=5$. Из четвертой строки находим $u=2$, из пятой — $x=4$, из первой — $w=1$. Окончательное решение изображено на рисунке 14.

5. Ключом к решению этой задачи является тот факт, что видимые (угловые) размеры Солнца и Луны одинаковы, что особенно хорошо наблюдать во время солнечных затмений. Поэтому из подобия следует, что радиус Солнца в 387 раз больше радиуса Луны, а объем Солнца в 387^3 раз больше объема Луны.

Наша анкета

Дорогие читатели! Для улучшения работы журнала нам очень важно знать ваше мнение о публикуемых в «Кванте» материалах. Просим ответить на вопросы нашей анкеты.

1. Ваши фамилия, имя, отчество, возраст, место учебы (город, школа, класс) или работы (профессия, специальность), круг интересов (математика, физика).
2. С какого года вы читаете «Квант»? Ваше отношение к журналу в целом.
3. Сколько человек читают ваши номера «Кванта»?
4. Материалы каких рубрик журнала вас интересуют и доступны для вас? Какие не интересуют или не нравятся?
5. Назовите 2—3 лучшие статьи (за 1982—1983 годы) из разных рубрик журнала.
6. Справляетесь ли вы с задачами из Задачника «Кванта»?
7. Статьи на какие темы вы хотели бы видеть в «Кванте» в 1984 году?
8. Дополнительные замечания и пожелания.

Ответы высылайте на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 20 февраля 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, дом 32/1. «Квант», «Анкета».

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
С. А. Волохов, М. Б. Дубах, А. И. Климанов,
Н. С. Кузьмина, А. К. Малкин, Э. В. Назаров,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина
Фото С. И. Ермакова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.10.83. Подписано к печати 18.11.83
Печать офсетная
Бумага 70×108¹/₁₆. Усл. печ. л. 5,6. Усл. кр.-отт. 23,8
Уч.-изд. л. 7,16. Т-22214
Цена 40 коп. Заказ 2795. Тираж 166131 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

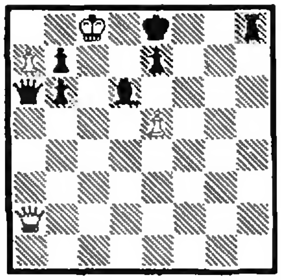
Шахматная страничка

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ГРОССМЕЙСТЕР ПО КОМПОЗИЦИИ

К началу этого года у нас в стране насчитывалось 60 действующих (то есть обладающих рейтингом) гроссмейстеров — 45 мужчин и 15 женщин. Иначе дело обстоит в области шахматной композиции. Если говорить об этюдном творчестве (более близком практической игре), то за всю историю этого жанра лишь четверо наших этюдистов получили высшее звание — международного гроссмейстера по шахматной композиции. Это В. Корольков, Г. Каспарян, В. Брон, Г. Надарейшвили.

Сегодняшняя страничка посвящена нашему старейшему этюдисту Владимиру Королькову. Он является автором самых разнообразных шахматных произведений, в том числе с применением ретроанализа. Как мы знаем, этот раздел композиции связан с решением логических, а иногда и математических проблем.

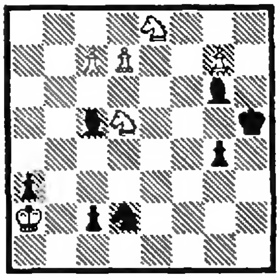


В. Корольков, 1947 г.
Ничья

Белая пешка прошла далеко, но этим обстоятельством надо умело воспользоваться. Не проходит, например, 1.Ф:а6 bа 2.а8Ф Крf7+ 3.Крb7 Л:а8, и черные побеждают. **1.а8Ф Ф:а8+ 2.Ф:а8 Крf7+ 3.Крd7 Л:а8 4.е6+ Крg7.** И неожиданно выясняется, что на доске пат. Решение получилось не очень сложным, но здесь есть один нюанс. Почему вместо 2...Крf7+ черные не рокировались? Ведь в этом случае после 4.е6 пешка продвигалась без шаха, и надежды спастись при помощи пата не оправдывались.

Однако возможна ли рокировка черных? Для ответа на этот вопрос надо провести ретроанализ позиции. Белый король мог попасть в лагерь черных только через поле d7, но тогда черный король должен был уступить ему дорогу. А раз черный король двигался, значит, рокировка невозможна.

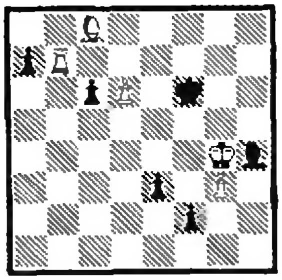
В. Корольков является также большим мастером изобразительных задач, в которых исходное расположение фигур или их перемещение в процессе решения изображает какую-нибудь геометрическую фигуру или букву, символизирует определенное событие или праздничную дату. Вот один из самых известных изобразительных этюдов автора, посвященный легендарной Первой конной армии, которой командовал Маршал Советского Союза С. М. Буденный. Этюд так и называется «Конница Буденного».



В. Корольков, 1937 г.
Выигрыш

Черные угрожают превратить свою пешку в коня и объявить мат — 1...с1К+ 2.Крa1 Кdb3×. Однако белая конница в этом сражении в конце концов выйдет победительницей.

1.Кf4+ Крh6 2.g8К+! Крh7 3.Кgf6+ Крh6 4.К:g4+ Крh7 5.Кef6+ Крg7 6.Ке6+ Крf7 7.d8К+! Кре7 8.с8К×! Все три пешки белых превратились в коней, и в результате мы имеем фантастический мат пятью конями, причем, как говорят композиторы, правильный мат — каждое поле вокруг черного короля контролируется ровно одной фигурой.

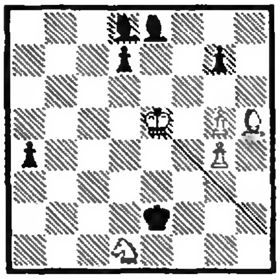


В. Корольков, 1935 г.
Выигрыш

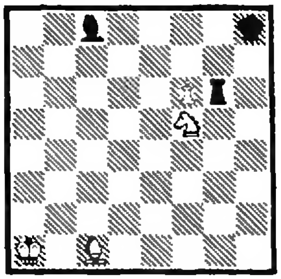
Этот этюд в свое время произвел сильное впечатление даже на корифеев шахматной композиции. Поражает, с какой легкостью автору удалось заставить ладью b7 сделать «ход слоном» — перебраться в угол доски, на поле а8, причем без всяких взятий! **1.d7 Кре7 2.Лb8! С:g3! 3.Ла8! f1Ф 4.d8Ф+ Кр:d8 5.Са6+ Сb8! 6.С:f1 Крс7 7.Са6 е2! 8.С:е2 Крb7 9.Сf3! Кр:а8 10.С:с6×.** Пикантный финал!

Еще два этюда Королькова предлагаются в качестве заключительных конкурсных заданий этого года. О трех других гроссмейстерах-этюдистах мы расскажем в будущем году.

Конкурсные задания



23. Ничья.

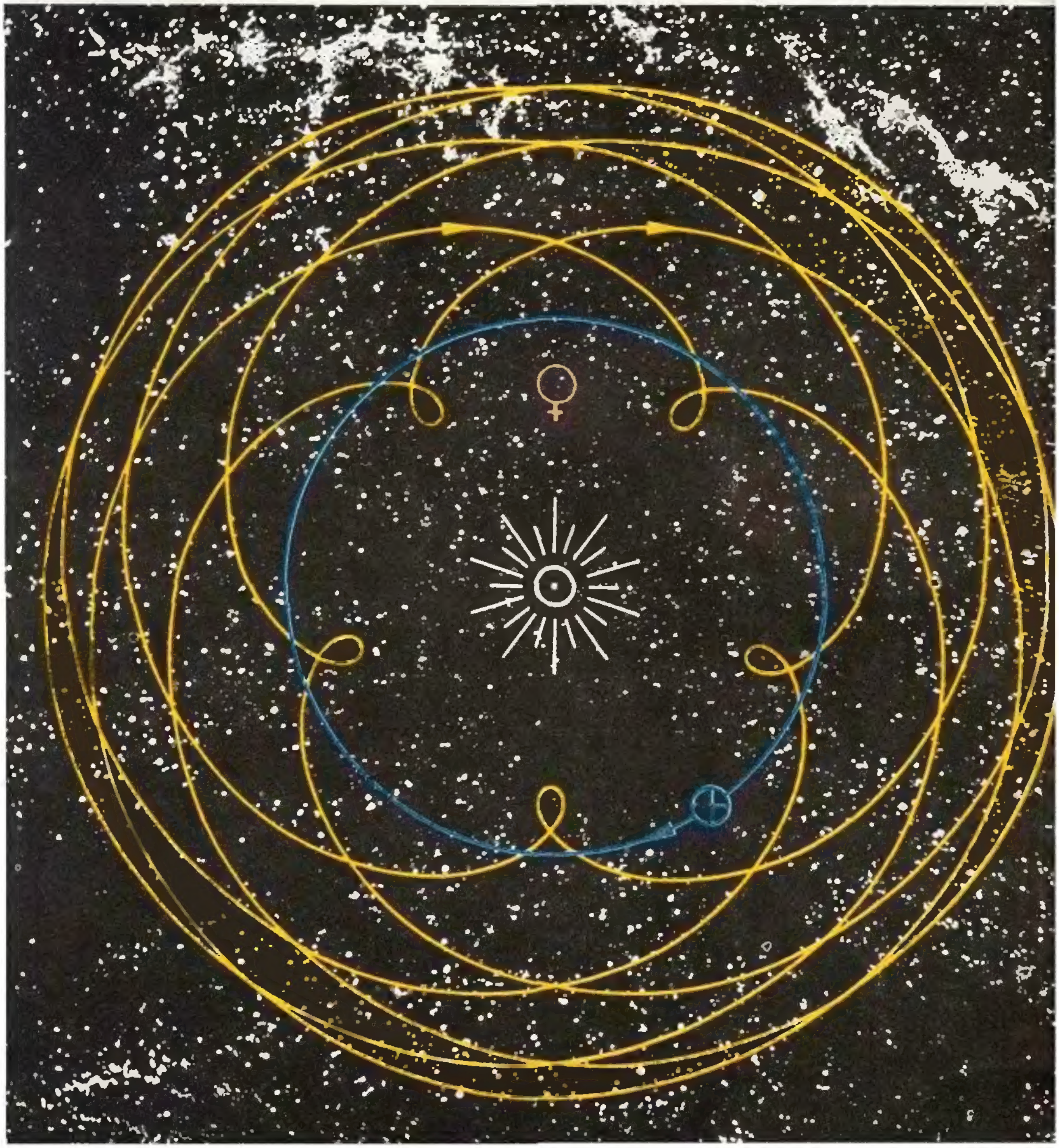
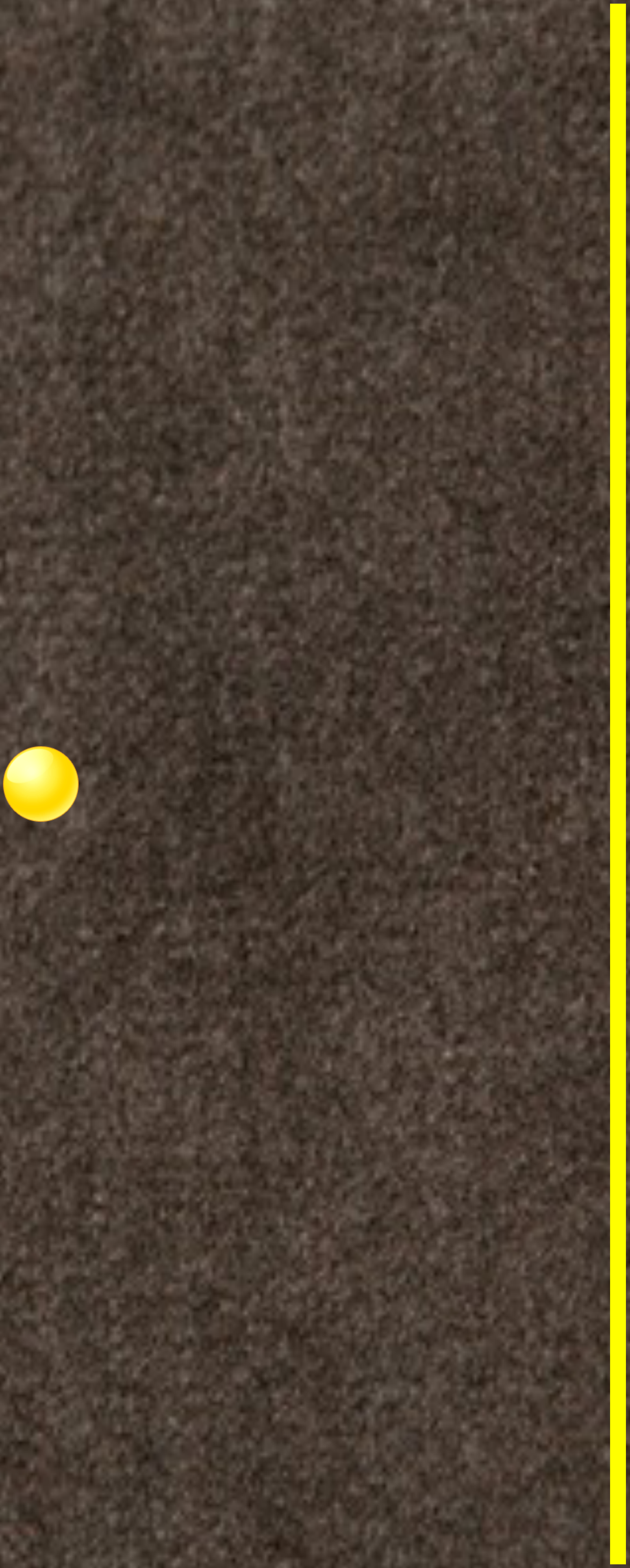


24. Выигрыш.

Срок отправки решений — 25 февраля 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24»). Список победителей конкурса будет опубликован в «Кванте», 1984, № 5.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Так выглядит траектория астероида Торо в системе координат, вращающейся вокруг Солнца вместе с Венерой. Венера совершает 13 оборотов вокруг Солнца за 8 лет. В этой системе координат за 8 лет звездное небо сделает 13 оборотов, а Торо сделает полный оборот по пятилепестковой розетке. Астероиду Торо посвящена заметка в этом номере журнала.